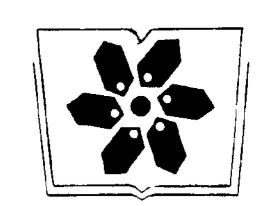
数学百科全书

第二卷

D—H

科学出版社





中国科学院科学出版基金资助出版　国家自然科学基金委员会资助出版

數學百科全書

蘇步青題



《数学百科全书》

（第二卷）

编译委员会

数学百科全书

第二卷

D — H

科学出版社

2002

内 容 简 介

本书由三类条目组成．首先是介绍数学的各个主要方向的综述性条目(采用了一种很好的分科办法)，对这类条目的基本要求是尽可能通俗全面地阐明有关领域发展的现状；这些条目一般可供大学数学系学生和数学邻近领域的研究生阅读，根据专业需要，还可供在工作中用到数学方法的其他科学领域的专家、工程师和数学教师阅读．其次，是一些中等篇幅的条目，专门介绍某些具体的数学问题和方法，这类条目内容较深，是为水平较高的读者而写的．最后，还有一类简短的条目，可供查阅定义时参考．本书附有主题索引，其中不仅包括所有条目的标题，还包括在前两类条目中给出定义的许多概念，以及在条目中提到的一些最重要的结果．多数条目附有参考文献．这部大型数学工具书的功能是很齐全的，读者范围是十分广泛的．

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
И. М. ВИНОГРАДОВ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «СОВЕТСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ»

责任编辑　杜小杨　夏墨英　张鸿林
特邀编辑　卢景波　朱学贤　尤永欢
　　　　　郑洪深　葛显良　戴中器

数学百科全书

第二卷

《数学百科全书》编译委员会 编译
科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码 100717
中国科学院印刷厂印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
1995年10月第 一 版　开本 787×1092 1/16
2002年 8 月第二次印刷　印张 60 3/4
印数 3 101—5 100　字数 2 214 000

ISBN 7-03-004127-5/Z·231

定价：128.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换〈科印〉）

序

在人类的思想史上，数学有一个基本和独特的地位。几千年来，从巴比伦的代数、希腊的几何、中国、印度、阿拉伯的数学，直到近代数学的伟大发展，虽然历史有时中断，但对象和方法则是一致的。数学的对象不外“数”与“形”，虽然近代的观念，已与原始的意义，相差甚远。数学的主要方法，是逻辑的推理。因之建立了一个坚固的思想结构。这些结果会对其他学科有用，是可以预料的。但应用远超过了想象。数学固然成了基本教育的一部分。其他科学也需要数学作理想的模型，从而发现相应科学的基本规律。

在这样蓬勃的发展中，数学的任务是艰巨的：它既需充实已有的基础，还需应付外来的冲击。一部完整的数学百科全书，便有迫切的需要。但兹事体大，许多合格的数学家，都望而却步。

我们有幸有这一套苏联的《数学百科全书》。它对数学的贡献，将无法估计。我们要了解，数学是一种“活”的学问：它的内容，不断在变化，在进展。我们现在大学研究院数学活动的内容，大部分在五十年前是不存在的，其他一部分则是昔贤伟大思想的精华，将历久而弥新。我建议《百科全书》每两年出一附录，包括新项目和旧项目的重写。如有佳构，不必拘泥编辑的方针。《百科全书》每隔若干年宜有新版。

面对着这座巨大的建筑，令人惶惑。百科全书原不为有涯之身所能控制的。数学工作者的使命在对某些选定的项目、增加了解和探索。本书将便利他们思考范围的推广。

我相信数学将有一个黄金时代，其中将有多数的中国数学家参加。希望本书能起相当的作用。

陳省身

出 版 说 明

数学的重要性是尽人皆知的。一个人从进小学开始到大学毕业为止，不论哪个专业，学习数学的时间至少都有12年至14年之久。一些自然科学领域，如天文学、力学、物理学、化学等，以及各工程技术学科，历来都是以数学为基础的。随着电子计算机的迅速发展和普及，生命科学、地学、军事科学和管理科学等方面也愈来愈多地用到数学，使这些学科从定性研究向定量研究发展。

由于数学所用的方法是逻辑推导，它有严格的定义和特定的符号，它的研究对象是抽象的数量关系和空间形式，没有相当的训练和基础知识的人是难于入门的，所以数学又使人望而生畏。另一方面，数学发展很快，文献数量呈指数增加，浩如烟海。一个人很难了解数学的许多方面，这就加重了数学发展和应用的困难。

苏联大百科全书出版社从1977年到1986年，历时10年，出版了苏联科学院院士、世界著名数学家ИМ 维诺格拉多夫（Виноградов）主编、几百位数学家共同撰写的一部《数学百科全书》（Математическая энциклопедия），约900万字。它的重要性是极为显著的。不久，荷兰的莱德尔出版公司出版了由180位西方数学家参加翻译的英文版（Encyclopaedia of mathematics）。英文版增补了大量最新成果、重要的西方文献和编者注，因而其内容更加充实和完善。

苏联《数学百科全书》出版后，我国很多著名数学家和数学教师纷纷要求将这部书译成中文出版，使我国广大科学工作者（特别是数学工作者）、工程技术人员、教师和学生有一部内容极其丰富的工具书，可以从中查阅所需要的数学知识及作进一步了解的线索。这无疑是一件十分重要的事情。

中国数学会常务理事会经过认真讨论，完全支持我国广大数学家和科技人员的要求，决定领导这部《数学百科全书》的编译工作，并将它列为

中国数学会最重要的工作之一；随后，立即成立了编译委员会，负责具体的组织工作。由于我国广大数学家的热情支持和参加，所以编译工作进展比较顺利。必须指出，科学出版社始终将这项工作作为该社的一项重点任务来抓，编辑人员为此付出了长期的艰苦劳动。

本书中文版分五卷，包括了俄文版的全部内容和英文版增补的内容。为尽快出版，条目按英文字母顺序排列。在第五卷中，附有详尽的中文和外文索引。

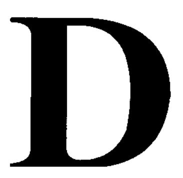
本书除中文简体字版本以外，还有繁体字版，繁体字版由台湾九章出版社出版发行。这也是海峡两岸数学家和出版界人士的一次良好合作。

老一辈数学家苏步青教授为本书题写书名，陈省身教授作序，苏步青、陈省身、吴文俊、程民德教授应邀担任编译委员会顾问。对于他们的支持，谨致以衷心的感谢!

最后，对于书中欠妥和错误之处，还望读者不吝指教。

《数学百科全书》编译委员会

本书的排版得到科学出版社技术室的大力协助，并由河北省雄县电脑服务部负责植字。谨此致谢!



δ-σ 运算 [δ-σ-**operation**, δ-σ-**операция**]

一个集合论运算，其作用于集合序列 (E_n) 的结果可记为

$$\Phi(E_n)=\bigcup_{z\in N}\bigcap_{n\in z}E_n,$$

其中 N 是正整数集的系统，称为 δ-σ 运算的基 (base of the δ-σ-operation)．见**描述集合论** (descriptive set theory)．

参考文献

[1] Колмогоров, А Н,《Матем сб》, **35** (1928), 3–4, 415–422

[2] Хаусдорф, Ф, Теория множеств, М - Л, 1937 (译自德文)

[3] Александров, П С, Теория функций действительного переменного и теория топологических пространств, М, 1978, 35–40, 53–58

[4] Очан, Ю С,《Успехи матем наук》, **10** (1955), 3, 71–128

[5] Колмогоров, А Н,《Успехи матем наук》, **21** (1966), 4, 275–278

А Г Елькин 撰 张锦文、赵希顺 译

D 模 [**D-module**, **D-модуль**]

【补注】 D 模理论是**线性偏微分方程** (linear partial differential equation) 理论的代数化形式 它涉及微分算子环上的**模** (module)，是由 I. N Bernstein, J. E Bjork, 柏原正樹，河合隆裕，B Malgrange, Z. Mebkhout 和其他人发展的 不久前 D 模理论在数学的很多方面得到了应用，例如奇异空间的**上同调** (cohomology)，相交上同调上的 **Hodge 结构** (Hodge structure)，奇点理论 (见**可微映射的奇异性** (singularities of differentiable mappings))，**Gauss-Манин 联络** (Gauss-Manin connection)，**表示论** (representation theory)，和 Kazhdan-Lusztig 猜想 (Kazhdan-Lusztig conjectures) 关于 D 模理论的两篇综述论文是 [A10] 和 [A14]．在基础流形是代数的情况下有十分漂亮的 D 模理论 (见 [A4])．解析理论的启发性陈述可在 [A15] 中找到 (亦见 [A2], [A3]) 有力的技巧是微局部工作与引进微微分算子 (见 [A7], [A9], [A18])．然而关于 D 模的微局部结果下文将不陈述

以后，以 X 表示 **C** 上的一个复解析流形 (见**复流形** (complex manifold)) 或一个光滑**代数簇** (algebraic variety) X 的结构层用 $\mathscr{O}_X$ 表示 X 上的微分算子层 D_X 是由 $\mathscr{O}_X$ 和 $\mathbf{C}$ 线性导子层 $\mathrm{Der}_{\mathbf{C}}(\mathscr{O}_X)$ 生成的 $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\mathscr{O}_X)$ 的子层 因此在一个以 $x_1,\cdots,x_n$ 为坐标的卡 $U\subset X$ 上，一个元素 $P\in\Gamma(U,D_X)$ 能表达为一个有限和 $P=\sum a_{i_1\cdots i_n}\partial_1^{i_1}\cdots\partial_n^{i_n}$，这里 $a_{i_1\cdots i_n}\in\Gamma(U,\mathscr{O}_X)$ 和 $\partial_i=\partial/\partial x_i$ 特别在代数的情况下，将略为更一般些，若 $X=\mathrm{Spec}\,k[x_1,\cdots,x_n]$，这里 k 是一个特征为零的域，则 $\Gamma(X,D_X)=k[x_1,\cdots,x_n][\partial_1,\cdots,\partial_n]=A_n(k)$ 是 k 上的第 n 个 **Weyl 代数** (Weyl algebra) 层 D_X 是非交换左和右 Noether 环上的**凝聚层** (coherent sheaf) (见 [A3]) 结构层 $\mathscr{O}_X$ 自然地成为一个凝聚左 D_X 模．更一般地，设 $\mathscr{V}$ 是 X 上的一个有可积**联络** (connection) ∇ 的**向量丛** (vector bundle) $\mathscr{V}$ 上的 $\mathscr{O}_X$ 结构扩充为一个左 D_X 模结构是通过对所有局部截面 $\xi\in\mathrm{Der}_{\mathbf{C}}(\mathscr{O}_X)$ 与 $v\in\mathscr{V}$ 命 $\xi\cdot v=\langle\nabla_\xi,v\rangle$ 反之，其基础 $\mathscr{O}_X$ 模为凝聚的每个左 D_X 模都具有这个形式．

通常人们只考虑左 $\mathscr{O}_X$ 模 这是无妨的，因为人们可以自由地交换左和右 D_X 模．即 X 上的最高阶微分形式的 $\mathscr{O}_X$ 模 Ω_X^n ($n=\dim X$) 带有一个凝聚右 D_X 模的

自然结构 对所有$\omega\in\Omega_X^n$，$\xi\in \mathrm{Der}_{\mathbf{C}}(\mathcal{O}_X)$，置$\omega\cdot\xi=-L_\xi\omega$，此处$L_\xi$表示关于$\xi$的**Lie导数**(Lie derivative) 对任一左D_X模M，$\Omega_X^n\otimes_{\mathcal{O}_X}M$有一个右$D_X$结构，而对任一右$D_X$模$N$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^n, N)$有一个左$D_X$结构.

设(P_{ij})是系数$P_{ij}\in\Gamma(X, D_X)$的一个$(p\times q)$矩阵，且考虑左D_X线性映射P $D_X^p\rightarrow D_X^q$，它由矩阵(P_{ij})从右面作用在D_X^p上来定义，则$M=\mathrm{Coker}(P)$是一个凝聚左D_X模．显然地，$\mathrm{Hom}_{D_X}(M,\mathcal{O}_X)=\{f\in\mathcal{O}_X^q$ $\sum_{j=1}^q P_{ij}f_j=0\}$ 因此，线性系统$(P_{ij})u=0$的全纯解能被解释为$\mathbf{C}$向量空间$\mathrm{Hom}_{D_X}(M,\mathcal{O}_X)$的一些元素，反之亦然 这引导人们对任一左$D_X$模$M$去考虑导出解复形$\mathrm{R\,Hom}_{D_X}(M,\mathcal{O}_X)$ 将$\mathrm{Der}_{\mathbf{C}}(\mathcal{O}_X)$等同于$D_X$的一个子层使得人们能构造复形$\Omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}M$ 将它表示为$\mathrm{DR}(M)$并称为M的de Rham复形(de Rham complex)

***D*模上的运算** 为了合适地描述D模理论，导出范畴和导出函子的工具是必不可少的 以$\mathrm{Mod}(D_X)$(分别地，$\mathrm{Coh}(D_X)$)表示左(分别地，凝聚)D_X模的范畴．以$\mathrm{D^b}(D_X)$表示左D_X模的有界复形的**导出范畴**(derived category) 设f $X\rightarrow Y$是两个复解析(或光滑代数)流形之间的一个全纯映射．设N是一个左D_Y模．$\mathcal{O}_X$模$f^*N=\mathcal{O}_X\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y}f^{-1}N$带有一个自然的左$D_X$结构 置$D_{X\rightarrow Y}=f^*D_Y$ 这是一个左D_X,右$f^{-1}D_Y$双模 逆象函子Lf^*则由

$$Lf^*N=D_{X\rightarrow Y}\overset{L}{\underset{f^{-1}D_Y}{\otimes}}f^{-1}N$$

对所有$N\in\mathrm{D^b}(D_Y)$给出.

用左右原理产生一个左$f^{-1}D_Y$，右D_X双模$D_{Y\leftarrow X}$ 这时直接象函子f_+对所有$M\in\mathrm{D^b}(D_X)$定义为

$$f_+M=\mathrm{R}f_*[D_{Y\leftarrow X}\overset{L}{\underset{D_X}{\otimes}}M]$$

经常用$\int_f M$来表示直接象．在代数范畴中，有如下结果 若g $Y\rightarrow Z$是另一个态射，则$(gf)_+=g_+f_+$ 在解析范畴中，当f是真映射时，这个结果同样成立.

在$\iota.X\rightarrow Y$是一个闭嵌入的情况下，直接象ι_+是一个从$\mathrm{Mod}(D_X)$到$\mathrm{Mod}(D_Y)$的**正合函子**(exact functor)，它保持凝聚性．事实上有如下结果(柏原等价(Kashiwara equivalence)) ι_+建立了$\mathrm{Coh}(D_X)$与支集包含在X内的凝聚D_Y模范畴之间的一个等价 在**浸没**(submersion)π $X\rightarrow Y$和D_X模$M\in\mathrm{Mod}(D_X)$的情况下，相对微分形式的复形$\Omega_{X/Y}$引出相对de Rham复形(relative de Rham complex) $\mathrm{DR}_{X/Y}(M)$ 故直接象是$\pi_+M=\mathrm{R}\pi_*(\mathrm{DR}_{X/Y}(M))[d]$，此处$d=\dim X-\dim Y$

设$Z\subset X$是由理想$I\subset\mathcal{O}_X$定义的闭子簇 对任一左D_X模M，定义$\Gamma_{[Z]}M=\lim_{\rightarrow}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I^k, M)$ 它是一个由被I的某个幂次零化的截面组成的M的D_X子模．这类似于通常的"具有支集的截面"函子 它的第i次导出函子(derived functor)常常表示为$\mathscr{H}^i_{[Z]}$ 当然在代数范畴中$\Gamma_{[Z]}=\Gamma_Z$

完整*D*模(holonomic D-module) 层D_X为微分算子的阶所滤过 相伴的分次$\mathrm{gr}\,D_X$可以等同于T^*X上的在纤维上是多项式的全纯函数层 由于一个凝聚D_X模M具有局部有限表示，它局部带有一个所谓好的滤过，见**滤过模**(filtered module) 这至少局部地给出一个$\mathrm{gr}\,D_X$内的凝聚理想，即$\mathrm{gr}M$的零化子 已证明其根基(radical)不依赖于滤过，所以合在一起得到一个在$\mathcal{O}_{T^*X}$中的根基齐次理想 它的轨迹定义了一个T^*M的闭圆锥子簇$\mathrm{SS}(M)$，称为M的奇异支集(singular support)或特征簇(charactristic variety)．与其紧密相关的是特征闭链(charactristic cycle) $\mathrm{char}(M)$ 它是$\mathrm{SS}(M)$的计及重数的不可约分量的形式线性组合

余切丛T^*X具有**辛流形**(symplectic manifold)结构．下面的基本结果是由柏原正樹、河合隆裕和佐藤幹夫1971年在Katata会议上用微局部分析证明的 一个凝聚D_X模$M\neq 0$的特征簇$\mathrm{SS}(M)$是对合的 一个代数的证明是由O Gabber([A5])给出的．有人也用"上迷向"(co-isotropic)来替代对合 回忆T^*X的一个对合子簇V有$\dim V\geqslant\dim X$ 若等式成立，则V是一个**Lagrange流形**(Lagrangian manifold) 现在一个非零D_X模称为完整的(holonomic)，若它是凝聚的和它的特征簇是Lagrange的．零模也定义为完整的 例如，任一个有可积联络的向量丛$\mathscr{V}$是完整的，因为它的特征簇是T^*X的零截面．进而，它的de Rham复形$\mathrm{DR}(\mathscr{V})=\mathrm{Ker}(\nabla,\mathscr{V})$是$X$上的一个局部系统

一个完整D_X模M的特征簇形式为$\mathrm{SS}(M)=\bigcup_\alpha\overline{T^*_{S_\alpha}X}$，这里$S_\alpha=\pi(V_\alpha)_{\mathrm{reg}}$，$V_\alpha$是$\mathrm{SS}(M)$的不可约分量，而$\pi$ $T^*X\rightarrow X$表示投影 完整模的一个重要性质是下面柏原正樹的结果(例如，见[A7])，它说 完整D_X模M的de Rham复形$\mathrm{DR}(M)$是可构造的．回忆一个X上的向量空间的层称为可构造的(constructible)，若存在一个**分层化**(stratification)$X=\bigcup_\alpha S_\alpha$使得$F$在每个层$S_\alpha$上的限制是一个局部系统．用$\mathrm{D^b_c}(X)$表示具有可构造上同调的$\mathbf{C}$向量空间的层有界复形的导出范畴．一个完整$D_X$模$M$的解复形也是可构造的，因为它同构于$\mathrm{DR}(M)$的Verdier对偶(见**导出范畴**(derived category))(见[A12])

Bernstein-佐藤多项式(Bernstein-Sato polynomial) 一个凝聚D_Y模N的逆象不一定是一个凝聚D_X模．然而，如假定N是完整的，则f^*N也是完整的，并且特别是凝聚的 再者，对每个闭子簇$Z\subset X$和每个完整D_X模M，对所有j局部上同调$H^j_{[Z]}M$是完

整的．与此紧密相关的是下面的陈述，它成为 D 模理论的奠基石之一．设 $f\in\mathcal{O}_X$，则存在一个非零多项式 $b(s)$ 和 $P(s)\in D_X[s]$，使得 $P(s)f^{s+1}=b(s)f^s$

次数最低的满足上面等式的首一多项式称为 Bernstein - 佐藤多项式 (Sato polynomial) 或 f 的 b 函数 (b - function) $b_f(s)$ 在代数情况下这个结果为 Bernstein 证明，在解析情况下为 Bjork 所证明 柏原正樹证明 b 函数的所有根都是有理数．若 f $(\mathbf{C}^{n+1},0)\to(\mathbf{C},0)$ 是全纯函数的一个芽，Malgrange 证明集合 $\{\exp(2\pi i\alpha)$ α 是 $b_f(s)$ 的一个根$\}$包含所有维的单值化的所有本征值 这方面亦有 D Barlet 的工作，例如在 [A1] 中，他证明 b 函数的根产生 $|f|^{2\lambda}$ 的亚纯延拓的极点 更精确地讲，若 α 是 $b_f(s)$ 的一个根，则存在一个整数 N 使得 $\alpha-N-v$ 是 $|f|^{2\lambda}$ 的一个极点，对每一个非负整数 v 最后，b 函数与 P. Deligne 的**消没闭链** (vanishing cycle) 函子有关 对此例如见 [A11]

正则完整 D 模 (regular holonomic D module) 正则奇异性的概念在一维时是经典的 (见**正则奇点** (regular singular point)) 回忆定义在 $\mathbf{C}$ 内 0 的一个邻域内的一个**微分算子** (differential operator) $P=a_0\partial^m+\cdots+a_m$ $(a_0\neq 0)$ 称为在 0 有正则奇异性 (regular singularity)，如果微分方程 $Pu=0$ 的多值解有一个适度的增长性．由 Fuchs 的经典定理，它等价于 $\operatorname{ord}(a_i/a_0)\geqslant -i$，对所有 i Malgrange 给出的一个等价公式是 $\chi(P,\mathcal{O})=\chi(P,\hat{\mathcal{O}})$，这里 $\hat{\mathcal{O}}$ 是 $\mathcal{O}=\mathbf{C}\{z\}$ 的形式完全化 指数 χ 定义为 $\chi(A,\mathcal{F})=\sum(-1)^i\dim_{\mathbf{C}}\operatorname{Ext}^i_D(A,\mathcal{F})$ 例如见 [A4] 第 3，4 章 正则性概念由 Deligne 推广到高维 到 D 模的推广是由柏原正樹，Mebkhout，Oshima 和 J P Ramis 给出的．在文献中有各种等价的正则性定义，下面是本文给出的 一个完整 D_X 模 M 称为有正则奇异性 (regular singularities)，若 $\chi(M_x,\mathcal{O}_{X,x})=\chi(M_x,\hat{\mathcal{O}}_{X,x})$，对所有 $x\in X$

注意在代数范畴中要求“在无穷远点”都是正则的 (关于 Bernstein 给的定义见 [A4] 第 7 章)．设 X 是一个光滑代数簇，且设 j $X\to\bar{X}$ 是一个光滑完全化．设 M 是一个完整 D_X 模，则 M 是正则的，当且仅当 j_*M 是正则的．由 GAGA，这相当于 $(j_*M)^{an}$ 在基础复解析流形 $(\bar{X})^{an}$ 上的正则性 在代数情况下正则性对于直接象与逆象是保持的．在解析情况下，直接象函子在真映射下保持正则完整性 (见 [A9]) 对非真映射情况的一个结果见 [A6] 逆象函子是保持正则性的．对任一闭子空间 $Z\subset X$ 和任一正则完整 D_X 模 M，$H^j_{[Z]}(M)$ 有正则奇性，对所有 j

Riemann - Hilbert 对应 (Riemann - Hilbert correspondence) 它断言 de Rham 函子 DR 建立了 $\mathrm{D}^b_{rh}(D_X)$ 和 $\mathrm{D}^b_c(X)$ 两个范畴之间的一个等价关系，这里 $\mathrm{D}^b_{rh}(D_X)$ 表示具有正则完整上同调的 D_X 模的有界复形的导出范畴 这个结果是由柏原正樹，河合隆裕 (见 [A8]，[A9]) 和 Mebkhout ([A13]) 独立给出的．不言而喻，此处假定 X 是解析的．在代数情况下，$\mathrm{D}^b_c(X)$ 必须由 $\mathrm{D}^b_c(X^{an})$ 代替 (见 [A4]) 这个对应是 D 模理论中最精采的部分之一．它在解析对象 (正则完整 D 模) 和几何对象 (可构造层) 两者之间建立了一座桥

反常层 (perverse sheaf)．一个可构造层 $F\in\mathrm{D}^b_c(X)$ 称为一个反常层，如果 1) $H^i(F)=0$，当 $i<0$ 和 $\operatorname{codim}\operatorname{supp}(H^i(F))\geqslant i$ 时，2) Verdier 对偶 $(F)^*$ 也满足 1) 这时 Riemann-Hilbert 对应诱导了正则完整 D_X 模范畴和 X 上的反常层范畴之间的一个等价关系．反常层的一个例子是相交上同调复形 IC_Y，这里 $Y\subset X$ 是一个闭解析空间 在 Y 是投影的情况，已猜测相交上同调群 $IH(Y)$ 带有一个纯 Hodge 结构．应用 D 模框架，这为斋藤正彦所确认 (见 [A16]，[A17]) 他也对 Beilinson，Bernstein，Deligne 和 Gabber 的分解定理 (decomposition theorem) 给出一个解析证明．

参考文献

[A1] Barlet，D，Monodromie et pôles du prolongement méromorphe de $\int_X|f|^{2\lambda}\square$，*Bull Soc，Math France*，**114** (1986)，247 − 269

[A2] Bjork，J - E，Analytic *D*-module，Acad Press，to appear

[A3] Bjork，J - E，Rings of differential operators，North-Holland，1979

[A4] Borel，A，et al，Algebraic *D*-Modules，Acad Press，1987

[A5] Gabber，O，The integrability of the characteristic variety，*Amer J Math*，**103** (1981)，445 − 468

[A6] Houzel，C and Schapira，P，Images directes de modules différentiels，*C R Acad Paris Sér 1 Math*，**298** (1984)，461 − 464

[A7] Kashiwara，M，Systems of microdifferential equations，Birkhauser，1983

[A8] Kashiwara，M，The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems，*Publ Res．Inst Math Sci*，**20** (1984)，319 − 365

[A9] Kashiwara，M and Kawai，T，On the holonomic systems of micro-differential equations Ⅲ，*Publ Res Inst Math Sci*，**17** (1981)，813 − 979

[A10] Lê，D T and Mebkhout，Z，Introduction to linear differential systems，in P Orlik (ed) Singularities，Proc Symp Pure Math，Vol 40，2，Amer Math Soc，1983，31 − 63

[A11] Malgrange，B，Polynômes de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente，*Astérisque Analyse et topologie sur les espaces singuliers* (Ⅱ - Ⅲ)，**101-102** (1983)，243 − 267

[A12] Mebkhout，Z，Théorèmes de bidualité locale pour

les D_X-modules holonomes, *Ark Mat*, **20** (1982), 111 - 124
[A13] Mebkhout, Z, Une autre équivalence de catégories, *Compos Math*, **51** (1984), 63 - 88
[A14] Oda, T, Introduction to algebraic analysis on complex manifolds, in S Iitaka (ed) Algebraic varieties and analytic varieties, North-Holland, 1983, 29 - 48
[A15] Pham, F, Singularités des systèms différentiels de Gauss-Manin, Birkhauser, 1979
[A16] Saito, M, Hodge structure via filtered D-modules, *Astérisque Systèmes différentiels et singularités*, **130** (1985), 342 - 351
[A17] Saito, M, Modules de Hodge polarisables, *Preprint RIMS*, **553** (1986)
[A18] Schapira, P, Microdifferential systems in the complex domain, Springer, 1985

M G M van Doorn 撰 陈志华 译

d'Alembert 准则（关于级数收敛性的）[d'Alembert criterion (convergence of series), д'Аламбера признак]

对于数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

如果存在数 q, $0<q<1$，使得从某一项起，不等式

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}<q$$

均成立，则这个级数绝对收敛，如果从某一项起，均有

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\geqslant 1,$$

则这个级数发散．特别是，如果极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}<1$$

存在，则这个级数绝对发散，而如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}>1,$$

则这个级数发散．例如，对于一切复数 z，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

绝对收敛，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{z^n}{n!}\right|}=0,$$

而对于一切 $z\neq 0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n!z^n$ 发散，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|(n+1)!z^{n+1}|}{|n!z^n|}=+\infty$$

如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=1,$$

则级数可能收敛也可能发散，两个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ 和\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

都满足这个条件，但第一个级数是收敛的，而第二个级数是发散的．

这个准则是 J d'Alembert 确立的 (1768).

Л Д Кудрявцев 撰

【补注】 这个准则也称为比值检验法 (ratio test)，见[A1]

参考文献

[A1] Rudin, W, Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1953 (中译本 W 卢丁，数学分析原理，高等教育出版社，1979)

张鸿林 译

d'Alembert 方程 [d'Alembert equation, д'Аламбера уравнение]

形如

$$y=x\varphi(y')+f(y')$$

的微分方程，其中 φ 和 f 是可微函数，J. d'Alembert 于1748年首先进行研究．亦称 Lagrange 方程 (Lagrange equation).

БСЭ-2

【补注】 对于 $\varphi(y')=y'$，d'Alembert 方程简化为 **Clairaut 方程** (Clairaut equation) 关于（解）d'Alembert 方程的某些结果，例如见[A1]

参考文献

[A1] Ince, E L, Integration of ordinary differential equations, Oliver & Boyd, 1963, p 43ff

张鸿林 译

d'Alembert-Euler 条件 [d'Alembert-Euler conditions, д'Аламбера-Эйлера условия]

见 **Cauchy-Riemann 条件** (Cauchy-Riemann conditions)

d'Alembert 公式 [d'Alembert formula; д'Аламбера формула]

表示只含一个空间变量的波动方程的 Cauchy 问题之解的公式 设给定的函数 φ, ψ 分别属于空间 $C^2(-\infty,+\infty)$ 和 $C^1(-\infty,+\infty)$，而函数 $f(t,x)$ 及其对 x 的一阶偏导数在半平面 $\{t\geqslant 0, -\infty<x<+\infty\}$ 上是连续的．这时，**Cauchy 问题** (Cauchy problem)

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}=f(t,x), \qquad (1)$$

$$u(t,x)|_{t=0}=\varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x) \qquad (2)$$

在 $\{t>0, -\infty<x<+\infty\}$ 中的经典解 $u(t,x)$ 可以由 d' Alembert 公式

$$u(t,x)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]$$

来表示，如果函数 φ 和 ψ 是已知的，且在区间 $\{|x-x_0|<aT\}$ 上满足上述光滑性条件，而函数 $f(t,x)$ 在三角形

$$Q_{x_0}^T=\{|x-x_0|<a(T-t), t\geqslant 0\}$$

中满足上述条件，则 d' Alembert 公式给出 Cauchy 问题 (1)，(2) 在 $Q_{x_0}^T$ 中的唯一解，如果关心的是某种广义解，则对已知函数的这些要求可以减弱．例如，由 d' Alembert 公式可知，如果 f 关于任何三角形 $Q_{x_0}^T$ 都是可积的，ψ 是局部可积的，φ 是连续的，则 Cauchy 问题 (1)，(2) 的弱解可以定义为具有光滑已知数据的经典解（在任何 $Q_{x_0}^T$ 中）的一致极限，而且也可由 d' Alembert 公式来表示．

这个公式因 J. d' Alembert 而得名（1747）

参考文献

[1] Владимиров, В С, Уравнения математической физики, 2 изд, М, 1971 (英译本 Vladimirov, V S, Equations of mathematical physics, Mir, 1984)

[2] Тихонов, А Н, Самарский, А А, Уравнения математической физики, 3 изд, М, 1966 (中译本 А Н 吉洪诺夫、А А 萨马尔斯基，数学物理方程，高等教育出版社，1956－1957)

А К Гущин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Courant, R and Hilbert, D, Methods of mathematical physics, Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (中译本 R 柯朗、D 希尔伯特，数学物理方法，Ⅱ，科学出版社，1977)

张鸿林 译

d'Alembert-Lagrange 原理 [d'Alembert-Lagrange principle, д'Аламбера-Лагранжа принцип]

一种基本的、最通用的微分经典力学的变分原理 (variational principle of classical mechanics)，它表达了受理想约束的质点系统的真实运动与给定的主动力相对应的充分必要条件．在 d' Alembert-Lagrange 原理中，系统在其真实运动中的位置是与该时刻约束允许的无限接近的位置相比较的

根据 d' Alembert-Lagrange 原理，在系统真实运动过程中，由给定的主动力和惯性力在所有可能位移上所作的元功之和，在任何时刻都等于或小于零，

$$\sum_{v}(F_v-m_v w_v)\delta r_v\leqslant 0 \qquad (*)$$

对可逆的可能位移，等号成立，而对不可逆的可能位移 δr_v，符号 $\leqslant$ 成立，F_v 为给定的主动力，m_v 和 w_v 分别为质点的质量和加速度　方程 (*) 是具有理想约束的系统的普遍动力学方程，它包括了所有的运动方程和定律，因此可以认为，全部动力学可归结为一个普遍公式 (*)

该原理是由 J L Lagrange ([1]) 借助 **d'Alembert 原理** (d'Alembert principle)，将**虚位移原理** (virtual displacements, principle of) 推广而建立的．对具有双边约束的系统，Lagrange 本人在公式 (*) 的基础上推出了多个物体运动的普遍性质和定律以及运动方程，并用于求解一系列动力学问题，包括不可压、可压和弹性液体的运动问题，从而将"动力学和流体力学统一成同一原理的分支和由同一普遍公式得出的结论"

参考文献

[1] Lagrange, J, Mécanique analytique, Paris, 1788

В В Румянцев 撰

【补注】 d' Alembert-Lagrange 原理非常接近于变分原理 (variational principle)，后者认为受（完整的）约束的力学系统的演变路径构成一条作用积分的极值曲线，见 [A2]，§21

参考文献

[A1] Goldstein, H, Classical mechanics, Addison-Wesley, 1962

[A2] Arnol'd, V I, Méthodes mathématiques de la mecanique classique, MIR, 1976 (译自俄文)．

唐福林 译

d'Alembert 算子 [d'Alembert operator 或 d' Alembertian; д'Аламбера оператор 或 д'Аламбертиан]，波动算子 (wave operator)

二阶微分算子，在 Descartes 坐标中具有下列形式

$$\Box u\equiv \Delta u-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

其中 Δ 是 Laplace 算子，c 是常数．在球面坐标中，它的形式是

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right]+$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

在柱面坐标中，它的形式是

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right]+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

在一般曲线坐标中，它的形式是

$$\Box u = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left[\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\frac{\partial u}{\partial x^{\mu}}\right],$$

其中 g 是由度量张量的系数 $g^{\mu\nu}$ 构成的矩阵 $\| g^{\mu\nu} \|$ 的行列式

因 J d'Alembert (1747) 而得名，他在解一维波动方程时考虑了这个算子的最简单的形式．

А Б Иванов 撰

【补注】 在上面的最后一个方程中，对其右端可应用 Einstein（求和）约定（即存在遍及 μ，ν 的求和法）．

参考文献

[A1] Courant, R and Hilbert, D, Methods of mathematical physics Partial differential equations, 2, Interscience, 1965（中译本 R 柯朗、D 希尔伯特，数学物理方法，Ⅱ，科学出版社，1977）

[A2] John, F, Partial differential equations, Springer, 1968（中译本 F 约翰，偏微分方程，科学出版社，1986）．

张鸿林 译

d'Alembert 原理 [d'Alembert principle, д'Аламбера принцип]

具有约束的力学系统的基本原理之一，它包括一通用方法，借助它任一力学系统的运动方程均能以力平衡方程的形式导出（在此意义上，d'Alembert 原理将动力学“归结”成静力学），还可决定约束的反作用 这原理是由 J d'Alembert（[1]）作为决定用绳索或刚性杆连结而相互作用的几个物体的运动（即速度矢量）的一种法则提出的 传给物体的每一运动都分解成两种运动——物体实际上接受到的运动和某一其他运动，且这两种运动必须是这样的，即如果物体完成的只是第一种运动，则它们将互不干扰地完成该运动，如果物体完成第二种运动，则它们将保持静止．

此原理曾被 d'Alembert 及其他科学家成功地用于解决一系列问题．然而，按此原理分解运动以及确定那些应该互相抵消的力是一件困难的任务 这促使 J Lagrange（[2]）在建立力与由力产生的但指向相反的运动之间的平衡的基础上，提出 d'Alembert 原理的另一种表述，这一表述接近此学科的现代想法 令 F_ν 和 R_ν 分别为给定的主动力和作用在质点上的约束的反作用，这里质点的质量为 m_ν，以加速度 w_ν 运动，则根据 d'Alembert 原理 •

$$F_\nu + R_\nu - m_\nu w_\nu = 0,\quad \nu = 1, 2, \quad , \qquad (*)$$

亦即，在任一时刻主动力和运动质点所受约束的反作用，被质点的惯性力 $-m_\nu w_\nu$ 所平衡 换言之，假如力 F_ν 被分解成两个分量力，

$$F_\nu = m_\nu w_\nu \ r\ P_\nu,$$

则方程（*）将取形式

$$P_\nu + R_\nu = 0,\quad \nu = 1, 2, \cdot \quad ,$$

亦即，在任一时刻“失去的力” $P_\nu = F_\nu - m_\nu w_\nu$ 被约束的反作用力所平衡（[3]）

参考文献

[1] d'Alembert, J, Traite de dynamique, Paris, 1743

[2] Lagrange, J L, Mécanique analytique, Paris, 1788

[3] Суслов, Г К, Теоретическая механика, 3 изд, М -Л, 1946

В В Румянцев 撰

【补注】 有时，d'Alembert 原理阐述成．外力、惯性力和约束力之和为零，见（[A2]），（[A3]） 亦见 **d'Alembert-Lagrange 原理**（d'Alembert-Lagrange principle）

参考文献

[A1] Arnol'd, V I, Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978（译自俄文）

[A2] Synge, J L and Griffith, B A, Principles of mechanics, McGraw-Hill, 1959

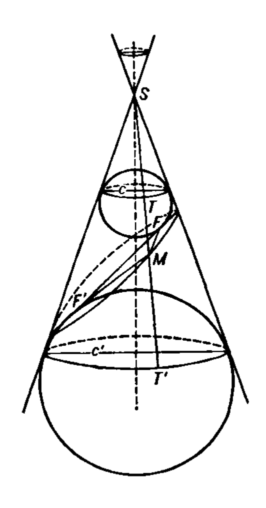
[A3] Targ, S, Theoretical mechanics, Moscow, no date（俄文）

[A4] Arnol'd, V I, Méthodes mathématiques de la mecanique classique, MIR, 1976（译自俄文）

唐福林 译

Dandelin 球面 [Dandelin spheres, Данделена шары]

利用立体图形作出平面曲线椭圆、双曲线、抛物线的方法中，所牵涉到的两个球．例如，两个球面（也称为 Dandelin 球面（Dandelin spheres））与一圆锥面沿着圆 c 和 c' 相切，又与某一平面 π 相切于点 F 和 F'（见图）



如果在锥面和平面 π 的交线上任取一点 M，并且母线 SM 分别与圆 c 和圆 c' 交于点 T 和 T'，则当 M 变化时，点 T 和 T' 分别沿着圆 c 和圆 c' 而运动，同

时保持距离 TT' 不变，则锥面与平面 π 的交线是一个椭圆（$MF'+MF=TT'$, $MF'=MT'$, $MF=MT$）在双曲线的情形，两个 Dandelin 球面各位于锥面的一叶内

这个作法系 G Dandelin 在 1822 年提出的.

参考文献

[1] Моденов, П С, Аналитическая геометрия, М, 1969 А Б Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M, Geometry, 2, Springer, 1987 (中译本 M 贝尔热，几何，第二卷，科学出版社，1989) 马传渔 译 黄正中 校

Daniell 积分 [Daniell integral, Даниеля интеграл]

由 P Daniell ([1]) 提出的关于积分概念的一种推广 此积分的构造格式，称为 Daniell 格式 (Daniell scheme)，是由原来对某个函数类 (所谓初等函数类) 定义的积分到更广函数类的一种推广 当保留推广方法但改变原来的初等函数集的内容时，便能够获得积分概念的种种推广 在此格式中初等积分概念是公理化定义的，这与 Lebesgue 格式 (见 **Lebesgue 积分** (Lebesgue integral)) 不同，在后一情形测度概念是公理化定义的

设 X 为任一集合并设 L_0 为定义在 X 上的实有界函数的某一集合，这些函数称为初等的 (elementary) 这里假定 L_0 为向量格 (vector lattice)，即对 $f, g\in L_0$ 与 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ 有 $\alpha f+\beta g\in L_0$ 且

$$f, g\in L_0 \text{ 蕴涵 } \sup(f,g),\ \inf(f,g)\in L_0$$

设 I 是定义在 L_0 上的实泛函，满足

1) $I(\alpha f+\beta g)=\alpha I(f)+\beta I(g)$ (线性)，

2) $f\geqslant 0\Rightarrow I(f)\geqslant 0$ (非负性)，

3) 若 $f_n(x)\downarrow 0$，对一切 x，则 $I(f_n)\to 0$ (关于单调收敛的连续性)

这样的泛函称为初等函数类上的积分或初等积分 (elementary integral). 集合 $M\subset X$ 称为零测度集 (set of measure zero)，如果对每个 $\varepsilon>0$，存在非减序列 $\{g_n\}\subset L_0$，使对一切 x 有 $\sup_n g_n(x)\geqslant\chi_M(x)$，且 $\sup I(g_n)\leqslant\varepsilon$ 这里 χ_M 表示 M 的特征函数

X 上函数 f 属于类 L^+，指的是存在序列 $\{f_n\}\subset L_0$ 使**几乎处处** (almost-everywhere) 有 $f_n(x)\uparrow f(x)$ 且 $I(f_n)\leqslant c<+\infty$ 数 $I(f)=\lim_n I(f_n)$ 称为 f 的积分 (integral) 积分 $I(f)$ 不依赖于特殊逼近序列 $\{f_n\}$ 的选取

用类 (class) L 表示这样的函数 f 的集合，它们定义于 X 上且可表成 $f=f_1-f_2$，其中 $f_1, f_2\in L^+$ 类 L 中的函数称为可和的 (summable)，而数

$$I(f)=I(f_1)-I(f_2)$$

称为函数 f 的 Daniell 积分 (Daniell integral) 类 L 是某些有限函数所组成的某一个向量格 (函数确定到零测度集)，它关于几乎处处收敛且具有限积分的序列是封闭的，而可和函数的 Daniell 积分具有线性，非负性，关于具有优可和函数的序列几乎处处收敛的连续性 (关于积分号下取极限的 Lebesgue 定理)，以及积分的一些其他自然性质

若 $X=[a, b]$ 且 L_0 为阶梯函数

$$f(x)=c_i,\quad a_i\leqslant x<b_i,\quad \bigcup_{i=1}^{n}[a_i, b_i)=[a,b),\quad b_i=a_{i+1}$$

组成的集合，则 Daniell 积分成为 $[a,b]$ 上可和函数类的 Lebesgue 积分 Daniell 格式可用来构造取值于 σ 完全格的函数的积分

参考文献

[1] Daniell, P, A general form of integral, *Ann of Math*, **19** (1917), 279–294

[2] Шилов, Г Е и Гуревич, Б Л, Интеграл, мера и производная, 2 изд, М 1967 (英译本 Shilov, G E and Gurevich, B L, Integral, measure and derivative a unified approach, Dover, reprint, 1977)

[3] Loomis, L H, An introduction to abstract harmonic analysis, v Nostrand, 1953 В И Соболев 撰

【补注】 上面非负线性泛函 I 所满足的性质 3) (即当对一切 x, $f_n(x)\downarrow 0$ 时有 $I(f_n)\to 0$) 称为 Denjoy 条件 (Denjoy condition)，并且是一项很重要的要求

上文所述类 $L^+(L)$ 中函数显然允许在一个零测度集改变其值，如此得到的等价类仍称为函数 (说得含糊些)，正像通常在测度论中所作的那样. 这样，L 成为向量格这一陈述应理解为 L 中等价类的集合构成一个向量格.

如果**向量格** (vector lattice) L_0 具有如下性质·

$$f\in L_0 \text{ 蕴涵 } \inf(1,f)\in L_0,$$

则在 X 上由 L_0 生成的 σ 域上有唯一的 σ 有限 σ 可加**测度** (measure) μ，使得 L 为 $L_1(\mu)$，且对 $f\in L$, $I(f)$ 即为 $\int f d\mu$ (见[3]) 实际上，Daniell 积分常用来构造泛函分析中的测度.

参考文献

[A1] Stromberg, K, Introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981

[A2] Szokefalvi-Nagy, B, Real functions and orthogonal expansions, Oxford Univ Press, 1965 郑维行 译

Dante 空间 [Dante space, Дантово пространство]

拓扑空间的一个类型 设 X 是一拓扑空间，Y 是它的子空间，且设 τ 和 λ 是无限基数 如果对每个满足 $\operatorname{card}A\leqslant\tau$ 的 $A\subset Y$，在 X 中的闭包 $[A]$ 是权 $\leqslant\tau$ 的紧统，则称空间 Y 为 X 中的 τ 单块 若由 $\lambda\geqslant\tau$, $A\subset Y$,

及 card $A \leqslant \exp\lambda$，可推出存在 $A' \subset X$，使得 $[A'] \supseteq A$ 且 card $A' \leqslant \lambda$，则称空间 $X\tau$ 抑制子空间 Y 如果对每个无限基数 τ，存在 X 的一个处处稠密的子空间 Y，它自身是单块，又被 $X\tau$ 抑制，则称空间 X 为 Dante 空间 (Dante space)．Dante 空间类包含二进紧统类（见**二进紧统** (dyadic compactum)） Б А Ефимов 撰

【补注】 这些概念的应用见 [A1]

参考文献

[A1] Arkhangel'skiĭ, A V, Factorization theorems and spaces of continuous functions stability and monolithicity, *Sov Math Dokl*, **26** (1982), 177－181 (*Dokl Akad Nauk SSSR*, **265** (1982), 5, 1039－1043)

许依群、罗嵩龄、徐定宥 译

Darboux 方程 [Darboux equation，Дарбу уравнение]

1) 常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)+yR(x,y)}{Q(x,y)+xR(x,y)},$$

其中 P, Q 和 R 是 x 和 y 的整多项式，这个方程是 G Darboux 首先研究的 ([1]) **Jacobi 方程** (Jacobi equation) 是 Darboux 方程的特例 设 n 是多项式 P, Q, R 的最高次数，如果 Darboux 方程具有 s 个已知的代数特解，则当 $s \geqslant 2+n(n+1)/2$ 时，不必求积分即可得到它的通解，而当 $s=1+n(n+1)/2$ 时，可以找到积分因子 ([2]) 如果 P 和 Q 是 m 次齐次函数，R 是 k 次齐次函数，则当 $k=m-1$ 时，Darboux 方程是齐次微分方程，当 $k \neq m-1$ 时，Darboux 方程通过代换 $y=zx$ 可以化为 **Bernoulli 方程** (Bernoulli equation)．

参考文献

[1] Darboux, G, Mémoire sur les équations différentielles algebriques du premier ordre et du premier degré, *Bull Sci Math*, **2** (1878), 60－96

[2] Ince, E L, Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956

Н Х Розов 撰

2) 双曲型方程

$$u_{tt}-\Delta u+\frac{\lambda(t,x)}{t}u_t=0,\ t\neq 0,$$

其中 $\lambda(t,x)$ 是 $x=(x_1, \ldots, x_n)$ 的非负连续可微函数．对于 Darboux 方程的解和波动方程的解，下述唯一性定理成立 如果 Darboux 方程的某个二次连续可微的解 $u(x,y)$ 及其对 t 的导数在处于平面 $t=0$ 上的特征锥的底上等于零，则解 $u(x,y)$ 在由这个锥所围成的整个区域内等于零 特征锥的形状与**波动方程** (wave equation) 相同 如果 $\lambda(t,x)=n-1>0$，则 Darboux 方程满足初始条件

$$u(t,x)|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t(t,x)|_{t=0}=0$$

的解是函数

$$u(x,t)=\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}t^{n-1}}\int\limits_{|x-y|=1}\varphi(y)dS_y,$$

其中 φ 是二次连续可微函数，$\Gamma(z)$ 是 Γ 函数．在 Darboux 方程的这个解与波动方程满足条件

$$v(t,x)|_{t=0}=\varphi(x),\ v_t(t,x)|_{t=0}=0$$

的解 $v(t,x)$ 之间存在关系式

$$u(t,x)=2\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)\sqrt{\pi}}\int_0^1 v(t\beta,x)(1-\beta^2)^{(n-3)/2}d\beta$$

这个方程因 G Darboux 而得名．

参考文献

[1] John, F, Plane waevs and spherical means applied to partial differential equations, Interscience, 1955

А К Купцин 撰 张鸿林 译

Darboux 网不变量 [Darboux net invariants；Дарбу инварианты сети]

从 Laplace 方程（在微分直线几何中）

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}=a\frac{\partial\theta}{\partial u}+b\frac{\partial\theta}{\partial v}+c\theta \qquad (*)$$

的系数导出的表达式 h 和 k，

$$h=c+ab-\frac{\partial a}{\partial u},\quad k=c+ab-\frac{\partial b}{\partial v}$$

在 $n(\geqslant 3)$ 维射影空间中，当一点 x 描绘出一个二维曲面上 u 线和 v 线的**共轭网** (conjugate net) 时，点 x 的齐次坐标便满足方程 (*) G Darboux ([1]) 证明了，当点 x 的坐标的规范化改变时，Darboux 不变量 h 和 k 的值不变．对 Darboux 不变量加上某种条件便可得到特殊形式的共轭网

参考文献

[1] Barboux, G, Leçons sur la theorie génerale des surfaces et ses applications géométriques du calcul infinitesimal, 2, Gauthier-Villars, 1889

[2] Tzitzeica, G, Geometrie différentielle projective des réseaux, Paris-Bucharest, 1924

[3] Фиников, С П, Теория конгруэнций, М -Л, 1950

В Т Базылев 撰

【补注】 表达式 h 和 k 通常称为网的 Darboux 不变量 (Darboux invariants of a net) 沈一兵 译

Darboux 二次曲面 [Darboux quadric，Дарбу квадрика]

与三维射影空间 P_3 里的一个曲面 S 在点 x 处具有二阶切触的一个二次曲面，且它与曲面 S 的交线在点 x 处具有一种特殊类型的奇点．在 x 处与 S 具有二阶切触的二次曲面的集合中可以选出如下的二次曲面 它们与 S 的交线有一个具有三条重合切线的奇点 x 曲

面 S 上有三个方向（Darboux方向（Darboux directions））对应于这三条重合切线 在 $x\in S$ 处存在 Darboux 二次曲面的一个单参数族，即 Darboux 束（Darboux pencil）．在射影空间 P_{n+1} 内与超曲面 S 在点 x 处切触的二次超曲面束是 Darboux 束的推广 一个（不可展）超曲面 S 退化为一个二次超曲面，当且仅当它的广义 **Darboux 张量**（Darboux tensor）等于零（[2]）

参考文献

[1] Фиников，С П，Проективно-дифференциальная геометрия，М -Л，1937

[2] Лаптев，Г Ф，《Тр Моск матем об-ва》，2(1953)，275-382

В Т Базылев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cartan，E，Leçons sur la théorie des espaces a connexion projective，Gauthier-Villars，1937，Part II，Chapt VI § II

陈志杰 译

Darboux 和 [Darboux sum，Дарбу сумма]

一种特殊类型的和 设实函数 f 在区间 $[a,b]$ 上定义并有界，令 $\tau=\{x_i\}_{i=0}^k$ 为 $[a,b]$ 的分解（decomposition）

$$a=x_0<x_1< \quad <x_k=b,$$

并令

$$m_i=\inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x), \quad M_i=\sup_{x_{i-1}\leqslant x<x_i} f(x),$$

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}, \quad i=1, \quad ,k$$

两个和

$$s_\tau=\sum_{i=1}^k m_i\Delta x_i \quad 与 \quad S_\tau=\sum_{i=1}^k M_i\Delta x_i$$

分别称为下 Darboux 和（lower Darboux sums）与上 Darboux 和（upper Darboux sums） 对 $[a,b]$ 的任何两个分解 τ 与 τ'，不等式 $s_\tau\leqslant S_{\tau'}$ 成立，即任一下 Darboux 和不大于上 Darboux 和．若

$$\sigma_\tau=\sum_{i=1}^k f(\xi_i)\Delta x_i, \ \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$$

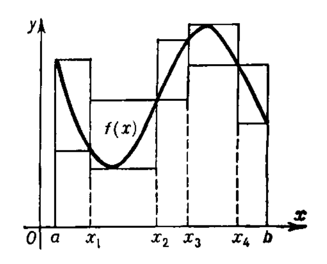
为 Riemann 和，则

$$s_\tau=\inf_{\xi_1 \quad \xi_k}\sigma_\tau, \ S_\tau=\sup_{\xi_1 \quad \xi_k}\sigma_\tau$$

下、上 Darboux 和的几何意义是 它们分别等于以 Δx_i 为底，以 m_i 与 M_i 为高的矩形所成阶梯形的面积，如果限制 $f\geqslant 0$（见图）．这两个图形分别从内部与外部近似于由 f 的曲线，横坐标轴以及纵线段 $x=a$ 与 $x=b$（可退化为点）所构成的曲边梯形

数

$$I_*=\sup_\tau s_\tau, \quad I^*=\inf_\tau S_\tau \tag{1}$$



分别称为 f 的下 Darboux 积分（lower Darboux integrals）和上 Darboux 积分（upper Darboux integrals），它们是下、上 Darboux 和的极限

$$I_*=\lim_{\delta_\tau\to 0} s_\tau, \quad I^*=\lim_{\delta_\tau\to 0} S_\tau,$$

其中

$$\delta_\tau=\max_{i=1, \quad ,k}\Delta x_i$$

为分解 τ 的精细度（fineness） 条件

$$I_*=I^* \tag{2}$$

是函数 f 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充要条件．这里，若条件 (2) 满足，则下、上 Darboux 积分值便与 Riemann 积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 恒等．借助于 Darboux 和，条件 (2) 可叙述为下列等价形式 对每个 $\varepsilon>0$ 存在分划 τ 使 $S_\tau-s_\tau<\varepsilon$

条件

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}(S_\tau-s_\tau)=0$$

也是函数 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充要条件．这里

$$S_\tau-s_\tau=\sum_{i=1}^k \omega_i(f)\Delta x_i,$$

其中 $\omega_i(f)$ 为 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1, \quad ,k)$ 上的振荡（见**函数的振荡**（oscillation of a function））．

下、上 Darboux 和概念可以推广到关于某正测度 μ 可测的多元函数情形 设 E 为 n 维空间的一个可测（例如 Jordan 或 Lebesgue 可测）子集，$n=1,2,\cdot$，并设 $\mu(E)$ 为有限的．令 $\tau=\{E_i\}_{i=1}^k$ 为 E 的一个分解，即 E 的可测子集组，满足

$$\bigcup_{i=1}^k E_i=E, \tag{3}$$

$$\mu(E_i\cap E_j)=0, \ 若\ i\neq j \tag{4}$$

设函数 f 在 E 上有界并令

$$m_i=\inf_{x\in E_i} f(x), \quad M_i=\sup_{x\in E_i} f(x), \quad i=1, \quad ,k \tag{5}$$

两个和

$$s_\tau=\sum_{i=1}^k m_i\mu(E_i), \quad S_\tau=\sum_{i=1}^k M_i\mu(E_i) \tag{6}$$

仍分别称为下、上 Darboux 和 下积分 I_* 与上积分 I^* 用公式 (1) 定义 对于 Jordan 测度，两者相等是 Riemann 可积的充要条件，且其公共值等于 Riemann 积分 而对于 Lebesgue 测度，等式

$$I_*=I^*=\int_E f(x)\,dx$$

对有界 Lebesgue 可测函数总是成立的

一般地，若 μ 是定义在 σ 代数 $\mathfrak{S}_\mu=\{E\}$ 上完全 σ 可加有界测度，f 是 E 上有界可测实值函数，$\tau=\{E_i\}_{i=1}^k$ 为 $E\in\mathfrak{S}_\mu$ 的满足 (3) 与 (4) 的 μ 可测分解，并且若 Darboux 和 s_τ, S_τ 由 (5), (6) 定义而积分 I_*, I^* 由 (1) 定义，这里 μ 总理解为所考虑的测度，那么，

$$I_*=I^*=\int_E f(x)\,d\mu$$

Darboux 和到集合 $E\in\mathfrak{S}_\mu$ 上定义的无界 μ 可测函数 f 的一种推广是下列级数（假定它们绝对收敛）

$$s_\tau=\sum_{i=1}^{j} m_i\mu(E_i),\qquad S_\tau=\sum_{i=1}^{\infty} M_i\mu(E_i),\qquad (7)$$

其中 $\tau=\{E_i\}_{i=1}^{\zeta}$ 是 $E\in\mathfrak{S}_\mu$ 的一个分解（一般说，此分解由无限个 μ 可测集 E_i 构成，它们满足 (4) 与 $\bigcup_{i=1}^{\zeta}E_i=E$)，而 m_i 与 M_i 由 (5) 定义 在 (7) 中 (像 (6) 中那样) 作下列假定 $\infty\cdot 0=0\cdot\infty=0$ 若 I_* 与 I^* 仍据 (1) 定义，且 s_τ 与 S_τ 由 (7) 定义，并对每个 τ 绝对收敛，则 $I_*=I^*$ 若值 $I=I_*=I^*$ 是有限的，则 f 关于 μ 可积且 $I=\int_E f(x)d\mu$

上面术语因 G Darboux 而得名 ([1])

参考文献

[1] Darboux, G , *Ann Sci Ecole Norm Sup Ser* (2), **4** (1875), 57 – 112

[2] Ильин, В А , Позняк, Э Г , Основы матем анализа, 3 изд , т 1–2, М , 1971–1973 (英译本 Il'in, V A & Poznyak, E G , Fundamentals of mathematical analysis, 1–2, Mir, 1982)

[3] Кудрявцев, Л Д , Математический анализ, 2 изд , т 1–2, М , 1973

[4] Никольский, С М , Курс матем анализа, 2 изд т 1–2, М , 1975 (中译本 С М 尼柯尔斯基, 数学分析教程, 第一卷, 第一、二分册, 人民教育出版社, 1980–1981)

Л Д Кудрявцев 撰 郑维行 译

Darboux 曲面 [Darboux surfaces, Дарбу поверхности]

由 G Darboux ([1]) 发现的一组与其中之一的**无穷小形变** (infinitesimal deformation) 相伴的曲面．Darboux曲面形成含 12 个曲面的一个 "圈" (wreath)，它们的径矢 $\mathbf{x}_1$, , $\mathbf{x}_6$, $\mathbf{z}_1$, , $\mathbf{z}_6$ 满足方程

$$d\mathbf{z}_i=[\mathbf{z}_{i+1},\ d\mathbf{x}_i],\qquad d\mathbf{x}_i=[\mathbf{x}_{i-1},\ d\mathbf{z}_i],$$
$$\mathbf{z}_i-\mathbf{x}_{i+1}=[\mathbf{z}_{i+1},\ \mathbf{x}_i],\quad i=1,\ \ ,6,$$
$$\mathbf{x}_{i+6}=\mathbf{x}_i,\quad \mathbf{z}_{i+6}=\mathbf{z}_i,$$

其中 $\mathbf{z}_{i+1}$ 和 $\mathbf{x}_i$ 作成 **Peterson 对应** (Peterson correspondence)，$\mathbf{z}_{i+1}$ 和 $\mathbf{x}_{i-1}$ 作成**极对应** (polar correspondence)，而 $\mathbf{z}_i$ 和 $\mathbf{x}_{i+1}$ 是一个 W 线汇的极 椭圆空间的等距曲面对形成一个类似的曲面 "圈"

参考文献

[1] Darboux, G , Leçons sur la theorie generale des surfaces et ses applications géométriques de calul infinitesimal, 4, Gauthier-Villars, 1896

[2] Шуликовский, В И , Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М , 1963

М И Войцеховский 撰

【补注】 关于 W 线汇的概念见**线汇** (congruence of lines)

参考文献

[A1] Fubini, G & Čech, E , Introduction á la geometrie projective differentielle des surfaces, Gauthier-Villars, 1931

[A2] Bol, G , Projective Differentialgeometrie, Vandenhoek & Ruprecht, 1954

沈一兵 译

Darboux 张量 [Darboux tensor, Дарбу тензор]

一个 3 阶共变对称张量，

$$\theta_{\alpha\beta\gamma}=b_{\alpha\beta,\gamma}-\frac{b_{\alpha\beta}K_\gamma+b_{\beta\gamma}K_\alpha+b_{\gamma\alpha}K_\beta}{4K},$$

其中 $b_{\alpha\beta}$ 是曲面的第二基本形式的系数，K 是 Gauss 曲率，$b_{\alpha\beta,\gamma}$ 和 K_α 是它们的共变导数 最先在特殊坐标系下研究这个张量的是 G Darboux ([1])

与 Darboux 张量有关联的是三次微分形式

$$\theta_{\alpha\beta\gamma}du^\alpha du^\beta du^\gamma=b_{\alpha\beta,\gamma}du^\alpha du^\beta du^\gamma-\frac{3}{4}\frac{K_\gamma}{K}b_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta du^\gamma$$

在曲面的一条曲线上计值的这个形式称为 Darboux 不变量 (Darboux invariant)．在负常曲率曲面上，Darboux 不变量重合于其上任一曲线的**微分参数** (differential parameter) Darboux 不变量处处为零的曲线称为 Darboux 曲线 (Darboux curve) 在负曲率的非直纹面上只存在一族实 Darboux 曲线．在正曲率的曲面上存在三族实 Darboux 曲线．Darboux 张量处处有定义且恒为零的曲面称为 Darboux 曲面 (Darboux surface) Darboux 曲面是不可展开成平面的二阶曲面

参考文献

[1] Darboux, G , Etude géométrique sur les percussions et le choc des corps, *Bull Sci Math Ser* 2, **4** (1880), 126 – 160

[2] Каган, В Ф , Основы теории поверхностей в тензорном изложении, 2, М -Л , 1948, 210 – 233

Е В Шикин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Fubini, G & Čech, E, Introduction á la geometrie projective différentielle des surfaces, Gauthier-Villars, 1931

[A2] Bol, G, Projektive Differentialgeometrie, Vandenhoeck & Ruprecht, 1954

[A3] Lane, E P, A treatise on projective differential geometry, Univ Chicago Press, 1942 沈一兵 译

Darboux 定理 [Darboux theorem, Дарбу теорема]

如果一个实值函数在实轴的一个区间的每一点上都具有有限导数，并且其导数在这个区间上取某两个值，则其导数在这个区间上取这两个值的一切中间值 Л Д Кудрявцев 撰

【译注】 见**导数** (derivative)

参考文献

[B1] Фихтенгольц, Г М, Курс дифференциального и интегрального исчисления 7 изд, М, 1969 (中译本 Г М 菲赫金哥尔茨，微积分学教程，人民教育出版社，1980) 张鸿林 译 刘德辅 校

Darboux 三棱形 [Darboux trihedron, Дарбу трехгранник]，亦称 Darboux 三面体

由曲面上一点和在该点的三个向量所决定的三棱形，其中一个向量是曲面的单位法向量 **n**，另外两个是与曲面相切且彼此正交的单位向量 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$，使得

$$\mathbf{n}=\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2$$

曲面的性质可利用 Darboux 三棱形当其基点沿曲面运动时的位移来描述 Darboux 三棱形在曲面研究中的系统应用使 G Darboux ([1]) 引出**活动标架法** (moving-frame method)

参考文献

[1] Darboux, G, Leçons sur la theorie générale des surfaces et ses applications géométriques du calcul infinitesimal, 1, Gauthier-Villars, 1887

А Б Иванов 撰

【补注】 Darboux 三棱形也称为 Darboux 标架 (Darboux frame) 它也被引进仿射微分几何学中，见 [A1]

参考文献

[A1] Guggenheimer, H, Differential geometry, McGraw-Hill, 1963. 沈一兵 译

Darboux 向量 [Darboux vector, Дарбу вектор]

当一点 M 沿曲线 L 匀速移动时 L 的自然三棱形绕瞬时轴旋转的瞬时角速度向量 δ Darboux 向量位于曲线 L 的从切平面内，用 L 的切向量 **t** 和副法向量 **b** 来表示的公式是

$$\delta=\sqrt{\tau^2+\sigma^2}\ (\mathbf{t}\cos\theta+\mathbf{b}\sin\theta),$$

其中 τ 和 σ 是 L 的曲率和挠率，θ 是 Darboux 向量与 L 切向量之间的角 借助于 Darboux 向量，**Frénet 公式** (Frénet formulas) 可写为

$$\dot{\mathbf{t}}=[\delta,\mathbf{t}],\ \dot{\mathbf{n}}=[\delta,\mathbf{n}],\ \dot{\mathbf{b}}=[\delta,\mathbf{b}],$$

其中 **b** 是 L 的主法向量

G Darboux ([1]) 最先指出了空间曲线自然三棱形的 Darboux 向量的几何意义

参考文献

[1] Darboux, G, Lecons sur la theorie generale des surfaces et ses applications geometriques du calcul infinitesimal, 1, Gauthier-Villars, 1887, 1-18

[2] Каган, В Ф, Основы теории поверхностей в тензорном изложении, 1, М-Л, 1947. Е В Шикин 撰

【补注】 自然三棱形 (由 S Sternberg ([A1]) 采用的名称) 通常称为 Frénet 标架 (Frénet frame)，也称 **Frénet 三棱形** (Frénet trihedron)

参考文献

[A1] Sternberg, S, Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964

[A2] Blaschke, W & Leichtweiss, K, Elementare Differentialgeometrie, Springer, 1973

【译注】 Darboux 向量的表示式，在英俄文版中均有误，现予改正 在三维 Euclid 空间中，外积 $[\delta,\mathbf{t}]$ 就是叉积 $\delta\times\mathbf{t}$

参考文献

[B1] 吴大任，微分几何讲义，人民教育出版社，1981

沈一兵 译

Darwin-Fowler 法 [Darwin-Fowler method, Дарвина-Фаулера метод]

从微观正则分布推导正则和宏观正则分布的一种方法 (见 **Gibbs 分布** (Gibbs distribution)) 考察整体上构成一封闭系统的相似统计系统的系综，其特征分布函数对于系综中除一个而外的所有系统的微观状态求和 假设系综中的系统数趋于无穷 (如果系综中每个系统中的粒子数为大量但为有限)，这就允许在计算中采用最陡下降法．采用这一方法来确定统计系统的一些共同特性和计算它们的具体的特性给出与由建立在 Gibbs 正则分布上的方法给出的相同的结果．方法是 Ch Darwin 和 R Fowler 于 1923 年发展起来的．

参考文献

[1] Fowler, R, Guggenheim, E, Statistical thermodynamics, Cambridge Univ Press, 1960

[2] Huang, K, Statistical mechanics, New York, 1963

И А Квасников 撰 沈青 译

de la Vallée-Poussin 准则 [de la Vallée-Poussin criterion, Валле-Пуссена признак] 关于 Fourier 级数点态收

敛的

设以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上是可积的，函数 $F(x)$ 定义为

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x\{f(x_0+t)+f(x_0-t)\}dt,\quad x\neq 0,$$

$$F(0)=0$$

这时，如果 $F(x)$ 在某个区间 $[0, \delta]$ 上具有有界变差，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在点 x_0 上收敛于数

$$F(0^+)=\lim_{x\to 0^+}F(x)$$

de la Vallée-Poussin 准则比 **Dini 准则**（Dini criterion）、**Dirichlet 准则（关于级数收敛性的）**（Dirichlet criterion (convergence of series)）和 **Jordan 准则**（Jordan criterion）都强 这个准则是 Ch J de la Vallée-Poussin 证明的（[1]）.

参考文献

[1] Vallee-Poussin, Ch J de la, Un nouveau cas de convergence des series de Fourier, *Rend Circ Mat Palermo*, **31** (1911), 296－299

[2] Бари, Н К, Тригонометрические ряды, М, 1961（英译本 Bary, N K, A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964）

Б И Голубов 撰 张鸿林 译

de la Vallée-Poussin 导数 [**de la Vallée-Poussin derivative**, **Валле Пуссена производная**]，广义对称导数（generalized symmetric derivative）

由 Ch J de la Vallée-Poussin（[1]）定义的一种导数．设 r 为偶数，并设存在 $\delta>0$ 使对满足 $|t|<\delta$ 的一切 t，有

$$\frac{1}{2}\{f(x_0+t)+f(x_0-t)\}=$$

$$=\beta_0+\frac{1}{2}t^2\beta_2+\quad+\frac{1}{r!}t^r\beta_r+\gamma(t)t^r,\qquad(*)$$

其中 $\beta_1,\quad,\beta_r$ 为常数，$\gamma(t)\to 0$（当 $t\to 0$）且 $\gamma(0)=0$ 数 $\beta_r=f_{(r)}(x_0)$ 称为函数 f 在点 x_0 的 r 阶 de la Vallée-Poussin 导数或 r 阶对称导数．

奇阶 r 的 de la Vallée-Poussin 导数可类似定义，只要把方程（*）代之为

$$\frac{1}{2}\{f(x_0+t)-f(x_0-t)\}=$$

$$=t\beta_1+\frac{1}{3!}t^3\beta_3+\quad+\frac{1}{r!}t^r\beta_r+\gamma(t)t^r$$

de la Vallée-Poussin 导数 $f_{(2)}(x_0)$ 与 Riemann 二阶导数相同，后者常称为 Schwarz 导数 若 $f_{(r)}(x_0)$ 存在，则 $f_{(r-2)}(x_0)$ $(r\geqslant 2)$ 也存在，但 $f_{(r-1)}(x_0)$ 未必存在 若存在有限的通常双边导数 $f^{(r)}(x_0)$，则 $f_{(r)}(x_0)=f^{(r)}(x_0)$ 例如，对函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x$，$f_{(2k)}(0)=0$，$k=1, 2,\quad$，但 $f_{(2k+1)}(0)$ $(k=0, 1,\quad)$ 不存在 若 de la Vallée-Poussin 导数 $f_{(r)}(x_0)$ 存在，则由 f 的 Fourier 级数逐项微分 r 次所得级数 $S^{(r)}(f)$ 在 x_0 对于 $\alpha>r$ 是 (C,α) 可和的，其和为 $f_{(r)}(x_0)$（[2]）（见 **Cesàro 求和法**（Cesàro summation methods））

参考文献

[1] Vallee-Poussin, Ch J de la, Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs derivées par des polynômes et des suites limiteés de Fourier, *Bull Acad Belg*, **3** (1908), 193－254

[2] Zygmund, A, Trigonometric series, 1－2, Cambridge Univ Press, 1979, Chapt 11

А А Конюшков 撰 郑维行 译

de la Vallée-Poussin 多点问题 [**de la Vallée-Poussin multiple-point problem**, **Валле-Пуссена многоточечная задача**]

寻求 n 阶非线性常微分方程

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\quad,y^{(n-1)})\qquad(1)$$

或线性方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\quad+p_n(x)y=0\qquad(2)$$

的解的问题，这里 $x\in[a,b]$，$|y^{(s)}|<+\infty$ $(s=0,\quad,n-1)$ 满足条件

$$y(x_i)=c_i,\quad i=1,\quad,n,\ x_i\in[a,b]\qquad(3)$$

Ch J de la Vallée-Poussin（[1]）证明，如果 $p_k(x)\in C[a, b]$ $(k=1,\quad,n)$ 并且不等式

$$\sum_{k=1}^n l_k\frac{h^k}{k!}<1\qquad(4)$$

成立，其中 $l_k\geqslant|p_k(x)|$，$x\in[a,b]$，$h=b-a$，那么问题 (2)，(3) 就存在唯一解 他还证明，如果 $f(x,u_1,\quad,u_n)$ 对所有自变量是连续的且对变量 u_{n+1-k} $(k=1,\quad,n)$ 满足具有常数 l_k 的 Lipschitz 条件，那么，当方程 (4) 被满足时问题 (1)，(3) 只能有一个解

人们研究了 de la Vallée-Poussin 多点问题的以下几个方面 用改变 (4) 的系数来改进 h 的估计，扩展函数 $p_k(x)(k=1,\quad,n)$ 或 $f(x,u_1,\cdot,u_n)$ 的类别，以及条件 (3) 的推广．主要的问题是证明解的存在性和唯一性 就问题 (2)，(3) 而言，这与下面的叙述等价 方程 (2) 的任何非平凡解在 $[a,b]$ 上至多有 $n-1$ 个零点（解的非振荡（non-oscillation of solutions）或零点的分离（separation of zeros））．

参考文献

[1] Vallee-Poussin, Ch J de la, Sur l'equation différentielle linéaire du second ordre Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignees Extension aux équations d'ordre n, *J Math Pures Appl*, **8** (1929), 125－144

[2] Sansone, G , Equazioni differenziali nel campo reale, 1, Zanichelli, 1948
Л Н Ещуков 撰

【补注】 这个问题也称为多点边值问题 (multipoint boundary value problem)，它是很有历史意义的 [A1]给出了de la Vallée-Poussin结果的一个推广 .

参考文献

[A1] Hartman, P , Ordinary differential equations, Birkhauser, 1982
周芝英 译

de la Vallée-Poussin奇异积分 [de la Vallée-Poussin singular integral, Валле-Пуссена сингулярный интеграл]

形式为

$$V_n(f, x)=\frac{1}{2\pi}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos^{2n}\frac{t}{2}dt$$

的积分(亦见**de la Vallée-Poussin求和法**(de la Vallée-Poussin summation method)) 对于在 $(-\infty, \infty)$ 上连续的、以 2π 为周期的函数 $f(x)$，序列 $V_n(f, x)$ 一致收敛于 $f(x)$([1]) 如果在点 x 上

$$\left(\int_{-\pi}^{x}f(t)\,dt\right)'_x=f(x),$$

则当 $n\to\infty$ 时，$V_n(f, x)\to f(x)$，下列等式成立([2])

$$V_n(f, x)-f(x)=\frac{f''(x)}{n}+o\left[\frac{1}{n}\right]$$

参考文献

[1] Hardy, G H , Divergent series, Clarendon, 1949

[2] Натансон, И П , Конструктивная теория функций, М -Л, 1949 (中译本 И П 纳唐松，函数构造论，科学出版社，1958-1959)
П П Коровкин 撰

【补注】 符号 $(2m)!!$ 表示 $2m(2m-2)\quad 2$ (m 项)，$(2m-1)!!=(2m-1)(2m-3)\quad 3$ (m项)，因此，

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$$

张鸿林 译

de la Vallée-Poussin和 [de la Vallée-Poussin sum, Валле-Пуссена сумма]

表示式

$$V_{n\ p}(f, x)=\frac{1}{p+1}\sum_{k=n-p}^{n}S_k(f, x), \qquad (*)$$

$$p=0, \quad ,n, \quad n=0, 1, \quad ,$$

此处 $S_k(f, x)$ $(k=0,1, \quad)$是周期为 2π 的函数 f 的**Fourier级数**(Fourier series)的部分和 . 若 $p=0$，则de la Vallée-Poussin和就等同于Fourier部分和，而若 $p=n$，它们就等同于**Fejér和** (Fejér sum) Ch J de la Vallée-Poussin([1], [2])最先研究用形如 (*) 的多项式去逼近周期函数的方法，他也建立了不等式

$$|f(x)-V_{n\ p}(f, x)|\leqslant 2\,\frac{n+1}{p+1}\,E_{n-p}(f),$$

$$p=0, \quad ,n,$$

这里 $E_m(f)$ 是函数 $f\in C_{2\pi}$ 应用阶数不大于 m 的三角多项式的最佳一致逼近 如果 $p=[cn]$，$0<c<1$，$[a]$是数 a 的整数部分，那么多项式 $V_{n\ [cn]}(f, x)$ 实现阶为 $O(E_{[(1-c)n]}(f))$ 的逼近 对于 2π 周期的连续函数 f，凡是有某个满足 $0\leqslant\theta<1$ 的 θ 能使得 $E_{[\theta n]}(f)=O(E_n(f))$ 成立的，多项式 $V_{n\ [cn]}(f, x)$ 给出其最佳逼近阶 . de la Vallée-Poussin和具有一些对Fourier级数求和理论有意思的性质 . 例如，若 $p=[cn]$, $0<c<1$，则 $|V_{n\ p}(f, x)|\leqslant K(c)\max|f(x)|$，且若 f 是次数不超过 $n-p$ 的三角多项式，那么 $V_{n\ p}(f, x)=f(x)$ de la Vallée-Poussin和可以写作

$$V_{n\ p}(f, x)=$$

$$=\frac{1}{(p+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x+t)\sin\frac{(2n+1-p)\,t}{2}\,\frac{\sin\frac{(p+1)t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\right]dt,$$

这里表示式

$$K_{n\ p}(t)=\frac{\sin\left((2n+1-p)\frac{t}{2}\right)\sin\left((p+1)\frac{t}{2}\right)}{2(p+1)\sin^2\frac{t}{2}},$$

$$p=0, \quad ,n, \quad n=0,1, \quad ,$$

称为de la Vallée-Poussin核 (de la Vallée-Poussin kernels)

参考文献

[1] Vallee-Poussin, Ch J de la, Sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable réelle par des expressions d'ordre donne, *C R Acad Sci Paris Sér I Math*, **166** (1918), 799-802

[2] Vallee-Poussin, Ch J de la, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Gauthier-Villars, 1919

[3] Натансон, И П , Конструктивная теория функций, М -Л , 1949, 211-213 (中译本 И П 纳唐松，函数构造论，上、中、下册，科学出版社，1965)

[4] Коровкин, П П , Линейные операторы и теория приближений, М , 1959, 150-159 (英译本 Korovkin, P P, Linear operators and approximation theory, Hindushtan Publ comp , Delhi, 1960)

[5] Никольский, С М , 《Изв АН СССР Сер матем》, **4** (1940), 6, 509-520

[6] Стечкин, С Б , 《Докл АН СССР》, **80** (1951), 4, 545-548

[7] Щербина, А Д , 《Матем сб》, **27** (1950), 2, 157-170

[8] Тиман, А Ф, 《Изв АН СССР Сер матем》, **17** (1953), 1, 99－134

[9] Тиман, А Ф, Теория приближения функций действительного переменного, М, 1960(英译本 Timan, A F, Theory of approximation of a real variable, Pergamon, 1963)

[10] Ефимов, А В, 《Изв АН СССР Сер матем》, **23** (1959), 5, 737－770

[11] Ефимов, А В, 《Изв АН СССР Сер матем》, **24** (1960), 3, 431－468

[12] Теляковский, С А, 《Докл АН СССР》, **121** (1958), 3, 426－429.

[13] Теляковский, С А, 《Докл АН СССР》, **131** (1960), 2, 259－262

А В Ефимов 撰

【补注】 de la Vallée-Poussin 核也可由以下公式给出，它以最清楚的方式揭示了它们的结构

$$K_{n\,p}(t)=\frac{1}{p+1}\sum_{k=n-p}^{n}D_k(t)$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-p}\cos kt+\sum_{k=1}^{p}\left[1-\frac{k}{p+1}\right]\cos(n-p+k)t$$

这里 $D_k\,(k\geqslant 0)$ 是 **Dirichlet 核** (Dirichlet kernel)

孙永生 译　葛显良 校

de la Vallée-Poussin 求和法 [de la Vallée-Poussin summation method, Валле-Пуссена метод суммирования]

数项级数求和法之一，记为(VP) 级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k$$

具有 de la Vallée-Poussin 和 (de la Vallée-Poussin sum) S，如果关系式

$$\lim_{n\to\infty}\left[a_0+\frac{n}{n+1}a_1+\frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}a_2+\cdots+\frac{n!}{(n+1)\cdots 2n}a_n\right]=S$$

成立．这个方法是 Ch J de la Vallée-Poussin 提出的([1])．对于函数 $f(x)\in L[0,2\pi]$ 的 Fourier 级数，de la Vallée-Poussin 平均值 (亦见 **de la Vallée-Poussin 奇异积分** (de la Vallée-Poussin singular integral)) 具有下列形式·

$$V_n(f,x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\,\tau_n(t)\,dt,$$

其中

$$\tau_n(t)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\cos^{2n}\frac{t}{2}$$

称为 de la Vallée-Poussin 核 (de la Vallée-Poussin kernel) de la Vallée-Poussin 求和法是一种**正则求和法** (regular summation method) 这种求和法比一切 **Cesàro 求和法** (Cesàro summation methods) 都强 (见**求和法的包含** (inclusion of summation methods) 由于这种求和法逼近性弱，所以在函数逼近论中实际上并未采用

参考文献

[1] Vallée-Poussin, Ch J de la, Sur l'approximation des fonctions d'une variable reelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de Fourier, *Bull Acad Belg*, **3** (1908), 193－254

[2] Hardy, G H, Divergent series, Clarendon Press, 1949

[3] Gronwall, T, Ueber einige Summationsmethoden und ihre Anwendung auf die Fouriersche Reihe, *J Reine Angew Math*, **147** (1917), 16－35

А А Захоров 撰　张鸿林 译

de la Vallée-Poussin 定理 [de la Vallée-Poussin theorem, Валле-Пуссена теорема]

1) de la Vallée-Poussin 素数分布定理 (de la Vallée-Poussin theorem on the distribution of prime numbers) 设 $\pi(x)$ 是小于 x 的素数的个数，则当 $x\geqslant 1$ 时下列等式成立

$$\pi(x)=\mathrm{li}\,x+O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}),$$

其中 C 是一正的常数，$\mathrm{li}\,x$ 是 x 的**积分对数** (integral logarithm) 这一定理证明了 Gauss 关于素数分布假设的正确性，即当 $x\to+\infty$ 时，

$$\mathrm{li}\,x\sim\frac{x}{\ln x}$$

这是由 Ch J de la Vallée-Poussin ([1]) 所建立的．见**素数分布** (distribution of prime numbers)．

参考文献

[1] Vallée-Poussin, Ch J de la, Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, *Ann Soc Sci Bruxelles*, **20** (1899), 183－256

[2] Vallée-Poussin, Ch J de la, Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et la nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, *Mem Couronnes Acad Sci Belg*, **59** (1899－1900), 1

[3] Prachar, K Primzahlverteilung, Springer, 1957.

С М Воронин 撰

2) de la Vallée-Poussin 交错定理 (de la Vallée-Poussin alternation theorem) 若在闭集 $Q\subset[a,b]$ 内的一个点列 $\{x_i\}$ ($i=0,\cdots,n+1$) 形成一个交错，则对于函数 f 用形如

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k s_k(x)$$

的多项式的**最佳逼近** (best approximation) 有以下估计式成立

$$E_n(f)=\inf_{c_k}\sup_{x\in Q}\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}c_k s_k(x)\right|$$

$$\geqslant \min_{0\leqslant i\leqslant n+1}|f(x_i)-P_n(x_i)|,$$

此处 $\{s_k(x)\}_0^n$ 是一 Чебышев 系．此定理是 Ch J de la Vallée-Poussin ([1]) 建立的

按 **Чебышев 定理** (Chebyshev theorem)，等式成立，当且仅当 $P_n(x)$ 是最佳逼近多项式．对任意的 Banach 空间，与此定理类似的定理成立 ([2])，这定理在数值方法中用来构造最佳逼近多项式

参考文献

[1] Vallee-Poussin, Ch J de la, Sur les polynômes d'approximation et la représentation approchée d'un angle, *Bull Acad Belg*, **12** (1910), 808－845

[2] Гаркави, А Л, Теория аппроксимации в линейных нормированных пространсвах, 《Итоги Наук Мат Ан ал》, 1967 (1969), 75－132　　Ю Н Субботин 撰

【补注】 关于 de la Vallée-Poussin 的生平和著作可在 [A1] 中找到

一个点列 x_i ($a\leqslant x_1<\quad<x_m\leqslant b$) 称作连续函数 g 在 $[a,b]$ 上的一个交错 (alternation)，如果

$$g(x_i)=(-1)^i\|g\|,\quad \|g\|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|g(x)|$$

参考文献

[A1] Favard, J, Hommage à Charles de la Vallee-Poussin (1866－1962), in P L Butzer and J Korevaar (eds) On approximation theory, Birkhauser, 1964, 1－3

[A2] Cheney, E W, Introduction to approximation theory, Chelsea, reprint, 1982　　孙永生 译　葛显良 校

de Moivre 公式 [de Moivre formula, Муавра формула]

表示求一个写成三角函数形式的**复数** (complex number)

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

的 n 次幂的法则的公式　根据 de Moivre 公式，只须求这个复数的模 ρ 的 n 次幂，并把其幅角 φ 放大 n 倍即可

$$z^n=[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

这个公式是 A de Moivre 得到的 (1707)，其现代形式则是 L Euler 提出的 (1748).

可以应用 de Moivre 公式把 $\mathrm{con}\,n\varphi$ 和 $\sin n\varphi$ 表示成 $\cos\varphi$ 和 $\sin\varphi$ 的幂

$$\cos n\varphi=\cos^n\varphi-C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi+C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi-\quad,$$

$$\sin n\varphi=C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi-C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi+$$

反演 de Moivre 公式，则得到求一个复数的 n 次方根的公式

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=$$

$$=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k=0,1,\quad,$$

有时也把这个公式称为 de Moivre 公式．　БС)-3

【补注】

参考文献

[A1] Маркушевич, А И, Теория аналитических функций, 2 изд, М, 1967 (中译本 А И 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1959)　　张鸿林 译

de Moivre-Laplace 定理 [de Moivre-Laplace theorem, Муавра - Лапласа теорема]

见 **Laplace 定理** (Laplace theorem)．

de Rham 上同调 [de Rham cohomology, Рама когомологии]，代数簇的

一种以微分形式为基础的代数簇的**上同调** (cohomology) 理论　域 k 上每个代数簇 X 都有一个与之相关的正则微分形式 (见代数簇上的**微分形式** (differential form)) 的复形，它的上同调群 $H_{\mathrm{dR}}^p(X/k)$ 称为 X 的 de Rham 上同调群　如果 X 是光滑完全簇且 char $(k)=0$，则 de Rham 上同调是 **Weil 上同调** (Weil cohomology) 的特例 (见 [2], [3])　如果 X 是光滑仿射簇且 $k=\mathbf{C}$，那么 **de Rham 定理** (de Rham theorem) 的下述类似形式成立

$$H_{\mathrm{dR}}^p(X/k)\cong H^p(X^{\mathrm{an}},\mathbf{C}),\ p\geqslant 0,$$

其中 X^{an} 是代数簇 X 所对应的复解析流形 (见[1])．例如，当 X 是 $P^n(\mathbf{C})$ 内的一个代数超曲面的补集时，上同调群 $H^p(X,\mathbf{C})$ 可以利用 $P^n(\mathbf{C})$ 上的在此超曲面上具有极点的有理微分形式来计算

对于任意的态射 $f\ X\to S$，可以定义相对 de Rham 复形 $\Sigma_{p\geqslant 0}\Gamma(\Omega_{X/S}^p)$ (见**导子模** (derivations module of))，它导出相对 de Rham 上同调群 (relative de Rham cohomology groups) $H_{\mathrm{dR}}^p(X/S)$　如果 $X=\mathrm{Spec}\,A$, $S=\mathrm{Spec}\,B$ 是仿射的，则相对 de Rham 复形与 $\Lambda\Omega_{A/B}^1$ 一致．S 上层复形 $\Sigma_{p\geqslant 0}f_*\Omega_{X/S}^p$ 的上同调群 $\mathscr{H}_{\mathrm{dR}}^p(X/S)$ 称为相对 de Rham 上同调层 (relative de Rham cohomology sheaves)．当 f 是**真态射** (proper morphism) 时，这些层是 S 上的凝聚层．

参考文献

[1] Grothendieck, A, On the de Rham cohomology of algebraic varieties, *Publ Math IHES*, **29** (1966), 351－359

[2] Hartshorne, R, Ample subvarieties of algebraic varieties, Springer, 1970

[3] Hartshorne, R , On the de Rham cohomology of algebraic varieties *Publ Math IHES*, **45**(1975), 5-99

А Л Онищик 撰 陈志杰 译

de Rham 定理 [de Rham theorem , Рама теорема]

关于用微分流形 M 上的**微分形式**（differential form）的复形来表达 M 的实上同调群的一个定理 若 $E^*(M)=\sum_{p=0}^{n}E^p(M)$ 为 M 的 de Rham 复形，这里 $E^p(M)$ 为 M 上所有赋予外微分的无穷可微 p 形式的空间，那么 de Rham 定理建立了复形 $E^*(M)$ 的分次上同调代数 $H^*(E^*(M))$ 与 M 的取值于 $\mathbf{R}$ 的上同调代数 $H^*(M, \mathbf{R})$ 之间的同构. 此同构的明显解释是，对每个闭 p形式 ω 都存在 M 中 p维奇异闭链 γ 的空间上的一个线性形式 $\gamma \to \int_\gamma \omega$

此定理首先为 G de Rham ([1]) 建立，虽然上同调与微分形式之间联系的想法应追溯到 H Poincaré

de Rham 定理有各种式样 例如，具有紧支集的形式的复形 $E_c^*(M)$ 的上同调代数 $H^*(E_c^*(M))$ 同构于流形 M 中具紧支集的实上同调代数 $H_c^*(M, \mathbf{R})$ M 的取值于向量空间的局部常数层的上同调同构于取值于相应平坦向量丛的微分形式的复形的上同调 ([3]) 取值于任何特征为零的域 k 的单纯集 S的上同调同构于相应的 k 上 de Rham 多项式复形的上同调 在此情形下，当 S 为任意拓扑空间 X的奇异复形时，依此方法可得到具有上同调代数 $H^*(A_{dR}(X))$的一个分次交换微分分次 k 代数 $A_{dR}(X)$，而此 $H^*(A_{dR}(X))$同构于奇异上同调代数 $H^*(X, k)$ (见[4]) 若 X 为 $\mathbf{C}$ 上光滑仿射代数簇，则上同调代数 $H^*(X, \mathbf{C})$ 同构于 M 上正则微分形式的复形的上同调代数 (见 **de Rham 上同调** (de Rham cohomology))

参考文献

[1] Rham, G de, Sur l'analysis situs des variétes à n dimensions, *J Math Pures Appl Sér* 9, **10** (1931), 115 - 200

[2] Rham, G de, Differentiable manifolds, Springer, 1984 (译自法文)

[3] Raghunathan, M , Discrete subgroups of Lie groups, Springer, 1972

[4] Lehmann D , Theorie homotopique des forms différentielles (d'après D Sullivan), *Astérisque*, **45** (1977)

А Л Аницик 撰 沈永欢、郑维行 译

de Rham 挠率 [de Rham torsion, де Рама кручение]

能用来区别微分拓扑中的许多结构的不变量 它与 **Reidemeister 挠率** (Reidemeister torsion) 是相同的

薛春华 译 徐森林 校

终极析取范式 [dead-end disjunctive normal form, тупиковая дизъюнктивная нормальная форма]

一个表示给定的 **Boole 函数** (Boolean function) 的析取范式，它既不能通过在某个合取中消去字母，也不能通过排除某个合取来约化．一个极小析取范式是从一个约化析取范式通过删除某些合取而得到的，这不是一个单值的过程，它分解为一些“终极”，即这样一些析取范式，在其中没有一项可被删除．这样的形式称为终极析取范式 (dead-end disjunctive normal form)．一个终极析取范式不必是极小的．

这个概念的价值在于，一方面，在事实上，终极析取范式在最优化问题中仿效局部极小化，使在这过程中能找出整体极小化 (极小析取范式) 另一方面，当在实践中将 Boole 函数极小化时，人们通常限于去构造终极析取范式．终极析取范式的复杂性可由下面的事实来估计 1) 终极析取范式的数目随 Boole 函数的变量的数目 n 的增长而迅速增长 (其阶是 $2^{2^{cn}}$)，2) 小部分 (当 $n \to \infty$ 时趋向零) 极小析取范式处在终极析取范式之中，3) 将给定的终极析取范式变换为极小析取范式的复杂性无限制地增长 (当 $n \to \infty$ 时)．这些论断对“最坏”的函数和在“典型”的情况，即对那些在全部函数中所占比率当 $n \to \infty$ 时趋向 1 的函数的总体，都成立

亦见 **Boole 函数的范式** (Boolean functions, normal forms of)

В В Глаголев 撰

【补注】 词语“终极析取范式”在西方的文献中是不使用的 它所包含的意义通常没有被提到，或者使用诸如“不可约析取范式”这样的词语．

蓝以中 译

Debye 长度 [Debye length, Дебаевская длина], Debye 半径 (Debye radius)

由荷正负电粒子构成的中性介质 (等离子体，电解质) 中单个电荷电场的作用距离 在半径等于 Debye 长度的球以外，电场由于周围介质的极化而被屏蔽

Debye 长度由下式定义

$$d=\left[\sum_j \frac{4\pi e_j^2 N_j}{kT_j}\right]^{-1/2},$$

其中 e_j, N_j, T_j 相应为 j 类粒子的电荷，数密度和温度，而 k 为 Boltzmann 常数．求和是对所有粒子种类进行的，同时满足中性条件 $\sum_j e_j N_j = 0$ 介质的一个重要参量是半径等于 Debye 长度的球中的粒子数

$$n_D = \frac{4\pi}{3} d^3 \sum_j N_j,$$

它描述粒子的平均动能与它们的 Coulomb 类型的相互作用的平均能量之比

$$n_D \sim \left[\frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{coul}}}\right]^{3/2}$$

对于电解质，这一比数为小量，通常 $n_D \sim 10^{-4}$，而对于各种不同的物理状态中的等离子体，此数为大量 因此，分子运动论的方法可以用来描述等离子体 Debye 长度的概念是 P Debye 在研究电解质现象时引入的 Д П Костомаров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Levich, B G Theoretical physics, 2 Statistical physics Electromagnetic processes in matter, North-Holland 1971 沈青 译

可判定公式 [decidable formula, разрешимая формула]（在一个给定系统中）

一个给定**形式系统** (formal system) 中的公式 A，它在这个系统中或者是可证的（即为一条定理），或者是可驳的（即其否定 $\neg A$ 为可证） 如果一个给定系统的每个闭公式都是可判定的，则这样一个系统称为完全的 (complete) （注意，要求所有的公式而不仅是闭公式在该系统中皆可判定是不可能的．例如，公式 $x=0$，其中 x 取遍自然数，便表示既非真又非假的命题，所以，它和它的否定都不是形式算术的定理．)

名词"可判定公式"来自以下事实 用这样的公式表示的语句的真假性可根据给定的公理系统而判定 根据 **Gödel 不完全性定理** (Gödel incompleteness theorem)，在算术的任何形式系统中都存在不可判定语句，即可以求得一个在该系统中不可判定的闭公式 特别地，表达这样一个系统是相容的断言的公式便是不可判定的

术语"可判定公式"应区别于术语"可判定谓词" В Е Плиско 撰

【补注】 在一个系统中不可判定的公式称为该系统的不可判定公式 (undecidable formula)，亦见**不可判定性** (undecidability)

参考文献

[A1] Rabin, M O, Decidable Theories, in J Barwise (ed) Handbook of mathematical logic, North-Holland, 1977, 595—629 吕义忠 译 莫绍揆 校

可判定谓词 [decidable predicate, разрешимый предикат]

给定在某个构造对象（例如自然数）集 M 上的一个 n 目谓词 P，对于 P 存在一算法，使得人们可对 M 中任意元素的 n 元组 $a_1, \ldots, a_n$ 找出 P 的值（T或F） 换言之，一谓词是可判定的，若把它看成 M 上取值于集合 $\{T, F\}$ 中的 n 元函数，它是一**可计算函数** (computable function)

当**递归函数** (recursive function) 的概念或某个等价概念用作可计算性概念的数学的精确描述时，则常用"递归谓词"代替"可判定谓词"

В И Плиско 撰

【补注】 所以，P 是一可判定谓词，若在其上 P 取值为 T（真）的 n 元组集是一**可判定集** (decidable set)

杨东屏 译

可判定集 [decidable set, разрешимое множество]

可有检验其元素归属问题的**算法** (algorithm) 的某种取定类型的**构造对象** (constructive object) 集．实际上人们可只考虑可判定自然数集的概念，因为更一般地情况可通过枚举所考虑的对象而归结到此情况． 自然数集 M 称为可判定的 (decidable)，若存在一个**一般递归函数** (general recursive function) f，使得 $M=\{n \mid f(n)=0\}$ 此时 f 是检验自然数是否属于 M 的算法 实际上，$n \in M$ 等价于 $f(n)=0$ 一自然数可判定集通常也称为一般递归集 (general recursive set) 或递归集 (recursive set)

在许多人家熟知的数学问题（例如字的等同问题、同胚问题、Hilbert 第 10 问题、数理逻辑中谓词演算的判定问题）中，要求人们证明或否证某个具体集合是可判定的断言．上面列出的问题的大家熟知的（否定）解，在于建立了它们对应集合的不可判定性（亦见**算法问题** (algorithmic problem)）

参考文献

[1] Mendelson, F Introduction to mathematical logic, v Nostrand, 1964 Н М Нагорный 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rogers jr H, Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill 1967

[A2] Kleene S C Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951（中译本 S C 克林，元数学导论，科学出版社，1984） 杨东屏 译

十分位数 [decile, дециль]

使分布函数 $F(x)$ 取值为 $j/10$ 的 x 值，$j=1, \ldots, 9$ 如果诸十分位数存在，则它们就给出了分布曲线形状的轮廓 第九个和第一个十分位数间的距离称为十分位数间宽 (inter-decile width)，它可作为对分布的分散程度的一种描述 十分位数是**分位数** (quantile) 的特例 Н М Халфина 撰

【译注】 上述定义的十分位数不一定存在，更一般的定义是 满足条件 $F(x-0) \leqslant \frac{j}{10} \leqslant F(x+0)$ 的 x 值，$j=1, 2, \ldots, 9$ 李国英 译 吴启光 校

实数的小数近似 [decimal approximation of a real number, десятичное приближение действительного числа]

实数的有限**十进制小数** (decimal fraction) 近似表示 任何实数 a 都能写成无限十进小数的形式

$$a=\pm\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_n \quad ,$$

其中 α_0 是非负整数，α_n 是数字 0， ，9 中的一个，$n=1,2,$ 　如果不考虑其循环节仅由 9 组成的无限循环十进小数，则可将任何实数按唯一的方式写成无限十进小数　采用这种表示法，并且设 $a\geqslant 0$，于是有限十进小数

$$\underline{a}_n=\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_n$$

(相应地 $\overline{a}_n=\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_n+10^{-n}$) 称为 a 的 n 阶下（上）小数近似 (lower (upper) decimal approximation)．如果 $a<0$，而 $a'=-a$，则 a 的 n 阶下、上小数近似 $\underline{a}_n$ 和 $\overline{a}_n$ 分别定义为

$$\underline{a}_n=-\overline{a'_n}, \quad \overline{a}_n=-\underline{a}_n$$

对于实数的小数近似，下列关系式成立

$$\underline{a}_n\leqslant\underline{a}_{n+1}\leqslant a\leqslant\overline{a_{n+1}}\leqslant\overline{a}_n,$$

$$\overline{a}_n-\underline{a}_n=10^{-n}$$

由此推出

$$\lim_{n\to\infty}(\underline{a}_n\pm\underline{b}_n)=a\pm b, \quad \lim_{n\to\infty}\underline{a}_n\underline{b}_n=ab,$$

而如果 $b\neq 0$，则 $\lim_{n\to\infty}\underline{a}_n/\underline{b}_n=a/b$，其中下近似可以换成上近似

在实际上，小数近似可用于近似计算．和 $a+b$、差 $a-b$、积 ab、商 a/b 的近似值，可分别由 $\underline{a}_n+\underline{b}_n$，$\underline{a}_n-\underline{b}_n$，

$$\underline{(\underline{a}_n\,\underline{b}_n)_n} \quad 和 \quad \underline{\left[\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right]_n}$$

给出．对于在小数点右边最多有 n 个有效数字的小数 a_n 和 b_n 进行这些运算的结果所得的小数，在其小数点右边的有效位数至多也是 n 位，利用这些小数，可以得到所求结果，并可使之达到任何精确度

Л Д Кудрявцев 撰　张鸿林 译

十进制计算体系 [decimal computation system，десятичная система счисления]

以 10 为基的定位记数体系　现代的十进制可以溯源至印度，大约在公元前 600 年印度人已采用十进位值制．之所以称为“阿拉伯数系”，是因为这种记数法最初是由阿拉伯传入欧洲的　在十进制计算体系中数的写法很紧凑，便于进行算术运算　与字母数系、罗马数系相比，十进制记数法有许多优点，所以得到普遍采用．

В И Нечаев 撰

【补注】 十进制位值记数法所用数字的最早文字记载是在印度发现的　通常认为 (1988) 这种数系起源于印度，但年代尚不可知，而且某些学者对于起源印度的说法还有争议　除了“阿拉伯数系”(亦见**阿位伯数字** (Arabic numerals)) 这个名称以外，也称为“印度 - 阿拉伯数系”　至于罗马数系，见**罗马数字** (Roman numerals)，还有其他数系，例如见**斯拉夫数字** (Slavic numerals)

张鸿林 译

十进制小数 [decimal fraction，десятичная дробь]，简称小数

以 10 的整数幂为分母的**分数** (fraction)．对于十进制小数采用下列表示法

$$a_k \quad a_0 \quad b_1 \quad b_l, \tag{1}$$

其中 $0\leqslant a_i$，$b_j<10$ 为整数，如果 $k\neq 0$，则 $a_k\neq 0$

式 (1) 表示数

$$a_k10^k+ \quad +a_110+a_0+\frac{b_1}{10}+ \quad +\frac{b_l}{10^l}$$

例如，

$$\frac{3}{10}=0\ 3, \quad \frac{3524}{100}=35\ 24, \quad \frac{15}{1000}=0\,015$$

小数点右边的数字称为小数部分．如果一个十进小数不含整数部分，即它的绝对值小于 1，则在小数点左边一位上置 0

无限小数 (infinite decimal fraction) 指的是这样的无限数字列

$$a_0 \quad b_1b_2 \quad , \tag{2}$$

其中 a_0 是一个整数，而每个 $b_j(j=1,2,\ )$ 取 0, 1, ，9 中的一个值　任何实数 α 都是这样一个级数之和，即

$$\alpha=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{10^k} \tag{3}$$

级数 (3) 的部分和是有限十进小数 $a_0 \quad b_1 \quad b_n$，它们是数 α 的不足近似值，数

$$a_0 \quad b_1 \quad b_n+\frac{1}{10^n}$$

是数 α 的过剩近似值，如果存在整数 n 和 m，使得对于一切 $i>n$，等式

$$b_i=b_{i+m}$$

成立，则这个无限小数称为循环的 (periodic)　任何有限十进小数都可以看成一个无限循环小数，这里当 $i>n$ 时 $b_i=0$　如果 α 是一个**有理数** (rational number)，则对应的无限十进小数 (2) 是循环的．如果 α 是无理数，则 (2) 不能是循环的．

С А Степанов 撰　张鸿林 译

决策函数 [**decision function, решающая функция**], 统计决策规则 (statistical decision rule)

根据所获得的观测值作出统计决定的规则

设随机变量 X 取值于样本空间 $(\mathfrak{X}, \mathscr{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$, $D=\{d\}$ 是相应于 X 的实现对 θ 所可能采取的一切决定 d 的集合 根据数理统计和对策论中公认的术语, 任一从 $\mathfrak{X}$ 到 D 的 $\mathscr{B}$ 可测变换 δ 称为决策函数 例如, 在 θ 的统计估计中, 任何点估计 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X)$ 都是决策函数. 在作统计结论时, 统计学的一个基本问题是选择决策函数 $\delta(\cdot)$, 使它极小化在损失函数 $L(\cdot, \cdot)$ 下的风险

$$R(\theta, \delta)=\mathsf{E}_\theta[L(\theta, \delta(X))]$$

决策函数的概念在由 A Wald 创立的统计决策函数理论中是一个基本概念.

参考文献

[1] Ченцов, Н Н, Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М, 1972

[2] Wald, A, Statistical decision functions, Wiley, 1950 (中译本 A 瓦尔特, 统计决策函数, 上海科学技术出版社, 1960)

М С Никулин 撰

【补注】 亦见**统计决策理论** (statistical decision theory)

参考文献

[A1] Berger, J O, Statistical decision theory Foundations, concepts and models, Springer, 1980

李国英 译 吴启光 校

判定问题 [**decision problem, массовая проблема**], 算法问题 (algorithmic problem)

关于是否存在一个有效的计算程序或**算法** (algorithm), 以判定一个含参数命题的任何实例真伪性的问题 判定问题的简单例子有 把两个给定的数相加, 把两个给定的数相乘, 验证给出的数是否为素数, 求一个给定函数的导数, 把一个给定函数展开为幂级数等等

如果一个问题没有算法, 则称为不可判定的 (undecidable) 或不可解的 (unsolvable)

寻找一个解决某给定判定问题的算法的问题, 有时亦被称为**识别问题** (recognition problem) 或可解性问题 (solvability problem) 这后一个稍微有点不适当的术语, 历史上第一次出现于判定一阶**谓词演算** (predicate calculus) 中的一个合式公式是否永真的问题. 一般来说, 当考虑一个给定的判定问题的可解性时, 通常自然的想法是考虑该问题的算法存在与否

亦见**算法问题** (algorithmic problem)

С И Адян 撰

【补注】 仅当有效的计算过程的概念被适当地形式化后, 判定问题才有意义, 这点与算法理论一样

对判定问题的肯定的解应包括给出解决问题的算法 在这种情况下, 称这个问题是可判定的 (decidable) 或可解的 (solvable).

可解的判定问题的例子有 i) 判定一个给定的整数是否为素数的问题, ii) 判定任一给定的整系数多项式是否有实根的问题 不可解的判定问题的例子有 1) 判定任一有效地给出的实数是否为零的问题, 2) 判定任一整系数多元多项式是否有全整数根的问题 (Hilbert 第十问题) (Hilbert 10-th problem), 3) 判定任何一价谓词演算中的合式公式是否永真的问题, 4) 判定对任何由生成元和关系给定的群以及生成元的串, 此串是否可化为群中的单位元的问题 (群的字问题 (word problem))

参考文献

[A1] Davis, M, Computability and unsolvability, McGraw-Hill, 1958

[A2] Davis, M (ed), The undecidable, Raven Press, 1965

[A3] Hermes, H, Enumerability, decidability, computability, Springer, 1965

[A4] Minsky, M, Computation finite and infinite machines, Prentice-Hall, 1972

[A5] Rogers, jr H, Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.

鲍 丰 译 李 廉 校

译码 [**decoding, декодирование**]

见**编码与译码** (coding and decoding)

分解 [**decomposition, разбиение**]

1) 所谓分解是指把一个给定的集合用一组两两不交的集合的并来表示

在离散几何中, 经常考虑把某个空间分解成一些闭域, 这些闭域覆盖了整个空间且它们中的任何两个之交都不含有内点 (它们可以有公共的边界点) 例如, 若在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中任意固定一个点格, 然后, 对该格中每一个点, 把空间中与该点的距离比与格中其他点的距离近的所有点都指派给该点, 这样便得到了所谓的 Dirichlet-Вороной 分解 (Dirichlet-Voronoï decomposition). 空间 P 的一个分解称为正则的 (regular), 是指对其中的任何域 D_1, D_2, 都存在一个运动 M, 使得 $D_2=M(D_1)$, 并且 $P=M(P)$, 亦见 **Вороной 格型** (Voronoï lattice types)

在组合几何学中, 有几个问题和结论与某些集的特殊分解有关系 其中的一个例子就是 **Borsuk** 问题 (Borsuk problem) 是否可以把 $\mathbf{R}^n$ 中直径为 d 的任何集合分成 $n+1$ 个部分, 使得每一部分的直径都小于 d? 在 $\mathbf{R}^n$ 中, 有些有界集不可能分解成数目更少的这样的部分 任何分解可以确定一种覆盖 (见**覆盖 (集合的)** (covering (of a set))), 而从任何一种覆盖也可得到一种分解 分解与**照明问题** (illumination problem) 及

Hadwiger 假设 (Hadwiger hypothesis) 有着紧密的联系

参考文献

[1] Болтянский, В Г, Солтан, П С, Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств, Киш, 1978

[2A] Grunbaum, B, Borsuk's problem and related questions, in V L Klee (ed) Convexity, Proc Symp Pure Math, Vol 7, Amer Math Soc, 1963, 271-284

[2B] Grunbaum, B, Measures of symmetry for convex sets in V L Klee (ed) Convexity, Proc Symp Pure Math Vol 7, Amer Math Soc, 1963 233-270

П С Солтан 撰

【补注】

参考文献

[A1] Boltyanski, V G and Gokhberg, I Ts, Satze und Probleme der Kombinatorische Geometrie, Deutsch Verlag, Wissenschaft 1972 (译自俄文)

2) 空间X的分解 (decomposition of a space) 是一个互不相交的子集系 $\mathfrak{M}$, 并且其并为 X 集合 $\mathfrak{M}$可以成为一个拓扑空间, 只要把它的开集定义为所有如下的集合 $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$ 其在自然映射 μ $X\to\mathfrak{M}$(对每个点 $x\in X$, 指定唯一的含有 x 的集合 $M\subset\mathfrak{M}$)之下的原象为 X中的开集.

【补注】 分解 $\mathfrak{M}$定义了 X 上的一个等价关系 (反之亦然) $\mathfrak{M}$上的拓扑使得 $\mathfrak{M}$成为 X 关于这个等价关系的商空间 (quotient space)

3) 一个分解为其空间的一个局部有限覆盖, 该空间的元素为带有不相交开核的典范闭集

М И Войцеховский 撰

【补注】 (在上述所有三种情形) "分解" 一词常用 **"分划"**(partition)**来替代 不过,"分划"还有其他一些(自然的)含义 例如,见分划**(partition),**亦见,如可测分解**(measurable decomposition)

郑锡忠 译 莫绍揆 校

间断分解方法 [**decomposition-discontinuity method; распадения разрыва метод**]

数学物理中问题求数值解的一种方法 术语 "间断分解" 来源于气体动力学, 它代表由具有不同值的动力学参量 (密度、速度、压力、内能) 的两部分气体接触而产生的过程. 当应用于气体动力学问题的数值解时, 该方法如下 对问题需进行数值求解的区域构造差分格网 (见**可变格网法** (variable-grid method)) 假设每一个网格内气体的动力学参量都是常数并等于由它们的已知分布得出的某平均值, 然后就对格网的每个网格边界, 对其两侧网格中的两气体体积求解间断分解问题 在两个半无限体积气体的情况下, 当在每个体积中动力学参量的分布为常数时和当体积的接触面是平面时, 求解的算法可以容易地编制出来 由这个解得到的动力学参量的值和相应的分隔网格的边界的时空位置, 就取为网格边界上的值 这种近似至少在成对方式的相互作用尚不互相影响的时间间隔 Δt 之内是正确的 在按照每个网格边界上的气体参量的值计算了流动和已知 t_0 时刻初始一步的分布之后, 就对差分格网的每一网格利用质量、动量和能量平衡算出 $t_0+\Delta t$ 时一步的分布. 在计算过程中差分格网本身可以变化, 它的运动可以或独立地规定或根据问题的特性决定. 以上对 Δt 的限制本质上就是所叙述的计算格式的稳定性条件

这种构造计算算法的做法可以推广到有热传导的流体动力学问题、弹性理论等等. 由于明显的物理解释和普遍性, 并因为边界条件对于初始的微分公式是适当的, 间断分解方法已被广泛地应用于数值求解数学物理问题

参考文献

[1] Ландау, Л Д, и Лифшиц, Е М Механика сплошной среды, Гостехиздат, Москва, 1954 (英译本 Landau, L D and Lifschitz E M, Fluid mechanics, Pergamon, 1959)

[2] Годуков, С К, и т д Численное решение многомерных задач газовой динамики, Наука, Москва, 1976

А В Забродин 撰

【译注】 在一些文献中间断分解方法也称为 Годунов 方法或 Годунов 间断分解方法

参考文献

[B1] 李德元等著, 二维非定常流体力学数值方法, 科学出版社, 1987

李维新 译

递减函数 [**decreasing function, убывающая функция**], 亦称减函数

定义在一个实数集合 E 上的函数 $f(x)$, 满足条件 如果

$$x'<x'',\quad x',x''\in E,$$

则有

$$f(x')>f(x'')$$

有时, 把这样的函数称为严格递减的 (strictly decreasing), 而 "递减函数" 一词指的是满足下述条件的函数 对于指定的值 x', x'', $x'<x''$, 有 $f(x')\geqslant f(x'')$ (非增函数 (non-increasing function)) 每个严格递减函数都具有反函数, 它也是严格递减的. 如果 x_0 是集合 E 的左极限点 (相应地, 右极限点), $f(x)$ 是非增的, 而集合 $\{y\ y=f(x), x>x_0, x\in E\}$ 是上有界的 (相应地, 集合 $\{y\ y=f(x), x<x_0, x\in E\}$ 是下有界的), 则当 $x\to x_0+0$ (相应地, $x\to x_0-0$) ($x\in E$) 时, $f(x)$ 具有有限的极限, 如果上述集合不是上有界的 (相应

地，下有界的），则 $f(x)$ 具有无限的极限，它等于 $+\infty$（相应地，$-\infty$） Л Д Кудрявцев 撰

【补注】 函数 $f(x)$ 称为**递增函数**（increasing function），如果 $-f(x)$ 是递减函数． 张鸿林 译

递减序列 [decreasing sequence, убывающая последовательность]

一个序列 $\{x_n\}$，对于每个 $n=1,2,\quad$，都有 $x_n>x_{n+1}$ 有时这样的序列称为严格递减的（strictly decreasing），而"递减序列"一词指的是对于一切 n，满足条件 $x_n \geqslant x_{n+1}$ 的序列，这样的序列有时称为非增序列（non-increasing sequence） 每个上有界的非增序列都具有有限的极限，每个下无界的非增序列都具有极限 $-\infty$ Л Д Кудрявцев 撰 张鸿林 译

Dedekind 准则（关于级数收敛性的）[Dedekind criterion (convergence of series), Дедекинда признак]

级数 $\sum_{n=1}^{\prime} a_n b_n$ 收敛，其中 a_n 和 b_n 是复数，如果级数 $\sum_{n=1}^{\prime}(a_n-a_{n+1})$ 当 $a_n \to 0$ 时绝对收敛，并且级数 $\sum_{n=1}^{\prime} b_n$ 的部分和是有界的 Л Д Кудрявцев 撰

【补注】 这个准则根据下列分部求和公式（formula of summation by parts）来证明 设 $B_n=\sum_{k=1}^{n} b_k$，$n>0$，$B_0=0$ 于是，对于 $1 \leqslant p<q$，有

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n=\sum_{n=p}^{q-1} B_n(a_q-a_{n+1})+B_q a_q-B_{p-1} a_p$$

一个相关的收敛性准则是 **Dirichlet 准则（关于级数收敛性的）**（Dirichlet criterion (convergence of series)）

参考文献

[A1] Rudin, W, Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1953（中译本 W 卢丁，数学分析原理，高等教育出版社，1979）

张鸿林 译

Dedekind 分割 [Dedekind cut, Дедекиндово сечение]，分割（cut）

把实数集 **R**（或有理数集 **Q**）分割成两个非空集合 A 和 B，其并为 **R**（或 **Q**），并使得对任何 $a \in A$ 和 $b \in B$，都有 $a<b$ Dedekind 分割用符号 $A|B$ 来表示 集合 A 称为 $A|B$ 的下类，集合 B 称为 $A|B$ 的上类 有理数集的 Dedekind 分割用于建立**实数**（real number）理论 实轴的连续性概念可以用实数集的 Dedekind 分割来表述 Л Д Кудрявцев 撰

【补注】 利用分割由 **Q** 构造 **R**，见 [1]

参考文献

[A1] Rudin, W, Principles of methematical analysis, McGraw-Hill, 1953（中译本 W 卢丁，数学分析原理，高等教育出版社，1979）

张鸿林 译

Dedekind 格 [Dedekind lattice, Дедекиндова решетка]

同**模格**（modular lattice）

Dedekind 环 [Dedekind ring, Дедекиндово кольцо]

有单位元的无零因子的结合-交换环（即交换整环）R，其中每个真理想可表示为素理想的乘积（R 的理想 P 称为素的（prime），如果商环 R/P 不含零因子） 这个名词是为了纪念 R Dedekind，他在 19 世纪 70 年代首先研究了这种环

任何主理想整环都是 Dedekind 环 如果 R 是 Dedekind 环，而 L 是此环的商域的有限代数扩张，则 R 在 L 中的整闭包（integral closure）R'（即 L 中的作为形如 $x^n+a_1x^{n-1}+\quad+a_n=0\ (a_i \in R)$ 的方程的根的元素的全体）仍是 Dedekind 环．特别地，代数数域中的代数整数环以及极大序模，即整数环在有理数域的有限代数扩张中的整闭包，是 Dedekind 环

在 Dedekind 环 R 中每个真理想可以唯一地表成素理想的乘积 这个定理产生于代数数域的极大序模中的元素的素因子分解的问题 这种分解通常并不是唯一的

一个环 R 是 Dedekind 环，当且仅当此环的**分式理想**（fractional ideal）半群构成群 Dedekind 环 R 的每个分式理想都可唯一地表示为 R 的素理想的（正的或负的）方幂的乘积 Dedekind 环还可以刻画如下 一个交换整环 R 是 Dedekind 环，当且仅当 R 是 **Noether 环**（Noetherian ring），其中每个真素理想都是极大理想，且 R 是整闭的，即与其在本身的分式域中的整闭包相同 换言之，Dedekind 环是 Krull 维数为 1 的 Noether 正规环 对于 Dedekind 环 R，所谓孙子剩余定理（Chinese remainder theorem）成立 对于 R 中给定的有限多个理想 I_i 及元素 x_i（$i=1,\quad,n$），同余式组 $x \equiv x_i \pmod{I_i}$ 有解 $x \in R$，当且仅当对于 $i \neq j$ 都有 $x_i \equiv x_j \pmod{I_i+I_j}$ Dedekind 环 R 还可以被刻画为维数等于 1 的 **Krull 环**（Krull ring） 每个 Dedekind 环都是正则交换环，它对于任一极大理想的局部化都是**离散赋范环**（discretely-normed ring）．Dedekind 环 R 的非零理想半群同构于此环的**除子**（divisor）半群 P

参考文献

[1] Zariski，O and Samuel，P.，Commutative algebra，1，Springer，1975

[2] Курош，А Г，Лекции по общей алгебре，2 изд，М，1973（英译本 Kurosh，A G，Lectures on general algebra，Chelsea，1963）

[3] Боревич，З И，Шафаревич，И Р，Теория чисел，М，2 изд，1972（英译本 Borevich，Z I and Shafarevich，I R，Number theory，Acad Press，1966）

[4] Bourbaki，N，Elements of mathematics Commutative algebra，Addison-Wesley，1972（译自法文）

Л А Бокуть 撰

【补注】 关于Krull维数，见**维数** (dimension) 关于正规环，见**正规环**(normal ring).

【译注】 代数数域(即有理数域**Q**上的有限扩张) L中整数环**Z**的整闭包与L中的代数整数环是一样的 所以原文的第二段及第三段中的“极大序模”用法不妥.

赵春来 译 冯绪宁 校

Dedekind定理 [Dedekind theorem, Дедекинда теорема], 关于实轴连续性的

对于实数集的任何分割 $A|B$(见 **Dedekind分割** (Dedekind cut))，存在一个实数 α，它或者是类A中的最大数，或者是类B中的最小数 这个命题也称为实轴连续性的Dedekind原理(公理) (Dedekind principle (axiom)) (见**实数** (real number)). 数α是A的最小上界和B的最大下界.

Л Д Кудрявцев 撰 张鸿林 译

Dedekind ζ 函数 [Dedekind zeta-function, Дедекинда дзета-функция]

见 **ζ 函数** (zeta-function) (数论中的)

可推断法则 [deducible rule, выводимое правило]

一个元数学定理 (见**元定理** (meta-theorem)), 根据这个定理，为了证明一个公式 Δ 可由假设 Γ 推导出，容许使用有限次基于假设 $\Gamma_i \vdash \Delta_i (1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 0)$的推导(见**逻辑推导** (derivation, logical))，诸推导 $\Gamma_i \vdash \Delta_i$ 皆称为可推断法则的辅助推导 (auxiliary derivation)，而结论 $\Gamma \vdash \Delta$ 称为结果推导 (resulting derivation) 可推断法则是**合理法则** (sound rule) 的特殊情况 可推断法则的最重要例子是**演绎定理** (deduction theorem), **归谬法** (reductio ad absurdum) 法则，以及其他决定引入和消去逻辑符号的法则，例如析取引入法则 (rules for the introduction of the disjunction) $A \vdash A \vee B$和$B \vdash A \vee B$(这些可推断法则不需要辅助推演法则)，还有析取消去 (elimination of disjunction) 由 $\Gamma, A \vdash C$ 和 $\Gamma, B \vdash C$ 得到 $\Gamma, A \vee B \vdash C$. 在某些情况下，可推断法则有如下结构 一个演算被扩充和加强，并且在新的演算中可推断性蕴涵某些关于基本演算中的可推断性的结果. 特别地，上述可推断法则出现于消除描述性定义 (descriptive definitions)的过程中(后者是指在构造一个数学理论时，规定概念和符号如何扩充的那些定义). 以适当的可推断法则为工具，可以使形式推理中的转换方法更接近具体的数学推理

С Ю Маслов 撰

【补注】 上面的法则也称为**导出法则** (derived rule) (见**可推导法则** (derivable rule))

卢景波 译 王世强 校

演绎定理 [deduction theorem, дедукции теорема]

一些定理的总称 根据这种定理，为证明蕴涵式 $A \supset B$是能形式地推出的，只要证明由公式A可以逻辑推演出公式B 在最简单的经典的，直觉主义等的命题演算中，演绎定理可陈述为 如果$\Gamma, A \vdash B$ (由假设Γ, A可以推演出B)，那么

$$\Gamma \vdash (A \supset B) \qquad (*)$$

(Γ可以是空集) 在量词出现的情况之下，类似的命题不成立

$$A(x) \vdash \forall x A(x),$$

但

$$\vdash A(x) \supset \forall x A(x)$$

不成立. 在传统的(经典的，直觉主义的等)谓词演算中，演绎定理可以表述为 如果$\Gamma, A \vdash B$, 那么

$$\Gamma \vdash (\forall A \supset B),$$

其中 $\forall A$ 是把A的所有自由变数都在A前置以$\forall$量词的结果(见**量词** (quantifier)) 特别地，如果A是一个闭公式，那么演绎定理有(*)的形式. 演绎定理的这一表述把在公理化理论中寻求证明归结到在谓词演算中寻求证明 公式B可由诸公理$A_1, \ldots, A_n$推演出当且仅当公式

$$\forall A_1 \supset (\forall A_2 \supset \ldots \supset (\forall A_n \supset B) \ldots)$$

在谓词演算中可以推演出

对于具有“相似于”量词运算的逻辑，可以用类似方式陈述演绎定理，例如对于模态逻辑S4和S5(见**模态逻辑** (modal logic))，演绎定理的形式如下

$$\text{如果}\ \Gamma, A \vdash B,\ \text{那么}\ \Gamma \vdash (\Box A \supset B)$$

如果不是对所有自由变数引入$\forall$ 量词，而仅限于对演绎过程中被量词约束的变数，那么就能得到演绎定理的更精确的表述. 在一个给定的演绎中称变数y对于公式A是变化的，如果y在A中是自由的，并且在所考虑的演绎中用到了在一个蕴涵式的结论中对y的$\forall$引入规则(或是用到了在一个蕴涵式的前提中对y的$\exists$引入规则)，而该前提在考虑的证明中依赖于A 现在传统谓词演算的演绎定理可以更精确地陈述为·

如果$\Gamma, A \vdash B$, 那么$\Gamma \vdash (\forall y_1 \ldots \forall y_n A \supset B)$, 其中$y_1, \ldots, y_n$是所考虑的演绎中对$A$变化的所有变数 特别地，如果$A$中的自由变数没有对$A$变化的，则演绎定理的形式为(*) 在表述模态逻辑的演绎定理的加细时，变数的变化发生在对蕴涵式的结论引入$\Box$时以及在对蕴涵式的前提引入$\Diamond$时

在证明相关蕴涵 (velevant implication) 演算

(即把 $A \supset B$ 理解为"必须利用假设 A 才能推演出 B)的演绎定理时，要么修改演绎概念本身，要么要求改变发生在"第二"假设中．例如，由 $A, \Gamma \vdash C$ 及 $\Gamma \vdash D$ 推到 $A, \Gamma \vdash (C \& D)$ 时，由于公式 A 不是 $\Gamma \vdash D$ 的一部分，故 A 的作用改变了

如果在给定的演绎中 A 不改变，那么演绎定理的形式为(*)，如果 A 改变，那么演绎定理的形式为

$$\text{如果 } A, \Gamma \vdash B \text{，那么 } \Gamma \vdash ((A \& t) \supset B),$$

其中 t 是一个"真"常数（或是 A，Γ，B 中的所有命题变数 p 的形如 $(p \supset p)$ 的公式的合取）

参考文献

[1] Kleene, S C , Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本 S C 克林，元数学导论，科学出版社，1984，1985)

[2] Curry, H B , Fundations of mathematical logic, McGraw-Hill, 1963

Г Е Минц 撰

【补注】

参考文献

[A1] Grzegorczyk, A , An outline of mathematical logic, Reidel, 1974

卢景波 译 王世强 校

亏量 [**defect** 或 deficiency, **дефект**]，亏数（deficiency number），算子的

线性算子的**亏子空间**（deficiency subspace）的维数 $\dim D_\lambda$ 有时在较广泛的意义下，一个 Hilbert 空间中的线性流形（linear manifold）的亏量定义为这个流形的正交补的维数

В И Соболев 撰 王声望 译

亏值 [**defective value**, **дефектное значение**]，亚纯函数 f 的

其亏量 $\delta(a,f)$（见下文）为正的（有限或无穷）复数 a 设函数 f 定义在复平面 $\mathbf{C}$ 的圆盘 $|z|<R\leqslant\infty$ 中 值 a 的亏量（defect 或 deficiency）是

$$\delta(a,f)=1-\overline{\lim_{r\to R}}\frac{N(r,a,f)}{T(r,f)},$$

其中 $T(r,f)$ 是表征 f 当 $r\to R$ 时增长性态的 Nevanlinna 特征函数（Nevanlinna characteristic function），

$$N(r,a,f)=\int_0^r[n(t,a)-n(0,a)]\,d\ln t+n(0,a)\ln r$$

是计数函数．其中 $n(t,a)$ 是方程 $f(z)=a$ 在 $|z|\leqslant t$ 中解的个数（包括计算重数）．如果当 $r\to R$ 时 $T(r)\to\infty$，则对所有 $a\in\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ 有 $0\leqslant\delta(a,f)\leqslant 1$．如果对任何 z 有 $f(z)\neq a$，则 $\delta(a,f)=1$，从而 a 是一个亏值，这个等式在某些其他情形下（例如 $f(z)=ze^z$，$R=\infty$，$a=0$）也成立．

如果

$$\overline{\lim}\ \frac{T(r,f)}{\ln(1/(R-r))}=\infty$$

（或 f 不恒等于常数且在整个平面上亚纯），则 $\sum_a\delta(a,f)\leqslant 2$（亏量关系（defect relation 或 deficiency relation），并且对于这样的 f 亏值至多有可数个．在其他方面，亏值集可以是任意的，这样，对任一序列 $\{a_\nu\}\subset\mathbf{C}$ 和 $\{\delta_\nu\}\subset\mathbf{R}^+$，$\sum_\nu\delta_\nu\leqslant 1$，能求出整函数 f，使对所有 ν 有 $\delta(a_\nu,f)=\delta_\nu$，且 f 没有别的亏值．加于 f 的增长上的限制导出关于其亏值和亏量的限制 例如，零阶亚纯函数或阶 $<1/2$ 的整函数的亏值不可能多于一个

数

$$\Delta(a,f)=1-\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r,a,f)}{T(r,f)}$$

（f 在 $\mathbf{C}$ 中亚纯）称为 Valiron 意义下的亏量（defect in the sense of Valiron）使得 $\Delta(a,f)>0$ 的数 a 构成的集合可以具有连续统基数，但其对数容量恒为零

亦见**例外值**（exceptional value），**值分布论**（value-distribution theory）

参考文献

[1] Nevalinna, R , Analytic functions, Springer, 1970 (译自德文)

[2] Hayman, W , Meromorphic functions, Oxford Univ Press, 1964

[3] Гольдберг, А А , Островский, И В , Распределение значений мероморфных функций, М , 1970

Е М Чирка 撰

【译注】

参考文献

[B1] 杨乐，值分布论及其新研究，科学出版社，1982

[B2] 张广厚，整函数和亚纯函数理论 亏值、渐近值和奇异方向，科学出版社，1986

沈永欢 译

亏子空间 [**deficiency subspace** 或 defect subspace, defective subspace, **дефектное подпространство**]，算子的

算子 $A_\lambda=A-\lambda I$ 的值域 $T_\lambda=\{y=(A-\lambda I)x\ x\in D_A\}$ 的正交补 D_λ，其中 A 是定义于 Hilbert 空间 H 中的线性流形 D_A 上的线性算子，而 λ 是 A 的一个正则值（正则点）这里，一个算子 A 的正则值（regular value of an operator）理解为参数 λ 的一个值，使方程 $(A-\lambda I)x=y$ 对任何 y 有唯一的解，而算子 $(A-\lambda I)^{-1}$ 是有界的，即 A 的**预解式**（resolvent）$(A-\lambda I)^{-1}$ 有界．当 λ 变化时，亏子空间 D_λ 也随着变化，但是对属于 A 的全部正则值构成的开集的一个连通分支的一切 λ，亏子空间 D_λ 的维数是相同的

如果 A 是一个具有稠密定义域 D_A 的对称算子，它的正则值的连通分支是上半及下半平面 在这一情

形下，$D_{\lambda}=\{x\in D_{A^*}\ A^*x=\bar{\lambda}x\}$，其中 A^* 是 A 的伴随算子，而亏量 $n_+=\dim D_i$ 及 $n_-=\dim D_{-i}$ 均称为算子 A 的（正的及负的）亏指数（deficiency indices of an operator） 此外

$$D_{A^*}=D_A\oplus D_i\oplus D_{-i},$$

即 D_{A^*} 是 D_A，D_i，D_{-i} 的直和 因而，如果 $n_+=n_-=0$，那么算子 A 是自共轭的，否则，一个对称算子的亏子空间便刻画了它偏离一个自共轭算子的程度

亏子空间在构造对称算子到极大算子或自共轭算子（超极大算子）的扩张中起着重要作用

参考文献

[1] Люстерник, Л А , Соболев, В И , Элементы функционального анализа, 2, изд , М , 1965 (中译本 Л А 刘斯铁尔尼克，В И 索伯列夫，泛函分析概要，第二版，科学出版社，1985)

[2] Ахиезер, Н И , Глазман, И М , Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд , М , 1966 (英译本 Akhiezer, N I and Glazman, I M , Theory of linear operators in a Hilbert space, 1－2, Pitman, 1981)

[3] Dunford, N and Schwartz, J , Linear operators, 1－2, Interscience, 1958 － 1963

[4] Riesz, F and Szokefalvi-Nagy, B , Functional analysis, F Ungar, 1955 (中译本 F 黎茨，B 塞克佛尔维－纳吉，泛函分析讲义，科学出版社，1963，1980).

В И Соболев 撰

【补注】 上面给出的算子的正则值（regular value of an operator）的定义不十分正确而应理解如下 值 λ 是 A 的一个正则值，如果存在正数 $k=k(\lambda)>0$，使得对一切 $x\in D_A$，$\|(A-\lambda I)x\|\geqslant k\|x\|$ 成立 在这种情形下，$A-\lambda I$ 的核仅由零向量组成，且 $A-\lambda I$ 的象是闭的（但不必等于整个空间） 王声望 译

定义方程 [defining equation, определяющее уравнение]，决定方程（determining equation），特征方程（characteristic equation）

与线性常微分方程

$$p_0(z)w^{(n)}+\quad+p_n(z)w=0 \tag{1}$$

的正则奇点 $z=a$ 相联系的方程 设

$$p_j(z)=(z-a)^{n-j}q_j(z),$$

其中函数 $q_j(z)$ 在点 $z=a$ 是全纯的，并且 $q_0(a)\neq0$. 这时，定义方程具有形式

$$\lambda\quad(\lambda-n+1)q_0(a)+\quad+\lambda q_{n-1}(a)+q_n(a)=0 \tag{2}$$

如果方程(2)的根 $\lambda_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 使得所有的差 $\lambda_j-\lambda_k(j\neq k)$ 都不是整数，那么方程 (1) 有一个形式为

$$w_j(z)=(z-a)^{\lambda_j}\varphi_j(z),\ 1\leqslant j\leqslant n \tag{3}$$

的基本解组，其中函数 $\varphi_j(z)$ 在点 $z=a$ 是全纯的 否则，系数 $\varphi_j(z)$ 可以是关于 $\ln(z-a)$ 的多项式，其系数在点 $z=a$ 是全纯的

对于 n 个方程的方程组

$$(z-a)\,w'=A(z)w\ , \tag{4}$$

与正则奇点 $z=a$ 对应的定义方程具有形式

$$\det\|\lambda I-A(a)\|=0\,,$$

其中 $A(z)$ 是在点 $z=a$ 全纯的 $n\times n$ 阶矩阵函数，并且 $A(a)\neq0$ 如果所有的差 $\lambda_j-\lambda_k(j\neq k)$ 都不是整数，其中诸 λ_j 是 A 的本征值，那么方程组 (4) 具有一个形如 (3) 的基本解组，其中 $\varphi_j(z)$ 是在 $z=a$ 全纯的向量函数，否则，向量函数 $\varphi_j(z)$ 可以是关于 $\ln(z-a)$ 的多项式，该多项式的系数是在 $z=a$ 全纯的向量函数

在另一种意义上，当研究常微分方程和偏微分方程所容许的变换群时还使用“决定方程”一词（见[3]）

参考文献

[1] Coddington, E A and Levinson, N , Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955

[2] Kamke, E , Differentialgleichungen Losungsmethoden und Losungen, 1, Chelsea, reprint, 1971 (中译本 E 卡姆克，常微分方程手册，科学出版社，1980)

[3] Овсянников, Л В , Групповой анализ дифференциальных уравнений, М , 1978 (英译本 Ovsyannikov, L V , Group analysis of differential equations, Acad Press, 1982)

М В Федорюк 撰

【补注】 定义方程通常称为指标方程（indicial equation） 周芝英 译 叶彦谦 校

定义算子 [defining operator, дефинизирующий оператор]，序列 $x=\{x_p\}$ 的

序列空间中的算子 M，它具有如下形式

$$(Mx)_p=\sum_{-l}^{+l}m_jx_{p+j}\,,$$

$$m_j=\overline{m_{-j}}\,,\qquad \sum_{-l}^{+l}m_j\lambda^j\leqslant0,\ \ |\lambda|=1$$

这个算子把序列 x 转换为某个**正序列**（positive seqence）

Н К Никольский, Б С Павлов 撰 郭思旭 译 邓应生 校

定义关系 [defining relationships 或 defining relations, определяющие соотношения]，一个泛代数 G 关于它的一个生成元系统 $\{g_i\ i\in I\}$ 的

生成元之间的某些形如

$$u_j(g_{i1},\quad,g_{in})=v_j(g_{i1},\quad,g_{in}),\ j\in J$$

的关系(其中 u_j, v_j 是所说代数的表征的项)，并且使得此种形式的所有其余关系是这些关系和 G 所属的代数簇的等式的结果 当人们说到一个代数 G 由生成元和定义关系给出时，通常是把 G 视为它所在簇的某一**自由代数** (free algebra) 的一个商代数，这个自由代数与 G 有相同的生成元系统，并且具有一个由所有对 (u_j, v_j) ($j\in J$) 所定义的合同 对于多元算子群 (特别是群、代数、环及模) 来说，定义关系可以简化为它们可表为 $w_j=0$ 或 $w_j=1$ 的形式 (在群中)

确定一个代数的定义关系不是唯一确定的，即使对于同一生成元系统来说也是如此 例如，生成元为 a 的二阶循环群可以用一个定义关系 $a^2=1$ 给出，也可以用两个定义关系 $a^6=1$ 和 $a^4=1$ 给出 由于存在一些特殊的变换 (群的 Tietze 变换 (Tietze transformation) (见[2]) 以及各种代数簇中与之类似的东西)，使人们可以把某个代数的由生成元及定义关系给出的一种刻画形式转化为同一代数的另一种刻画形式 对于有限表现群 (finitely-presented group) (或代数 (algebras))，即由有限生成元系统和有限定义关系系统给出的群，可以用有限个 Tietze 变换，把一种刻画转化为另一种由生成元和定义关系确定的 (有限) 刻画，如果一个代数是有限生成的，那么可以从它的任一生成元系统中选出一个有限生成元子系统，如果一个代数具有一个有限生成元系统，并且由有限个定义关系给出，那么对任意给定的该代数的另外的有限生成系统，总可以从其任意的定义关系系统中选出一个定义关系的有限子系统以刻画该代数．

有限表现代数的研究形成了算法问题的完整系列，诸如相等问题，同构问题以及其他问题 (见**算法问题** (algorithmic problem))，对于具有一个定义关系的代数，已经得到了一系列的结果．例如，在具有一个定义关系的群中，相等问题是可解的，并且有限阶元素，中心，以及具有非平凡等式的所有子群也已刻画出 (亦见**群演算** (group calculus))

参考文献

[1] Cohn, P M , Universal algebra, Reidel, 1981

[2] Курош, А Г , Теория групп, 3 изд , М , 1967 (中译本 А Г 库洛什，群论，高等教育出版社，1984, 1987)

[3] Magnus, W , Karras, A and Solitar, D , Combinatorial group theory presentations of groups in terms of generators and relation, Interscience, 1966

А Л. Шмелькин 撰 卢景波 译

邻域定义系 [**defining system of neighbourhoods**, **определяющая система окрестностей**]，拓扑空间 X 中集合 A 的

空间 X 中满足下列两个条件的子集族 ξ a) 对每个 $O\in\xi$，存在 X 中的开集 V，使得 $O\supset V\supset A$，b) 对 X 中任意包含 A 的开集 W，存在族 ξ 的一个含于 W 的元素 U

有时还要求族 ξ 的所有元素都是开集．在拓扑空间 X 中单点集 $\{x\}$ 的邻域定义系称为点 $x\in X$ 在 X 中的邻域定义系

参考文献

[1] Архангельский, А В , Пономарев, В И , Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М , 1974 (英译本 Arkhangel'skiĭ, A V and Ponomarev, V I , Fundamentals of general topology problems and exercises, Reidel , 1984)

А В Архангельский 撰

【补注】 邻域定义系也称为局部基 (local base) 或者邻域基 (neighbourhood base)．

许依群、罗嵩龄、徐定宥 译

定积分 [**definite integral**, **определенный интеграл**]

见**积分** (integral)

定核 [**definite kernel**, **дефинитное ядро**]

线性积分 **Fredholm 算子** (Fredholm operator) 的核 $K(P,Q)$，它满足关系式

$$\iint_{P\ Q} K(P,Q)\varphi(P)\overline{\varphi(Q)}\,dPdQ \geqslant 0\ (\leqslant 0),$$

其中 P,Q 是 Euclid 空间中的点，φ 是任意平方可积函数，$\overline{\varphi}$ 是它的复共轭函数 根据不等式的符号，这个核分别称为非负的 (non-negative) (非负定的 (non-negative definite)) 或非正的 (non-positive) (非正定的 (non-positive definite))

在积分域中满足不等式 $K(P,Q)\geqslant 0\ (\leqslant 0)$ 的核，有时也称为非负的 (非正的)． А Б Бакушинский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Zaanen, A C , Linear analysis, North-Holland, 1956

[A2] Jorgens, K , Lineare integraloperatoren, Teubner, 1970

张鸿林 译

形变 [**deformation**, **деформация**]

1) 解析结构的形变 (deformation of an analytic structure) 是依赖于参数的一族**解析空间** (analytic space) (或与这些空间相关联的解析对象)．形变理论起源于在一个给定的实微分流形上所有可能的互不同构的复结构的分类问题．其基本思想 (它应归功于 B Riemann) 是在所有这样的结构的集合上引入一个解析结构 以下的概念可使这个思想更加精确化 以复空间 S 参数化的复流形的解析族 (analytic family) X，被定义为任何一个光滑的 (smooth) (即局部地看相当于光滑因子的直积的投影的) 解析映射 $\pi\ X\to S$ 如果 S 是连通的，那么 π 的所有纤维 $X_s(s\in S)$ 都微分同胚于一个固

定的纤维 $X_o(o\in S)$，而且可以看成 X_o 上解析地依赖于参数 $s\in S$ 的一族复结构．如果族 X 的纤维都由微分同胚于 X_o 的复流形构成并且所有的纤维互不同构，那么 S 称为实流形 X_o 的模空间 (moduli space) 对于属于一个特定的类的流形，也能定义模空间 构造模空间的问题 (或参模问题 (moduli problem)) 首先在紧 Riemann 曲面的情形被解决 (见 **Riemann 曲面的共形类** (Riemann surfaces, conformal classes of)) 对于复维数等于 2 的紧流形 (见**解析曲面** (analytic surface)) 也得到了类似的但不完全的结果

在高维流形的参模问题的研究中遇到重大困难 关于这方面小平邦彦和 D C Spencer ([6],[7],[8]) 对参模问题作了局部研究，为复流形和解析丛的形变理论奠定了基础 复流形 X_o 的一个解析形变 (analytic deformation) 是一个解析族 π $X\to S$，这里的 S 是带有特定点 o 的**复空间** (complex space)，o 上的纤维与 X_o 重合 形变 $X=X_o\times S$ 称为平凡的 流形 X_o 的形变 $\tilde{\pi}$ $\tilde{X}\to S$ 称为同构于形变 π $X\to S$，如果存在解析同构 φ $\tilde{X}\to X$，它在 X_o 上恒等并使 $\pi\circ\varphi=\tilde{\pi}$ 如果 π $X\to S$ 是解析形变，则任意一个解析映射 f $S'\to S$，当 S' 是带有特定点 o' 的空间且 $f(o')=o$ 时，便通过**换基** (base change) 定义了一个形变 $X\times_S S'\to S'$，即这个形变 π 在映射 f 下的逆象 (inverse image) 形变 π $X\to S$ 称为 (在点 o) 局部完全的 (locally complete)，如果流形 X_o 的任意一个解析形变 π': $X'\to S'$ 在特定点的某个邻域内同构于 π 关于某个局部解析映射 f $S'\to S$ 的逆象．当 df'_o 能被无歧义地确定时，形变称为在 o 是通用的 (versal)，当映射 f 的芽唯一确定时，形变称为是泛的 (universal) 线性映射 $T_o(s)\to H^1(X_o,\Theta)$ 在此理论中起着重要作用，这里的 $\Theta=\Theta_{X_o}$ 是 X_o 上全纯向量场的芽层，这个映射与解析形变有关，被称为相应的无穷小形变 (infinitesimal deformation)

由倉西正武 ([9]) 证明的形变局部理论的基本定理断言对各个紧复流形 X_o 存在在点 o 上通用的形变，它被空间 $H^1(X_o,\Theta)$ 的零的邻域里的一个 (不一定光滑的) 解析子空间 S 所参数化 这里 S 是某个形如 $\gamma(\xi)=[\xi,\xi]+$ 的局部解析映射 γ $H^1(X_o,\Theta)\to H^2(X_o,\Theta)$ 在点 o 的纤维，其中 $[,]$ 是由层 Θ 的 Lie 括号运算在分次 Lie 代数 $H^*(X_o,\Theta)$ 里诱导的运算，点号 则表示 3 阶及更高阶的项．如果 $H^1(X_o,\Theta)=0$，则流形 X_o 是刚性的 (rigid)，即它的任何形变都是局部平凡的 (Fröhlicher - Nijenhuis 刚性定理 (rigidity theorem))．如果 $H^2(X,\Theta)=0$，则 S 是 $H^1(X_o,\Theta)$ 内零的邻域 切空间 $T_o(s)$ 总是与 $H^1(X_o,\Theta)$ 相同的 一个形变在点 o 是完全的，当且仅当相应的无穷小形变是满射，并且通用性等价于无穷小形变的一一映射性．如果 $\dim H^0(X_s,\Theta_{X_s})(s\in S)$ 在 o 的邻域里是常数，那么倉西正武形变是泛的．

紧复流形的形变的局部理论可以被推广到包括紧复空间的情形 此时对映射 π $X\to S$ 为光滑以及纤维为紧的要求被要求 π 是一个逆紧平坦映射所取代．在这里也能证明点 o 处通用形变的存在性 ([3],[5],[11])

对解析空间 (或等价地，解析代数) 的芽的形变也作了研究 关于复空间的孤立奇点的通用形变的存在性定理仍然有效 ([4])

除了复空间的形变理论外，也有各种“解析对象”的形变理论 解析丛、子空间、映射、上同调类、带附加结构 (例如极化) 的解析空间等 这些理论中涉及的基本定义和问题与前面所叙述的相似 关于主解析丛的结果也与前面所述的类似．特别对于具有紧基 X 及以复 Lie 群 G 作为结构群的任何**主解析纤维化** (principal analytic fibration) E，存在 E 的形变，它在点 o 是通用的，以空间 $H^1(X,\mathcal{O}_{\mathrm{Ad}_E})$ 的零的邻域内的一个解析子空间作参数化，这里 $\mathcal{O}_{\mathrm{Ad}_E}$ 是 X 上通过伴随表示与 E 相关联的向量丛的全纯截面的芽层 ([1]) 如果 X 是一个紧 Riemann 曲面，G 是约化代数群，那么可以构造稳定主解析丛的模空间 在子空间的形变理论里，相反地却可得到具有整体性质的很一般的结果 因此当 X 是任意的有限维复空间时，X 的紧解析子空间的平坦解析族 (即解析子空间 $Y\subset X\times S$，其中 S 是复空间，射影 $Y\to S$ 是逆紧平坦映射) 已经被构造出来 ([2])，并且对 X 的任何紧解析子空间是一个泛形变 (在整体意义下) 特别地，S 是这个问题的模空间 类似的参模问题在相对的情形已被解决，对于给定复空间的紧解析闭链也是如此 紧子空间的参模问题的解可以导出从已给紧复空间到另一个已给复空间的解析映射的参模问题的解

曾经尝试过把上述形变理论统一起来 对于上述每一个理论都可以联系一个从解析空间范畴 (或解析空间芽的范畴) 到集合范畴里的反变函子 D 例如在复空间 X_o 的局部形变的理论中，集合 $D(S)$ 由空间 X_o 的局部同构形变类组成，它们以解析空间芽 S 作参数化 如果 S 和元素 $\delta\in D(S)$ 被取定，则可得到函子的态射 $\mathrm{Mor}(\cdot,S)\to D$ 这个态射的满射性 (这时对 (S,δ) 称为完全的 (complete)) 对应于形变 δ 的完全性，而一一映射性对应于泛性．这样一来，参模问题与函子 D 的可表性问题发生了联系．因而引起了对从 Artin 环范畴到满足某些自然条件的集合范畴里的共变函子的研究 ([12]) 完全对的存在性只在形式代数的范畴里得到证明，这对应于形式完全形变的存在性 (见下述代数簇的形变 (deformation of an algebraic variety))

流形上复结构形变理论的一个推广是**伪群结构** (pseudo - group structure) 的形变理论，它的研究主题是伪群结构的族，它们光滑地依赖于在实解析空间内取

值的一个参数 特别是对于紧光滑流形上的伪群结构，它对应于椭圆传递的变换伪群，已经证明了通用形变芽的存在（[10]）

参考文献

[1] Донин, И Ф,《Матем сб》, **94**(1974), 3, 430—443

[2] Douady, A, Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donne, *Ann Inst Fourier*, **16**(1966), 1—95

[3] Douady, A, Le problème des modules locaux pour les espaces **C**-analytiques compacts, *Ann Sci Ecole Norm Sup*, 7(1974), 4, 569—602

[4] Grauert, H, Ueber die Deformation isolierter Singularitaten analytischer Menge, *Invent Math*, **15**(1972) 3, 171—198

[5] Grauert, H, Der Satz von Kuranishi fur kompakte komplexe Raume, *Invent Math*, **25**(1974), 2, 107—142

[6] Kodaira, K and Spencer, D C, On deformations of complex-analytic structures Ⅰ, *Ann of Math*, **67**(1958), 2, 328—401

[7] Kodaira, K and Spencer, D C, On deformations of complex-analytic structures Ⅱ, *Ann of Math*, **67**(1958), 3, 403—466

[8] Kodaira, K and Spencer, D C, On deformations of complex-analytic structures Ⅲ, *Ann of Math*, **71**(1960), 1, 43—76

[9] Kuranishi, M, New proof for the existence of locally complete families of complex structures, in Proc Conf Complex Analysis, Minneapolis, 1964, Springer, 1965, 142—154

[10] Moolgavkar, S H, On the existence of a universal germ of deformations for elliptic pseudogroup structures on compact manifolds, *Trans Amer Math Soc*, **212**(1975), 485, 173—197

[11] Паламодов, В П,《Успехи матем наук》, **31**(1976), 3, 129—194

[12] Schlessinger, M, Functors of Artin rings, *Trans Amer Math Soc*, **130**(1968), 208—222

А Л. Онищик, Д А Пономарев 撰

【补注】 通常用“小平邦彦-Spencer映射”(Kodaira-Spencer mapping) 代替“无穷小形变” 部分结果及概念可见[A1]—[A5] 对于小平邦彦-Spencer形变理论(Kodaira-Spencer theory of deformation)的综合论述是[A6]

参考文献

[A1] Gasqui, J and Goldschmidt, H, Complexes of differential operators and symmetric spaces, in M Hazewinkel and M Gerstenhaber (eds) Deformation theory of algebras and structures and applications, Kluwer, 1988, 797—828

[A2] Gasqui, J and Goldschmidt, H, Some rigidity results in the deformation theory of symmetric spaces, in M Hazewinkel and M Gerstenhaber (eds) Deformation theory of algebras and structures and applications, Kluwer, 1988, 839—851

[A3] Gasqui, J and Goldschmidt, H, Deformations infinitesimals des structures conformes plates, Birkhauser, 1984

[A4] Hermann, R, Geometric and Lie-theoretic principles in pure and applied deformation theory, in M Hazewinkel and M Gerstenhaber (eds) Deformation theory of algebras and structures and applications, Kluwer, 1988, 701—796

[A5] Pommaret, J F, Deformation theory of geometric and algebraic structures, in M Hazewinkel and M Gerstenhaber (eds) Deformation theory of algebras and structures and applications, Kluwer, 1988, 829—838

[A6] Kodaira, K, Complex manifolds and deformations of complex structures, Springer, 1986

2) 代数簇的形变 (deformation of an algebraic variety) 是代数簇到一族代数簇中的包含 代数簇与概形的形变理论是解析结构形变理论的代数翻版 它的主要问题可列举如下．

提升的存在性 (existence of lift) 设 X_0 是域 k 上的概形，S 是一个概形，$s_0 \in S$ 是一个点，其剩余域 $k(s_0)=k$ 是否存在一个平坦 S 概形 X 使得在点 s_0 上的纤维 X_{s_0} 同构于 X_0?(S 概形 X 称为概形 X_0 在 S 上的形变 (deformation) 或提升 (lift))．

泛性问题 (universality problem) 是否存在概形 X_0 的通用 (versal) (或泛的 (universal)) 形变 (即概形 X_0 上的一个形变 M，使得对任何其他的形变 $X \to S$，可以找到一个(或唯一的)态射 $S \to M$，使 $X \cong M \times_M S$)?

概形 X_0 的任何形变 $X \to S$ 通过沿着纤维 X_{s_0} 的形式完全化运算定义了概形 S 在点 s_0 的局部环 $\mathcal{O}_{S,s_0}$ 的完全化上的形式形变 (formal deformation) κ，即 $\hat{\mathcal{O}}_{S,s_0}$ 上的一个稠密形式概形，它的拓扑空间为 X_0 前述问题的形式类似可叙述如下

形式形变 (formal deformation) 的存在性．给定了以 k 为剩余域的完全局部环 Λ，是否存在 Λ 上的平坦形式概形，以 X_0 为拓扑空间?

形式模概形 (formal moduli scheme) 的存在性 是否存在形式通用形变 (formal versal deformation) (或形式泛形变 (formal universal deformation))，即具有剩余域 k 的完全局部环 $\mathcal{O}$ 上的平坦形式概形 p $\kappa \to \mathcal{O}$，使得对任何形式形变 $\kappa' \to \mathrm{Spec}\Lambda$，存在一个 (或唯一的) 环同态 $\mathcal{O} \to \Lambda$，使 $\kappa' \cong \kappa \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda$?

光滑簇的泛形式形变是解析结构形变理论中局部模空间的代数类似．

当 $S=\mathrm{Spec}\,R$，R 是具有剩余域 k 的局部 Artin (或完全) 环时，X_0 在 S 上的形变称为无穷小的 (infinitesimal) (或相应地，有效形式的 (effective formal)) 如果 R 是特征零的完全局部环 (例如 **Witt 向量** (Witt

vector) 环)，则 X_0 的有效形式形变称为 X_0 到特征零 (characteristic zero) 中的提升 (lift)．

如果 X_0 是光滑 k 概形，且 $H^2(X_0, T_{X_0})=0$，这里 T_{X_0} 是 X_0 上的切丛，则对于任何 Artin (或完全) 局部环存在 X_0 的一个无穷小 (或相应地，形式) 形变．此外，当 $H^1(X_0, T_{X_0})=0$ 时，则这样的形变在差一个同构的意义下唯一 ([4]) 对于不一定光滑的概形，利用余切复形也可得到类似的断言 ([5], [6])．有效形式形变的存在性问题是通过函子 D_{X_0} 来研究的，这是从具有剩余域 k 的局部 Artin 环的范畴 C_k 到集合范畴的一个函子，它把 C_k 的每个对象 R 对应到 X_0 在 R 上的所有无穷小形变的集合 X_0 的泛形式形变存在，当且仅当这个函子是射可表示函子．这里，一个射表示对象——具有剩余域 k 的完全局部环 M_{X_0}——称为 k 概形 X_0 的模空间的形式概形 (formal scheme) 如果 X_0 是 k 上正常的，或者 X_0 是具有孤立奇点的 k 上有限型仿射概形，则存在形式通用形变 $\widetilde{\rho}$ $\widetilde{\kappa} \to \widetilde{M}_{X_0}$([2], [6]) 一个通用形式形变是泛的，如果对 Artin 局部环的任何满同态 $R' \to R$ 以及从 $D_{X_0}(R')$ 的任何形变 $X' \to R'$，自同构群的自然映射

$$\mathrm{Aut}_R(X' \mid X_0) \to \mathrm{Aut}_R(X'_R \otimes R \mid X_0)$$

是满射 例如当 X_0 是光滑概形以及 $H^0(X_0, T_{X_0})=0$ 时，这个条件满足 这里当 $H^2(X_0, T_{X_0})=0$ 时，模 M_{X_0} 的形式概形是一个完全正则局部环，它同构于 m 个变量的形式幂级数环 $k[[t_1, \quad, t_m]]$ 在这种情形数 m 等于 $\dim_k H^1(X_0, T_{X_0})$，称为概形 X_0 的局部模数 (number of local moduli)．在一般情形下，$\dim_k H^1(X_0, T_{X_0})$ 等于 M_{X_0} 和 $\widetilde{M}_{X_0}$ 的切空间维数，即维数 $\dim_k m/m^2$，这里 m 是相应局部环的极大理想，而且

$$\dim_k H^1(X_0, T_{X_0}) - \dim M_{X_0} \leqslant \dim_k H^2(X_0, T_{X_0})$$

在模的形式概形里出现幂零元是常有的现象．

如果通用 (或泛) 形式形变 $\kappa \to M_{X_0}$ 是可代数化的 (algebraizable)，即存在 M_{X_0} 上的一个平坦概形，它沿着一条闭纤维的形式完全化同构于 κ，那么相应的代数化被称为 k 概形 X_0 的局部通用形变 (local versal deformation) (或局部泛形变 (local universal deformation)) 如果 X_0 是射影的且 $H^2(X_0, T_{X_0})=0$，那么代数化存在．因此对于亏格 $g>1$ 的光滑曲线，存在环 $k[[t_1, \quad, t_{3g-3}]]$ 上的局部泛形变．在一般情形下，对于簇 X_0 的每个极化 α，存在形式模概形的一个极大闭子概形 $M_{X_0\,\alpha} \subset M_{X_0}$ 使得 $p^{-1}(M_{X_0,\alpha})$ 是可代数化的．$M_{X_0\,\alpha}$ 在 M_{X_0} 内的余维数不超过 $\dim_k H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$ 因此当 X_0 是代数 $K3$ **曲面** ($K3$-surface) 时，M_{X_0} 是 20 维正则的，且对于任何极化 α，子概形 $M_{X_0,\alpha}$ 是 19 维正则的．

Artin 逼近定理被应用于形式模概形的代数化．存在 k 上有限型概形 S 以及点 $s_0 \in S$，其剩余域为 k，使得完全化 $\hat{\mathcal{O}}_{S\,s_0} \simeq \widetilde{M}_{X_0}$，且存在 X_0 在 S 上的形变，它诱导出通用局部形变 $\widetilde{p}$ $\widetilde{\kappa} \to \widetilde{M}_{X_0}$ 概形 S 被唯一确定到相差艾达尔拓扑里的一个局部同构 ([1]) 关于奇异簇和奇点的形变可参见代数簇的**奇点** (singular point)．关于群概形的形变可参见**群概形** (group scheme)

参考文献

[1] Artin, M, Algebraic approximation of structures over complete local rings, *Publ Math IHES*, **36** (1969), 23-58

[2] Итоги науки и техники Алгебра Топология Геометрия, т 12, М, 1974, 77-170

[3] Schlessinger, M, Functors of Artin rings, *Trans Amer Math Soc*, **130** (1968), 208-222

[4] Grothendieck, A (ed), Revêtement étales et groupe fondamental, SGA1, Lecture notes in mathematics, 224, Springer, 1971

[5] Rim, D S, Formal deformation theory, in A Grothendieck (ed) Groupes de monodromie en géométrie algébrique, SGA7, Lecture notes in mathematics, 288, Springer, 1972, 32-132

[6] Mumford, D, in O Zariski (ed) Algebraic surfaces, Springer, 1971, 118-128

И В Долгачев 撰

3) 代数的形变 (deformation of algebras) 是一族依赖于参数的代数 域 k 上空间 V 里的所有可能的双线性运算或代数 $\mathfrak{A}$ 构成一个向量空间 $A(V)$ 这个空间的两个元素代表同构的代数，当且仅当它们位于线性群 $\mathrm{GL}(V)$ 的同一轨道上，这里 $\mathrm{GL}(V)$ 自然地作用在 $A(V)$ 上．代数的形变理论使得研究商集 $A(V)/\mathrm{GL}(V)$ 的局部结构成为可能，这个商集就是空间 V 内同构代数的类，要对它作直接的描述是非常困难的．如果某个代数类 $K \subseteq A(V)$ 是孤立的，那么可以考虑 K 内代数的形变，使它始终保持在类之内．作为其特例，可以考虑结合代数、交换结合代数及 Lie 代数的形变，它们分别构成类 $K=\mathrm{Ass}(V)$, $K=\mathrm{Comm}(V)$, $K=\mathrm{Lie}(V)$，并且关于群 $\mathrm{GL}(V)$ 的作用是不变的．当 $\dim V=n$ 时，这些类是 n 维空间 $A(V)$ 内的代数簇．

在实数或复数域 $k=\mathbf{R}, \mathbf{C}$ 上有限维空间 V 内的代数形变理论在很多方面类似于解析结构的形变理论 在 $k=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 上的每个有限维代数 $\mathfrak{A}$ 有一个完全形变，它以空间 $H^2(\mathfrak{A}, V)$ 的零内的解析子空间芽作参数化 (如果 $H^3(\mathfrak{A}, V)=0$，则这个子空间与 $H^2(\mathfrak{A}, V)$ 相同)．从这个基本结果立即可以得到刚性定理 (rigidity theorem) 如果 $H^2(\mathfrak{A}, V)=0$，则代数 $\mathfrak{A}$ 在 K 内是刚性的 (rigid)，即 $\mathfrak{A}$ 的元素关于 $\mathrm{GL}(V)$ 的轨道在 K 内是开的 因此半单 Lie 代数以及它们的 Borel 子代数是在 Lie 代数的类里刚性的 其逆命题不真．对于任意代数闭域 k 上的有限维代数也有类似的定理 例如当 $H^2(G, V)=0$ 时，代数 $\mathfrak{A}$ 在 $\widetilde{K}$ 里的轨道是 Zariski 开集．

类似地可以发展从一个有限维代数到另一代数里的同态的形变理论．事实上，上述理论已被包含在一个运用分次 Lie 代数的一般方案之中 对于子代数的形变也得到了类似结果．

除了上面提到的理论之外，还有任意域 k 上的代数及其同态的形式形变理论．定义在 k 上向量空间 V 内的代数的**形式形变** (formal deformation) 是 k 上形式幂级数域 $k((t))$ 上的空间 $V \otimes k((t))$ 上的一个代数，带有运算 $\circ$，由下列条件完全确定

$$a \circ b = ab + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(a, b) t^i, \ a, b \in V,$$

其中 $\varphi_i \in A(V)$ 如果限定形变属于一个给定的代数类，就有结合代数、交换结合代数、Lie 代数及其他代数的形式形变

代数 $\mathfrak{A}$ 的两个分别带有乘法 $\times$ 和 $\circ$ 的形式形变称为**等价的** (equivalent) 如果存在空间 $V \otimes k((t))$ 的线性自同构 Φ，具有性质

$$\Phi(a) = a + \sum_{i=1}^{\infty} t^i \varphi_i(a), \ a \in V,$$

这里 $\varphi_i \ V \to V$ 是一个线性映射，使得

$$a \circ b = \Phi^{-1}(\Phi(a) \times \Phi(b))$$

与带有原始乘法的代数 $\mathfrak{A}$ 等价的形变称为**平凡的** (trivial)．在给定的代数类中没有非平凡形式形变的代数称为在这个类里是**形式刚性的** (formally rigid) 例如，在所有代数构成的类里，自由代数是形式刚性的．在 Ass (V), Comm (V) 和 Lie (V) 这些类里，等式 $H^2(\mathfrak{A}, V) = 0$ 是代数 $\mathfrak{A}$ 的形式刚性的充分条件，在类 Ass (V) 内这也是必要条件([3])．

当 $k = \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时，代数的形式形变是研究解析形变的一个工具．

代数的形变的重要应用领域以及例子的源泉是理论物理学，在那里特别地遇到了以下一类代数形变([4], [5]) $k = \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 上有限维代数 $\mathfrak{A}$ 的**收缩** (contraction) 是一条连续曲线 $\mathfrak{A}_t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ 通过收缩从 $\mathfrak{A}$ 得到的代数 $\mathfrak{A}_1$ 称为**极限代数** (limit algebra)，而且不一定同构于代数 $\mathfrak{A}$ 例如任何代数都可被收缩到具有零乘法的代数中，任何半单 Lie 代数可被收缩到一个非 Abel 非半单代数中

参考文献

[1A] Nijenhuis, A and Richardson, R W, Jr, Cohomology and deformations in graded Lie algebras, *Bull Amer Math Soc*, **72**(1966), 1, 1－29

[1B] Nijenhuis, A and Richardson, R W, Jr, Deformations of homomorphisms of Lie groups and Lie algebras, *Bull Amer Math Soc*, **73**(1967), 1, 175－179

[2] Gerstenhaber, M, On the deformation of rings and algebras, *Ann of Math*, **79**(1964), 59－103

[3] Knudson, D, On the deformation of commutative algebras, *Trans Amer Math Soc*, **140**(1969), 55－70

[4] Inonu, E and Wigner, E P, On the contraction of groups and their representations, *Proc Nat Acad Sci USA*, **39**(1953), 6, 510－524

[5] Hermann, R, Lie groups for physicists, Benjamin, 1966

А А Бояркин, А В Михалев, А.Л Онищик 撰

【补注】 近年来**非标准分析** (non-standard analysis) 的思想已被应用到代数里的形变问题 特别地，用这种方法，在上同调不等于零的情形也得到了 Lie 代数的刚性结果 关于非标准分析技巧在代数的形变理论中的应用可见 [A9], [A10]

现在已经很清楚，代数的形变理论不仅是解析结构的形变理论的类似，而且实际上在这两个主题之间有着基本的关系．特别是光滑紧复代数簇 X 的形式形变理论可以被简化为从 X 构造出来的单独一个环的形式形变理论 在解析流形的上同调的经典 Hodge 分解与交换代数的上同调的新近的 Hodge **分解** (Hodge decomposition) 之间也有关系存在([A1])

关于奇异和非奇异 Riemann 曲面的形变与相应的解析函数代数的形变理论之间的关系可见 [A2]

在算子与 Banach 代数的理论里，人们研究与给定的代数接近的代数（在度量意义下）是否同构，见 [A3]－[A5]

对于量子化有一个形变理论的方法，以所谓的**星积** (star-product) 为基础，星积是流形上函数环的交换积的非交换形变，参见 [A6]－[A8]

关于**亚纯微分方程的形变** (deformations of meromorphic differential equations) 可见 [A11]

文献 [A12] 提供了形变理论的许多方面的最新(1988)概观，不过省略了 在动力系统的结构稳定性范围里凸曲面的形变（弯曲），奇点的化解，向量场的形变等，在可积系统范围里等谱和等单值形变，以及机械结构和固体的形变．亦见**等距形变** (deformation, isometric)，**主基上的形变** (deformation over a principal base)，**形变张量** (deformation tensor)，**可积系统** (integrable system)，**奇点的分解** (resolution of singularities)，**弹性系统的稳定性** (stability of an elastic system)，**在持续扰动下的稳定性** (stability in the presence of persistantly acting perturbations) 以及**扰动理论** (perturbation theory)，这些条目包含了前面以及 [A12] 中没有涉及的形变理论其他方面的资料

参考文献

[A1] Gerstenhaber, M and Shack, D, Algebraic cohomology and deformation theory, in M Hazewinkel and M Gerstenhaber (eds) Deformation theory of algebras and structures and applications, Kluwer, 1988, 11－264

[A2] Rochberg, R, Deformation theory for algebras of ana-

lytic functions, in M Hazewinkel and M Gerstenhaber (eds) Deformation theory of algebras and structures and applications, Kluwer, 1988, 501－536

[A3] Christensen, E , Close operator algebras, in M Hazewinkel and M Gerstenhaber (eds) Deformation theory of algebras and structures and applications, Kluwer, 1988, 537－556

[A4] Jarosz, K , Perturbations of Banach algebras, Springer, 1985

[A5] Johnson, B E , Perturbations of multiplication and homomorphisms, in M Hazewinkel and M Gerstenhaber (eds) Deformation theory of algebras and structures and applications, Kluwer, 1988, 565－579

[A6] Lichnerowicz, A , Applications of the deformations of algebraic structures to geometry and mathematical physics, in M Hazewinkel and M Gerstenhaber (eds) Deformation theory of algebras and structures and applications, Kluwer, 1988, 855－896

[A7] Bayen, F , Flato, M , Fronsdal, C , Lichnerowicz, A and Sternheimer, D , Deformation theory and quantization, *Ann of Physics*, **111** (1978), 61－110, 111－151

[A8] de Wilde, M and Lecomte, P , Invariant deformations of the Poisson Lie algebra of a symplectic manifold and star-products, in M Hazewinkel and M Gerstenhaber (eds) Deformation theory of algebras and structures and applications, Kluwer, 1988, 897－960

[A9] Goze, M , Perturbations of Lie algebra structures, in M Hazewinkel and M Gerstenhaber (eds) Deformation theory of algebras and structures and applications, Kluwer, 1988, 265－356

[A10] Ancochea Bermudez, J M , On the rigidity of solvable Lie algebras, in M Hazewinkel and M Gerstenhaber (eds) Deformation theory of algebras and structures and applications, Kluwer, 1988, 403－446

[A11] Babbitt, D G and Varadarajan, V S , Local isoformal deformation theory for meromorphic differential equations near an irregular singularity, in M Hazewinkel and M Gerstenhaber (eds) Deformation theory of algebras and structures and applications, Kluwer, 1988, 583－700

[A12] Hazewinkel, M and Gerstenhaber, M (eds) Deformation theory of algebras and structures and applications, Kluwer, 1988

4)空间X的子集A的形变 (deformation of a subset) 是一个**同伦** (homotopy)

$$D\quad A\times I\to X,$$

其中$D(a,0)=a$, 若$a\in A$ 此外如果集合$D(A\times I)$属于X的某个子空间X_1, 则称D为A在X_1里的形变, A称为空间X里可在X_1内形变的 空间X称为可形变到子空间X_1内, 如果X可在自身内形变到X_1里 特别地, X是可收缩的, 当且仅当它可形变到自身的一个点．空间X可形变到子空间X_1内, 当且仅当对于嵌入$\iota\quad X_1\to X$, 其同伦右逆映射$r\quad X\to X_1$存在, 即$\iota\circ r\sim 1$ 任何空间在它自身内形变到一个子空间里的概念是与弱**保核收缩** (retraction) 的概念有关的．

М И Войцеховский 撰 陈志杰 译

等距形变[deformation, isometric, изгибание], Riemann 空间V中子流形M的

保持M上曲线长度不变的形变．曲面的等距形变问题是微分几何学中的一个基本问题, 它起始于C F Gauss．

除一般情况外, 保持某些外在特性的曲面等距形变已经相当彻底地被研究过了, 通常是仅有一定种类的曲面允许这种形变 这样的例子是 1)在等距形变下保持平均曲率不变的曲面 (常平均曲率曲面, 尤其是极小曲面和可贴合在旋转曲面上的某些曲面), 2)在等距形变下保持某族渐近线不变的曲面 (**直纹曲面** (ruled surface)包含在这类曲面中), 3)容有**主基上的形变** (deformation over a principle base) 的曲面, 等等

如所知, Euclid空间中曲面的等距形变问题习惯上可分成局部等距形变 (local isometric deformation) 和整体等距形变 (global isometric deformation), 即曲面上一点P的某个小邻域U_p的形变和已给一片曲面或整个曲面的形变．一般而言, 每张曲面总允许局部等距形变, 但是, 若P是**平坦点** (flat point), 则在某些条件下和假定所允许的形变具有强正则性时, 即使在局部上U_p也不会有等距形变．

整体等距形变的第一个论断是关于球面不可等距形变性的E Liebmann定理和下述的D Hilbert结果 常曲率1的曲面片上最大主曲率半径必在边界上达到．后来的研究表明, 不附加正则性条件, 在凸曲面类中每张凸闭曲面是不可等距变形的 进而发现了与任一片C^3阶凸曲面的等距形变有关的极大值原理型定理, 这就意味着凸闭曲面是不可等距变形的．然而, 可以证明, C^1阶球面在其同类曲面中具有一个等距形变

关于正亏格闭曲面的等距形变, 只有部分结果被建立, 例如, T(环面)型曲面, 它由有限个具逐段光滑边界的区域所组成, 在每个区域内Gauss曲率K不改变符号, 而在边界上K消失, 并且$K>0$的一切区域的全曲率是4π．这种曲面在某些附加假设 (解析性, 不存在二条闭渐近线) 下是不可等距变形的 特别地, 普通环面是不可等距变形的．

完全的非闭的曲面一般是可以等距变形的．对于一张完全的凸曲面S, 若$\iint KdS=2\pi$, 则S是不可等距变形的, 若$\iint KdS<2\pi$, 则S是可以等距变形的, 并且每

个允许的等距形变被 S 的极限锥的一个等距形变所决定 某些负曲率的完全曲面类也容有等距形变，例如，极小曲面，特别是悬链面可等距变形到螺旋面．

带边界的非闭曲面的等距形变的研究主要与 Gauss 曲率不变号的曲面有关，其中已被详细研究的情况是被各类边界条件唯一确定的等距形变 因此，对于闭曲面 F 的任一等距形变，它的边界 ∂F 上至少有一点与某个固定点 O 的距离要变化，这里从 O 点来看 F 是向外弯的，并且 O 位于凸壳的外侧（因而，若 ∂F 的各点与 O 有固定距离，则 F 是不可等距变形的） 类似地，对于可唯一地投影到平面 π 上且边界为平面周线的凸曲面 F 的任一等距形变，∂F 上至少有一点与 π 的距离要变化（因而，F 不具有滑动性的等距形变，即边界上的点平行于某平面 π 移动的等距形变），对于这类曲面的等距形变，∂F 的曲率 κ 至少在一点要变化，并且在 F 及其形变 $\widetilde{F}$ 的边界上，曲率变号的次数不小于 4（因而，若边界的曲率固定不变，则 F 是不可等距变形的） 关于负曲率的曲面，它们的相当一大类等距形变可从 Gauss 方程和 Peterson-Codazzi 方程的 Cauchy 问题的解来得到，例如，在 $K<0$ 的曲面上，由测地线段 a_0，a_1 和它们的两段正交轨线 b_0, b_1 所界定的这片曲面的等距形变被边界 b_0 的等距形变唯一地确定 至于曲率变号的曲面的等距形变，现有结果还只限于旋转曲面

在曲面等距形变的研究中，要用到偏微分方程理论的方法，例如，椭圆型方程，它决定正 Gauss 曲率曲面和保持平均曲率曲面的等距形变，此外，对于凸曲面，多面形序列的直接极限转换（见 **Glueing 法**（Glueing method））的方法，并结合具正则度量曲面的正则性定理，起到特殊的作用 当凸曲面 $F=F_0$ 充分接近它的等距形变曲面 F_1 时，等距形变的研究可应用 **Cohn-Vossen 变换**（Cohn-Vossen transformation）化为所谓平均曲面

$$F_{1/2}=\frac{F_0+F_1}{2}$$

的**无穷小形变**（infinitesimal deformation）理论中的类似问题．

参考文献

[1] Каган, В Ф, Основы теории поверхностей, 2, М -Л, 1948

[2] Шуликовский, В И, Классическая дифференциальная геометрия, М, 1963

[3] Ефимов, Н В, Качественные вопросы деформаций поверхностей 《в малом》,《Тр матем ин-та АН СССР》, **30** (1949)

[4] Ефимов, Н В,《Успехи матем наук》, **3** (1948), 2, 47 – 158

[5] Погорелов, А В, Изгибание выпуклых поверхностей, М -Л, 1951

[6] Blaschke, W, Vorlesungen uber Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitatstheorie Elementare Differentialgeometrie, 1, Springer, 1921

[7] Кон Фоссен, С Э, Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М, 1959

М И Войцеховский 撰

【补注】 （一片）曲面的（等距）形变通常也称为弯曲（bending） 一个无穷小弯曲（infinitesimal bending）是曲面的一个无穷小形变，使得曲面上曲线的长度不变 形变的速率场称为弯曲场（bending field）．若一个弯曲场是曲面（嵌入 E^3 中）的一个刚性运动的速率场，则称为平凡的（trivial） 不容有非平凡无穷小弯曲的曲面称为刚性曲面（rigid surface） 一张正 Gauss 曲率的闭正则曲面是刚性的（Blaschke 定理（Blaschke theorem）） 有关无穷小弯曲和刚性的大量详细材料见 [5]，第 4 章

关于上面提到的极大主曲率半径的 Hilbert 定理可在 [A6] 中找到 由此即得最先被 H Liebmann 证明的结果，即球面是仅有的正常曲率的闭（无奇点）曲面

参考文献

[A1] Pogorelov, A V, Extrinsic geometry of convex surfaces, Amer Math Soc, 1973（译自俄文）

[A2] Huck, H, Roitsch, R, Simon, U, Vortisch, W, Walden, R, Wegner, B and Wendland, W, Beweismethoden der Differentialgeometrie im Grossen, Springer, 1973

[A3] Efimov, N V, Flachenverbiegung im Grossen, Akad Verlag, 1957（译自俄文）

[A4] Bianchi, L, Vorlesungen uber Differentialgeometrie, Teubner, 1910

[A5] Darboux, G, Lecons sur la theorie genérale des surfaces, 1 – 4, Chelsea, reprint, 1972

[A6] Hilbert, D, Ueber Flachen von konstanter Gausscher Krümmung, *Trans Amer Math Soc*, **2** (1901), 87 – 99

沈一兵 译

主基上的形变 [deformation over a principal base, изгибание на главном основании]

曲面 $F=F_0$ 的一个形变 F_t，使得在 F_t 下极端形变（extremal deformation）的方向保持不变 具有极端形变方向的曲线所构成的网在每个曲面 F_t 上都是共轭的，并称为形变的主基（principal base of the deformation） 例如，螺旋面有无数个主基，旋转曲面和一般管道曲面允许有一个以测地线作为一族网曲线的主基上的形变（也见 **Voss 曲面**（Voss surface））．研究主基上形变的问题是由 K M Peterson ([1]) 提出的，他在 1866 年证明 若曲面 F 等距变形到两曲面 F' 和 F''，使得 F 到 F' 的极端形变方向（因此，**形变的基**（base

of a deformation)）重合于 F 到 F'' 的极端形变方向，则存在曲面 F 的一个形变 F_t，它包含 F' 和 F''，且具有相同的极端形变方向 换言之，若 F 上的一个**共轭网**（conjugate net）可作为两个不同形变 F' 和 F'' 的基，则它是形变的主基

若已知曲面 F, F' 和 F''，则由主基上变形 F 而得的其余一切曲面 F_t 可由下列定理确定 设 κ 是在任一点 $M\in F$ 沿两族主基方向之一 σ 方向的 F 的法曲率，而 κ', κ'' 和 κ_t 分别是 F', F'' 和 F_t 在对应点沿对应方向的法曲率，则交比 $t=(\kappa^2, \kappa'^2, \kappa''^2, \kappa_t^2)$ 是一个与 F 上点 M 位置无关的常量

容有一个主基上形变的曲面可以只由主基的球面象来刻画 描述一个主基上的形变的方程可化为只包曲曲面的球面象线素的系数，并可取如下形式 $\partial\Gamma_{12}^1/\partial u=\partial\Gamma_{12}^2/\partial v=2\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2$（Kosser方程（Kosser equation）），其中 Γ_{12}^1，Γ_{12}^2 是曲面第三基本形式的 Christoffel 符号，而微分是沿着作成形变主基的坐标曲线 u, v 进行的 形变主基的球面象重合于 **Bianchi 曲面**（Bianchi surface）的渐近线的球面象，而 Bianchi 曲面是对应于主基上形变的 F 的无穷小形变的**旋转标形**（rotation indicatrix）（或共轭曲面），也重合于椭圆空间中一曲面（它是 F 的主基上形变的**旋转图**（rotations diagram））的渐近线的 Clifford 象 .

不是所有的曲面都具有主基，容有主基上形变的曲面构成一类特殊的曲面（[4]）. 运动基上的形变（deformation over a kinematic base）是主基上形变的推广，它定义为第二基本形式的系数 b_{ij} 满足方程 $b_{ij}A^{ij}=c$，其中 A^{ij} 是一个非蜕化的张量，c 是一个仅与曲面 F 的度量 g_{ij} 及其导数有关的函数

参考文献

[1] Петерсон, К М ,《Матем сб 》, **1** (1866), 391 – 438

[2] Каган, В Ф , Основы теории поверхностей, ч 2, М - Л , 1948

[3] Фиников, С П , Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи, М - Л , 1937

[4] Лузин, Н Н ,《Изв АН СССР Отдел техн наук》, **2** (1939), 81 – 106, **7** (1939), 115 – 132, **10** (1939), 65 – 84

М И Войцеховский 撰 沈一兵 译

形变收缩核 [deformation retract деформационный ретракт]

拓扑空间 X 的子集 A 称为 X 的形变收缩核，假如下述性质具备 X 的恒等映射同伦于一个将 X 映入 A 的映射，并且在伦移中，A 的每点保持不动 . 如果伦移时 $X\setminus A$ 的点始终保持在 $X\setminus A$ 内，则 A 称为强形变收缩核（strong deformation retract） 空间 X 的形变收缩核与 X 有相同的**同伦型**（homotopy type） 亦见**收缩核**（retract），**拓扑空间的收缩核**（retract of a topological space）

Е Г Скляренко 撰 孙以丰 译

形变张量 [deformation tensor , деформаций тензор]

描述物体各点形变后的位置与形变前的位置之间的关系的张量 它是二阶对称张量

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right], \qquad (*)$$

其中 x_i 是物体一点在形变前的 Discartes 直角坐标，u_i 是位移张量 **u** 的坐标 在弹性力学中，形变张量分解为两个分张量

$$u_{ik}=u'_{ik}+u''_{ik}$$

张量 u'_{ik} 描述空间形变，它称为球面形变张量（spherical deformation tensor）

$$u'_{ik}=\frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}$$

张量 u''_{ik} 仅仅描述形状的变化，其对角线元素之和等于零

$$u''_{ik}=u_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}$$

张量 u''_{ik} 称为形变张量的偏斜（deviator of a deformation tensor）

在微小形变的情况下，二阶量可以忽略，形变张量（*）由下式定义

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right]$$

在球面坐标 r, θ, φ 中，线性化形变张量（*）具有下列形式

$$u_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r}{r},$$

$$u_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_\theta}{r}\operatorname{cotan}\theta+\frac{u_r}{r},$$

$$2u_{\theta\varphi}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-u_\varphi\operatorname{cotan}\theta\right]+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi},$$

$$2u_{r\theta}=\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta},$$

$$2u_{\varphi r}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}$$

在柱面坐标 r, φ, z 中，则具有下列形式

$$u_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_r}{r}, \quad u_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$2u_{\varphi z}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad 2u_{rz}=\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r},$$

$$2u_{r\varphi}=\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}$$

参考文献

[1] Ландау, Л Д , Лифшиц, Е М , Теория упругости, 3 изд , М , 1965 (英译本 Landau, L D and Lifshits, E M , Theory of elasticity, Pergamon, 1959)

[2] Физический энциклопедический словарь, т 1, М , 1960

【补注】 严格地说，(*) 中的 u_{ik} 并不是数学意义下的张量，它们不能作为张量进行变换 "张量" u_{ik} 也称为应变张量 (strain tensor).

设 $dl=(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)^{1/2}$ 和 $dl'=(dx_1'^2+dx_2'^2+dx_3'^2)^{1/2}$ 表示形变前和形变后的线元（无穷小距离）. 这时，$dl'^2-dl^2=2\sum u_{ik}dx_idx_k$，于是 u_{ik} 描述当物体发生形变时其线元的变化

参考文献

[A1] Eringen, A C , Mechanics of continua, Pergamon, 1967

张鸿林 译

退化分布 [degenerate distribution , Вырожденное распределение], n 维 Euclid 空间的

支撑在某个维数小于 n 的（线性）流形上的**概率分布**(probability distribution). 否则，称分布是非退化的(non-degenerate) 在二阶矩有限的情况下，退化分布可用其协方差阵(或相关阵)的秩 r 小于 n 来刻画 这个 r 也是包含该退化分布支撑的线性流形的最小维数 显然，退化分布的概念可以推广到线性空间中的分布. 退化分布有时称作反常分布 (improper distribution)，而非退化分布有时称为正常分布 (proper distribution)

А В Прохоров 撰

【补注】 在 Bayes 统计中 (见 **Bayes 方法** (Bayesian approach)，**经验 Bayes 方法** (Bayesian approach, empirical))，反常分布 (improper distribution) 指的是总质量为无限的测度，并作概率分布使用 亦见**反常分布** (improper distribution)

李国英 译 吴启光 校

退化椭圆型方程 [degenerate elliptic equation , вырожденное эллиптическое уравнение]

偏微分方程

$$F(x, Du)=0, \tag{1}$$

其中实值函数 $F(x, q)$ 对于所有实的 ξ 满足条件

$$\sum_{|\alpha|=m}\frac{\partial F(x, Du)}{\partial q_\alpha}\xi^\alpha\geqslant 0, \tag{2}$$

并且存在一个 $\xi\neq 0$，使得 (2) 变为等式. 这里 x 是 n 维向量 $(x_1, \quad, x_n)$，u 是未知函数，α 是多重指标 $(\alpha_1, \quad, \alpha_n)$，$Du$ 是分量为

$$D^\alpha u=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha} \quad x_n^{\alpha_n}}$$

的向量，$|\alpha|=\alpha_1+\quad+\alpha_n$，方程 (1) 中诸导数的阶都不超过 m，诸 q_α 是向量 q 的分量，ξ 是 n 维向量 $(\xi_1, \quad, \xi_n)$，$\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1} \quad \xi_n^{\alpha_n}$ 如果对于某个 x 和 Du 以及所有实的 $\xi\neq 0$，关系式 (2) 中严格的不等式成立，那么方程 (1) 在 (x, Du) 处是椭圆的 方程 (1) 在对于某个实的 $\xi\neq 0$ 使不等式 (2) 成为等式的那些点 (x, Du) 处退化. 如果等式仅在所考虑的区域的边界上成立，则称该方程在区域的边界上是退化的 (degenerate) 研究得最充分的方程是二阶退化椭圆型方程

$$\sum a^{ik}(x)u_{x_ix_k}+\sum b^i(x)u_{x_i}+c(x)u=f(x),$$

其中矩阵 $\|a^{ik}(x)\|$ 对于所考虑的所有 x 值是非负定的

亦见**退化偏微分方程** (degenerate partial differential equation) 及其参考文献.

А. М Ильин 撰 陆柱家 译

退化平衡位置[degenerate equilibrium position, вырожденное положение равновесия], 常微分方程组 $\dot{x}=f(x)$ 的

点 x_0，对于它 $f(x_0)=0$ 且矩阵 $(\partial f/\partial x)\ (x_0)$ 具有零本征值. 研究得最广泛的退化平衡位置是二维系统的那些退化平衡位置，已有一些现成的方法用来研究在该位置的邻域内轨道的特性，这些方法包括 I Bendixson 法 ([1], [2], [4])和 M Frommer 法 ([3], [4]) 在多于二维的空间中，有人推荐使用几何方法，本质上，这些方法在于分离出方程右端的主要项并证明从省略方程过渡到完整方程时轨道的特性保持不变 ([5]). 如果映射 f 是充分地可微或解析的，则可认为平衡位置的退化度等于给定的退化平衡位置由于 f 变化而分解成的非退化平衡位置的数目，而 f 的变化从 C^r 拓扑的意义来说是很小的

参考文献

[1] Bendixson, I , Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Acta Math* , **24**(1901), 1 – 88

[2] Андронов, А А , Леонтович, Е А , Гордон, И И , Майер, А Г , Качественная теория динамических систем второго порядка, М , 1966 (英译本 Andronov, A A , Leontovich, E A , Gordon, I I and Maier, A G , Qualitative theory of second-order dynamic systems, Wiley, 1973)

[3] Frommer, M , Die Integralkurven einer gewohnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen, *Math Ann* , **99** (1928), 222 – 272

[4] Немыцкий, В В , Степанов, В В , Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд , М -Л , 1949 (中译本 B B 涅梅茨基，B B 斯捷巴诺夫，微分方程定性论，科学出版社，1956)

[5] Брюно, А Д, 《Изв АН СССР Сер матем》, **29** (1965), 2, 329 – 364

Л Э Рейзинь 撰

【补注】 关于**平衡位置** (equilibrium position) 邻域内的轨道特性的研究，亦见 **Frommer 法** (Frommer method)

参考文献

[A1] Hirsch, M W and Smale, S, Differential equations, dynamical systems and linear algebra, Acad Press, 1974

[A2] Hale, J K, Ordinary differential equations, Wiley, 1980 (中译本 J K，黑尔，常微分方程，人民教育出版社，1980).

周芝英 译 叶彦谦 校

退化对策 [degenerate game, вырожденная игра]，可分对策 (separable game)，类多项式对策 (polynomial-like game).

一种 n 人**非合作对策** (non-cooperative game)，在这种对策中，每个局中人 i 的支付函数 $K_i(x_1, \quad, x_n)$ 是退化的，即有形式

$$\sum_{j_1} \sum_{j_n} a^{(i)}_{j_1, \quad j_n} r^{(i)}_{j_1}(x_1) \quad r^{(i)}_{j_n}(x_n),$$

这里 $r^{(i)}_{j_k}(x_k)$, $1 \leqslant j_k \leqslant n^{(k)}$，均为定义在局中人 k 的纯策略集 $X_k(k=1, \quad, n)$ 上的函数，在单位正方形上的二人零和退化对策的情形中，局中人 I 的支付函数 $K(x, y)$ 为

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_i(x) s_j(y)$$

这种对策归结为一个有限二人零和**凸对策** (convex game) $\langle R, S, K\rangle$，这里 R 是由 m 维曲线 $r_i = r_i(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $i=1, \quad, m$，张成的 m 维空间中的凸集，而 S 是由曲线 $s_j = s_j(y)$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $j=1, \quad, n$，张成的 n 维空间中的凸集，支付函数 $K(r, s)$ 有形式

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_i s_j, \ r \in R, \ s \in S$$

特别地，如果 $r_i(x) = x^i$, $s_j(y) = y^j$，那么此退化对策称为多项式对策 (polynomial game) 在任一单位正方形上的二人零和退化对策中，局中人 I 有一个**最优混合策略**，它的支集至多由 m 个点构成，并且如果此对策是多项式的，那么它至多由 $m/2$ 个点构成 (在计算点数中，赋予终点的权为 1/2)．类似地，局中人 II 有一个最优混合策略，它的支集至多由 n 个点构成，并且在多项式对策情形下，它至多由 $n/2$ 个点构成．

参考文献

[1] Dresher, M, Karlin, S and Shapley, L S, Polynomial games, in contributions to the theory of games I, *Ann Math Studies*, Princeton Univ Press, **24** (1950), 161 – 180

[2] Gale, D and Gross, O, A note on Polynomical and seprable games, *Pacific J Math*, **8** (1958), 4, 735 – 741

Г Н Дюбин 撰 胡宣达 译

退化双曲型方程 [degenerate hyperbolic equation, вырожденное гиперболическое уравнение]

偏微分方程

$$F(t, x, Du) = 0, \qquad (*)$$

其中函数 $F(t, x, q)$ 满足下述条件 对于所有实的 ξ，多项式

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F(t, x, Du)}{\partial q_\alpha} \lambda^{\alpha_0} \xi^{\alpha}$$

的根都是实的，并且存在 $\xi \neq 0$, t, x 和 Du，对于这些值或者某些根相等，或者 λ^m 的系数为零．这里 t 是自变量，它通常被解释为时间，x 是 n 维向量 $(x_1, \quad, x_n)$，$u(t, x)$ 是未知函数，α 和 α' 是多重指标，$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \quad, \alpha_n)$，$\alpha' = (\alpha_1, \quad, \alpha_n)$，$Du$ 是分量为

$$D^{\alpha} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \quad \partial x_n^{\alpha_n}}$$

的向量，$|\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \quad + \alpha_n$，方程 (*) 中诸导数的阶都不超过 m，诸 q_α 是向量 q 的分量，ξ 是 n 维向量 $(\xi_1, \quad, \xi_n)$，$\xi^{\alpha} = \xi_1^{\alpha_1} \quad \xi_n^{\alpha_n}$

亦见**退化偏微分方程** (degenerate partial differential equation) 及其参考文献

А М Ильин 撰 陆柱家 译

退化超几何函数 [degenerate hypergeometric function, вырожденная гипергеометрическая функция]

同**汇合型超几何函数** (confluent hypergeometric function)

退化积分方程 [degenerate integral equation, вырожденное интегральное уравнение]

具有**退化核** (degenerate kernel) 的线性 Fredholm 积分方程．其一般形式是

$$\lambda x(P) - \int_D \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(P) \psi_i(Q) x(Q) dQ = f(P) \qquad (1)$$

这里积分是在 Euclid 空间中的区域 D(通常是 n 维区域) 上进行的，P 和 Q 是 D 的点，λ 是实或复参数，(1) 中出现的函数在 D 上都是平方可积的．求退化积分方程的具有下列形式的解

$$x(P) = \frac{1}{\lambda} f(P) + \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(P),$$

其中系数 c_i 可由线性代数方程组

$$\lambda c_j + \sum_{i=1}^{N} c_i \int_D \psi_j(Q) \varphi_i(Q) dQ = \frac{1}{\lambda} \int_D f(P) \psi_j(P) dP \qquad (2)$$

求得 如果对于一个给定的 λ，方程组 (2) 具有唯一解，则方程 (1) 也是唯一可解的 使得方程组(2)的行

列式等于零的值 $\lambda \neq 0$ 是特征值 （这样的值不会多于 N个）退化积分方程（1）的可解条件由 **Fredholm 抉择定理**(Fredholm alternative)给出 如果 $\lambda = 0$，则退化积分方程（1）是第一类 Fredholm 方程，为使其可解，必要和充分条件是函数 f 可以表示为函数 φ_i 的线性组合．这时，方程(1)具有可以表示为下列形式的解

$$x(P) = \sum_{j=1}^{N} d_j \psi_j(P) + \psi(P),$$

其中系数 d_j 唯一确定，而 ψ 是满足条件

$$\int_D \psi(P)\psi_j(P)dP = 0,\ j = 1, 2, \quad , N$$

的任何函数．

退化积分方程在 Fredholm 方程的一般理论中的重要性基于下述事实 任何第二类 Fredholm 方程的解可以由退化积分方程的解在均方度量(或其他一些度量)下近似到任何精确程度．其退化核可以在某种意义下近似原方程的核

下列形式的线性算子方程是退化积分方程的抽象化和推广

$$\lambda x - Ax = f,$$

其中 x 和 f 属于 Banach 空间 E，算子 A 具有有限维值域 这种方程的性质与退化积分方程(1)的性质是类似的．

参考文献

[1] Михлин, С Г , Лекции по линейным интегральным уравнениям, М , 1959 (英译本 Mikhlin, S G , Linear integral equations, Hindushtan, Publ Comp , Delhi, 1960)

А. Б. Бакушинский 撰

【补注】 关于由具有退化核的方程的逼近，见**退化核法**(degenerate kernels, method of)

参考文献

[A1] Moiseiwitsch, B L , Integral equations, Longman, 1977
[A2] Hochstadt, H , Integral equations, Wiley (Interscience), 1973
[A3] Kantorovich, L V and Krylov, V I , Approximate methods of higher analysis, Noordhoff, 1958 (译自俄文)
[A4] Zabreyko, P P , et al , Integral equations - a reference text, Noordhoff, 1958 (译自俄文)
[A5] Goldberg, S and Gohberg, I [I Gokhberg], Basic operator theory, Birkhauser, 1981,

张鸿林 译

退化核 [degenerate kernel, вырожденное ядро]

线性积分 **Fredholm 算子** (Fredholm operator) 的具有下列形式的核

$$\sum_{i=1}^{N} \varphi_i(P)\psi_i(Q),$$

其中 P 和 Q 是 Euclid 空间中的点．

А Б Бакушинский 撰

【补注】 具有平方可积核的线性 Fredholm 积分算子，如果看作为 L_2 上的算子时，则具有有限维值域，当且仅当其核为退化的

第二类线性 Fredholm 积分算子可以化为线性代数方程组，如果其核为退化的

参考文献

[A1] Hochstadt, H , Integral equations, Wiley (Interscience), 1973
[A2] Goldberg, S and Gohberg, I [I Gokhberg], Basic operator theory, Birkhouser, 1981
[A3] Kantorovich, L V and Krylov, V I , Approximate methods of higher analysis, Noordhoff, 1958 (译自俄文)
[A4] Zabreiko, P P , et al , Integral equations - a reference text, Noordhoff, 1958 (译自俄文)

张鸿林 译

退化核法 [degenerate kernels, method of , вырожденных ядер метод]

为了求某些类型的线性或非线性积分方程的近似(数值)解而构造近似方程的一种方法．适宜用这种方法求解的积分方程的主要类型是一维线性第二类 Fredholm 积分方程 应用退化核法求解这类方程在于用形如

$$K_N(x, s) = \sum_{n=1}^{N} a_n(x) b_n(s)$$

的退化核来近似代替积分方程

$$\lambda\varphi(x) + \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds = f(x) \tag{1}$$

的核 $K(x, s)$，然后解 Fredholm **退化积分方程** (degenerate integral equation)

$$\lambda\tilde{\varphi}(x) + \int_a^b K_N(x, s)\tilde{\varphi}(s)ds = f(x) \tag{2}$$

于是，解方程（2）化为解线性代数方程组．可以用不同方法由核 $K(x, s)$ 求得退化核 $K_N(x, s)$，例如，把这个核展开为 Taylor 级数或 Fourier 级数（其他方法见 **Beteman 法** (Beteman method)，**带形法（积分方程）** (strip method (integral equations)))

退化核法可应用于形如(1)的积分方程的方程组、具有比较简单的积分区域的多维方程、以及某些非线性的 Hammerstein 型方程(见 **Hammerstein 方程** (Hammerstein equation))．

参考文献

[1] Канторович, Л В , Крылов, В П , Приближенные методы высшего анализа, 5 изд , М -Л , 1962 (英译本 Kantorovich, L V and Krylov, V I , Approximate methods of higher analysis, Noordhoff, 1958)

А Б Бакушинский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Baker, C T H, The numerical treatment of integral equations, Clarendon Press, 1977

[A2] Atkinson, K E, A survey of numerical methods for the solution of Fredholm integral equations of the second kind, SIAM, 1976

[A3] Goldberg, S and Gohberg, I [I Gokhberg], Basic operator theory, Birkhauser, 1981

[A4] Moiseiwitsch, B L, Integral equation, Longman, 1977

张鸿林 译

退化矩阵 [degenerate matrix, вырожденная матрица], 奇异矩阵 (singular matrix)

一个方阵 (square matrix), 其行列式 (determinant) 等于零.

张鸿林 译

退化抛物型方程 [degenerate parabolic equation, вырожденное параболическое уравнение]

偏微分方程

$$F(t, x, Du) = 0,$$

其中函数 $F(t, x, q)$ 有下述性质 对于某个偶自然数 p, 对于所有实的 ξ, 多项式

$$\sum_{\alpha\ p\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} \frac{\partial F(t, x, Du)}{\partial q_\alpha} \lambda^{\alpha_0}(\imath\xi)^\alpha$$

的所有的根 λ 有非正实部, 并且, 对于某个 $\xi \neq 0$, t, x 和 Du, 对于某个根 λ 有 $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, 或者对于某个 t, x 和 Du, 最高次 $\lambda^{m/p}$ 的系数为零. 这里 t 是自变量, 它通常被解释为时间, x 是 n 维向量 $(x_1, \cdots, x_n)$, $u(t, x)$ 是未知函数, α 是多重指标 $(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, Du 是分量为

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

的向量, 其中 $p\alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \leqslant m$, $|\alpha| = \alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_n$, q 是分量为 q_α 的向量, ξ 是 n 维向量 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$, $(\imath\xi)^\alpha = (\imath\xi_1)^{\alpha_1} \cdots (\imath\xi_n)^{\alpha_n}$. 亦见**退化偏微分方程** (degenerate partial differential equation) 及其参考文献.

А. М. Ильин 撰 陆柱家 译

退化偏微分方程 [degenerate partial differential equation, вырожденное уравнение с частными производными]

一个偏微分方程, 在它的定义域或定义域的边界的某些点处它的型退化 方程或方程组在某个点处的型是由其系数间的一个或多个代数关系定义的 这些关系通常由一些严格的不等式组成 如果在所考虑的区域的某些点处涉及的不等式是非严格的, 而不是严格的, 那么此时论及型的退化, 而该方程 (或方程组) 即称为退化的 (degenerate) 可区分为**退化椭圆型方程** (degenerate elliptic equation), **退化双曲型方程** (degenerate hyperbolic equation) 和**退化抛物型方程** (degenerate parabolic equation) (或这样的方程组).

例

$$xu_{x^4} + u_{y^4} + u_{z^4} + u_x = 0$$

在半空间 $x \geqslant 0$ 中是退化椭圆型方程,

$$y^2 u_{yy} - u_{xx} = 0$$

在全平面是退化双曲型方程,

$$-u_t + u_{yy} + yu_x = 0$$

在区域 $t \geqslant 0$ 中是退化抛物型方程,

$$yu_x - v_y = 0,\ u_y + v_x = 0$$

对于 $y \geqslant 0$ 是退化椭圆型方程组.

在边界层理论中, 在无矩壳理论中, 在扩散过程理论特别在 Brown 运动理论中, 以及在物理和力学的许多别的问题中会遇到退化方程

通过提出两个密切相关的问题来研究退化方程 1) 由于型的退化而导致的提法有所改变的边值问题的可解性的证明, 2) 解的一些性质 —— 类似于非退化方程的解的性质 (光滑性, 对于椭圆型和抛物型方程的 Harnack 不等式, 等等) —— 的确立.

二阶退化椭圆型和抛物型方程得到了最充分的研究 (严格地讲, 一个抛物型方程亦可看成是满足一些附加条件的退化椭圆型方程). 如果型的退化不仅发生在边界上, 而且也发生于内点 (例如, 在所考虑的区域的所有点), 那么这样的方程可称为具非负特征形式的方程 (equations with a non-negative characteristic form), 椭圆 - 抛物型方程 (elliptic-parabolic equations) 或者超抛物型方程 (ultra-parabolic equations)

退化方程的一个特性是其边值问题的特殊提法. 有时必须把边界条件加于边界的一部分而不是整个边界上. М В. Келдыш 首先注意到椭圆型方程边界条件的提法对于它在边界上型的退化特性的依赖性 对于一般的二阶椭圆 - 抛物型方程

$$a^{ik}(x)u_{x_ix_k} + b^i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x),$$

$$a^{ik}\xi_i\xi_k \geqslant 0, \qquad (*)$$

第一边值问题的提法如下 令 Γ 是所考虑的区域 D 的边界, 令 $n = (n_1, \cdots, n_m)$ 是 Γ 的内法线, 并令 $\widetilde{\Gamma}$ 是 Γ 的一部分, 在其上有 $a^{ik}n_in_k = 0$ 和 $(b^i - a^{ij}_{x_j})n_i \geqslant 0$. 要求方程 $(*)$ 在 D 中这样的解, 它满足 $U|_{\Gamma\setminus\widetilde{\Gamma}} = \varphi$ 现已证明了此问题的广义解的存在性和唯一性, 并

给出了关于广义解的光滑性的一些充分条件．

由于一阶方程可以看成是退化方程的一个特殊情形，显然，如果边界条件不是充分光滑的，那么退化椭圆型方程的解，一般说来，在其定义域内部将不是光滑的 有一些例子表明，即使退化方程的边界条件和系数是无穷次可微的，它的解可以不是无穷次可微的 一般的二阶退化椭圆型方程的亚椭圆性条件已经得到

可以通过几何学的和概率论的方法来研究二阶退化椭圆型和退化抛物型方程的解的性质

退化双曲型方程的大多数的研究与在区域的边界上退化的两个自变数的二阶方程有关．这些研究最初是由混合型方程以及与其有关的气体动力学问题的研究推动的 为了说明这里所发生的问题，考虑具有主部 $u_{yy}-y^m u_{xx}$ 的方程的 Cauchy 问题（$u(x,0)=\alpha(x)$, $u_y(x,0)=\beta(x)$）当 $m<2$ 时此问题有唯一解，而当 $m>2$ 时 Cauchy 问题通常是不适定的．对于具有主部 $y^m u_{yy}-u_{xx}$ 的方程，数据给在退化线上的 Cauchy 问题当 $0<m<1$ 时是适定的．当 $m\geqslant 1$ 时，如在椭圆型方程的情形中一样，问题的提法通常有所改变 代替 $u_y(x,0)$ 而给出 $\lim_{y\to 0}\rho(y)u_y(x,y)$，其中 $\rho(y)$ 是某个依赖于方程系数的正函数

对于在初始超平面 $t=0$ 上和在所考虑的区域的内部为退化的多个空间变量的双曲型方程

$$u_{tt}-(a^{ij}(t,x)u_{x_i})_{x_j}+b^i(t,x)u_{x_i}+$$
$$+b^0(t,x)u_t+c(t,x)u=f,$$

在某些条件下 Cauchy 问题的适定性已被证明 这里最本质的条件是不等式

$$\alpha t(b^i\xi_i)^2\leqslant Aa^{ij}\xi_i\xi_j+a_t^{ij}\xi_i\xi_j$$

的成立，其中 α 和 A 是正常数．

对于线性退化方程所得到的一些结果也适用于拟线性方程．

参考文献

[1] Олейник, О А Радкевич, Е В, Итоги науки Математический анализ 1969, М, 1971, 7－252（中译本 О А 奥列尼克，Е В 拉德克维奇，具非负特征形式的二阶微分方程，科学出版社，1986）

[2] Смирнов, М М, Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, М, 1966

А М Ильин 撰 陆柱家 译

表示的退化系列 [degenerate series of representations, вырожденная серия представлений]

半单 Lie 群 G 的由其非极小抛物子群 P 的特征标诱导的表示集 设 Π 为基础根系，使得 G 的 Borel 子群 B 的 Lie 代数由 **Cartan** 子代数及所有根向量 $e_\alpha(\alpha<0)$ 生成 所有包含 B 的抛物子群 P 和 Π 的所有子系集 $\Pi_0\subset\Pi$ 之间存在一个一一对应，当 Π_0 非空时 $P\neq B$，群 P 的 Lie 代数由 Cartan 子代数，$e_\alpha(\alpha<0)$ 及 $e_\alpha(\alpha\in\Pi_0)$ 生成．设 P 在函数类 $C^\infty(G)$ 中的特征标 χ 诱导的群 G 的表示为 $\pi(\chi)$ 存在特征标 χ，使得 $\pi(\chi)$ 能扩充为群 G 在 $L^2(Z)$ 上的酉表示，这里 Z 为 G 的子群，其 Lie 代数由向量 $e_\alpha(\alpha>0,\alpha\notin\Delta_0)$ 生成，这里 Δ_0 是 Π_0 的加性包．这类表示称为表示的基本退化系列中的表示．表示的补退化系列可用 $\pi(\chi)$ 中其他标量积扩充 $\pi(\chi)$（关于 χ 的某些值）而得到．群 $G=SL(n,\mathbf{C})$ 表示的退化系列中的表示是不可约的．

参考文献

[1] Гельфанд, И М, Наймарк, М А, 《Тр Матем ин-та АН СССР》, 1950, т 36

[2] Gross, K I, The dual of a parabolic subgroup and a degenerate principal series of Sp(n, C), *Amer J Math*, **93** (1971), 2, 398－428

Д П Желобенко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Speh, B and Vogan, D A jr, Reducibility of general principal series representations, *Acta Math*, **145** (1980), 227－299

[A2] Vogan, D A jr, The unitary dual of GL(n) over an archimedean field *Invent Math*, **83** (1986), 449－505

许以超 译 石生明 校

退化概率 [degeneration, probability of, вырождения вероятность]

分支过程（branching process）中在时刻 t 没有粒子的概率．设 $\mu(t)$ 是具有一种粒子的分支过程在时刻 t 的粒子数，则退化概率

$$\mathsf{P}_0(t)=\mathsf{P}\{\mu(t)=0\mid\mu(0)=1\}$$

随时间 t 的增加而不减，值

$$q=\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}_0(t)$$

称为无穷时间的退化概率（probability of degeneration in infinite time）或简单地称为退化概率（probability of degeneration） 如果 τ 是从过程的开始到最后一个粒子消失的时间，那么 $\mathsf{P}\{\tau<t\}=\mathsf{P}_0(t)$ 且 $\mathsf{P}\{\tau<\infty\}=q$ 已经对分支过程的各种模型研究了当 $t\to\infty$ 时 $\mathsf{P}_0(t)$ 收敛到 q 的速度

В П Чистяков 撰

【补注】（在无穷时间中的）退化概率通常称为（无穷时间的）灭绝概率（probability of extinction (in infinite time)）．

参考文献

[A1] Athreya K B, Ney, P E, Branching processes, Springer, 1972

[A2] Harris, T E, The theory of branching Processes, Springer, 1963

刘秀芳 译

度 [degree ; градус]

平面角的度量单位，等于直角的 1/90，用 ° 来表示 1度被分为60分 (60′) 或 3600秒 (3600″)．直角具有90度，平角具有180度．也用度这个单位来度量圆弧 (一个整圆具有360度)． Е В Шикин 撰

【补注】 由于计算机的普遍使用和精确度不断增加，往往采用小数进行计算，而不再采用度、分和秒

在其他许多方面也使用 “度” 这个词，例如**映射度** (degree of a mapping)、不可解度 (degree of unsolvability)、不可约度 (degree of irrationlity) 等等．当然，度也是各种温标中温度度量单位的名称

张鸿林 译

映射度 [degree of a mapping , степень отображения]

两个相同维数紧连通流形之间的连续映射 (continuous mapping) f $(M, \partial M) \to (N, \partial N)$ 的度 (degree) 是一个整数 $\deg f$，使得 $f_*(\mu_M) = \deg f \cdot \mu_N$，其中 μ_M，μ_N 分别为流形 M 与 N 的**基本类** (fundamental class)，关于系数环 $\mathbf{Z}$ 或 $\mathbf{Z}_2$ 而取的，而 f_* 为诱导映射．对于不可定向流形，映射度模2唯一确定．若 f $M \to N$ 为两个闭微分流形之间的可微映射，则模2的 $\deg f$ 即等于 f 的任一正则值 y 的逆象集的点数．在可定向流形的情形下，

$$\deg f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} J_x ,$$

其中 $\operatorname{sign} J_x$ 为 f 在点 x 的 Jacobi 行列式的正负号 (Brouwer 映射度 (Brouwer mapping degree))

对于连续映射 f $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ 以及 f^{-1} 中的孤立点 x，可以定义点 x 处的局部映射度 (local mapping degree) $\deg_x f$ $\deg_x f = \deg \pi \cdot h$，其中 h 是 f 在小球面

$$S_\varepsilon^n = \partial B_\varepsilon^n ,\ B_\varepsilon^n \cap f^{-1}(0) = x \in \operatorname{Int} B_\varepsilon^n$$

上的限制，π 为从0点向单位球面的射影．对于可微映射 f 则有公式

$$|\deg_x f| = \dim Q(f) - 2\dim I ,$$

其中 $Q(f)$ 为在0处光滑函数芽 (germ) 所构成的环关于 f 的分量所生成理想的商环，I 为商环关于性质 $I^2=0$ 的最大理想．令 $J_0 \in Q(f)$ 表示映射 f 的 Jacobi 行列式所代表的等价类，则对于满足 $\varphi(J_0) > 0$ 的线性型 $\varphi . Q(f) \to \mathbf{R}$，公式 $\deg_x f = \operatorname{Index}\langle\ ,\ \rangle_\varphi$ 成立，其中 $\langle p, q\rangle_\varphi = \varphi(p, q)$ 是 $Q(f)$ 上的对称双线性型．

参考文献

[1] Dold, A , Lectures on algebraic topology, Springer, 1980

[2] Milnor, J , Topology from the differentiable viewpoint, Univ Press of Virginia, 1965

[3] Arnol'd, V I , Varchenko, A N and Husein-Zade, S M , Singularities of differentiable maps, Birkhauser, 1985 (译自俄文)

[4] Eisenbud, D and Levine, H , An algebraic formula for the degree of a C^∞ map germ, *Ann of Math* , **106** (1977), 1, 19 - 38

[5] Wallace, A , Differential topology, Benjamin, 1968

А В Хохлов 撰 孙以丰 译

点的度 [degree of a point , степень точки]

一点 $M_0 = (x_0, y_0)$ 关于圆心在点 (a,b) 的圆

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

的度，是数

$$p=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-R^2$$

如果 M_0 处于圆内，则有 $p<0$，如果 M_0 处于圆上，则有 $p=0$，如果 M_0 处于圆外，则有 $p>0$ 点 M_0 关于一个圆的度可以表示为向量 $\overrightarrow{M_0M_1}$ 和 $\overrightarrow{M_0M_2}$ 之积，其中 M_1 和 M_2 是这个圆与通过点 M_0 的任意直线的两个交点 特别是，点 M_0 关于一个圆的度等于由 M_0 向这个圆所引切线的长度的平方．

平面上满足下列条件的一切圆的集合构成一个圆**网** (net)，一个给定点关于这些圆具有相同的度 关于两个不同心的圆具有相同度的一切点的集合构成一个根轴 (radical axis)

一个点关于一个球面的度，也可按类似方式来定义 满足下列条件的一切球面的集合构成一个**球面罗** (web of spheres) 一个给定点关于这些球面具有相同的度 满足下列条件的一切球面的集合构成一个**球面网** (net) 一条直线 (根轴 (radical axis)) 上的点关于这些球面具有相同的度 (不同点具有不同的度) 满足下列条件的一切球面的集合构成一个球面**丛** (bundle) 一个平面 (根平面 (radical plane)) 上的点关于这些球面具有相同的度 (不同点具有不同的度)．

А Б. Иванов 撰

【补注】 这个概念在习惯上称为点 M_0 关于圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ 的幂 (power)

参考文献

[A1] Coolidge, J L , A treatise on the circle and the sphere, Clarendon Press, 1916

张鸿林 译

不可判定度 [degree of undecidability , неразрешимости степень]

自然数序列的子集上 Turing 归约性 $\leqslant_T$ 引进的一等价关系 $\equiv_T (A \equiv_T B$，若 $A \leqslant_T B$，且 $B \leqslant_T A)$ 换言之，两集合有同一不可判定度，若对其中任一个集合有一能行的判定步骤，把任意数是否属于此集合的问

题归约到另一集合的归属问题（亦见**算法可归约性**(algorithmic reducibility)）．不可判定度也可定义为处处有定义的函数（把自然数序列映射到它自身）的集合在相对递归性关系 $\leqslant_R$ 下的等价类 （一函数 f 相对于函数 g 是递归的 (recursive)，若 f 有一递归定义，在其中除了通常的初始函数外，g 也作为初始函数出现） 在此情形下，函数的不可判定度也称为不可计算度 (degree of non-computability)，也称为该函数的 Turing 度 (Turing degree) 或 T 度 (T-degree) 对函数和集合的两种途径而言，所有不可判定度集组成一上**半格** (semi-lattice)，且集合和函数的不可判定度的上半格同构 正是由于此而取这等价的定义．

不可判定度的上半格的结构已被详尽地研究（见[1]－[3]） 这上半格的**初等理论** (elementary theory)是不可解的（[6]）

在不可判定度集上定义了一个跃变运算 (jump operation)，对每个不可判定度 a 赋予另一个度 a'，它是相对于 a 的递归可枚举不可判定度中最大的度．(集合 B 相对于集合 A 是递归可枚举的 (recursively enumerable)，若 B 是相对于 A 递归的集合的投影，且一不可判定度 b 称为相对于另一不可判定度 a 是递归可枚举的 (recursively enumerable)，若 b 包含一个相对于某 $A\in a$ 是递归可枚举的集合 B)跃变运算是单调的 $a\leqslant b$ 蕴涵 $a'\leqslant b'$ (但反向不成立) 对每个不可判定度 $a\geqslant 0'$ 有另一不可判定度 b，使得 $a=b'$ 不可判定度 $0^{(n)}$ 在算术集的 Σ_n 和 Π_n 类中是最大的且是可以达到的 特别有趣的是，不可判定的递归可枚举度（递归可枚举的不可判定度）在一切不可判定度的上半格中组成一个子上半格 不可判定递归可枚举度中最大的是 $0'$（完全集的不可判定度） 除 0（递归集的不可判定度）和 $0'$ 之外是否有其他递归可枚举度的问题（所谓 Post 问题 (Post problem)）已有了肯定答案（见[4]，[5]） 为解决此问题发展了**优先法** (priority method) 不可判定递归可枚举度的上半格（和一切不可判定度不同）是稠密的，且每个可数偏序集可嵌入其中 对数学中出现的多种类型的可判定性问题 (decidability problems)，要寻求对一定集合的判定算法（例如，群论中的字的（等同）问题，对一有穷可公理化理论的判定问题等），已经证明，存在所讨论的类型的不可判定问题，它们有任意不可判定递归可枚举度

已经研究了最重要类型的递归可枚举集的不可判定度．(于是一切**创造集** (creative set) 有不可判定度 $0'$，单纯集可以有任何非零不可判定递归可枚举度，且任何满足 $a'=0''$ 的不可判定递归可枚举度是极大的)

也可对 Turing 归约以外的算法的归约类型引进度的概念（特别地，有 1 度，m 度、tt 度和其他度），而且已研究了不可判定度是否会落入这些“更细”的度．某些这种中间归约性的类型涉及执行算法的工作量和算法描述的复杂性的估计（亦见**算法信息论** (algorithmic information theory)）

参考文献

[1] Rogers, jr., H., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967

[2] Shoenfield, J., Degrees of unsolvability, North-Holland, 1971

[3] Sacks, G. E., Degrees of unsolvability, Princeton Univ Press, 1963

[4] Мучник, А. А.,《Докл АН СССР》, **108** (1956), 2, 194－197

[5] Friedberg, R. M., Two recursively enumerable sets of incomparable degrees of unsolvability (solution of Post's problem), *Proc Nat Acad Sci USA*, **43** (1957), 236－238

[6] Lachlan, A. H., Distributive intial segments of the degrees of unsolvability, *Z Math Logik und Grundl Math*, **14** (1968), 457－472

В. А. Душский 撰

【补注】 tt 归约见**真假值表可归约性** (truth-table reducibility)

杨东屏 译

Dehn 引理 [**Dehn lemma**, **Дена лемма**]

设一个三维流形 M 包含着一个具有自交和以无奇异点的简单闭多角曲线 C 作为边界的二维胞腔 D，那么存在一个带有可以分段线性地嵌入 M 中的边界 C 的二维胞腔 D_0 Dehn 引理是在[1]中引进的，但它的证明有缺陷，完全的证明见[2] 下面的结果（称为闭路定理 (loop theorem)）是与 Dehn 引理有关的 设 M 是紧的三维流形，N 是它的边界的一个分支，如果同态 $\pi_1(N)\to\pi_1(M)$ 的核是非平凡的，则在 N 上存在一个简单闭路，它在 N 中不同伦于零而在 M 中同伦于零 闭路定理和 Dehn 引理通常一起使用 它们可以结合起来产生下面的定理 如果 M 是一个有边界 N 的三维流形，且嵌入同态 $\pi_1(N)\to\pi_1(M)$ 的核是非平凡的，那么 M 包含一个分片线性嵌入的二维圆盘 D，它的边界在 N 中，并且它在 N 中不可收缩．一个有关的定理就是球面定理 (sphere theorem)，它连同 Dehn 引理和闭路定理，是三维流形的拓扑中的主要工具之一 如果 M 是 $\pi_2(M)\neq 0$ 的定向三维流形，则 M 包含一个同胚于二维球面，在 M 中不同伦于零的子流形 Σ

这些结果在三维流形的拓扑中，特别是在扭结理论中有许多的应用 因此，如果 K 是一个扭结，则 $\pi_1(S^3\setminus K)$ 同构于 $\mathbf{Z}$，当且仅当 K 是一个平凡扭结 对于 S^3 中 n 分量连接 L，下面的条件是价的 1) $\pi_2(S^3\setminus L)\neq 0$，2) $\pi_1(S^3\setminus L)$ 是两个非平凡群的自由积，3) $S^3\setminus L$ 包含一个同胚于二维球面的子流形 N，使得 $S^3\setminus N$ 的两个分支都包含 L 的点 特别地，如果 L

是一个扭结（即 $n=1$），则 $\pi_2(S^3\setminus L)=0$（扭结的非球面性定理（theorem on asphericity of knots））

参考文献

[1] Dehn, M, Ueber die Topologie des dreidimensionalen Raumes, *Math Ann*, **69**(1910), 137–168

[2] Papakyriakopoulos, C D, On Dehn's lemma and the asphericity of knots, *Ann. of Math*, **66**(1957), 1–26

[3] Stallings, J, Group theory and three-dimensional manifolds, Yale Univ Press, 1971

М И Войцеховский, М Ш Фарбер 撰

【补注】

参考文献

[A1] Massey, W S, Algebraic topology an introduction, Springer, 1977

徐森林 译 薛春华 校

δ 幅角 [**delta amplitude**, **дельта амплитуды**]

个基本 **Jacobi 椭圆函数**（Jacobi elliptic functions）之一，记作

$$\mathrm{dn}\,u=\mathrm{dn}(u,k)=\Delta\,\mathrm{am}\,u$$

δ 幅角可用 Weierstrass σ 函数、Jacobi θ 函数或者级数表示如下

$$\mathrm{dn}\,u=\mathrm{dn}(u,k)=\frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)}=\frac{\theta_0(0)\theta_3(v)}{\theta_3(0)\theta_0(v)}=$$

$$=1-k^2\frac{u^2}{2!}+k^2(4+k^2)\frac{u^4}{4!}-k^2(16+44k^2+k^4)\frac{u^6}{6!}-\cdots,$$

其中 k 是 δ 幅角的模（modulus），$0\leqslant k\leqslant 1$，而 $v=u/(2\omega)$，$2\omega=\pi(\theta_3(0))^2$ 如果 $k=0$，1，则分别有

$$\mathrm{dn}\,u=1,\ \mathrm{dn}\,u=\frac{1}{\cosh u}$$

亦见 **Weierstrass 椭圆函数**（Weierstrass elliptic functions），**椭圆函数**（elliptic function）

参考文献

[1] Hurwitz, A and Courant, R, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, Springer, 1964

Е Д Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Beteman, H and Erdélyi, A, Higher transcendental functions Bessel functions, 2, McGraw-Hill, 1953（中译本 A 爱尔台里主编，高级超越函数，科学出版社，1957）

张鸿林 译

δ 函数 [**delta function** 或 δ-function, **дельта функция**]，Dirac δ 函数（Dirac delta-function）

一个函数 $\delta(x)$，它使得有可能描述集中或作用于空间 $\mathbf{R}^n$ 中点 a 处的物理量（质量、电荷、热源强度、力等等）的空间密度 例如，使用 δ 函数，可以把位于点 a 的点质量 m 的密度写成 $m\delta(x-a)$ 对任意连续函数 f，δ 函数可以由等式

$$\int_{\mathbf{R}^n}\delta(x-a)f(x)dx=f(a)$$

形式地定义．对在 $\mathbf{R}^n$ 上函数 f 本身及其直到 k 阶导数 $f^{(k)}$ 都连续的函数类，δ 函数的导数 $\delta^{(k)}$ 可以用类似的方式来定义

$$\int_{\mathbf{R}^n}\delta^{(k)}(x-a)f(x)dx=(-1)^kf^{(k)}(a).$$

经常用到一些形式的运算，它们表述了 δ 函数的下列性质

$$\delta(-x)=\delta(x),\ \delta(cx)=|c|^{-1}\delta(x),\ c=\text{常数},$$

$$x\delta(x)=0,\ \delta(x)+x\delta'(x)=0,$$

等等，这些式子应在上述定义的意义下来理解，也就是说，仅仅在和充分光滑的函数相乘并积分后这些式子才有意义．因此，δ 函数不是在经典函数论意义下的通常函数，而是在广义函数论中定义的奇异**广义函数**（generalized function），即具紧支集的无穷次可微函数 f 的空间上的连续线性泛函，它和 f 作用的结果是 f 在零点的值 $(\delta,f)=f(0)$．

В Д Кукин 撰

【补注】 Dirac δ 函数是 Heaviside 函数（Heaviside function）（Heaviside 分布（Heaviside distribution））h 的导数（在分布或广义函数意义下），$h(x)$ 定义为 对 $x<0$，$h(x)=0$，对 $x>0$，$h(x)=1$（与在零点的值没有关系，通常对分布来说，它可以在零测集上无定义）．

参考文献

[A1] Schwartz, L, Théorie des distributions, Hermann, 1966

[A2] Гельфанд, И М and Шилов, Г Е, Обобщенные функции, В 1, М, 1958（中译本 И М 盖尔芳特，Г Е 希洛夫，广义函数，Ⅰ，科学出版社，1965）

余庆余 译

δ **函数方法** [**delta-function method**, **дельта-функции метод**]

在数学物理中借助于 δ 函数 （delta-function）$\delta(x)$ 求线性微分方程的 **Green 函数** （Green function） 的一种方法（即确定点源效应函数的一种方法）．一个线性微分算子 L 的 Green 函数 $G(x,x')$ 由方程

$$L(x)G(x,x')=\delta(x-x')$$

或 $G(x,x')=-L^{-1}(x)\delta(x-x')$ 定义，即它表达了位于点 x' 的点源对点 x 产生的扰动值的效应．在经常出现的情况中，当 L 是一个常系数（不依赖于 x）微分算子时，逆算子 L^{-1} 的形式是最容易确定的 对于具有源 ρ 的扰动 φ 的一般非齐次线性微分方程

$$L(x)\varphi(x)=-\rho(x)$$

的解可借助于 Green 函数 $G(x, x')$ 用卷积

$$\varphi(x) = \int G(x, x') \rho(x')\, dx'$$

来表示，这个积分在源 ρ 的整个作用区域上受影响．

参考文献

[1] Иваненко, Д, Соколов, А, Классическая теория поля, М -Л, 1951 В Д Кукин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Morse, P M and Feshbach, H, Methods of theoretical physics, McGraw-Hill, 1953

周芝英 译 叶彦谦 校

Demoulin 四边形 [Demoulin quadrilateral, Демулена четырехугольник]

三维（射影）空间中曲面上双曲点 M 处密切 **Lie 二次曲面**（Lie quadric）的两对直母线 l_1, l_1' 和 l_2, l_2' 所构成的四边形．直线 l_1, l_1', l_2, l_2' 称为 Demoulin 直线（Demoulin straight line），它们平行于与 Lie 二次曲面相伴随的规范四面体 $T(M, M_1, M_2, M_3)$ 的棱 M_1M_3 和 M_2M_3，该四面体称为 Demoulin 四面体（Demoulin tetrahedron）由 A Demoulin（[1]）研究得，Demoulin 四面体非蜕化的充分必要条件是第三 **Fubini 形式**（Fubini form）非蜕化．

参考文献

[1] Demoulin, A, Sur la théorie des lignes asymptotiques, etc, *C R Acad Sci Paris*, **147** (1908), 493－496

М И. Войцеховский 撰

【补注】 一般来说，Demoulin 四面体可在曲面的所有点上有定义，而不只限于负曲率（双曲点）的情况，见 [A1]．Demoulin 四面体顶点的主要特征如下 对于一张曲面的所有 Lie 二次曲面的集合，存在四张不同于原曲面自身的包络面．这些包络面恰好与 Lie 二次曲面相交于 Demoulin 四面体的顶点

参考文献

[A1] Bol, G, Projektive Differentialgeometrie, 2, Vandenhoeck & Ruprecht, 1954

[A2] Lane E P, A treatise on projective differential geometry, Univ of Chicago Press, 1942.

【译注】 在文献 [B1] 中，Lie 二次曲面被称为李织面．

参考文献

[B1] 苏步青，射影曲面概论，上海科学技术出版社，1964

沈一兵 译

Demoulin 曲面 [Demoulin surface; Демулена поверхность]

由共轭线网构成的曲面，其中网曲线的切线形成两个 W 线汇——所谓奇异共轭系 只有 Demoulin 曲面才容许**射影形变**（projective deformation） 它是由 A Demoulin（[1]）引入的

参考文献

[1] Demoulin, A, *C R Acad Sci Paris*, **153** (1911), 590－593, 705－707, 797－799, 927－929.

[2] Фиников, С П, Проективно дифференциальная геометрия, М, 1937

[3] Норден, А П, Пространства с аффинной связностью, Наука, М -Л, 1976

М.И. Войцеховский 撰

【补注】 关于 Demoulin 曲面有不同的术语．在 [A1] 中它被概要地表征为这样的事实 Demoulin 四面体（见 **Demoulin 四边形**（Demoulin quadrilateral））蜕化为一点．存在射影形变是一个更一般的条件（见 [A1], p 119）．射影形变的问题与 R 线汇有关，R 线汇是特殊的 W 线汇（见 [A1] 和 [2]，[3]）

参考文献

[A1] Bol, G, Projektive Differentialgeometrie, 2, Vandenhoeck & Ruprecht, 1954

[A2] Lane, E P, A treatise on projective differential geometry, Univ of Chicago Press, 1942.

【译注】

参考文献

[B1] 苏步青，射影曲面概论，上海科学技术出版社，1964

[B2] Godeaux, L, Bull Acad roy de Belgique, (V) **14** (1928), 158－173, 174－187, 345－348.

沈一兵 译

Demoulin 定理 [Demoulin theorem, Демулена теорема]

螺旋面具有无数（即 ∞^2）个共轭曲线网系，它们在该曲面的连续形变下保持不变——曲面的主基（见**主基上的形变**（deformation over a principal base））这是由 A Demoulin（[1]）建立的．由此得出，这些主基是 **Voss 网**（Voss net） 因此（**Фиников 定理**（Finikov theorem）），仅有的具无数个主基的曲面是正螺旋面（[2]）．

参考文献

[1] Demoulin, A, Sur les systèms conjugués persistants, *C R Acad Sci Paris*, **133** (1901), 986－990.

[2] Фиников, С П, Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи, М -Л, 1937.

М И. Войцеховский 撰 沈一兵 译

无圈曲线 [dendrite; дендрит]

不包含简单闭曲线的局部连通连续统 一个连续统称为局部无圈曲线（local dendrite），如果它的每一点都有一个无圈曲线邻域． А. А. Мальцев 撰

许依群、罗嵩龄、徐定宥 译

无圈流形 [dendritic manifold; древовидное многообразие]，亦称树状流形

特殊类型的奇数维光滑流形，它是由球面上的纤维化按某一图形（树）所表明的程式粘合而得到的偶

数维流形的边界．

设 p_i $E_i^{2n} \to S_i^n (i=1,2,\ )$ 是 n 维球面上的纤维化，它以 n 维球 D^n 作为纤维，以群 SO_n 作为结构群，且设 B_i^n 是 n 维球面 S_i^n 上的闭标准 n 维球；于是

$$p_i^{-1}(B_i^n) \approx B_i^n \times D_i^n,$$

其中 D_i^n 是纤维 p_i 令

$$\gamma_{ij}\ \ B_i^n \times D_i^n \to B_j^n \times D_j^n,\ i=1,2,$$

是一个同胚，它实现了两个纤维化 p_i 的粘合，并将 $B_i^n \times D_i^n$ 的每个 n 维球 $B^n \times x$ 映射到 $B_j^n \times D_j^n$ 的某个球 $y \times D^n$（这个粘合交换了直积 $B^n \times D^n$ 的因子）．粘合两个纤维化 p_i, p_j 的结果得到了 $2n$ 维流形 $E_i^{2n} \bigcup_{\gamma_{ij}} E_j^{2n}$，如同"角磨光"那样，它转换为光滑流形．

以纤维化 E_i^{2n} 作为"结构块"，经过逐对粘合，可以由它构造所要求的光滑流形如下．设 T 是 1 维有限复形（图），T 的每个顶点对应一个块 E_i^{2n}，然后对 $k(k=1,2,\ )$ 在 S_i^n 中选出不相交的 n 维球 $B_{i_k}^k$，这里 k 等于各自顶点的分支指标，并且其粘合是按照 T 所指出的程式实现的．这样得到的带边流形记为 $W^{2n}(T)$（不考虑对 E_i^{2n} 的选择的依赖性） 如果 T 是树，因而图是没有闭链的，则边界 $\partial W^{2n}(T)=M^{2n-1}$ 称为**无圈流形**（dendritic manifold）

如果 T 是树，则 $W^{2n}(T)$ 有 k 个球面束的同伦型，其中 k 是 T 的顶点数．

无圈流形 $M^{2n-1}=\partial W^{2n}(T)$ 是一个整数同调 $(2n-1)$ 维球面，当且仅当定义在 n 维同调群 $H_n(W^{2n},\mathbf{Z})$ 的格上的整数双线性相交 $(-1)^n$ 形式的矩阵的行列式等于 ± 1 若这个条件满足，则流形 $W^{2n}(T)$ 称为**铅垂的**（plumbing）．

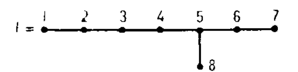
如果 T 是树，且 $n \geqslant 3$，则 $\partial W^{2n}(T)$ 是单连通的，如果 W^{2n} 是铅垂的，且 $n \geqslant 3$，则边界 ∂W^{2n} 是一个同伦球面．

如果铅垂流形 W^{4k} 是可平行化的，则 $2k$ 维闭链的相交矩阵的对角线被偶数填满，此时，这个相交矩阵的符号差可以被 8 整除 铅垂流形 W^{4k} 可平行化，当且仅当用来构造 W^{4k} 的 S^{2k} 上所有纤维化都是稳定平凡的，例如，如果用来构造 W^{4k} 的所有纤维化都是在 $2k$ 维球面的圆盘上的切丛，则铅垂流形 W^{4k} 是可平行化的．铅垂流形 W^{4k+2} 是可平行化的，当且仅当在 W^{4k+2} 的构造中用做块的任意纤维化 E_i^{4k+2} 或者是平凡的，或者是积 $S^{2k+1} \times S^{2k+1}$ 中对角线的管状邻域，即是 S^{2k+1} 的圆盘上的切丛 如果铅垂流形 W^{4k+2} 是可平行化的，则它的相交矩阵可以简化为由若干块

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

沿主对角线放置而成的辛形

特别重要的铅垂流形是 $4k\,(k>1)$ 维 **Milnor 流形**（Milnor manifold）及 $4k+2\ (k \geqslant 0)$ 维的 **Kervaire 流形**（Kervaire manifold）．Milnor 流形构造如下 在积 $S^{2k} \times S^{2k}$ 中取对角线的管状邻域 E^{4k} 的几个拷贝作块，而图 T 形如



在这些条件之下，流形 $W^{4k}(\Gamma)$ 成为一个 8 阶二次型，其中主对角线上每一元素都等于 2，而符号差为8.

在构造 Kervaire 流形 K^{4k+2} 时，取 $S^{2k+1} \times S^{2k+1}$ 中对角线的管状邻域 E^{4k+2} 作为块，把它的两个拷贝粘合在一起，使得相交矩阵有形式

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Milnor 流形的边界 ∂M^{4k}（**Milnor 球面**（Milnor sphere））不会与标准球面 S^{4k-1} 微分同胚 关于 Kervaire 流形，这个问题还没有（1987）完全解决 如果 $2k+1 \neq 2^i-1$，则 Kervaire 流形的边界 ∂K^{4k+2}（**Kervaire 球面**（Kervaire sphere））总是非标准的，如果 $2k+1=2^i-1$，则对 $1 \leqslant i \leqslant 6$，得到标准球面 S^{4k+1}，而对于其他的 i 仍然没有解决（参见 **Kervaire 不变量**（Kervaire invariant））．

维数为 2, 6 或 14 的 Kervaire 流形 K^{4k+2}，在删除了一个开胞腔以后，是球面的积 $S^{2k+1} \times S^{2k+1}\ (k=0,1,3)$，而所有其他的 Kervaire 流形均不同胚于带有一个弃置胞腔的球面的积．

PL 流形 $\hat{M}^{4k}$ 的 $\hat{K}^{4k}$ 经常用在流形的拓扑学中．这些流形是分别在 Milnor 流形 M^{4k} 及 Kervaire 流形 K^{4k+2} 的边界上加上一个锥面而得到的．在 4 维流形理论中，一个单连通殆可平行化流形 W^4（通常称为 **Рохлин 流形**（Rokhlin manifold））起着特别重要的作用，它的符号差是 16，见[6] 在已知的 Рохлин 流形的例子中，2 维 **Betti 数**（Betti number）的极小值是 22 第二个流形是 $W^4(\Gamma)$，其中 Γ 是上文所标明的图，并且在积 $S^2 \times S^2$ 中取对角线的管状邻域作为块．这样得出的流形的边界 $Q^3=\partial W^4(\Gamma)$ 是**十二面体空间**（dodecahedral space），它不是单连通的．

3 维无圈流形 $M^3=\partial W^4(\Gamma)$ 属于所谓的 Seifert 流形类．并非所有的 3 维流形都是无圈流形；对于无圈流形 **Poincaré 猜想**（Poincaré conjecture）成立．特别地，3 维**透镜空间**（lens space）是仅由两个块粘合而得到的

参考文献

[1] Kervaire, M, A manifold which does not admit any dif-

ferentiable strusture, *Comment Math Helv*, **34** (1960), 257-270

[2] Kervaire, M and Milnor, J, Groups of homotopy spheres Ⅰ, *Ann of Math*, **77** (1963), 3, 504-537

[3] Milnor, J, Differential topology, in Lectures on modern mathematics, Vol Ⅱ, Wiley, 1964, 165-183

[4] Hirzebruch, F, Neumann, W D and Koh S S, Differentiable manifolds and quadratic forms, M Dekker, 1971

[5] Browder, W, Surgery on simply-connected manifolds, Springer, 1972

[6] Mandelbaum, R, Four-demensional topology an introduction, *Bull Amer Math Soc*, **2** (1980), 1, 1-159

М А Штанько 撰

【补注】 上面条款中所描述的及导出所谓"无圈流形"(在西方通常不用这一术语)的技巧，称为**割补术**(surgery)，铅垂化(plumbing)或者换球术(spherical modification)

徐定宥、许依群、罗嵩龄 译

Denjoy 积分 [Denjoy integral, Данжуа интеграл]

1)狭义(特殊)Denjoy 积分(narrow (special) Denjoy integral)是 Lebesgue 积分的一种推广 函数 f 称为在 $[a,b]$ 上狭义(特殊，D^*) Denjoy 可积，如果存在 $[a,b]$ 上连续函数 F 使 $F'=f$ 几乎处处成立，并且对任何完满集 P，存在 P 的分划，于其上 F 绝对连续且

$$\sum_n \omega(F,(\alpha_n,\beta_n))<\infty,$$

其中 $\{(\alpha_n,\beta_n)\}$ 为 P 的分划中邻接区间的全体，而 $\omega(F,(\alpha,\beta))$ 为 F 在 (α,β) 上的振幅，

$$(D^*)\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

Lebesgue 积分的这一推广由 A Denjoy([1])引进，他证明了此积分可将函数从其逐点有限导数再生出来 D^* 积分等价于 **Perron 积分** (Perron integral).

2)广义(一般)Denjoy积分(wide (general) Denjoy integral)为狭义 Denjoy 积分的推广. 函数 f 称为在 $[a,b]$ 上广义(一般，D) Denjoy 可积，如果存在 $[a,b]$ 上连续函数 F，使它的**近似导数**(approximate derivative)几乎处处等于 f，并且对任何完满集 P，存在 P 的分划，于其上 F 绝对连续，这里

$$(D)\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

此积分几乎在同一时间由 Denjoy([2])与 А Я. Хинчин([3],[4])各自独立地引进 D 积分可将连续函数从其逐点有限的近似导数再生出来

3)总计(totalization) $(T_{2s})_0$ 是构造性地定义的积分，目的是为解决如何构造一般 Lebesgue 积分问题，以便可将任何收敛三角级数看成 Fourier 级数(关于这一积分) 它由 Denjoy([5])引进

4)总计 (T_{2s}) 与总计 $(T_{2s})_0$ 有下列不同之处 后者定义中考虑近似极限而非通常极限 Denjoy([5])还给出总计 (T_{2s}) 的描述性定义，对于 $(T_{2s})_0$ 与 (T_{2s}) 之间关系以及其他积分，见[6]

参考文献

[1A] Denjoy, A, Une extension de l'integrale de M Lebesgue, *C R Acad Sci*, **154** (1912), 859-862

[1B] Denjoy, A, Calcul de la primitive de la fonction dérivee la plus genérale, *C R Acad Sci*, **154** (1912), 1075-1078

[2] Denjoy, A, Sur la dérivation et son calcul inverse, *C R Acad Sci*, **162** (1916), 377-380

[3] Khintchine, A Ya, Sur une extension de l'integrale de M Denjoy, *C R Acad Sci*, **162** (1916), 287-291

[4] Хинчин, А Я,《Матем сб》, **30** (1918), 543-557

[5] Denjoy, A, Lecons sur le calcul des coefficients d'une serie trigonometrique, 1-4, Gauthier-Villars, 1941-1949

[6] Виноградова, И А и Скворцов, В А, Обобщенные интегралы и ряды Фурье, в кн Итоги науки Матем анализ, 1970, М, 1971, 65-107

[7] Saks, S, Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文)

Т П Лукашенко 撰

【补注】 正如 Lebesgue 积分能计算对应于某个密度函数的质量那样，Denjoy 积分(在情形 1)或 2) Denjoy 也称之为总计(totalization))能计算某个函数的原函数(确定到常数不计). 同时，对于光滑函数原函数的计算只是通常求质量的方法，而在一般情形原函数的计算(在情形 1)或 2))依赖于求质量运算并且还不止于此 Denjoy 曾给出构造格式(对于 (D^*) 的一种格式以及对于 (D) 的类似格式)，借助可数序数上归纳法来计算函数 f 的总计 F，这种函数可能对像 Perron 积分类似的积分不存在 若 f 有一总计(例如，f 为某函数在情形 1)中的导数或情形 2)中的近似导数)，此构造到某个可数序数便停止并得出 F，若 f 没有总计，构造在 $\aleph_1$ 之前决不停止. 此构造格式利用 **Lebesgue 积分** (Lebesgue integral)并用两种方法定义"反常"积分，后者来源于关于无界函数的 **Riemann 积分** (Riemann 积分)，分别属于 A L Cauchy 与 A Harnack 详见[7]或[A1].

参考文献

[A1] Choquet, G, Outils topologiques et metriques de l'analyse mathématique, Centre de Documentation Univ Paris, 1969, Rédige par C Mayer

郑维行 译

Denjoy-Лузин 定理 [Denjoy-Luzin theorem, Данжуа-Лузина теорема]，关于绝对收敛的三角级数的

如果三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (1)$$

在一个 Lebesgue 正测度集上绝对收敛，则由它的系数的绝对值构成的级数

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|+|b_n| \qquad (2)$$

收敛，从而原级数(1)在整个实轴上绝对一致收敛．但是，根据 A Denjoy 和 Н Н Лузин 定理，级数(1)的绝对收敛集具有正测度这一性质，对于级数(2)的收敛性只是充分条件但不是必要的．例如，存在零测度的完满集，由级数(1)在其上的绝对收敛性可推出级数(2)的收敛性

这个定理分别由 Denjoy([1])和 Лузин([2])独立地建立，它还有种种推广([3])

参考文献

[1] Denjoy, A , Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques, *C R Acad Sci* , **155** (1912), 135－136

[2] Лузин, Н Н , 《Матем сб》, **28** (1912), 461－472

[3] Бари, Н К , Тригонометрические ряды, М , 1961 (英译本 Bary, N K (N K Bari), A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964)

Л Д Кудрявцев, Е М Никишин 撰

【补注】 关于推广，例如见[A1]第6章

参考文献

[A1] Zygmund, A , Trigonometric series, 1－2, Cambridge Univ Press, 1979

朱学贤 译 潘文杰 校

Denjoy 定理(关于导数的)[Denjoy theorem on derivatives, Данжуа теорема о производных числах]

任意有限函数 F 在几乎任一点的 **Dini 导数** (Dini dirivative)满足下列关系式之一

$\overline{F}^{+}(x)=\overline{F}^{-}(x)=+\infty$, $\underline{F}^{+}(x)=\underline{F}^{-}(x)=-\infty$,

$\overline{F}^{+}(x)=\underline{F}^{-}(x)\neq\infty$, $\underline{F}^{+}(x)=-\infty$, $\overline{F}^{-}(x)=+\infty$,

$\underline{F}^{+}(x)=\overline{F}^{-}(x)\neq\infty$, $\overline{F}^{+}(x)=+\infty$, $\underline{F}^{-}(x)=-\infty$,

$\overline{F}^{+}(x)=\underline{F}^{+}(x)=\overline{F}^{-}(x)=\underline{F}^{-}(x)\neq\infty$

此定理对连续函数情形曾被 A Denjoy 证明([1])．下列定理(见[2])是 Denjoy 定理的推广 对于几乎所有的 x，函数 F 的图象在点 $(x, F(x))$ 的**切锥**(contingent)是下面几种图形之一 一个平面，一个半平面(具非垂直的边界线)或一条直线(非垂直的)

参考文献

[1] Denjoy, A , Memoire sur les nombres dérives des fonctions continues, *J Math Pures Appl* (7), **1** (1915), 105－240

[2] Saks, S , Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文)

Т П Лукашенко 撰

【补注】 所引定理常称为 Denjoy-Young-Saks 定理(Denjoy-Young-Saks theorem)．对于连续函数 F 它也被 G C Young([A2])独立地发现与证明，后来她又将这定理推广到可测函数 F 情形([A3])．S Saks 推广此定理到任意函数 F 情形([A1])

参考文献

[A1] Saks, S , Sur les nombres derivées des fonctions, *Fund Math* , **5** (1924), 98－104

[A2] Young, G C , *Quart J Math* , **47** (1916), 148－153

[A3] Young, G C , On the derivatives of a function, *Proc London Math Soc* (2), **15** (1916), 360－384

郑维行 译

分母 [denominator, знаменатель]

算术分数 a/b 的分母是整数 b，它表明组成这个分数的**单分数**(aliquot ratio)的大小．代数分式 A/B 的分母是表达式 B(见**分式**(fraction))

С.А Степанов 撰 张鸿林 译

外延 [denotant 或 denotation, денотат]、给定名称的这个名称所反映的对象，概念,又称所指

В Е Плиско 撰 卢景波 译

稠密集 [dense set, плотное множество]

与**处处稠密集**(everywhere-dense set)相同 更一般地，如果空间 X 的开集 G 包含在集合 A 的闭包中，或者说，如果 $A\cap G$ 在子空间 $G\subset X$ 中处处稠密，则称 A 在 G 中是稠密的．如果 A 在任意非空开集 G 中不稠密，则称 A 为 X 中的**无处稠密集**(nowhere-dense set)

М И. Войцеховский 撰

许依群、罗嵩龄、徐定宥 译

密度假设 [density hypothesis, плотностная гипотеза]

为 Riemann ζ 函数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

在矩形 $1/2<\sigma\leqslant\beta\leqslant 1$, $|\gamma|\leqslant T$ 内零点 $\rho=\beta+i\gamma$ 的个数 $N(\sigma, T)$ 提供一个界限而给出的不等式，这里 $s=\sigma+it$

密度假设的最精确的表述是

$$N(\sigma, T)\leqslant cT^{2(1-\sigma)}\ln^4 T$$

较简单但精确度稍差的密度假设的形式是

$$N(\sigma, T)\leqslant cT^{2(1-\sigma)+\varepsilon}.$$

利用密度假设，在素数理论方面得到的结果可与由 Riemann 假设所得到的结果相比拟．例如，由密度假设可知，对于充分大的 x，在每一段 $[x, x+x^{1/2+\varepsilon}]$ 内至少有一个素数

密度假设是更强的 **Lindelof 假设**(Lindelöf hypothe-

sis) 的一个结果．与后者的差别在于 密度假设已经借助于各种**密度定理**（density theorems）从某些值 $\sigma \geqslant \sigma_0 > 1/2$ 开始被部分地证明了．

对于 Dirichlet L 函数

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n,k)}{n^s}$$

的零点个数 $N(\sigma,T,\chi)$，其中 $\chi(n,k)$ 是模 k 的特征，提出了一个类似的密度假设 它的均值形式为

$$\sum_{\chi \bmod k} N(\sigma,T,\chi)\leqslant c(kT)^{2(1-\sigma)+\varepsilon}, \qquad (1)$$

$$\sum_{k\leqslant Q}\sum_{\chi^* \bmod k} N(\sigma,T,\chi^*)\leqslant c(k^2T)^{2(1-\sigma)+\varepsilon}, \qquad (2)$$

这里 χ^* 是模 k 的原特征．

Dirichlet L 函数的密度假设用于算术级数中的素数分布理论

参考文献

[1] Davenport, H , Multiplicative number theory, Springer, 1980

[2] Лаврик, А Ф , 《Успехи матем наук》, **35**(1980), 2, 55 - 65.

Б М Бредихин 撰

【补注】 其他参考文献见**密度方法**（density method），亦见**素数分布**（distribution of prime numbers）

设 N_2 是上面(2)中的二重和，则 А И Виноградов（[A1]，[A2]）和 E Bombieri（[A3]）得到的估计（Bombieri-Виноградов 定理（Bombieri-Vinogradov theorem））分别是

$$N_2 \ll k^{3-2\sigma+\varepsilon}(T\log k)^{c_0\varepsilon^{-4}}$$

和

$$N_2 \ll T(k^2+kT)^{4(3-2\sigma)^{-1}(1-\sigma)}\log^{10}(kT)$$

设 N_1 是上面 (1)中的和．由 H L. Montgomery，M N Huxley 和 M Jutila 得到的关于 N_1 和 N_2 对于 $1/2\leqslant\sigma\leqslant 3/4$，$3/4\leqslant\sigma\leqslant 4/5$ 和 $4/5\leqslant\sigma\leqslant 1$ 的较新的结果分别为（见[2]）

$$N_1 \ll (kT)^{3(2-\sigma)^{-1}(1-\sigma)}\log^9(kT),\quad \frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant\frac{3}{4},$$

$$N_1 \ll (kT)^{3(3\sigma-1)^{-1}(1-\sigma)+\varepsilon},\quad \frac{3}{4}\leqslant\sigma\leqslant\frac{4}{5},$$

$$N_1 \ll (kT)^{(2+\varepsilon)(1-\sigma)},\quad \frac{4}{5}\leqslant\sigma\leqslant 1,$$

及

$$N_2 \ll k^2T)^{3(2-\sigma)^{-1}(1-\sigma)}\log^{14}(kT),\quad \frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant\frac{3}{4},$$

$$N_2 \ll (k^2T)^{3(3\sigma-1)^{-1}(1-\sigma)+\varepsilon},\quad \frac{3}{4}\leqslant\sigma\leqslant\frac{4}{5},$$

$$N_2 \ll (k^2T)^{(2+\varepsilon)(1-\sigma)},\quad \frac{4}{5}\leqslant\sigma\leqslant 1$$

参考文献

[A1] Виноградов, А И ,《Изв АН СССР Сер Матем》, **29**(1965), 4, 903 - 934

[A2] Виноградов, А И ,《Изв АН СССР Сер Матем》, **30**(1966), 719 - 720

[A3] Bombieri, E , On the large sieve, *Mathematika*, **12**(1965), 201 - 225。

戚鸣皋 译 张明尧 校

密度矩阵 [density matrix, плотности матрица]

用作用于 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的有限线性算子的代数 $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ 定义的状态 ρ 的密度矩阵，是正的**核型算子**（nuclear operator）$\widetilde{\rho}\in\mathfrak{A}(\mathscr{H})$，即

$$\rho(A)=\mathrm{Sp}A\widetilde{\rho},\quad A\in\mathfrak{A}(\mathscr{H}), \qquad (1)$$

这里 $\mathrm{Sp}\,\widetilde{\rho}=1$ 反之，任何状态 ρ，即任何用 $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ 定义的线性正的（$\rho(A^*A)\geqslant 0$），归一化的（$\rho(E)=1$）泛函，可以表达为（1），也就是说，它有密度矩阵 $\widetilde{\rho}$，且为唯一的．

密度矩阵的概念是在统计物理中在定义 Gibbs 量子态时出现的．令一个占据 $\mathbf{R}^3$ 中一有限容积 V 的量子系统，由某个 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_V$ 的向量，由 Hamilton 算子 H_V^0 和可能还由某个可互易的"一次积分"的集合 H_V^1， ，$H_V^k(k=1,2,\ )$ 所描述 这样一个系统的 Gibbs 态是一个由下面的密度矩阵所定义的 $\mathfrak{A}(\mathscr{H}_V)$ 上的状态

$$\widetilde{\rho}=Z^{-1}\exp\{-\beta(H_V^0+\mu_1H_V^1+\cdot\ \ +\mu_kH_V^k)\}, \qquad (2)$$

这里 Z 是归一化因子，而 $\beta>0$，μ_1， ，μ_k 是实数参数．

除了密度矩阵（2）而外，量子统计物理中一个系统的状态还可通过所谓约化密度矩阵（reduced density matrix）Fock［Fok］空间 $\mathscr{H}_V$ 的向量所描述的全同粒子（Bose 子或 Fermi 子）系统的最简单的情况下，状态 ρ 的约化密度矩阵 ρ 是（一般来讲是广义的）函数的集合，

$$\hat{\rho}=\{\hat{\rho}_{m,n}(x_1,\ \ ,x_m,y_1,\ \ ,y_n),\ x_i\in V,\ y_j\in V,\quad (3)$$
$$i=1,\ \ ,m,\ j=1,\ \ ,n,\ m,n=0,1,\ \ \},$$

其中

$$\hat{\rho}_{m,n}(x_1,\ \ ,x_m,y_1,\ \ ,y_n)=$$
$$=\rho\left[\prod_{i=1}^{m}a(x_i)\prod_{j=1}^{m}a^*(y_j)\right],$$

这里 $a(x)$，$a^*(y)$，$x,y\in\mathbf{R}^3$，分别是作用于 $\mathscr{H}_V$ 中的产生算子（creation operators）和湮没算子（annihilation operators） 如果 $\mathfrak{A}(\mathscr{H}_V)$ 中的产生和湮没算子被某个另外的生成系统 $\{a_\lambda,\lambda\in\mathscr{X}\}$（$\mathscr{X}$ 某个指数系统）所代替，那么状态 ρ 的约化密度矩阵 $\hat{\rho}$ 就靠如

下所有可能的单项式类似于（3）定义为诸 ρ 值的总合

$$a_{\lambda_1}, \quad , a_{\lambda_n}, \ \lambda_i \in \mathscr{K}, \ i=1, \quad , n, \ n=1,2,$$

在以所谓的准局部的观测量 $\mathfrak{A}_\infty = \overline{\bigcup_{I \in \mathbf{R}^3} \mathfrak{A}(\mathscr{K}_I)}$（横线表示均匀拓扑学中的封闭性）的 C^* 代数 $\mathfrak{A}_\infty$ 决定极限 Gibbs 状态时 约化密度矩阵是特别方便的

参考文献

[1] Ландау, Л Д, Лифшиц, Е М, Статистическая физика, 3 изд, М, 1976（英译本 Landau, L D, Lifshitz, E M, Statistical physics, Pergamon, 1980）

[2] Ruelle, D, Statistical mechanics, rigorous results, Benjamin, 1974

P A Минлос 撰

【补注】任何状态 ρ 具有表达（1）这一命题只是对于有限维 $\mathscr{K}$ 是证明了的

（3）所定义的函数是分布函数的量子类比

沈 青 译

密度方法 [density method, плотностный метод]

解析数论中的一个方法，这个方法是以 Riemann ζ 函数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

和 Dirichlet L 函数

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n,k)}{n^s}$$

的零点分布的统计研究为基础的，这里 $s=\sigma+it$，而 χ 是一个模 k 的特征标．在函数 $\zeta(s)$ 和 $L(s,\chi)$ 于条形域 $0\leqslant\sigma\leqslant 1$，$-\infty<t<+\infty$ 中的所有零点 $\rho=\beta+i\gamma$ 都在直线 $\sigma=1/2$ 上这一假设下，许多数论问题获得了最完美的解．但是在某些情况下，如果能够证明这些函数的具有横坐标 $\beta\geqslant\sigma>1/2$ 的零点（如果存在的话）组成的集合随着 $\sigma\to 1$ 而愈来愈稀疏，那么也能得到足够强的结果．有大量的定理给出了 $\zeta(s)$ 的零点数 $N(\sigma,T)$ 的上界和 $L(s,\chi)$ 在矩形 $1/2<\sigma\leqslant\beta\leqslant 1$, $|\gamma|\leqslant T$ 中的零点数 $N(\sigma,T,\chi)$ 的上界 密度方法实质上是以这些定理为基础的，这些定理被称做**密度定理**（density theorems）．

第一个使用密度方法的 G Hoheisel (1930)，为了估计两个相邻素数的差而应用了关于 $\zeta(s)$ 的密度定理．他还证明存在一个正的常数 $\alpha<1$，使得当 $x>x_0=x_0(\alpha)$ 时，在 x 和 $x+x^\alpha$ 之间恒有素数存在．以后，对 $N(\sigma,T)$ 的上界的每一改进都导出更精密的常数 α．Ю. В Линник (1944 及随后的年代) 发展了关于 Dirichlet L 函数的密度方法，他第一个研究对于可变 k 的 L 函数的零点分布，特别是得到了 $L(s,\chi)$ 在点 $s=1$ 附近零点的“频率”的结果，它能对算术级数 $kx+l$ ($(l,k)=1$, $1\leqslant l\leqslant k$, $x=0,1,$) 中的最小素数 $p_0=p_0(k,l)$ 给出一个上界 $p_0<k^c$，这里 c 是某个绝对常数 对 $N(\sigma,T,\chi)$ 估计的改进导致更精密的常数 c Линник 应用关于 L 函数的密度定理，导出了关于表任意充分大的奇数为三素数和的 Виноградов 定理的一个新的证明（见 **Goldbach 问题**（Goldbach problem））．

密度方法在 L 函数理论中给出了二元 Goldbach 问题的一个很强的结果 任一充分大的自然数都可以表成两个素数与一个不超过某绝对常数的 2 的方幂的和．

由密度定理获得的最强的结果是与其他方法，特别是与**大筛法**（large sieve）相结合而得到的．在很多情况下代替**广义 Riemann 假设**（Riemann hypothesis, generalized）的 Виноградов-Bombieri 定理 (1965) 就是用这种方法证明的 密度方法的思想和由此所得的结果都可以从有理数域转移到代数数域上去．

参考文献

[1] Prachar, K, Primzahlverteilung, Springer, 1957

[2] Davenport, H, Multiplicative number theory, Springer, 1980

[3] Halberstam, H and Richert, H-E, Sieve methods, Acad Press, 1974

Б М Бредихин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ivic, A, The Riemann zeta-function, Wiley, 1985

戚鸣皋 译 张明尧 校

概率分布的密度 [density of a probability distribution, плотность вероятности]，亦称概率密度（probability density）

与绝对连续概率测度相对应的**分布函数**（distribution function）的导数

设 X 是在 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ ($n\geqslant 1$) 中取值的随机向量，F 是它的分布函数，并设存在一个非负函数 f 使得

$$F(x_1, x_2, \quad , x_n)=\int_{-\infty}^{x_1} \quad \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \quad , u_n)du_1 \quad du_n$$

对一切实数 $x_1, \quad , x_n$ 成立，则称 f 是 X 的概率密度（probability density），此时对任意 Borel 集 $A\subset\mathbf{R}^n$ 有

$$\mathsf{P}\{X\in A\}=\int_A \int f(u_1, \quad , u_n)du_1 \cdot du_n$$

任一满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \quad , x_n)dx_1 \quad dx_n=1$$

的非负可积函数 f 都是某一随机向量的概率密度．

如果两个取值于 $\mathbf{R}^n$ 的分别具有概率密度 f 和 g 的随机向量 X 和 Y 是独立的，那么随机向量 $X+Y$ 具有概率密度 h，它是 f 和 g 的卷积，即

$$h(x_1,\cdots,x_n)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1-u_1,\cdots,x_n-u_n)g(u_1,\cdots,u_n)du_1\cdots du_n$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(u_1,\cdots,u_n)g(x_1-u_1,\cdots,x_n-u_n)du_1\cdots du_n$$

假设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 和 $Y=(Y_1,\cdots,Y_m)$ 是分别取值于 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^m$ $(n, m\geqslant 1)$ 中且具有概率密度 f 和 g 的随机向量，而 $Z=(X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_m)$ 是取值于 $\mathbf{R}^{n+m}$ 中的随机向量．再若 X 和 Y 独立，则 Z 具有概率密度 h，称为随机向量 X 和 Y 的联合概率密度（joint probability density），此处

$$h(t_1,\cdots,t_{n+m})=f(t_1,\cdots,t_n)g(t_{n+1},\cdots,t_{n+m})\quad(1)$$

反之，若 Z 具有满足（1）的概率密度，则 X 和 Y 独立．

具有概率密度 f 的随机向量 X 的特征函数 φ 可表示为

$$\varphi(t_1,\cdots,t_n)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)}f(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n$$

这里，如果 φ 是绝对可积的，则 f 是有界连续函数，且

$$f(x_1,\cdots,x_n)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)}\varphi(t_1,\cdots,t_n)dt_1\cdots dt_n$$

概率密度 f 和对应的特征函数 φ 还通过下述关系式（Plancherel 恒等式（Plancherel identity））相联系．函数 f^2 是可积的，当且仅当 $|\varphi|^2$ 是可积的，此时有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f^2(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t_1,\cdots,t_n)|^2dt_1\cdots dt_n.$$

设 $(\Omega,\mathfrak{A})$ 是一个**可测空间**（measurable space），v 和 μ 是 $(\Omega,\mathfrak{A})$ 上的两个 σ 有限测度，v 相对于 μ 绝对连续，即若 $\mu(A)=0$，则 $v(A)=0$，$A\in\mathfrak{A}$．在这种情形下，存在一个 $(\Omega,\mathfrak{A})$ 上的非负可测函数 f 使得对一切 $A\in\mathfrak{A}$ 有

$$v(A)=\int_A f d\mu$$

函数 f 称为 v 对 μ 的 Radon-Nikodým 导数（Radon-Nikodým derivative），如果 v 是概率测度，它也是 v 对 μ 的概率密度．

与概率密度有紧密联系的一个概念是受控分布族（dominated family of distributions）．在可测空间 $(\Omega,\mathfrak{A})$ 上的概率分布族 $\mathfrak{P}$ 称为受控的，如果存在一个 $(\Omega,\mathfrak{A})$ 上 σ 有限测度 μ 使得每一个 $\mathfrak{P}$ 中的概率测度都有相对于 μ 的概率密度（或者，等价地，如果每一个 $\mathfrak{P}$ 中的测度对 μ 是绝对连续的）．在数理统计学的某些定理中受控性的假定是重要的．

参考文献

[1] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория Вероятностей, 2 изд., М., 1973（英译本：Prohorov, Yu. V. [Yu. V. Prokhorov] and Rozanov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1969）

[2] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1971

[3] Lehmann, E. L., Testing statistical hypothesis, Wiley, 1986

Н.Г.Ушаков 撰　刘秀芳 译

数列的密度 [**density of a sequence, плотность последовательности**]

一般加性数论中的一个概念．一般加性数论研究一般形式的数列的加法规律．一个数列的密度是全体自然数组成的数列中属于给定的由整数 $a_0=0<1\leqslant a_1<\cdots<a_k\cdots$ 组成的数列 $A=\{a_k\}$ 的那一部分的测度．用 $d(A)$ 表示数列 A 的密度（1930 年由 Л.Г.Шнирельман 引进），即

$$d(A)=\inf_n\frac{A(n)}{n},$$

其中

$$A(n)=\sum_{1\leqslant a_k\leqslant n}1$$

当且仅当 A 是由全体非负整数组成的数列 $\mathbf{N}_0$ 时，密度 $d(A)=1$．设 $A+B$ 是两个数列 $A=\{a_k\}$ 和 $B=\{b_l\}$ 的算术和，即集合 $A+B=\{a_k+b_l\}$，其中数 a_k+b_l 不重复取值．若 $A=B$，则记 $2A=A+A$，类似地 $3A=A+A+A$，等等．若 $hA=\mathbf{N}_0$，则称 A 是一个 h 阶基．为了研究数列之和的那些仅由各个数列的密度所确定的结构，需要利用下面的关于两个数列之和的密度定理

$$d(A+B)\geqslant d(A)+d(B)-d(A)d(B)$$

（Шнирельман 不等式（Shnirel'man inequality）），及更强的不等式

$$d(A+B)\geqslant\min(d(A)+d(B),\ 1)$$

（Mann-Dyson 不等式（Mann-Dyson inequality））．

由 Шнирельман 不等式可推出，任何具有正密度的数列是一个有限阶基，这一结论能用于加性问题．在加性数论中，经常先从给定的零密度的数列构造出具有正密度的新数列，然后求零密度的数列之和．例如，利用筛法已经证明数列 $\{p\}+\{p\}$ 具有正密度，其中 p 遍历全体素数（且数列 $\{p\}$ 中包含 0 和 1）．由此即可推出 Шнирельман 定理（Shnirel'man theorem）：存在整数 $c_0>0$，使得任何自然数（$\geqslant 2$）至多是 c_0 个素数之和．这个定理解决了所谓弱 Goldbach

问题（亦见**加性数论**（additive number theory））．

密度概念的一个变形是**渐近密度**（asymptotic density），这是自然密度的一种特殊情形．密度的概念也被推广到非自然数列，例如由代数数域中的整数组成的数列．这样，就可以研究代数数域中的基．

参考文献

[1] Гельфонд, А О , Линник, Ю В , Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962(英译本 Gel'fond, A O , Linnik, Yu V, Elementary methods in the analytic theory of numbers, M I T , 1966)

[2] Ostmann, H H , Additive Zahlentheorie, Springer, 1956

Б М Бредихин 撰 潘承彪 译 戚鸣皋 校

集合的密度 [density of a set, плотность множества], 实直线 $\mathbf{R}$ 上的可测集 E 在点 x 处的

比式

$$\frac{\text{mes}(E\cap\Delta)}{|\Delta|} \quad 当 |\Delta|\to 0 时 \qquad (1)$$

的极限（如果它存在），其中 Δ 为包含 x 的任意线段，$|\Delta|$ 是它的长度 如果用外测度代替测度，就得到 E 在 x 处的外密度（outer density）的定义 类似地，可以引进 n 维空间的密度．此时用其各面分别平行于坐标平面的相应的 n 维平行体代替 $\mathbf{R}$ 中的线段，并且对于平行体的直径趋向于零时取极限．对于 $\mathbf{R}$ 中的集合，集合 E 在 x 点处的右（左）密度的概念是很有用的，这个概念是由一般定义得出的，其中仅考虑左（右）端点为 x 的线段 Δ 当集合的密度等于 1（见**稠密点**（density point））或零（见**集合的稀疏性**（thinness of a set））时，经常使用密度的概念

参考文献

[1] Натансон, И П , Теория функций вещественной переменной, 3 изд , М , 1974

[2] Saks, S , Theory of the integral, Hafner, 1952（译自波兰文）

В А. Скворцов 撰

【补注】 有关这些概念的合适的拓扑应用见[A1]

参考文献

[A1] Tall, F D, The density topology, *Pacific J Math*, **62** (1976), 275－284

许依群、罗嵩龄、徐定宥 译

拓扑空间的密度 [density of a topological space, плотность топологического пространства]

基数特征之一（参见**基数特征**（cardinal characteristic））．

稠密点 [density point, плотности точка], n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中集合 E 的

E 的一点 x，其密度（见**集合的密度**（density of a set））等于 1 如果点 x 上的外密度等于 1，则点 x 称为外稠密点（outer density point） 集合的稠密点同时是该集合余集的稀疏点 在可测集中，几乎所有点都是它的稠密点．借助于稠密点的概念可以引进函数的**近似连续性**（approximate continuity）及**近似导数**（approximate derivative）的概念．

В А Скворцов 撰

【补注】 关于参考文献见**集合的密度**（density of a set）．

许依群、罗嵩龄、徐定宥 译

密度定理 [density theorems, плотностные теоремы]

对于给出 Dirichlet L 函数

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n,k)}{n^s}$$

在矩形 $1/2<\sigma\leqslant\beta<1$，$|\gamma|\leqslant T$ 内零点 $\rho=\beta+i\gamma$ 个数 $N(\sigma,T,\chi)$ 上界的所有定理的总称，这里 $s=\sigma+it$，而 $\chi(n,k)$ 是模 k 的特征标 在 $k=1$ 时就得到关于 Riemann ζ 函数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

的零点个数的密度定理

当 $k\neq 1$ 时 L 函数的密度定理比 Riemann ζ 函数的密度定理更加复杂 当 T 和 k 增加时可得到依赖这些参数的上界 在应用中参数 k 起着决定性的作用

由于密度定理使能够对属于算术级数 $km+l$ $(1\leqslant l\leqslant k,\ (l,k)=1,\ m=0,1,\ \ )$ 且不超过 x 的素数 p 的个数公式中的余项作为 $N(\sigma,T,\chi)$ 的函数进行估计，这些定理的重要性是显而易见的

因为 $N(\sigma,T,\chi)$ 不随 σ 的增加而增加，以及 $N(1,T,\chi)=0$，所以密度定理的目的是要得到当 $\sigma\to 1$ 时最快收敛于零的上界 这类估计也由于 Hardy-Littlewood-Виноградов 圆法得到的关于 Dirichlet L 函数在直线 $\sigma=1$ 邻近无零点的结果予以实质上的补充，用这方法已有可能得到不能表成二个素数和的偶数 $n\leqslant x$ 个数的很强的估计

Ю В Линник 得到了第一个密度定理，给出了关于 $N(\sigma,T,\chi)$ 对单个特征标 χ 的估计以及对给定模 k 的所有特征标的均值估计 后来，А.И.Виноградов 和 E Bombieri 对密度定理作出重大改进，他们用关于 $N(\sigma,T,\chi)$ 对所有模 $k\leqslant Q$ 的均值估计和对于给定模 k 的所有原特征标的均值估计，证明了一个关于在算术级数中素数平均分布的定理（对 $Q=\sqrt{x}(\ln x)^c$）．在加性数论的各种经典问题中，Виноградов-Bombieri 定理可用来代替广义 Riemann 假设 密度定理还有各种其他方面的改进．

参考文献

[1] Prachar, K , Primzahlverteilung, Springer, 1957

[2] Davenport, H , Multiplicative number theory, Springer, 1980

[3] Лаврик, А Ф, 《Успехи матем наук》, **35** (1980), 2, 55－65

Б М бредихин 撰

【补注】 补充参考材料见**密度方法**(density method)亦见**素数分布**(distribution of prime numbers)

关于 Виноградов-Bombieri 定理见**密度假设**(density hypothesis).

参考文献

[A1] Ivic, A, The Riemann zeta-functions, Wiley, 1985.

【译注】

参考文献

[B1] 潘承洞, 潘承彪, 解析数论基础, 科学出版社, 1991, 第30,31章

戚鸣皋 译 张明尧 校

整数分拆数[denumerant, денумерант]

整数 n 分成与 $a_1, \quad, a_m$ 相等的部分的分拆种数 $D(n, a_1, \quad, a_m)$, 即方程

$$a_1x_1+\quad+a_mx_m=n$$

的非负整数解数 整数分拆数的生成函数是

$$D(t,a_1,\quad,a_m)=\sum D(n,a_1,\quad,a_m)t^n$$
$$=\frac{1}{(1-t^{a_1})\quad(1-t^{a_m})}.$$

计算整数分拆数的最简单的方法是用 Euler 递推关系(Euler recurrence relation)

$$D(n,1,\quad,k)-D(n-k,1,\quad,k)=D(n,1,\quad,k-1)$$

从下述定理可以对某些整数分拆数得到显式公式 如果 a 是数 $a_1, \quad, a_m$ 的最小公倍数, 则

$$D(an+b,a_1,\quad,a_a),b=0,\quad,a-1$$

是关于 n 的 $m-1$ 次多项式.

参考文献

[1] Riordan, J, An introduction to combinatorial analysis, Wiley, 1958

В Е Тараканов 撰 张明尧 译 徐广善 校

模的深度[depth of a module, глубина модуля]

交换环上的模的上同调特征之一. 设 A 为 Noether 环, I 为其中一理想, M 是有限型 A 模, 这时使

$$\mathrm{Ext}_A^n(A/I, M)\neq 0$$

的最小正整数 n 称为模 M 的 I 深度 模的深度表为 $\mathrm{depth}_I(M)$ 或 $\mathrm{prof}_I(M)$ 利用 M 正则序列(regular sequence)可给出另一个定义 A 的元素序列 $a_1, \cdot, a_k$ 称为 M 正则序列, 如果 a_i 不是

$$M/(a_1,\quad,a_{i-1})M$$

的**零因子**(zero divisor) M 的 I 深度等于 I 的元素组成的最长 M 正则序列的长度. 在局部环 A 的情况下常取 I 为极大理想 有下述公式

$$\mathrm{prof}_I(M)=\inf_{\mathfrak{p}\supset I}(\mathrm{prof}(M_{\mathfrak{p}})),$$

其中 $\mathfrak{p}$ 表示 A 的素理想, $M_{\mathfrak{p}}$ 作为局部环 $A_{\mathfrak{p}}$ 上的模

模的深度的概念是在[1]中以同调余维数(homological codimension)的名称引入的. 如果局部环 A 上的模 M 的射影维数 $\mathrm{dh}(M)$ 是有限的, 则

$$\mathrm{dh}(M)+\mathrm{prof}(M)=\mathrm{prof}(A)$$

一般地, $\mathrm{prof}(M)$ 不超过 M 的维数

模的深度是研究模的一个基本工具 Cohen-Macaulay 模和环(见 **Cohen-Macaulay 环**(Cohen-Macaulay ring))是用模的深度定义的. A 模 M 的 Serre 准则(Serre criterion)(S_k) 对 A 的所有素理想 $\mathfrak{p}$ 有

$$\mathrm{prof}\, M_{\mathfrak{p}}\geqslant \inf(k, \dim M_{\mathfrak{p}}),$$

经常是有用的 最后, 模的深度与局部上同调模有密切联系, 断言

$$\mathrm{prof}_I(M)\geqslant n$$

等价于说, 当 $i<n$ 时, 局部上同调模 $H_I^i(M)$ 为零

参考文献

[1] Auslander, M and Buchsbaum, D A, Homological dimension in Noetherian rings, *Proc Nat Acad Sci USA*, **42** (1956), 36－38

[2] Serre, J-P, Algèbre locale. Multiplicités, Springer, 1965

[3] Grothendieck, A, Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux, Sem Geom Alg, 2, IHES, 1965

В И Данилов 撰 裴定一 译 赵春来 校

可推导性[derivability, выводимость]

见**逻辑推导**(derivation, logical), **演算**(calculus)

可推导法则[derivable rule, выводимое правило]

见**导出法则**(derived rule), **可推断法则**(deducible rule).

环中的导子[derivation in a ring, дифференцирование кольца]

一个环 R 到其自身的映射 ∂, 它是环 R 的加法群的自同态, 并满足关系式

$$\partial(xy)=x\partial(y)+\partial(x)y$$

设 M 是一个左 R 模. R 中的取值于 M 的导子是相应的加法群的满足下述条件的同态 对一切 $x, y\in R$, 有

$$\partial(xy)=x\partial(y)+\partial(x)y$$

设 C 为 R 的中心，对一切 $c\in C$，映射 $x\to c\partial(x)$ 仍是一个导子．两个导子的和也是导子．这就在 R 中的取值于 M 的全部导子集合上定义了 C 模结构，记为 $\mathrm{Der}(R, M)$. 设 S 是 R 的子环，如果导子 ∂ 对一切 $s\in S$ 满足 $\partial(s)=0$，则称 ∂ 为 S 导子．一切 S 导子的集合构成 $\mathrm{Der}(R, M)$ 的子模，记为 $\mathrm{Der}_S(R, M)$．运算

$$[\partial, \partial']=\partial\circ\partial'-\partial'\circ\partial$$

定义了 S 模 $\mathrm{Der}_S(R, M)$ 上的 Lie S 代数结构 设 φ $R\to M$ 是一 R 模同态，则对任何 $\partial\in\mathrm{Der}(R, R)$，合成映射 $\varphi\circ\partial\in\mathrm{Der}(R, M)$

设 R 是系数属于交换环 A 的多项式环 $A[T_1, \quad, T_n]$. 映射 $\partial/\partial T_j$ 定义如下.

$$F(T_1, \quad, T_n)=\sum a_{i_1 \quad i_n}T_1^{i_1} \quad T_n^{i_n}\to\sum a_{i_1 \quad i_n}i_jT_1^{i_1} \quad T_j^{i_j-1} \quad T_n^{i_n},$$

它是 R 中的 A 导子，R 模 $\mathrm{Der}_A(R, R)$ 是一自由模，基底为 $\partial/\partial T_1, \quad, \partial/\partial T_n$

设 a 是结合环 R (或 Lie 代数)的任一元素，则映射 $x\to ax-xa$ (或 $x\to ax$)是 R 的一个导子，称为**内导子** (inner derivation) 非内导子的导子统称为**外导子** (outer derivation)

若 R 是环 R' 的子环 设 $\partial\in\mathrm{Der}(R, R)$，若 $\bar\partial\in\mathrm{Der}(R', R')$ 在 R 上的限制与 ∂ 重合，则称 $\bar\partial$ 为 ∂ 的一个扩张．当 R 是一交换整环，R' 是其商域时，或 R 是域，R' 是 R 的可分代数扩张时，或 R 是域 k 上的 Lie 代数，R' 是它的包络代数时，任一 R 到 R 的导子 ∂ 存在唯一的在 R' 中的扩张．

导子与环的同构有密切联系．设 ∂ 是一个**幂零导子** (nilpotent derivation)，即对某个 n，$\partial^n=0$，又设 R 是一特征为零的域上的代数，则映射

$$\exp(\partial)=1+\partial+\frac{\partial^2}{2!}+\cdot \quad +\frac{\partial^{n-1}}{(n-1)!}$$

是 k 代数 R 的自同构 若 R 是局部交换环，其极大理想为 $\mathfrak{m}$，则在导子集合 $\mathrm{Der}(R, R/\mathfrak{m})$ 与在剩余域 $R/\mathfrak{m}$ 上诱导出恒等自同构的环 $R/\mathfrak{m}^2$ 的自同构集合之间存在着一一对应．不可分域扩张中导子所起的作用，正如同 Galois 理论中可分扩张的 Galois 群的元素所起的作用一样.

参考文献

[1] Bourbaki, N , Algebra, Addison - Wesley, 1973 (译自法文)

[2] Jacobson, N , The theory of rings, *Amer Math Soc* , 1943

[3] Lang, S , Algebra, Addison - Wesley, 1974

[4] Mordeson, J and Vinograde, B , Structure of arbitrary purely inseparable extension fields, Springer, 1970

И. В. Долгачев 撰

【补注】 $\mathrm{Der}_S(R, M)$ 中的 S 导子，就是 $\mathrm{Der}(R, M)$ 上的 S 线性映射 如果 A 是一 R 代数，则 $\mathrm{Der}(A, R)$ 中的导子就是**交叉同态** (crossed homomorphism) $A\to R$，或等价地，Hochschild 1上闭链 (Hochschild 1-cocycle).

若 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 是半单的，则所有导子 $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 都是内导子，即 $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})\simeq\mathfrak{g}$

设 R 是任一代数(或环)，不一定是交换或结合的 R 称为 **Lie 容许的** (Lie admissible)，如果结合代数 $\bar R$ 按乘法 $[a, b]=ab-ba$ 是一个 Lie 代数 结合代数和 Lie 代数都是 Lie 容许的，但也有其他一些例子 这些代数是由 A. A Albert 在 1948 年引入的

具有一个导子 ∂ 的环 R 是一个**微分环** (differential ring)，也见**微分代数** (differential algebra) 和**微分域** (differential field)

冯绪宁 译 裴定一 校

逻辑推导 [derivation, logical, вывод логический]

演算 (calculus) 中由逻辑规则作出的形式推导，它所推出的主要结果是解释为**命题** (proposition) 的**公式** (formula)，见**逻辑演算** (logical calculus)，**逻辑数学演算** (logico-mathematical calculus) 这些演算通常都被赋予一种语义 (见**语义学** (semantics))，因此逻辑推导有时也被理解为一种有含义的陈述，它允许从公理和假设出发得到新的命题，新命题就是初始命题的逻辑推论.

如果逻辑变换的公理和规则已经给定 (见**推导法则** (derivation rule))，称一个公式列是(它的末项 A 的)从假设 $A_1, \quad, A_n$ ($n\geqslant 0$) 出发的**一个推导**，如果这个公式列中的每一项或是一条公理，或是某一条假设，或是由它前面的公式依据一条规则而得到．记此为 $A_1, \quad, A_n\vdash A$ 公式 A 就称为从 $A_1, \quad, A_n$ **可推导的** (derivable) 如果 $n=0$，记号 $\vdash A$ 是指在有关的演算中，不用任何假设，A 就是可推导的．记号 $A_1, \quad, A_n\vdash$ 表示"假设 $A_1, \quad, A_n$ 导出矛盾"(在多数常用的系统中，$A_1, \quad, A_n\vdash$ 意味着任意公式都可以从这些假设中推导出来)．例如，在含有公理 $A\supset(B\supset A)$ 和**分离法则** (modus ponens) 的演算中，序列 A, $A\supset(B\supset A)$, $B\supset A$, 就是从 A 出发到 $B\supset A$ 的一个推导 (即 $A\vdash(B\supset A)$). 以下是逻辑推导的几个性质 $A\vdash A$，如果 $\Gamma\vdash\Delta$，则 $A, \Gamma\vdash\Delta$，如果 $A, A, \Gamma\vdash\Delta$，则 $A, \Gamma\vdash\Delta$，如果 $\Gamma, A, B, \Gamma'\vdash\Delta$，则 $\Gamma, B, A, \Gamma'\vdash\Delta$，如果 $\Gamma\vdash A$，且 $A, \Gamma'\vdash\Delta$，则 $\Gamma, \Gamma'\vdash\Delta$ (这里 A 和 B 是公式，Γ 和 Γ' 是公式的序列，Δ 是一个公式，或是空字) 这些性质使得假设条件序列的实质变换成为可能，再连同引入和省略逻辑符号的法则(见**导出法则** (derived rule)，**可推断法则** (deducible rule))，就使得带有符号 $\vdash$ 的系统很像一个 **Gentzen 形式系统** (Gentzen formal system)

在以古典逻辑为基础的演算中，一个特征是 $\neg\neg A \vdash A$ 在直觉主义逻辑（构造主义逻辑）中，对 Γ 附加某些条件，就可以证明 Brouwer 可推导性概念原理（principles of Brouwer concept of derivability） 1) 如果 $\Gamma \vdash A \vee B$，则或者有 $\Gamma \vdash A$，或者有 $\Gamma \vdash B$，2) 如果 $\Gamma \vdash \exists x A(x)$，则对某个项 t，$\Gamma \vdash A(t)$（Γ 是空集时这些条件也都满足） 由**演绎定理**（deduction theorem）的作用，一个推演中可以去掉一些假设，直到变成没有假设

推导概念的形式化（以及由此得到系统的形式化）标志着现代数理逻辑的创始 在现代的、更为严格解释的公理化方法中，不仅仅是公理，而且逻辑工具也被形式化，这就使得能够给出证明这一概念的数学定义，并能用数学方法对证明加以研究（见**证明论**（proof theory）） 形式推导这一概念被认为是很近似于数学证明的概念的（见 **Godel 完全性定理**（Godel completeness theorem），**Godel 不完全性定理**（Godel incompleteness theorem）） 逻辑可演绎性的人工形式化已发展为很接近于有实际意义的数学推理方法（见**自然逻辑演绎**（natural logical deduction））

参考文献

[1] Kleene, S C, Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951（中译本 S C 克林，元数学导论，科学出版社，1984）

[2] Математическая теория логического вывода, сб переводов, Москова, 1967

С Ю Маслов 撰 沈复兴 译 王世强 校

推导法则 [derivation rule, вывода правило]

由一集称为前提（premises）的对象出发，产生称为这个推导法则的结论（conclusions）的对象的方法，在描述各种**演算**（calculus）时，形式化的推导法则起着决定性的作用（一种推导法则通常只在某个特定的演算的范围内才有意义） 对那些有**语义学**（semantics）解释的演算（特别是在大多数**逻辑数学演算**（logico-mathematical calculus）中），推导法则都要保真，即真的前提只允许得到真的结论，这种推导法则中最重要的一例就是**分离法则**（modus ponens） 现在被研究的多数演算中，一个推导法则只有有限多个前提（最重要的一个例外是 **Carnap 法则**（Carnap rule）） 一般，一个给定的推导法则的前提的个数在其一切应用中都保持不变 当然，一个给定的法则可以应用的次数原则上并无限制

形式化一个推导法则的方法是极为多样的，这种方法取决于演算的语言，以及可以包括的不同类型的变元．大多数推导法则可以按如下的一般模式给出给定一个不含字符 □ 的字符表 A，及一个自然数 l，具有 l 个前提的推导法则定义为字符表 $A \cup \{\square\}$ 上的某个**算法**（algorithm）$\mathfrak{A}$ 如果 $\mathfrak{A}$ 可以作用于字 $P_0 \square \cdots \square P_l$，其中 $P_0, \cdots, P_l$ 是 A 上的字，符号 □ 在这儿作为分隔号，则 $P_1, \cdots, P_l$ 被看成是前提，P_0 被看成是这个推导法则在这一特定作用下得到的结论．一种特殊的推导规则是没有前提的推导法则（也称为**公理模式**（axiom scheme）） 在只含这种法则的任何一个演算中，可推导的字的集合总是可数的 一个推导法则往往还要满足一个更为严格的要求 在算法的帮助下，可以判断 P_0 是否可以从 $P_1, \cdots, P_l$ 只用此规则一次而演绎出来． С Ю Маслов 撰

【补注】 通常，“推导法则”都被简单地用一个词“法则”来代替 例如，假言推理有时也被称为分离法则（rule of detachment）

参考文献

[A1] Grzegorczyk, A, An outline of mathematical logic, Reidel, 1974

[A2] Rosser, J B, Logic for mathematicians, McGraw-Hill, 1953

沈复兴 译

推导树 [derivation tree, вывода дерево]

演算（calculus）中对于推导（见**逻辑推导**（derivation, logical））的一种记法，推导树的每一个元素 P 是由写在 P 的上面的元素利用一个**推导法则**（derivation rule）一次而得到．例如，设 $P_1, \cdots, P_6$ 是一个推导，P_1，P_2 和 P_4 是公理，P_3 是由 P_1 和 P_2 利用某一个推导法则一次而得，P_5 是由 P_4 和 P_3 利用某一个推导法则一次而得，而 P_6 是由 P_3 和 P_5 利用某一个推导法则一次而得 可以把这个推导树记作

$$\cfrac{\cfrac{P_1,\ P_2}{P_3} \qquad \cfrac{P_4,\quad \cfrac{P_1,\ P_2}{P_3}}{P_5}}{P_6}$$

这个记法虽然比长条形记法更麻烦，然而在推导的研究中它经常表明是一个很方便的工具 它对于了解元素之间的相互关系来说是方便的，推导树所包含信息比长条形有序记法有更完全的刻画（它的完全性几乎和在分析一个推导中所包含的信息同样令人满意）．如果需要，对推导树也可以给出一个分析，即在每一条横线上都写出各自的推导法则的号码，公理也用它们的号码记入 С. Ю Маслов 撰 卢景波 译

导子模 [derivations, module of; дифференциалов модуль]，Kähler 导子模（module of Kähler derivations）

函数微分概念的代数类似 设 A 是交换环，看作它的子环 B 上的代数，则 B 代数 A 的导子模 $\Omega^1_{A/B}$ 定义为以 $(dx)_{x\in A}$ 作为基的自由 A 模关于由形如

$$d(x+y)-dx-dy,\quad d(xy)-xdy-ydx,\quad db,$$

(其中 $x,y\in A$, $b\in B$) 的元素所生成的子模的商模．A 模的典范同态 $d\ \ A\to\Omega^1_{A/B}$ 是在 A 模 $\Omega^1_{A/B}$ 内取值的环 A 中的 B 导子 (见**环中的导子** (derivation in a ring)),并有以下的泛性质 对在 A 模 M 内取值的任意一个 B 导子 $\partial\ \ A\to M$, 存在唯一确定的 A 模同态 $\bar{\partial}.\ \Omega^1_{A/B}\to M$, 使得 $\bar{\partial}\circ d=\partial$ 对应关系 $\partial\to\bar{\partial}$ 确定了一个 A 模同构

$$\mathrm{Der}_B(A,M)\simeq\mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{A/B},M)$$

特别地，环 A 到它自身内的导子模同构于模 $\Omega^1_{A/B}$ 的对偶 A 模．

如果把 $A\otimes_B A$ 看作为关于同态

$$A\to A\underset{B}{\otimes}A\ (a\to a\otimes 1)$$

的 A 代数，I 是由形如

$$a\otimes 1-1\otimes a$$

的元素生成的理想，则 A 模 $\Omega^1_{A/B}$ 同构于 A 模 I/I^2

导子模 Ω^1 具有以下性质

1) 如果 S 是 A 内的乘法封闭子集，$T=S\cap B$, 则有典范的局部化同构

$$(\Omega^1_{A/B})_S\simeq\Omega^1_{A_S/B_T}$$

2) 如果 $\varphi\ \ A\to A_1$ 是 B 代数的同态，则存在 A_1 模的典范正合序列

$$\Omega^1_{A/B}\underset{A}{\otimes}A_1\xrightarrow{\alpha}\Omega^1_{A_1/B}\to\Omega^1_{A_1/A}\to 0$$

3) 如果 I 是环 A 的理想且 $A_1=A/I$, 则有 A_1 模的典范正合序列

$$I/I^2\xrightarrow{d_1}\Omega^1_{A/B}\underset{A}{\otimes}A_1\to\Omega_{A_1/B}\to 0,$$

其中同态 d_1 由导子 $d\ \ A\to\Omega^1_{A/B}$ 所诱导

4) 域 K 是域 k 的有限超越次数 n 的可分扩张，当且仅当存在 K 空间的同构 $\Omega^1_{K/k}\simeq K^n$

5) 如果 $A=B[T_1,\ \ ,T_n]$ 是多项式代数，则 $\Omega^1_{A/B}$ 是以 $dT_1,\ \ ,dT_n$ 为基的自由 A 模．

6) 完满域 k 上的有限型代数 A 是正则环，当且仅当 A 模 $\Omega^1_{A/k}$ 是射影的

7) 性质 2) 中的有限型 A 代数 A_1 在 A 上光滑，当且仅当同态 α 是单射的，而导子模 $\Omega^1_{A_1/A}$ 是射影的，且它的秩等于 A_1 在 A 上的相对维数

导子模 $\Omega^1_{A/B}$ 的 i 次外幂 $\wedge^i\Omega^1_{A/B}$ 称为 B 代数 A 的 (微分) i 形式模 (module of (differential) i-forms), 记为 $\Omega^i_{A/B}$

由于性质 1), 对于概形的任何态射 $X\to Y$ 可以定义相对导子层 (sheaf of relative derivations) (或 Kähler 导子层 (sheaf of Kähler derivations)) $\Omega^1_{X/Y}$ 以及它的外幂 $\Omega^i_{X/Y}$

参考文献

[1] Шафаревич, И Р, Основы алгебраической геометрии, М, 1972 (英译本 Shafarevich, I R, Basic algebraic geometry, Springer, 1977)

[2] Grothendieck, A, Revêtements étales et groupe fondamentale, Springer, 1971

[3] Grothendieck, A, Eléments de géométrie algébrique IV Etude locale des schemes et des morphismes de schemes, *Publ Math IHES*, **20** (1964)

[4] Kahler, E, Algebra und Differentialrechnung, Deutsch Verlag Wissenschaft, 1958

И В. Долгачев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hartshorne, R, Algebraic geometry, Springer, 1977

陈志杰 译

导数 [derivative, производная]

数学分析中的基本概念之一 假设实变量 x 的实值函数 f 在点 x_0 的邻域内有定义，并且存在有限的或无限的极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\qquad(*)$$

这个极限称为函数 f 在点 x_0 处的导数 (derivative) 如果设 $y=f(x)$,

$$x-x_0=\Delta x,\ f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta y,$$

则极限 (*) 可以写成

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

还采用记号 $f'(x_0)$, $df(x_0)/dx$, dy/dx, $(d/dx)f(x_0)$ 等等来表示这个极限

计算导数的运算称为微分法 (differentiation) 如果导数 $f'(x_0)$ 是有限的，则函数 f 称为在点 x_0 上可微的 (differentiable) 在一个集合的每一点上都可微的函数，称为在这个集合上可微的 可微函数总是连续的．但是，在给定区间上存在处处连续、处处不可微的函数 (见**不可微函数** (non-differentiable function))

设函数 f 在一个区间中是可微的．其导数 f' 可能是**间断函数** (discontinuos function)．但是，按照 Baire 分类法 (见 **Baire 类** (Baire classes)), 它总是第一类函数，并且具有 Darboux 性质 如果它取两个值，则它也取每个中间值

导数概念的一个推广是沿集合的导数的概念．假设实值函数 f 在一个实数集合 E 上有定义，x_0 是 E 的

极限点，$x_0 \in E$，并且存在有限的或无限的极限

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

这个极限称为函数 f 在点 x_0 处集合 E 上的导数(derivative over a set)，记为 $f'_E(x_0)$ 函数在集合上的导数是导数概念的一个推广．其他一些推广是**单侧导数**(one-sided derivative)、**Dini 导数**(Dini derivative)、**近似导数**(approximate derivative)的概念．

上述导数的定义(和它的推广)以及它的一些简单性质，可以照搬到实变量或复变量的复值和向量值函数的情况．此外，还有 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中的标量值点函数的导数(见**梯度**(gradient))和集函数关于测度(特别是，关于面积、体积等)的导数的概念．导数概念还可推广到抽象空间中的向量值点函数的情况(见**映射的微分法**(differentiation of a mapping))．

关于导数的几何解释和力学解释，一些最简单的微分法则，高阶导数，偏导数，以及参考文献，见**微分学**(differential calculus)　　Г П Толстов 撰

【补注】 G Choquet 证明 $[a,b]$ 上的函数 φ 属于第一 Baire 类，并且具有 Darboux 性质，(当且)仅当存在 $[a,b]$ 上的可微函数 f，和 $[a,b]$ 的同胚 h，使得 $\varphi=f'\circ h$ 详细情况及参考文献见[A1]

参考文献

[A1] Choquet, G, Outils topologiques et métriques de l'analyse mathematique, Centre de Documentation Univ Paris, 1969 Redige par C. Mayer　　张鸿林 译

导出自同构 [**derived automorphism**, **производный автоморфизм**]，遍历理论中的

利用**测度空间**(measure space) (M,μ) 的自同构 T 与正测度可测子集 $X\subset M$ 定义的变换 T_X，使在 T 的迭代映射下 X 的几乎所有的点都映射到 x　对每个这样的 x，象 $T_X(x)$ 定义为轨道 $T^n x$ 中这样的点，使在该点处轨道在 x 之后第一次回到 X (据 Poincaré 返回定理，见 **Poincaré 返回定理**(Poincaré return theorem)，如果 $\mu(M)<\infty$，则几乎所有的点在某一时刻返回 X 这一条件自动满足)　变换 T_X 原来是空间 X 与其上诱导的测度的一个自同构(更确切地说，一个 mod 0 自同构)(所述测度仅在 X 的子集上定义，若 $\mu(X)<\infty$，则此测度通常是正规化的)

反之，若 $\bigcup_{n\geq 0}T^nX=M$ (若自同构 T 为遍历的，条件自动满足)，则原来的自同构 T 可从 T_X 与第一次返回时刻(time of first return)

$$n_X(x)=\min\{n>0\quad T^n x\in X\}$$

获得(精确到关于测度空间同构的共轭)　就是说，T 是由 T_X 与 n_X 作出的**特殊自同构**(special automorphism)．　　Д В Аносов 撰

【补注】 关于测度空间的自同构，见**保测变换**(measure-preserving transformation)

文献中也用诱导自同构(induced automorphism)或导出自同构(derivative automorphism)等词　见[A1]或[A2]

参考文献

[A1] Kakutani, S, Induced measure preserving transformations, *Proc Japan Acad*, **19** (1943), 635-641

[A2] Petersen, K, Ergodic theory, Cambridge Univ Press, 1983　　郑维行 译

导出范畴 [**derived category**, **производная категория**]

【补注】 导出范畴的概念是由 J-L Verdier 在他的1963年的论文[A7]中引进的　它便于证明 A Grothendieck 的一个对偶定理(见[A5])设 $\mathscr{C}$ 为一个**加性范畴**(additive category)，有一个加性自同构 T，称为平移函子(translation functor) $\mathscr{C}$ 中的一个三角形(triangle)是一个六元组 (X, Y, Z, u, v, w)，其中 X, Y, Z 是 $\mathscr{C}$ 的对象，$u\ X\to Y$, $v\ Y\to Z$, $w\ Z\to T(X)$ 为 $\mathscr{C}$ 中的态射　常用

$$X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}T(X)$$

来表示这样的一个三角形　三角形的态射的意义是明显的　具备一族三角形(称为特异三角形(distinguished triangles))的范畴 $\mathscr{C}$ 称为一个三角形范畴(triangular category)，如果[A7]中的公理(TR1)-(TR4)都得到满足．

将一个三角形 $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}T(X)$ 简写成 (u, v, w)，这些公理如下所述

(TR1)与一个特异三角形同构的三角形也是特异的　对每一个态射 u，存在一个特异三角形 (u, v, w)，$(1_X, 0, 0)$ 是特异的

(TR2) (u, v, w) 是特异的，当且仅当 $(v, w, -T(u))$ 是特异的

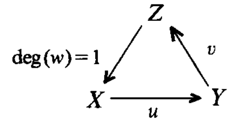
(TR3)如果 (u, v, w), (u', v', w') 是特异的，且 $(f, g)\ u\to u'$ 是一个态射，那么，存在一个 h 使 (f, g, h) 为三角形的一个态射

(TR4)设 (u, i, a), (v, j, b), (w, k, c) 是三个特异三角形，$w=vu$, $u\ X\to Y$, $v\ Y\to Z$，则存在两个态射 f, g 使得 $(1_X, v, f)$, $(u, 1_Z, g)$ 为三角形的态射，并且 $(f, g, T(i)b)$ 是一个特异三角形．

两个三角形范畴之间的一个加性函子称为一个 δ 函子(δ-functor)(或正合函子(exact functor))，如果它与平移函子可交换且保持特异三角形．

为了对这些公理与名词得一些感性认识，将下列例子记在心中(可能)是有用的　取一个 Abel 范畴上的复形的范畴(与代数映射锥，相应的长正合序

列，以及长正合序列的连接同态） 常常将一个特异三角形 (u, v, w) 写成



这里 w 被设想为从 $Z \to X$ 的一个“次数为1的态射”（由定义，这与态射 $Z \to T(X)$ 是一回事） 由这得到“三角形式的范畴”这个名词 将态射的群 $\mathscr{C}(X, T^i Y)$ 写成 $\mathrm{Hom}^i(X, Y)$，对每一个特异三角形与 $\mathscr{C}$ 的对象 M，从 (TR1)-(TR3) 就直接得到群的长正合序列

$$\to \mathrm{Hom}^i(M, X) \to \mathrm{Hom}^i(M, Y) \to$$
$$\to \mathrm{Hom}^i(M, Z) \to \mathrm{Hom}^{i+1}(M, X) \to \quad ,$$
$$\to \mathrm{Hom}^i(Z, M) \to \mathrm{Hom}^i(Y, M) \to$$
$$\to \mathrm{Hom}^i(X, M) \to \mathrm{Hom}^{i+1}(Z, M) \to$$

下一步，仍然是由上同调与复形的启发，是要“适当地局部化”，即 “要找到一种范畴的处理，使得那些在上同调中引出同构的态射可以逆转因而变成同构”

设 $\mathscr{C}$ 为一个三角形式的范畴 $\mathscr{C}$ 中的态射 s 的一个集体 S 称为一个乘法系统 (multiplicative system)，如果它具有（在 [A7] 中给出的）性质 (FR1)-(FR5).

(FR1) 若 s $Y \to X$ 与 t $Z \to Y$ 都在 S 内，则 st 也在 S 内 所有恒等态射都在 S 内．

(FR2) 若 s $Y \to X$ 在 S 内，而 f $X' \to X$，则有一个 s' $Y' \to X'$ 在 S 内，与一个 g $Y' \to Y$ 使得 $fs' = sg$，而且（对称地）若 s $Y \to X$ 在 S 内，与 f $Y \to Y'$，则有一个 s' $Y' \to X'$ 在 S 内与一个 g $X \to X'$，使得 $s'f = gs$

(FR3) 对于所有的 f, g $X \to Y$，有 $s, t \in S$，使得 $sf = sg$, $ft = gt$

(FR4) 若 $s \in S$，则也有 $T(s) \in S$

(FR5) 若 (u, v, w) 与 (u', v', w') 是两个特异三角形且 (s, t) 是由 u 到 u' 的一个态射，其中 $s, t \in S$，那么，有一个 $r \in S$ 使得 (s, t, r) 是特异三角形的一个态射．

公理 (FR1) 与 (FR2)，与对 (FR3) 作一个较小的扩张，在分式范畴 (categories of fractions) (见**范畴的局部化** (localization in categories) 的补注）的确定中是“一般的”．其余两个性质对于这种特殊确定三角形式的范畴是特别的．

范畴 $\mathscr{C}$ 关于 S 的局部化是范畴 $\mathscr{C}_S$ 连同规范函子 Q $\mathscr{C} \to \mathscr{C}_S$，使得由 $\mathscr{C}_S$ 与 Q 组成的对 $(\mathscr{C}_S, Q)$ 有泛性质 对任何函子 F $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$，如果对所有的 $s \in S$，$F(s)$ 都是同构，那么，F 就一定能够经 Q 唯一地分解因式

这样一对是存在的，而且，不但如此，$\mathscr{C}_S$ 还带有唯一的一个三角形式的范畴结构使 Q 为正合的．注意 $\mathscr{C}_S$ 的对象也是 $\mathscr{C}$ 的对象，而且 $\mathscr{C}_S$ 中的一个从 X 到 Y 的态射可以由 $\mathscr{C}$ 中的态射的一个图式 $X \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{f} Y$ 来表示，$s \in S$

设 $\mathscr{A}$ 为一个 **Abel 范畴** (Abelian category) 以 $C(\mathscr{A})$ 表示 $\mathscr{A}$ 的复形的加性范畴．平移函子 T 是由 $T(X)^i = X^{i+1}$, $d_{T(X)} = -d_X$ 来定义的，人们常写 X 来代替 $T(X)$ ([A1]) 以 $K(\mathscr{A})$ 表示这样的一个加性范畴，它的对象就是 $C(\mathscr{A})$ 的对象，而它的态射则是 $C(\mathscr{A})$ 中的态射的同伦等价类．一个三角形称为特异的，如果它同构于一个取形为 $X \xrightarrow{u} Y \to C_u \to T(X)$ 的三角形．此处 $C_u = T(X) \oplus Y$ 表示 u 的**映射锥** (mapping cone) 同样地，可以定义 $K^+(\mathscr{A})$ (相应地 $K^-(\mathscr{A})$，相应地 $K^b(\mathscr{A})$) 为 $\mathscr{A}$ 的下有界（相应地，上有界，相应地，有界）复形的范畴 一个复形 X 称为上有界的，如果当 n 足够大时 $X^n = 0$，等等．

设 $X, Y \in K(\mathscr{A})$ 一个态射 f $X \to Y$ 称为拟同构的 (quasi-isomorphism)，如果它在上同调上引出一个同构．设 Qis 表示所有的拟-同构的集体．局部化的范畴（参见**范畴的局部化** (localization in category)) $D(\mathscr{A}) = K(\mathscr{A})_{\mathrm{Qis}}$ 称为 $\mathscr{A}$ 的导出范畴 (derived category) 同样地，可以定义 $D^+(\mathscr{A})$ (相应地，$D^-(\mathscr{A})$，相应地，$D^b(\mathscr{A})$) 每一个短**正合序列** (exact sequence) 都给出 $D(\mathscr{A})$ 中的一个特异三角形．

假定 $\mathscr{A}$ 有足够多的**内射对象** (injective object) 以 $\mathscr{I} \subset \mathscr{A}$ 表示 $\mathscr{A}$ 中内射对象的集体，并设 $K^+(\mathscr{I})$ 为 $K^+(\mathscr{A})$ 中由 $\mathscr{A}$ 的内射对象之下有界复形所组成的三角形式的子范畴．典范的函子 Q $K^+(\mathscr{A}) \to D^+(\mathscr{A})$ 引出范畴的等价 $K^+(\mathscr{I}) \to D^+(\mathscr{A})$ 在 A 有足够的投射对象（见**范畴的投射对象** (projective object of a category)) 的情况同样的讨论也适用于 $D^-(\mathscr{A})$

最后，设 $\mathscr{A}$ 为一个 Abel 范畴，而 $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}$ 为一个浓厚的 Abel 子范畴．定义 $K_{\mathscr{A}_1}(\mathscr{A})$ 为 $K(\mathscr{A})$ 的这样一个完全三角形式的子范畴，它是由其上同调对象都在 $\mathscr{A}_1$ 内的复形所组成的，并取 $D_{\mathscr{A}_1}(\mathscr{A}) = K_{\mathscr{A}_1}(\mathscr{A})_{\mathrm{Qis}}$ 这是 $D(\mathscr{A})$ 中由其上同调对象都在 $\mathscr{A}_1$ 中的这样的复形所组成的满子范畴

导出函子 (derived functor) 设 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 为 Abel 范畴．设 F $K^*(\mathscr{A}) \to K(\mathscr{B})$ 为一个 δ 函子（这里 * 是 $\emptyset$，+，－ 或 b）我们说 F 的右导出函子 R^*F (相应地，左导出函子 L^*F) 存在，如果从 δ 函子 G $D^*(\mathscr{A}) \to D(\mathscr{B})$ 的范畴到集合的范畴的函子 $G \mapsto \mathrm{Hom}(QF, GQ)$ (相应地，$G \mapsto \mathrm{Hom}(GQ, QF)$) 是可表示的（见**可表示的函子** (representable functor)) 在这情况下，由定义，R^*F $D^*(\mathscr{A}) \to D(\mathscr{B})$ (相应地，L^*F) 是一个表示式．对每一个 $i \in Z$，取 $R^iF =$

$H^i R^* F$(相应地，$L^i F = H^i L^* F$)

关于存在性，有下列的定理 假定 $L \subset K^*(\mathscr{A})$ 是一个三角形式的子范畴，使得 1) $K^*(\mathscr{A})$的每一个对象都允许有一个拟-同构到（相应地，从）L 的一个对象，2)对于每一个零调对象 $l \in L$, $F(l)$是零调的（一个**零调复形**(acyclic complex)X 是一个复形，其上同调是零）于是右导出函子 R^*F(相应地，左导出函子 L^*F)存在，并且对每一个对象 $l \in L$，有 $QF(l) \cong R^*F(Q(l))$(相应地，$QF(l) \cong L^*F(Q(l))$)

设 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 为 Abel 范畴，并设 $F\ \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 为一个加性左**正合函子**(exact functor)(相应地，右正合函子) 假定 $\mathscr{A}$ 有足够的内射（相应地，投射）对象 那么，R^+F(相应地，L^-F)存在．函子 R^iF(相应地，L^iF)与 F 的通常的第 i 个右（相应地，左）导出函子重合．

最重要的性质如下 设 $F\ \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, $G\ \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ 是 Abel 范畴之间的加性左正合函子 假定 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 有足够的内射对象 假定 F 将内射对象送到 G 零调对象 于是 $R^+(G \circ F) \simeq R^+G \circ R^+F$ 同样的论述对于左**导出函子**(derived functor)也成立

Verdier 对偶性(Verdier duality) 导出范畴的概念非常适合于叙述并证明 Verdier 的一个关于对偶性的结果（见[A8]）相关的论题如 **Alexander 对偶性**(Alexander duality), **Poincaré 对偶性**(Poincaré duality)也见[A6] 设 X 与 Y 为拓扑空间，并设 R 为一个 **Noether 环**(Noetherian ring) 假定 X 与 Y 是局部紧的且有限维的 设 Sh (X, R)为 R 模的层的 Abel 范畴 这个范畴有充足的内射对象 以 $D^+(X, R) = D^+(\mathrm{Sh}(X, R))$表示导出范畴 考虑连续映射 $f\ X \to Y$, 并设 $f_!$ 为由 $D^-(X, R)$到 $D^-(Y, R)$的具有真支集的函子．这是一个加性左正合函子

Verdier **对偶性**(Verdier duality)存在一个加性函子 $f^!\ D^+(Y, R) \to D^+(X, R)$, 以及一个自然同构 $R\mathrm{Hom}(Rf_!F, G) \cong Rf_* R\mathrm{Hom}(F, f^!G)$, 这里 $F \in D^-(X, R)$, $G \in D^+(Y, R)$

假定 $Y = \{\mathrm{pt}\}$ 并令 $D_X = f^! R_{\mathrm{pt}}$ 这称为 X 上的**对偶化层**(dualizing sheaf) 对于任何对象 $F \in D^b(X, R)$, 其 Verdier 对偶是 $R\mathrm{Hom}(F, D_X)$

参考文献

[A1] Beilinson, A A , Bernstein, J and Deligne, P , Faisceaux pervers, *Asterisque Analyse et topologie sur les espaces singuliers* (1), **100** (1982)

[A2] Borel, A , et al , Intersection cohomology, Birkhauser, 1984

[A3] Deligne, P , Cohomology à supports propres, in Sem Geom Alg 4 Exp 17, Lecture notes in math , Vol 305, Springer, 1973, 82－115

[A4] Grivel, P-P , Categories derivees et foncteurs dérivés, in A Borel et al (eds) Algebraic D-modules, Acad Press, 1987, 1－108

[A5] Hartshorne, R , Residues and duality, Springer, 1966

[A6] Iversen, B , Cohomology of sheaves, Springer, 1986

[A7] Verdier, J-L , Categories derivees, Etat 0, in Sem Geom Alg 41/2 Cohomologie etale, Lecture notes in math , Vol 569, Springer, 1977, 262－311

[A8] Verdier, J-L , Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts, Sem Bourbaki Exp 300, 1965－1966

M G M van Doorn 撰 周伯埙 译 刘木兰 校

导出函子 [derived functor, производный функтор]

一种函子，它“量度”一个给定函子在正合性上的偏差 设 $T(A, C)$是一个从 R_1 模的范畴与 R_2 模的范畴之积到 R 模的范畴的加性函子，它对第一个变量是共变的，而对第二个变量是反变的 从 A 的一个内射分解 X 与 C 的一个投射分解 Y，就得到一个双分次的复形 $T(X, Y)$ 相伴的单复形 $T(A, C)$ 的同调并不倚赖于其分解式的选取，具有函子的性质，被称为 $T(A, C)$的右导出函子 $R^nT(A, C)$ 一个导出函子的基本性质是从短正合序列

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$
$$0 \to C' \to C \to C'' \to 0$$

诱导出长正合序列

$$\to R^nT(A', C) \to R^nT(A, C) \to R^nT(A'', C) \to \to R^{n+1}T(A', C) \to$$
$$\to R^nT(A, C'') \to R^nT(A, C) \to R^nT(A, C') \to \to R^{n+1}T(A, C'') \to$$

的存在

左导出函子可类似地定义 Hom_R 的导出函子记为 Ext_R^n 群 $\mathrm{Ext}_R^1(A, C)$对 A 以 C 为核的扩张按等价性来分类 见 **Baer 乘法**(Baer multiplication), **代数的上同调**(cohomology of algebras)

参考文献

[1] Cartan, H and Eilenberg, S , Homological algebra, Princeton Univ Press, 1956

[2] MacLane, S , Homology, Springer, 1963

B E Говоров 撰

【补注】 上文并没有说明 R^nT 度量 T 在正合性上偏差的意义．要点是，若 T 的左正合的（即对第一个变量保持序列 $0 \to A' \to A \to A''$ 的正合性，而对第二个变量保持 $C' \to C \to C'' \to 0$ 的正合性），那么 R^0T 就自然同构于 T, 如果 T 又是正合的，那么对所有的 $n > 0$ 都有 $R^nT = 0$ 导出函子也可以对于模范畴，或者更一般地，可对任意的 Abel 范畴之间的单个变量的加性函子来定义，只要在函子的定义范畴内，内射或投射分解都存在就行了 周伯埙 译

导出法则 [derived rule, производное правило], 给定演算中的推演法则的

如果一个推演法则的结论可以由它的取自所考虑的演算中的诸前提推出，则称此推演法则为导出法则．例如在**命题演算**（propositional calculus）中，由于

$$A \supset B,\ B \supset C \vdash A \supset C$$

成立，所以推演法则

$$\frac{A \supset B,\ B \supset C}{A \supset C}$$

是命题演算中的一个导出法则．每一个导出法则均是**合理法则**（sound rule） 然而并非所有合理法则皆为一个导出法则．例如在命题演算中**代换法则**（substitution rule）是合理的，但它不是一个导出法则．

参考文献

[1] Kleene, S C, Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951（中译本 S C 克林，元数学导论，科学出版社，1984，1985）

C H Артемов 撰 卢景波 译

导出集 [derived set, производное множество]

拓扑空间中集合 M 的所有极限点的全体 M'（见**集合的极限点**（limit point of a set）） 集合 M 与其导出集重合时称为完满的（perfect）

M И Войцеховский 撰

【补注】 此过程可以重复使用

对于**序数**（ordinal number）α，一般地，定义 X 的 α 次导出集（α-th derived set）$X^{(\alpha)}$ 如下 $X^{(0)}=X$，$X^{(\alpha+1)}$ 是 $X^{(\alpha)}$ 的导出集，如果 λ 是极限序数，则 $X^{(\lambda)}=\bigcap_{\alpha<\lambda}X^{(\alpha)}$

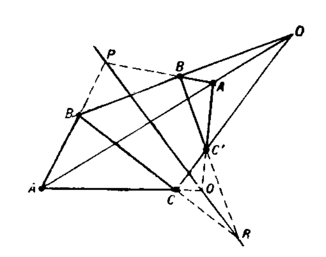
可以指出，存在一个初始序数 $\alpha=\alpha_X$，使得 $X^{(\alpha)}=X^{(\alpha+1)}$ 如果 $X^{(\alpha)}=\phi$，则称 X 为无核的（scattered），如果 $X^{(\alpha)}\neq\phi$，则 $X^{(\alpha)}$ 称为 X 的完满核（perfect kernel）

利用这个方法可以证明 Cantor-Bendixson 定理（Cantor-Bendixson theorem） 如果 X 是实直线的子空间，则 $X=C\cup P$，C 是可数集，P 是完满集而 $C\cap P=\phi$

因此，有时称 α_X 为 X 的 Cantor-Bendixson 高度（Cantor-Bendixson height） 完满空间有时称为自稠密的（dense-in-itself）． 许依群、罗嵩龄、徐定有 译

Desargues 假定 [Desargues assumption, Дезарга предложение], Desargues 定理（Desargues theorem）

如果两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 的对应边的交点 P, Q, R 处于同一直线上，则其对应顶点的连线相交于同一点．反之，如果三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 的对应顶点的连线相交于同一点，则其对应边的交点处于同一直线上．根据小对偶原理（little duality principle），对于同一平面上的两个三角形，逆命题和正命题是相互对偶的 在两种情况下，这些点和直线组成位于某个二维或三维射影空间中的 Desargues 构形（Desarguesian configuration）（构形 (10_3)）



如果两个三角形属于同一**射影平面**（projective plane），则 Desargues 假定不能只根据平面关联公理来证明（见**非 Desargues 几何学**（non-Desarguesian geometry）），但是在可嵌入高维射影空间的任何射影平面上它是成立的 Desargues 假定的空间情形，可由空间关联公理推出

Desargues 假定的成立，对于建立射影直线的点的射影代数和综合引入**射影坐标**（projective coordinates）是必要的和充分的．Desargues 假定是 G Desargues 确立的（[1]）．

参考文献

[1] Bosse, A, Manière universelle de m-r Desargues, pour pratiquer la perspective par petit-pied comme le géométral, Paris, 1648

[2] Hilbert, D, Grundlagen der Geometrie, Springer, 1913（中译本 D 希尔伯特，几何基础，科学出版社，1987）

[3] Ефимов, H B, Высшая геометрия, 5 изд, M, 1971（中译本 H B 叶非莫夫，高等几何学，高等教育出版社，1956）

M И Войцеховский 撰

【补注】 使得 Desargues 假定成立的仿射或射影平面称为 Desargues 平面（Desarguesian plane）．

参考文献

[A1] Artin, E, Geometric algebra, Interscience, 1957

[A2] Pedoe, D, A course of geometry, Cambridge Univ Press, 1970

用格论的术语（见**格**（lattice）），Desargues 假定可以表述为下列恒等式（见 [4]）

$$[(x+z)(y+u)+(x+u)(y+z)](x+y)\leqslant$$
$$\leqslant[(y+x)(z+u)+(y+u)(z+x)](y+z)+$$
$$+[(z+y)(x+u)+(z+u)(x+y)](z+x)$$

参考文献

[1] Birkhoff, G, Lattice theory, Colloq Publ, 25, Amer Math Soc, 1973

Л А Скорняков 撰 张鸿林 译

Desargues 几何学 [Desargues geometry, Дезаргова гео-

метрия], Desargues 空间的几何学 (geometry of a Desargues space)

一种**测地几何学** (geodesic geometry)，其中通常直线起测地线的作用 更确切地说，一个 Desargues 空间 (Desargues space) R 是一个 G 空间，它可以拓扑地映射到射影空间 P^n 内，使得 R 中每一条测地线映射为 P^n 的一条直线.

为了 R 是一个 Desargues 空间，下列条件是充分必要的

1) 通过两不同点的测地线必定是唯一的，

2) 当 $\dim R=2$ 时，**Desargues 假定** (Desargues assumption) 的正、反两面都成立，只要这假定中的交存在，

3) 当 $\dim R>2$ 时，R 中任意三点必在一个平面上

R 映射到 P^n 内只有两种可能. 或者覆盖整个 P^n、这时，R 中的测地线都是具有相同长度的圆周，或者 R 不包含某一超平面的任何点，从而可认作是仿射空间内一个开凸域

在 Riemann 几何的范畴内，只有 Euclid 几何学、双曲几何学和椭圆几何学是 Desargues 几何学，也就是说，空间的 Desargues 本质蕴涵非常强的移动性 (Beltrami 定理 (Beltrami theorem))，这是在 Riemann 几何内一个重要定理的例子 更一般的空间不再有类似的定理 如果可微条件足够强，已经有人提出 Desargues 几何学的一个构造方法，但只有 A B Погорелов ([2]) 对所谓 Hilbert 第 4 问题，即射影空间或其凸子空间的度量化问题，提供了最后的和最一般的解答，而未用到任何正规性的假设. Desargues 几何学的另一例子是 **Hilbert 几何学** (Hilbert geometry)，它在研究非正曲率空间时很有用

Minkowski 几何学 (Minkowski geometry) 为非 Riemann 的 Desargues 几何学的一个重要例子. 它可当作一切非 Riemann 几何学 (包括 **Finsler 几何学** (Finsler geometry)) 的范例.

参考文献

[1] Buseman, H , The geometry of geodesics, Acad Press, 1955

[2] Погорелов, А В , Четвертая проблема Гильберта, М , 1974 (英译本 Pogorelov, A V , Hilbert's fourth problem, Winston and Wiley, 1979)

М И Войцеховский 撰

【补注】 条目中处理的概念是 Desargues 平面 (Desargues plane) (即 **Desargues 假定** (Desargues assumption) 成立的仿射平面或射影平面) 在一般空间的推广，见 [A1]

关于 G 空间的概念，见**广义 Finsler 空间** (Finsler space, generalized)，**不定度规空间** (space with an indefinite metric)，以及**测地几何学** (geodesic geometry) 不要把这里 G 空间的意义同微分拓扑和代数拓扑中所用的 G 空间概念相混淆，那里的 G 空间不过是一个拓扑空间，配备一个群 G 的作用

参考文献

[A1] Hughes, D R and Piper, F C , Projective planes, Springer, 1973

马传渔 译 黄正中 校

Descartes 卵形线 [**Descartes oval** 或 Cartesin oval, **Декартов овал**]

一条平面曲线，曲线上的任何一点 P 与两固定点 F_1 和 F_2 (焦点) 之间的距离 r_1 和 r_2 满足下列非齐次线性方程

$$r_1+mr_2=a$$

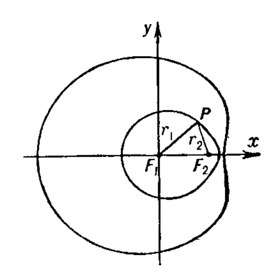
Descartes 卵形线也可以由齐次线性方程

$$r_1+mr_2+nr_3=0$$

来定义，其中 r_3 是点 P 到位于直线 F_1F_2 上的第三个焦点 F_3 的距离. 在一般情况下，Descartes 卵形线由两条封闭曲线组成，一条包围着另一条 (见图) 在 Descartes 坐标系中，Descartes 卵形线的方程是

$$\sqrt{x^2+y^2}+m\sqrt{(x-d)^2+y^2}=a,$$

其中 d 是线段 F_1F_2 的长度 如果 $m=1$，$a>d$，则 Descartes 卵形线是椭圆，如果 $m=-1$，$a<d$，则是双曲线，如果 $m=a/d$，则是 **Pascal 蚶线** (Pascal limaçon). R Descartes 在考虑光学问题时最先研究了这种曲线 [1]



参考文献

[1] Descartes, R , Géométrie, Leyden, 1637

[2] Савелов, А А , Плоские кривые, М , 1960

Е В Шикин 撰

【补注】 一个圆关于这个圆所在平面上的一个点光源的**焦散线** (caustic) 是一条 Descartes 卵形线的**渐屈线** (evolute)

Descartes 卵形线可以通过各种不同的方式产生 一种方式如下所述 设 C 和 C_1 是两个锥面，其轴均平行于 z 轴，与 xy 平面形成圆形交线. 这时，两圆锥的

交线向 xy 平面上的垂直投影是一条 Descartes 卵形线 这是 A Quetelet 证明的一个结果 假设 C 和 C_1 的顶点分别在 $(0,0,1)$ 和 $(c,0,a)$，且与 xy 平面的交线是半径为 1 和 b 的两个圆（见下述） 于是，在 $b=(1-a)^{-1}a(a+1)$，$c=-(1-a)^{-1}(a+1)^2$ 的情况下，交线的投影是**心脏线**（cardioid）

在极坐标中，Descartes 卵形线的方程是 $r^2-2(a+b\cos\varphi)r+c^2=0$ 因此，当 $c=0$ 时，这个方程化为 $r=a+b\cos\varphi$（以及 $r=0$），于是得到 **Pascal 蚶线** (Pascal limaçon)，此外，如果 $a=b$，则得到**心脏线** (cardioid)，它的方程也可能写成 $\sqrt{r}=\sqrt{m}\cos(\varphi/2)$

参考文献

[A1] Lawrence, J D, A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972

[A2] Fladt, K, Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven, Akad Verlagsgesell, 1962

张鸿林 译

Descartes 定理 [Descartes theorem, Декарта теорема], Descartes 正负号法则 (Descartes sign rule)

实系数多项式 $f(x)$ 的正根的个数等于其系数序列中各项的变号数，或者比变号数少偶数个（每个根按其重数来计算个数），在计算变号数时，零系数忽略不计．如果已知给定多项式的一切根都是实根（例如，对于对称矩阵的特征多项式而言），则 Descartes 定理给出根的准确个数．这个定理也能用来求多项式 $f(x)$ 的负根的个数，这时只需考虑 $f(-x)$ 即可．

参考文献

[1] Курош, А Г, Курс высшей алгебры, 11 изд, М, 1975（中译本 А Г 库洛什，高等代数教程，人民教育出版社，1962）

И В Проскуряков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kostrikin, A I, Introduction to algebra, Springer, 1982（译自俄文）

张鸿林 译

下降法 [descent method of, спуска метод]

一种解最小化问题

$$f(x^*)=\min_x f(x)$$

的方法，这里 f 为变量 $x=(x_1, \quad, x_n)$ 的某个函数．下降法的迭代序列 $\{x^k\}$ 用公式

$$x^{k+1}=x^k+\alpha_k g^k$$

计算，这里 g^k 是指 f 在 x^k 处的某一下降方向的向量，α_k 为一迭代参数，它的值表示沿 g^k 方向的步长．如果 f 是可微函数，而 x^k 不是它的极值点，那么向量 g^k 必须满足不等式

$$(f'(x^k), g^k)<0, \qquad (*)$$

这里 $f'(x^k)$ 为 f 在 x^k 处的梯度

如果 f 是一个充分光滑函数（例如，二次连续可微），并且序列 $\{g^k\}$ 满足不等式 (*)，则存在一个序列 $\{\alpha_k\}$ 使得

$$f(x^0)> \quad >f(x^k)>$$

在关于函数 f 和关于选择参数 $\{\alpha_k\}$ 与向量 g^k 的方法的一定限制下（见[3]），序列 $\{x^k\}$ 收敛到初始问题的解 x^*

梯度法 (gradient method) 是一种下降法，其中向量 $\{g^k\}$ 是按某种方式通过向量 $\{f'(x^k)\}$ 来表示的．最常见的一种情形是其中

$$g^k=-B(x^k)f'(x^k),$$

这里 $B(x)$ 是对任意两个向量 x 与 y，以及某两个常数 $M\geqslant m>0$，满足

$$m(x,x)\leqslant(B(y)x,x)\leqslant M(x,x)$$

的一个对称矩阵 在关于 f 的附加限制（见[3]）下并通过 $\{\alpha_k\}$ 的一种特殊选择，梯度法保证 $\{x^k\}$ 以具有比率 $q<1$ 的一个几何级数速度对初始问题解 x^* 的收敛．梯度法的一个特殊情形是**最速下降法** (steepest descent, method of)，其中矩阵 $B(x)$ 为单位矩阵．

参考文献

[1] Канторович, Л В, Акилов, Г П, Функциональный анализ в нормированных пространствах, 2 изд, М, 1977（中译本 Л В Канторович, Г П Акилов, 泛函分析，高教出版社，1984)

[2] Zoutendijk, G, Methods of feasible directions, Elsevier, 1970

[3] Пшеничный, Б Н, Данилин, Ю М, Численные методы в экстремальных задачах, М, 1975（英译本 Pshenichnyi, B N and Danilin, Yu M, Numerical methods in extremal problems, Mir, 1978)

[4] Поляк, Б Т, 《Ж вычисл математики и Матем физики》, 3 (1963), 4, 643－654

Ю А Кузнецов 撰

【补注】 亦见**坐标方式的下降法** (coordinate-wise descent method)．

参考文献

[A1] Ortega, J M and Rheinboldt, W C, Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Acad Press, 1970

胡宣达 译

画法几何学 [descriptive geometry, начертательная геометрия]

几何学的一个分支，其中通过把一些三维空间图形表示在平面上来研究这些图形以及探讨解决三维问题的方法．三维图形的平面表示是通过图形（实物、

对象、原型）在投影平面上的中心或平行**投影**（projection）来实现的．应用最广泛的一类工程图是由正交投影得到的复合图（composite drawing）其基本思想如下所述．选取两个相互垂直的投影平面 Π_1 和 Π_2 平面 Π_1 称为水平投影面（horizontal projection plane），平面 Π_2 称为正投影面（frontal projection plane）把空间中任意一点 A 向这两个平面作垂直投影（见图 1）

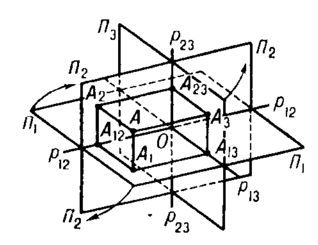


图 1

这就得到水平投影（horizontal projection）A_1 和正投影（frontal projection）A_2 有时还要加上第三个投影——侧投影面（profile projection plane）Π_3 上的侧投影（profile projection）A_3，平面 Π_3 垂直于 Π_1 和 Π_2 为了得到由这三个投影组成的复合图，把平面 Π_1 和 Π_3 分别绕它们与平面 Π_2 的交线 p_{12} 和 p_{23} 转动，使之与平面 Π_2 重合（见图 2）实际上，投影轴 p_{12} 和 p_{13} 的位置通常并不画出．也就是说，投影平面可以平行移动．

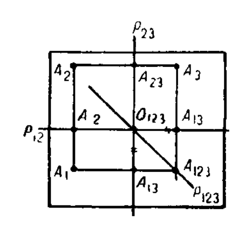


图 2

为了得到更直观的表示，在画法几何中还采用**轴测投影法**（axonometry）为了表示大尺度的对象，还采用中心投影法，即透视（perspective）法．

参考文献

[1] Monge, G , Geometrie descriptive, Paris, 1820

[2] Глаголев, Н А , Начертательная геометрия, 3 изд , М , 1953

[3] Курс начертательной геометрии, М , 1956

А Б Иванов 撰

【补注】 有许多关于画法几何学的德文著作，例如[A1]一本英文参考书是[A2]

计算机制图学（computer graphics）的出现可以说是画法几何学新生的标志，关于三维对象的二维图形表示，例如见[A3]，[A4]和其中的参考文献．

参考文献

[A1] Rehbock, F , Darstellende Geometrie, Springer, 1969

[A2] Leighton Wellman, B , Technical descriptive geometry, McGraw-Hill, 1957

[A3] Bret, M , Images de synthèse Methodes et algorithmes pour la réalisation d'images numeriques, Dunod, 1988

[A4] Penna, M A and Patterson, R R , Projective geometry and its applications to computer graphics, Prentice Hall, 1986

张鸿林 译

描述集合论 [**descriptive set theory**, **дескриптивная теория множеств**]

集合论的一个分支，主要研究那些从相对简单的集合（如 Euclid 空间，度量空间或拓扑空间中的闭集或开集）出发经过一些运算构造出来的集合 这些运算包括并、交、补和投影，等等．描述集合论创立于二十世纪初，它的创立是基于 E Borel, R Baire 和 H Lebesgue 进行的与集合的可测性有关的研究 Borel 可测集命名为 **Borel 集**（Borel set）或 B 集．另一方面，Baire 提出了函数的一个分类，即所谓的 Baire 函数类，他还证明了有关这些函数的一系列定理（见 **Baire 类**（Baire classes），**Baire 定理**（Baire theorem））Lebesgue 证明了 B 集等同于 Baire 函数的 **Lebesgue 集**（Lebesgue set），他给出了 B 集的第一个分类，并证明了每一类都不空

对 B 集的研究已成为描述集合论的重要任务，第一个这样的问题就是 B 集的基数问题 在引入了 **Lebesgue 测度**（Lebesgue measure）之后才发现可测集合类比 B 集类宽得多，从而产生了确定一集合是否可测的问题．就一特定的集合而言，对这一问题的解决往往涉及对该集合构造过程的分类，即它的描述结构．这就规定了描述集合论所处理的另一些重要问题，即去发现最宽的（保可测性的）集合运算的类，并且研究其运算结果的性质．这些在法国数学家著作中产生的问题主要是由苏联数学家（即 Н Н. Лузин 及其学派）解决的

最重要的问题之一，即 B 集的基数问题，由 П С Александров（[1]）在 1916 年解决，为此目的他构造了 **$\mathscr{A}$ 运算**（$\mathscr{A}$-operation）他证明了，取区间作为起始点，应用 $\mathscr{A}$ 运算可以构造出任何期望的 B 集，且证明了应用 $\mathscr{A}$ 运算得到的不可数集合（称作 **$\mathscr{A}$ 集**（$\mathscr{A}$-set））包含一个**完满集**（perfect set），因而具有连续统的基数．F Hausdorff 也独立地得到了这一结果．М. Я. Суслин 证明了，存在一个不是 Borel 集的 $\mathscr{A}$ 集（[2]）．他还引入了 $\mathscr{A}$ 集和 $\mathscr{A}$ 运算的名称以纪念 Александров $\mathscr{A}$ 集也称作 Суслин 集（Suslin sets）或**解析集**（analytic set）．一 $\mathscr{A}$ 集是 B 集的充分必要条件是．i) 它的补集也是 $\mathscr{A}$ 集（**Суслин 准则**（Suslin criterion）），或 ii) 它是 $\mathscr{A}$ 运算作用到不交元素的结果（**Лузин 准则**（Luzin creterion））．所有 $\mathscr{A}$ 集都是可测的且满足 **Baire 性质**（Baire

property) 如下得到 $\mathscr{A}$ 集的新方法与 $\mathscr{A}$ 运算等价 $\mathscr{A}$ 集是 B 集（甚至 G_δ 集）的投影 $\mathscr{A}$ 集是无理数空间 **I** 的连续象，从而，作为推论，$\mathscr{A}$ 集是 B 集的连续象（[3]）. 同时，一 B 集在一对一（甚至可数对多（[4]））连续映射下的象仍是 B 集，且任意不可数 B 集是 **I** 的一个一对一连续象与一个至多可数的集合的并（[3]）. 最后 Лузин 发现了另外一种借助于筛运算（见 **Лузин 筛** (Luzin sieve)) 定义 $\mathscr{A}$ 集的重要方法. 超限筛指标和要素已成为研究 $\mathscr{A}$ 集及其补集即 $C\mathscr{A}$ **集** ($C\mathscr{A}$-set) 的性质的有力工具

在对 $C\mathscr{A}$ 集的研究过程中，Лузин 引入了**射影集** (projective set). 射影集的每一类 α 都含有一集合，它不属于任意类 $<\alpha$ ([3],[5]). **通用集** (universal set) 的概念是证明该定理及其他断定某些集合类不空的定理的重要工具. 对投影集，甚至第二类中集合的研究遇到一些尚未解决的困难 尚未解决的问题之一就是 (B_2) 集的可测性，它们的基数以及它们是否满足 Baire 性质 这方面的重要结果由 П С Новиков 得到. 存在一个不可数 $C\mathscr{A}$ 集，它与不包含完满子集的假设不自相矛盾，存在一 (B_2) 集，它与它不可测的假设不自相矛盾（[4]）.

由 Александров ([7]) 引进的 Γ 运算，即 $\mathscr{A}$ 运算的补运算，是发展 Колмогоров 和 Hausdorff 的集合论运算的一般理论的第一步，然而，运算的基础类是由正的集合论运算或所谓的 δ-σ 运算组成的 对每一个这样的 **δ-σ 运算** (δ-σ-operation) Φ，可以定义补 δ-σ 运算 Φ^c，公式

$$\Phi^c(\{E_n\}) = C[\Phi(\{E_n\})]$$

可以看成是 Φ^c 的定义. 正规 δ-σ 运算（对任何集族 M 有 $\Phi(\Phi(M))=\Phi(M)$([8])）的概念也被引入. $\mathscr{A}$ 运算和 Γ 运算是互补的正规 δ-σ 运算. 可数并与可数交也是这样的. 拓扑空间中集合运算的一般理论中的一个关键定理是 Колмогоров 补集定理 (Kolmogorov completments theorem) 如果一空间包含一非连续统，M 是这个空间的闭集系统，且 Φ 是任一集合运算，则集族 $\Phi(M)$ 中至少有一个元素的补集不在其中 ([8],[5],[9]) 对一给定集族 M 交替使用 δ-σ 运算 Φ 和 Φ^c 可能构造出一递增的超限类序列 $M_0=M, M_1, \quad, M_\alpha, \quad, \alpha<\omega_1$，它满足非空类上的 Колмогоров 定理 (Kolmogorov theorem) 如果 Φ 是一个正规 δ-σ 运算，且其基数比可数并运算（或可数交运算）的基数大，而 M 是包含一非连续统的度量空间中所有闭集组成的集族，则由运算 Φ 从 M 出发生成的所有类 M_α ($\alpha<\omega_1$) 是互不相同的 这里，如果对任何集族 M 都有 $\Phi(M)\supseteq\Psi(M)$，则认为 δ-σ 运算 Φ 的基数比 δ-σ 运算 Ψ 的基数大 ([8],[5]) 如果 $\Phi=\bigcup_1^\infty$(或 $\bigcap_1^\infty$)，则由运算 Φ 从集族 M 出发生成的类 M_α($\alpha<\omega_1$) 代表由集族 M 生成的 B 集的类 (Hausdorff 分类 (Hausdorff classification)). 类似地，$\mathscr{A}$ 运算从 Borel 集族 M 出发生成 C 集（见 **Лузин 集** (Luzin set)）的类 M_α ($\alpha<\omega_1$) 所有 C 集都是可测的且具有 Baire 性质 所有 C 集组成类 (B_2) 的一部分，但不等于它

由 Лузин 引入的分离概念在描述集合论中起着极其重要的作用 第一分离原理 (first separation principle) 为. 任意两个不交 $\mathscr{A}$ 集是 (B) 可分离的. 第二分离原理 (second principle of separability) 为 如果 E 和 P 是两个 $\mathscr{A}$ 集（或 $C\mathscr{A}$ 集），则集合 $E\backslash P$ 和 $P\backslash E$ 是 $(C\mathscr{A})$ 可分离的 存在两个 $C\mathscr{A}$ 集不是 (B) 可分离的. 第二类投影集合的分离性问题由 Новиков 解决 ([4]) 且它的分离原理相反 它们是通过把关于第一类投影集的各个定理中的 $(\mathscr{A})$ 换为 $(C\mathscr{A}_2)$，$(C\mathscr{A})$ 换为 $(\mathscr{A}_2)$，(B) 换为 (B_2) 后得到的. Новиков ([4]) 还解决了 C 集类中的分离问题（亦见 [3]） 他推广了集合分离性概念，使其包括集合的同时或多重分离性的概念，以及指标相等的概念（[4]），它是证明有关多重分离的定理的主要工具

描述集合论发展的一个重要阶段就是对一致化问题的解决. 一集合 P 把集合 $E\subseteq X\times Y$ 一致化，如果 $P\subset E$，且 P 和 E 在 X 上有相同的投影，且它在 X 上的投影是一对一的 所有 B 集被 $C\mathscr{A}$ 集一致化. 能行选择非空 $C\mathscr{A}$ 集中一点的过程导出更强的结论 所有 $C\mathscr{A}$ 集被一 $C\mathscr{A}$ 集一致化 任一 $C\mathscr{A}$ 集被一 $\mathscr{A}_{\rho\sigma\theta}$ 型集一致化 ([3],[10]). 在 Euclid 平面上存在一 $\mathscr{A}$ 集，它不被任何 $\mathscr{A}$ 集或 $C\mathscr{A}$ 集一致化（如见 [11]）. 一 B 集被一 B 集一致化的条件问题可以作如下最一般地回答 与 F_σ 集中的任一直线 $x=$ 常数相交的任一平面 B 集可被一 B 集一致化 一致化问题是在解隐 B 函数问题的过程中产生的（[3]）. 同时也产生了其他问题：B 集的投影的性质，集合的分裂，集合的覆盖，一给定的 B 集 E 的所有投影点组成的集合的性质，其中 E 的前象（与 E 的交）具有给定的性质 下面的定理（[3]）给出了第二个和第三个问题的思想 具有可数对多投影的 B 集是可数多个一致 B 集的并，且对任意两个这样的集合，其中一个在另一个的下面（B 集分裂定理 (splitting theorem of a B-set)），具有可数对多投影的 $\mathscr{A}$ 集被一具有该性质的 B 集包含（$\mathscr{A}$ 集覆盖定理 (covering theorem of an $\mathscr{A}$-set)）

除了 B 集的 Lebesgue 和 Hausdorff 分类之外，还有根据 Лузин-de la Vallée Poussin 的分类 在这种分类中，是利用可表为类 $<\alpha$ 的可数多个集合的交，而不是并的集合来研究已知类 K_α ($\alpha<\omega_1$) 中集合的结构的，这些集合称之为类 α 的元素 类 K_α 中的任一集合是类 $\leqslant\alpha$ 的可数多个互不相交的元素的并 每一类 K_α 能分成子类 K_α^β ($\beta<\omega_1$) 且 β 可任意大 因为类 α 的每一集合

都有元素，从而产生了研究这些元素自身的问题，尤其是研究在每一类 K_α 中的使得类 α 中每一都可表示为类 $\leqslant\alpha$ 中的可数多个典型元的并的基本拓扑型元素的存在问题，其中基本拓扑型中的元素称为典型（canonical）元（所有这些均是在无理数空间 I 上考虑的）．第一类中包含两种类型的典型元 单点集和完满（**Cantor 集**（Cantor set））的拓扑象．第二类中的每一元素（[12]）都是类 2 中的某个与空间 I 同胚的典型元和类 $\leqslant 1$ 中的某个集合的并．第三类中也发现有典型元，这些典型元是由 Baire（[3]）构造的．更高层类中典型元的存在性问题，非常困难，被 Л В Келдыш 解决（[13]）．他证明了每个类 $\alpha<\omega_1$ 中都存在典型元，且弄清了它们的结构．类 >2 中的每一个元素，是类 α 中的一典型元与类 $\alpha<\alpha$ 中至多可数多个元素的并．这一领域中另外一个困难问题与较低层类中 B 集的算术例子的构作有关联 Baire（[3]）给出了类 3 中的这样的例子 Келдыш（见[13]）给出了所有有穷类中的算术例子（亦见[3]），且在理论上指出了构作类 $\alpha\geqslant\omega_0$ 中的这种例子的可能性

在描述集合论中起重要作用的还有关于同胚映射（[9]）扩张的 **Лаврентьев 定理**（Lavrent' ev theorem）设 X 和 Y 是完全度量空间，令 $A\subset X$，$B\subset Y$，且令 f $A\rightarrow B$ 为一同胚映射，则可把 f 扩张为这两空间中两个 G_δ 集之间的同胚映射．由该定理容易导出拓扑不变性定理（theorem of topological invariance）（[9]）设 $\mathfrak{B}$ 为一闭集系统，且设 Φ 是满足 $\Phi(\mathfrak{B})$ 集（即集族 $\Phi(\mathfrak{B})$ 中的集合）与 G_δ 集的交仍是 $\Phi(\mathfrak{B})$ 集的 δ-σ 运算，则完全度量空间中的每一 $\Phi(\mathfrak{B})$ 子集在任意拓扑包含它的度量空间中仍是 $\Phi(\mathfrak{B})$ 集．在这个定理中，$\mathfrak{B}$ 可以换为开集系统 $\mathfrak{A}$．从而 $\Phi(\mathfrak{B})$ 集，其中 Φ 满足上述条件且它们组成完全度量空间的一部分，是绝对的 $\Phi(\mathfrak{B})$ 集．这同样适用于 $\Phi(\mathfrak{A})$ 集（关于度量空间类的绝对性质） 在许多特殊情况下，如 $C\mathscr{A}$ 集（[7]）（Φ 为 Γ 运算），该结果的建立并没有求助于 Лаврентьев 定理．任一完全度量空间是绝对的 G_δ 集 任一可度量的绝对的 G_δ 集与某一完全度量空间同胚 Александров-Hausdorff 定理（Aleksandrov-Hausdorff theorem））（[9]）．

关于无理数空间的拓扑特性的如下 Александров-Урысон 定理（Aleksandrov-Urysohn theorem）成立 每一具有可数基的没有局部紧点的且是绝对 G_δ 集的零维度量空间 X 与空间 I 同胚 因为 I 是绝对 G_δ 集且具有空间 X 的其他性质，所以定理中所列的 X 的性质代表了 I 的全部拓扑特性．这个特性导出了如下结论 任意的是 I 的连续象的度量空间（从而是绝对 $\mathscr{A}$ 集）也是 I 的商象（[14]） 也可引证如下相关结论 一非空可分的度量空间是 I 的连续开象，当且仅当它是绝对 G_δ 集（[15]），这里"开"可用"闭"代替 B 可测映射或 B 函数的概念，尤其是类 α 的 B 可测映射的概念，是连续映射的推广，类 (α,β) 的广义同胚概念和 B 同构概念是同胚的推广 关于这些映射见[6]

在叙述结果期间，通常没有指明它们适用的空间的类．这可以由下面事实来解释 大多数经典结果都是关于 I 的子集的 然而如果将 I 换成可分的绝对 G_δ 集（特别地，换成具有可数基的完全度量空间），几乎所有这些结果（除了指明的反例）仍然成立 描述集合论的进一步发展涉及把经典结论推广到如下情形 1）完全度量空间（未必可分），2）完全正规拓扑空间，特别地包括紧的 Hausdorff 空间，3）一般拓扑空间 即使是第一种情形，经典理论的推广也遇到了严重困难，且常常是完全不可能的 A H Stone 考察了把 B 集和 $\mathscr{A}$ 集理论推广到包括这种情形上（[16]）．

在完满正规空间类之外，由已知空间的所有闭集生成的 B 集（$\mathscr{A}$ 集）系统，与由该空间的所有开集生成的 B 集（$\mathscr{A}$ 集）系统正好巧合这个重要事实不再正确 如下关于类的非空性（[11]）的定理是有效的．在任意的完满正规的紧的 Hausdorff 空间中，对每一类 $\alpha<\omega_1$ 都存在类 α 中的一个 B 集，它不是类 $<\alpha$ 中的 B 集．

一致化问题已成为关于**多值映射的截面**（section of a mapping）的一般性问题的部分情况．

描述集合论在一般拓扑空间（三种情形的现代发展与其他数学分支（例如位势理论）的需求是有关的．关于细节见[17]（其中有广泛的参考文献）

描述集合论的思想和方法对数学的一些领域如分析，函数论，拓扑学，数理逻辑等等的发展产生了深刻的影响．

参考文献

[1] Aleksandroff, P S Sur la puissance des ensembles mésurables B, *C R Acad Sci Paris*, **162** (1916), 323-325

[2] Souslin, M Ya, Sur une définition des ensembles measurables *B* sans nombres transfinis, *C R Acad Sci Paris*, **164** (1917), 88-90

[3] Лузин, Н Н, Собр соч т 2, М, 1958

[4] Ляпунов, А А,《Тр матем ин-та АН СССР》, **133** (1973), 11-22

[5] Очен, Ю С,《Успехи матем наук》, **10** (1955), 3, 71-128

[6] Куратовский, К, Топология, т 1, М, 1966

[7] Aleksandrov, P S, *Fund Math*, **5** (1924), 160-165

[8] Колмогоров, А Н,《Матем сб》, **35** (1928), 3-4, 415-422

[9] Hausdorff, F, Grundzuge der Mengenlehre, Leipzig, 1914 Reprinted (incomplete) English translation Set theory, Chelsea (1978)（中译本 F 豪斯道夫，集论，科学出版社，1960）

[10] Арсенин, В Я, Ляпунов, А А,《Успехи матем наук》, **5** (1950), 5, 45-108

[11] Пономарев, В И ,《Докл АН СССР》, 170 (1966), 3, 520－523
[12] Aleksandrov, P S , and Urysohn, P S , Ueber nulldimensionalen Punktmengen, *Math Ann* , 98 (1927), 89－106
[13] Келдыш, Л В ,《Тр матем ин-та АН СССР》, 17 (1945), 1－76
[14] Michael, E and Stone, A H , Quotients of the space of irrationals, *Pacific J Math* , 28 (1969), 3, 629－633
[15] Архангельский, А В ,《Тр Моск матем об-ва》, 15 (1966), 181－223
[16] Stone, A H , Non-separable Borel sets II, *General Topology and its Applications*, 2 (1972), 249－270
[17] Frolík, Z , A survey of separable descriptive theory of sets and spaces, *Czechoslovak Math* , 20 (1970), 406－467
А Г Елькин, В И Пономарев 撰

【补注】

首先给出关于增补的参考文献的几点注记，然后给出关于各种常用的专用术语和记号的说明以及对条目内容的补充．特别在条目中提到了“当今时期”发生的三件重要事情 与现代集合论的基础性成果相联系，强有力的能行描述集合论 (effective description set theory) 的成熟，以及在分析中巨大应用领域的开辟

关于经典时期（约从 1917 至 1945），除了文献[3], [6], [9]和[10]之外，还可参考文献[A1], 它是一个惊人长的词典型文献

关于近代时期，可增加文献[A2]－[A11] 文献[A2], [A3], [A4], [A5]同处在第一分离定理的水平上，由于它们在其他领域的众多应用从而非常实用．文献[A10]讨论了该理论的大多数方面 经典理论及其推广（κ 解析解，各种拓扑空间），和能行理论（亦见[A11]）．文献[A9]是现代的参考书，就基础和应用相比较而言，它更注重基础 它详尽地包括了经典理论与能行理论的大部分内容．文献[A6]是逻辑方面的优秀书籍，其中的描述集合论一章包含了许多课题 文献[A8]解决了“广义筛”的一些问题，揭示了能行方法较之经典方法的优越性 最后，文献[A7]是最近的关于现代理论如何在分析中应用的例子

下面是关于西方的专用术语和记号的一些注记．

与完全可分的度量空间同胚的 Hausdorff 拓扑空间（即具有可数基的正规的绝对的 G_δ 集合），称为 Polish 空间 (Polish space)．Polish 空间已经是且仍然是（尽管有推广）描述集合论的自然框架 基本的 Polish 空间 $\mathbf{I}$ 即无理数空间，与 **Baire 空间** (Baire space) $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ 同胚（逻辑学家常记作 ω^ω，他们把 $\mathbf{N}$ 与第一个无穷**序数** (ordinal number) ω 等同）

设 $\mathscr{N}$ 为 Baire 空间 $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ 的缩写 $\mathscr{N}$ 的一子集族 $\mathscr{C}$ 满足约化原理 (reduction principle)，如果对任意两集合 $A, B\in\mathscr{C}$ 存在不相交的 A', $B'\in\mathscr{C}$，使得 $A'\subseteq A$, $B'\subseteq B$, $A'\cup B'=A\cup B$ 集族 $\mathscr{C}$ 满足分离原理，如果对任意两个不相交集 $A, B\in\mathscr{C}$ 存在 $E\in\mathscr{C}$，使得它的补集 CE 在 $\mathscr{C}$ 中，且 $A\subseteq E$, $B\subseteq CE$

$\mathscr{A}$ **运算** ($\mathscr{A}$-operation) 也称做 Суслин 运算 (Suslin operation) 或 Суслин 概形 (Suslin schemes)，它在 $\mathscr{C}$ 上的运算结果称为 Суслин 概形在 $\mathscr{C}$ 上的核 (Kernels of suslin schemes)．当所考虑的空间是 Polish 空间时，Суслин 概形在闭集（或 Borel 集）上的核正好与 $\mathbf{I}$ 的连续象重合．对于任意空间 E，第一种构作得出的是“相对”解析集，而第二种构作得出的是“绝对”解析集．人们一般用“解析”代表其中之一，而用“Суслин”代表另一个，然而，在一些著作中，具体代表哪一个是不同的 Bourbaki（见[A2]）使用了一个流行的概念，即绝对解析空间 (absolute analytic space)（分别地，绝对 Borel 空间 (absolute Borel space)）来代替 Суслин 空间 (Suslin space)（分别地，Лузин 空间 (Luzin space)）的名字，当仅考虑这些空间的 Borel 结构时，还会发现 Blackwell 空间 (Blackwell space)（分别地，标准空间 (standard space)）

要表示一空间 E 中的 Borel 分层 (Borel hierarchy) 的类，常常需把经典记号替换为如下记号 Σ_1^0 表示开集类 $\mathscr{G}$，Π_1^0 表示闭集类 $\mathscr{F}$，若 Σ_n^0 已定义，则 Π_n^0 是它的对偶类 (dual class)（即，由 Σ_n^0 中的集合在 E 中的补集组成的类），而 Σ_{n+1}^0 是由 Π_n^0 集的可数并组成的类，最后，Δ_n^0 是歧义类 $\Sigma_n^0\cap\Pi_n^0$，于是有 $\Sigma_2^0=\mathscr{F}_\sigma$, $\Pi_2^0=\mathscr{G}_\delta$, $\Sigma_3^0=\mathscr{F}_{\delta\sigma}$, $\Pi_3^0=\mathscr{F}_{\sigma\delta}$，等等（亦见**歧义类的 Borel 集** (Borel set of ambiguous class)）．

类似地，表示空间 E 中的投影类要用如下记号 Σ_1^1 表示解析集类 $\mathscr{A}$，解析集即是 $E\times\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ 的 Π_1^0 子集在 E 上的投影，而 Π_1^1 表示余解析集类 $C\mathscr{A}$，若 Σ_n^1 已定义，则 Π_n^1 是它的对偶类，而 Σ_{n+1}^1 是 $E\times\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ 的 Π_n^1 子集在 E 上的投影组成的类，最后，Δ_n^1 表示类 $\Sigma_n^1\cap\Pi_n^1$．于是，有 $\Sigma_2^1=PC\mathscr{A}$, $\Pi_2^1CPC\mathscr{A}$, $\Delta_2^1=B_2$，等等．

用来表示经典集类的字母 $\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi}, \mathbf{\Delta}$ 应该同现在引入的（当 n 是有穷**序数** (ordinal number) 时）相应符号 Σ, Π, Δ 区分开来 当 E 是 Polish 空间且从递归的观点看“合理”时（所有通常的 Polish 空间都是这种情况），则在 E 中可区分出单纯开集的可数族，称为能行的 (effective) 或半递归的 (semi-recursive)（或递归可枚举的 (recursively enumerable)．若 $E=\mathbf{N}$，亦见**递归集合论** (recursive set theory)） 这个类，记为 Σ_1^0，具有足够的封闭性质，因而可如上定义能行类的阶层 Σ_n^i, Π_n^i, Δ_n^i，其中的可数并运算要换为在 $\mathbf{N}$ 上的投影运算 所有这些类都是可数的．然而，如果对任一 $\alpha\in\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$，定义 $\Sigma_n^i(\alpha)$ 为 E 中的所有在 α 处作为 $E\times\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ 中的 Σ_n^i 集的截面出现的集合 A 组成的类，类似地可定义 $\Pi_n^i(\alpha)$ 和 $\Delta_n^i(\alpha)=\Sigma_n^i(\alpha)\cap\Pi_n^i(\alpha)$，那么这些 α 中的能行类 (effective

classes)具有和能行类相似的性质，且通过如下等式与经典类相联系

$$\Sigma_n^1 = \bigcup_{\alpha \in I} \Sigma_n^1(\alpha),\ \Pi_n^1 = \bigcup_{\alpha \in I} \Pi_n^1(\alpha),\ \Delta_n^1 = \bigcup_{\alpha \in I} \Delta_n^1(\alpha)$$

因而可以理解为什么能行理论可以用来获得经典结论

描述集合论的经典部分在 1917 年至 1945 年间主要由俄国学派创立和发展的 然而在这期间对该学科的重要贡献还来自波兰学派和日本学派．在波兰学派研究描述集合论的成员中，必须提及（至少） W Sierpinski，这是因为他与Лузин关于余解析集的工作（Лузин-Sierpinski 指标（Luzin-Sierpinski index）是近代的 Π_1^1 范数的模型），K Kuratowski，这主要是因为他关于逻辑定义的工作和约化定理（reduction theorem），第二不完全定理的现代形式的工作（对 Π_1^1 集的每一序列 (C_n) 存在互不相交的 Π_1^1 集的序列 (D_n)，满足 $C_n \supseteq D_n$，且 $\bigcup C_n = \bigcup D_n$），W Hurewicz，这是因为他对余解析集中 $\mathcal{K}_0$ 集的特性的研究和解析集中 $\mathcal{K}_\sigma$ 集的特性的研究（许多现代工作的起源），以及他首次给出了余解析集的非Borel集的清晰的自然的例子（[0, 1]中的所有可数紧子集组成的集和[0, 1]中所有紧的有理数集组成的集），最后是 S Mazurkiewiz，这是因为他关于 Polish 空间的开创性的工作，以及他的一个余解析集非 Borel 集的自然的例子（[0, 1]区间上的所有处处可微的函数组成的集合） 最近的（小范围的）日本学者中必须提及 功力金二郎，他和Новиков及 B Я Арсенин 关于积空间的 Borel 集的工作始于文献 [A8]，尤其是近藤，他在 1937 年证明了积空间中每一余解析集可被一余解析集一致化（该结果也可由 Новиков 的一个早期结论导出，这是在 60 年代由 J W Addison 证明的 Addison 是一位逻辑学家，他研究了经典理论与能行理论的联系 能行理论是 S C Kleene 在 N 上独立发展的）．

所有在经典理论中尚未解决的有关投影集的重要问题（Π_1^1 集的基数，投影集的可测性，等等）在最近三十年得到了满意的答案 它们在通常的集合论系统中是不可解的，然而是相互有联系的，并且可以通过增加新的自然的公理得到“肯定”的回答 其证明一方面依赖于**公理集合论**（axiomatic set theory）的复杂工具，Gödel 的可构造模型及其内模型扩张（见 **Gödel 构造集**（Godel constructive set）），和 P Cohen 的**力迫法**（forcing method），另一方面还依赖于无穷对策（infinite game）的概念，它现在是描述集合论的中心（关于此概念的历史评注见[A9]） 按规范的形式说，一个对策 G 就是 $\mathbf{N}^\mathbf{N}$ 的一个子集，在对策过程中，角色Ⅰ和角色Ⅱ轮流选取整数（知道前面的选择），这样选择结束后得到 $\mathbf{N}^\mathbf{N}$ 的一个元素 α，如果 α 属于 G，则角色Ⅰ胜，否则角色Ⅰ负，称对策 G 是决定的（determined），如果有一个角色具有胜方案 容易但基本的 Gale-Stewart 定理（Gale-Stewart theorem）断言，闭（或开）对策是决定的，它使得人们容易证明第二分离定理和证明（巧妙有效地）不可数解析集包含完满子集 困难的 Martin 定理（Martin theorem）断言，所有 Borel 对策是决定的 另一方面，在通常的 Zermelo-Fraenkel 公理系统 ZFC 中不可能证明解析对策是决定的，且如下问题仅在 ZFC 中也是不可解的（关于大部分结论，见[A9]和[A8]），其中所说的空间为 Polish 空间

(a) 命题“每一个可数的 Π_1^1 集都包含完满子集”在 Godel 可构成模型中是假的，它与“每一 Σ_3^1 集是可测的”及“余解析非 Borel 集的元素在 Baire 类中是无界的”等价．它可由命题“所有解析对策是决定的”推出，这个命题与命题在“Borel 同构意义下只存在一个解析的非 Borel 集”等价，且可由可测基数（measurable cardinal）的存在性推出

(b) 在 Godel 可构成模型中，存在不可测的或不具有 **Baire 性质**（Baire property）的 Δ_2^1 集 然而，每一个能在 ZFC 中证明（provably）是 Δ_2^1 集的集合是可测的，且具有 Baire 性质

(c) 投影决定公理（axiom of projective determinacy），即所有投影对策是决定的，与“适度的”大基数公理等价．它蕴涵着对每一奇数 n，类 Σ_n^1（分别地，Π_{n+1}^1）满足分离性质，对每一偶数 n，满足约化性质和一致化性质 进而，所有的投影集是可测的，具有 Baire 性质，并且若不可数则包含完满子集．

解决了这些历史性问题的逻辑学家们，还把经典理论与 Kleene 的 N 上的递归论合并成了统一的能行描述集合论（在 Polish 空间的框架下） 它对经典理论的推动力已经发生了变化 首先，它引进了新的概念和技术，证明了在经典理论中毫无意义的定理，然而它们可以用来证明经典型的结论，但这些结论却没有经典型的证明，例如，每一具有不可数多个类的余解析等价关系允许有一个完满子集，其中元素两两互不等价．其次，如上所述，从经典和能行的观点来看，它应用并发展了的对策论技术．最后，即使忽略它的能行方面，它仍可使人们发现经典理论中的强有力的技术

(A) 由于 Kleene 的递归定理（见**递归**（recursion）），通用集不仅仅是用来获得反例，而是成了基本对象．设 Φ 是从 E 到 F 的一致解析运算（uniformly analytic operation），即从 $\Sigma_1^1(E)$ 到 $\Sigma_1^1(F)$ 的映射满足 对 $\Sigma_1^1(E \times \mathbf{N}^\mathbf{N})$ 中所有的 H，由 $(x, \alpha) \in K \Leftrightarrow x \in \Phi(H_\alpha)$ 定义的 $F \times \mathbf{N}^\mathbf{N}$ 的子集 K（H_α 为 H 在 α 处的截面）是 $F \times \mathbf{N}^\mathbf{N}$ 的解析集，由 Kleene 递归定理（及经典定理）得，Φ 是递增的，且满足如下推广的第一分离定理 如果 A 是 E 的解析集，C 是 F 的余解析集，且 $\Phi(A)$ 是 C 的子集，则存在 Borel 集 B，满足 $A \subseteq B$，且 $\Phi(B) \subseteq C$

(B)通过对各种经典结论（Лузин - Sierpinski 指标，Лузин 筛，Новиков 比较引理，等等）的合理的抽象理解，可数序数的应用变得更加普遍且容易得多，这使得人们推导出命题"每一良基（well-founded）解析关系具有可数长度（length）"的经典推论的一个重要部分（Kunen - Martin 定理（Kunen - Martin theorem）的一个特殊情形）．它和（A）一起使得人们能够证明如果 Φ 是 E 上的一致解析推导（uniformly analytic derivation）（即从 E 到 E 内的一致解析运算，使得对每一解析集 A 都有 $\Phi(A)\subseteq A$），且如果 $(\Phi_\xi)_{\xi<\aleph_1}$ 是连续迭代的超限序列，则（i）对每一解析集 A，$\tilde{\Phi}(A)=\bigcap_{\xi<\aleph_1}\Phi^\xi A$ 也是解析集，且是 A 的最大的 Φ 不变子集，（ii）上面定义的运算 $\tilde{\Phi}$ 是一致解析的，及（iii）如果 A 是解析集，C 是余解析集且包含 $\tilde{\Phi}(A)$，则存在一可数序数 ξ，使得 C 包含 $\Phi^\xi(A)$

描述集合论不仅在涉及测度论（**概率论**（probability theory），最优化理论，对策论）的分析学的任何分支中，尤其在具有丰富特殊集合的理论（**位势论**（potential theory），统计分析，**Hausdroff 测度**（Hausdroff measure），**调和分析**（harmonic analysis））中都有重要的应用，而且还在一些其他分支（**Banach 空间**（Banach space）理论）中有应用　这些应用依赖于如下有关 Polish 空间中解析集的成果．

1) $\sum_1^1$ 的稳定性和第一分离定理，以及解析集的通用测度或 Baire 性质，

2) Jankov - von Neumann 定理（Jankov - von Neumann theorem）可陈述为　积空间中的任一解析集都可被通用可测函数的图一致化（它比被通用可测图一致化强得多），

3) Choquet 定理（Choquet theorem）可陈述为每一解析集都是通用可容的（见**容量**（capacity）），更一般地，容量和解析集具有本质的联系．

4) 最后是 Kunen - Martin 定理（关于解析集的）．

上面引用的关于解析运算的最近的两个定理，包括了第一分离定理，容量理论中的外逼近结果，以及所谓的 Kunen - Martin 定理，可能将成为**泛函分析**（functional analysis）中的强有力工具

参考文献

[A1] Sierpinski, W, Les ensembles projectifs et analytiques, Gauthier - Villars, 1950

[A2] Bourbaki, N, Elements of mathematics General topology, 2, Addison - Wesley, 1966（译自法文）

[A3] Choquet, G, Outils topologiques et métriques de l'analyse mathematique, Centre de Documentation Univ Paris, 1969 Rédige par C Mayer

[A4] Christensen, J P R, Topology and Borel structure, North - Holland, 1977

[A5] Dellacherie, C and Meyer, P A, Probabilities and potential, 1－3, North - Holland, 1977－1988（译自法文）

[A6] Barwise, J (ed), Handbook of mathematical logic, North - Holland, 1977

[A7] Kechris, A S and Louveau, A, Descriptive set theory and the structure of sets of uniqueness, Cambridge Univ Press, 1988

[A8] Louveau, A, Ensembles analytiques et boréliens dans les espaces produits, *Astérique*, **78** (1980)

[A9] Moschovakis, Y N, Descriptive set theory, North - Holland, 1980

[A10] Rogers, C A, Jayne, J E, Dellacherie, C, Tøpsoe, F, Hoffman - Jørgensen, J, Martin, D A, Kechris, A S and Stone, A H, Analytic sets, Acad Press, 1980

[A11] Mansfield, R and Veitkamp, G, Recursive aspects of descriptive set theory, Oxford Univ Press, 1985

[A12] Martin, D A, Descriptive set theory　projective sets, in J Barwise (ed) Handbook of mathematical logic, North - Holland, 1977, 783－815

[A13] Jech, T, Set theory, Acad Press, 1978

张锦文、赵希顺 译

试验设计［**design of experiments, планирование эксперимента**］

研究如何合理安排带有随机误差的试验的**数理统计**（mathematical statistics）分支．人们常常考虑下述问题．在测试函数 $f(\theta,x)$ 时伴有随机误差，它们依赖未知参数（向量 θ）和变量 x，x 的值可由试验者从某个适当的集合 X 中选取　通常，试验的目的是估计所有参数，或一部分参数，或参数的函数，或检验关于 θ 的某些假设．根据试验目的确定设计的优良性准则　试验的设计就是给出在试验中变量 x 的一组值．

参考文献

[1] Налимов, В В, Чернова, Н А, Статистические методы планирования экстремальмых экспериментов, М, 1965

[2] Федоров, В В, Теория оптимального эксперимента, М, 1971（英译本　Fedorov, V V, Theory of optimal experiments, Acad Press, 1972

[3] Хикс, Ч, Основные принципы планирования эксперимента, пер с англ, М, 1967

[4] Finney, D, An introduction to the theory of experimental design, Univ Chicago Press, 1960

李国英 译　吴启光 校

无定向道路［**desorienting path, дезориентирующий путь**］

流形上的闭道路，沿它绕行一周导致局部定向（见流形的**定向**（orientation））的符号的改变．无定向道路只在不可定向流形 M 上存在，并且，从**基本群**（funda-

mental group) $\pi_1(M)$ 到 $\mathbf{Z}_2$ 上的具有由不是无定向道路的闭路类组成的核的同态是无二义地定义好的

А.В Чернавский 撰 徐森林 译 薛春华 校

行列式 [**determinant**, **определитель**], 在具有单位元 1 的交换结合环 K 上的 n 阶方阵 $A=\|a_{ij}\|$ 的 K 的元素，它等于一切形如

$$(-1)^t a_{1i_1} \cdots a_{ni_n}$$

的项的和，这里 $i_1, \cdots, i_n$ 是数 $1, \cdots, n$ 的一个排列，t 是置换 $1 \mapsto i_1, \cdots, n \mapsto i_n$ 中包含的逆序个数．矩阵

$$A=\left\|\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right\|$$

的行列式记作

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right| \text{ 或 } \det A.$$

矩阵 A 的行列式有 $n!$ 项，当 $n=1$ 时，$\det A=a_{11}$，当 $n=2$ 时，$\det A=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$．实际上最重要的情形就是 K 为一个域（特别是数域），一个函数环（特别是多项式环）或整数环的情形．

从现在起，K 是一个具有 1 的交换结合环，$M_n(K)$ 是 K 上一切 n 阶方阵的集合，E_n 是 K 上的单位矩阵．令 $A \in M_n(K)$，而 $a_1, \cdots, a_n$ 是矩阵 A 的行．（从这里起，所说的一切对于 A 的列同样成立．）A 的行列式可以看成它的行的一个函数：

$$\det A=D(a_1, \cdots, a_n)$$

映射

$$d: M_n(K) \to K(A \mapsto \det A)$$

满足以下三个条件：

1) $d(A)$ 是 A 的任意一行的线性函数：

$$D(a_1, \cdots, \lambda a_i+\mu b_i, \cdots, a_n)$$
$$=\lambda D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n)+\mu D(a_1, \cdots, b_i, \cdots, a_n),$$

这里 $\lambda, \mu \in K$,

2) 如果矩阵 B 是由 A 通过把行 a_i 换成行 $a_i+a_j (i \neq j)$ 而得到的，则 $d(A)=d(B)$,

3) $d(E_n)=1$.

条件 1)－3) 唯一地确定 d，即如果一个映射 $h: M_n(K) \to K$ 满足条件 1)－3)，那么 $h(A)=\det(A)$. 行列式理论的一个公理构成就是这样得到的．

设一个映射 $f: M_n(K) \to K$ 满足条件：

1_a) 如果 B 是由 A 通过把一行乘以 $\lambda \in K$ 而得到的，则 $f(B)=\lambda f(A)$. 显然 1) 蕴含 1_a)．如果 K 是一个域，则可以证明条件 1)－3) 与条件 1_a), 2), 3) 等价．

一个对角矩阵的行列式等于它的对角线上元素的乘积．由此得出映射 $d: M_n(K) \to K$ 是满射．三角形矩阵的行列式也等于它的对角线上元素的乘积．对于矩阵

$$A=\left\|\begin{matrix} B & 0 \\ D & C \end{matrix}\right\|$$

来说，这里 B 和 C 都是方阵，

$$\det A=(\det B) \cdot (\det C).$$

由转置的性质得出，$\det A^T=\det A$，这里 ^{T} 表示转置．如果矩阵 A 有两个相同的行，则它的行列式等于零，如果互换矩阵 A 的两行的位置，则它的行列式改变符号；

$$D(a_1, \cdots, a_i+\lambda a_j, \cdots, a_n)=D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n),$$

这里 $i \neq j$, $\lambda \in K$，对于 $M_n(K)$ 中 A 和 B 来说，

$$\det AB=(\det A) \cdot (\det B).$$

这样，d 是乘法半群 $M_n(K)$ 到乘法半群 K 的满态射．

设 $m \leqslant n$，$A=\|a_{ij}\|$ 是 K 上一个 $(m \times n)$ 矩阵，$B=\|b_{ij}\|$ 是 K 上一个 $(n \times m)$ 矩阵，又 $C=AB$，那么 Binet-Cauchy 公式（Binet-Cauchy formula）成立：

$$\det C=\sum_{1 \leqslant j_1<\cdots<j_m \leqslant n}\left|\begin{matrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{mj_1} & \cdots & a_{mj_m} \end{matrix}\right|\left|\begin{matrix} b_{j_1 1} & \cdots & b_{j_1 m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{j_m 1} & \cdots & b_{j_m m} \end{matrix}\right|$$

设 $A=\|a_{ij}\| \in M_n(K)$，A_{ij} 是元素 a_{ij} 的**代数余子式**（cofactor），则以下公式成立

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}=\delta_{ik}\det A, \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik}=\delta_{jk}\det A, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

这里 δ_{ij} 是 Kronecker 符号．行列式的计算常通过按一行或一列的元素展开，即按照公式 (1)，通过 Laplace 定理（见**代数余子式**（cofactor））以及通过对 A 施行不改变其行列式的变换．对于 $M_n(K)$ 中一个矩阵 A 来说，在 $M_n(K)$ 中有逆矩阵 A^{-1}，当且仅当在 K 中存在一个元素是 $\det A$ 的逆元．因此，映射

$$\mathrm{GL}(n, K) \mapsto K^*(A \to \det A)$$

是这些群的满态射，这里 $\mathrm{GL}(n, K)$ 是 $M_n(K)$ 中一切可逆矩阵的群（即一般线性群），K^* 是 K 中一切可逆元素的群．

域上一个方阵是可逆的，当且仅当它的行列式不

为零．一个域 F 上 n 维向量 $a_1,\quad,a_n$ 线性相关，其充分必要条件为

$$D(a_1,\quad,a_n)=0$$

域上一个阶 $n>1$ 的矩阵 A 的行列式等于 1 的充分必要条件为 A 是形如

$$t_{ij}(\lambda)=E_n+\lambda e_{ij}$$

的初等矩阵的乘积，这里 $i\neq j$，而 e_{ij} 是这样一个矩阵，它仅在 (i,j) 位置上为 1，其他位置上均为 0

行列式的理论是与解线性方程组

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+\quad+a_{1n}x_n=b_1, \\ \\ a_{n1}x_1+\quad+a_{nn}x_n=b_n \end{array}\right\} \qquad (2)$$

的问题相联系而发展的，这里 a_{ij}, b_j 是域 F 的元素　如果 $\det A\neq 0$，这里 $A=\|a_{ij}\|$ 是方程组 (2) 的矩阵，则这个方程组具有唯一解，可以通过 Cramer 公式（见 **Cramer 法则**（Cramer rule））计算出来　当方程组 (2) 是在一个环 K 上给出的，并且 $\det A$ 在 K 中可逆时，这个方程组也有唯一解，也由 Cramer 公式给出．

行列式的理论对于非交换的结合除环上的矩阵来说也已经构成．一个除环 k 上的矩阵的行列式（Dieudonné 行列式（Dieudonné determinant））如下引入．把除环 k 看作一个半群，作出它的交换同态象 $\bar{k}$　k 是一个群 k^* 再添上零元 0，这时 $\bar{k}$ 则由群 $\bar{k}^*$ 再添上零元 $\bar{0}$ 而得到，这里 $\bar{k}^*$ 是 k^* 对其换位子群的商群　满态射 $k\to\bar{k}$，$\lambda\to\bar{\lambda}$，由群的典范满态射 $k^*\to\bar{k}^*$ 和条件 $0\to\bar{0}$ 给出　显然 $\bar{1}$ 是半群 $\bar{k}$ 的单位元

除环上的行列式理论基于以下定理　存在唯一的满足以下三条公理的映射

$$\delta\quad M_n(k)\mapsto\bar{k}$$

Ⅰ）如果矩阵 B 是由矩阵 A 通过把一行从左边乘以 $\lambda\in k$ 而得到的，则 $\delta(B)=\bar{\lambda}\delta(A)$

Ⅱ）如果 B 是由矩阵 A 通过把一行 a_i 用行 $a_i+a_j\,(i\neq j)$ 来代替而得到的，则 $\delta(B)=\delta(A)$

Ⅲ）$\delta(E_n)=\bar{1}$

元素 $\delta(A)$ 称为 A 的行列式（determinant），并且写作 $\det A$　对于一个交换除环而言，公理Ⅰ)，Ⅱ）和Ⅲ）分别与条件 1_a), 2) 和 3) 一致，于是，在这一情形就得到通常的域上的行列式　如果 $A=\mathrm{diag}[a_{11},\quad,a_{nn}]$，则 $\det A=a_{11}\quad a_{nn}$，所以映射 $\delta\quad M_n(k)\mapsto\bar{k}$ 是满射．$M_n(k)$ 中一个矩阵 A 是可逆的，其充分必要条件为 $\det A\neq 0$　等式 $\det AB=(\det A)\cdot(\det B)$ 成立．如同在交换的情形一样，把 A 的一行 a_i 代以行 $a_i+\lambda a_j$，$i\neq j$，$\lambda\in k$，$\det A$ 不变．如果 $n>1$，则 $\det A=\bar{1}$，当且仅当 A 是形如 $t_{ij}(\lambda)=E_n+\lambda e_{ij}\,(i\neq j,\ \lambda\in k)$ 的初等矩阵的乘积　如果 $a\neq 0$，则

$$\left\|\begin{matrix} a & b \\ c & d\end{matrix}\right\| = \overline{ad-aca^{-1}b},\quad \left\|\begin{matrix} 0 & b \\ c & d\end{matrix}\right\| = -\overline{cb}$$

与交换的情形不同的是，$\det A^T$ 并不等于 $\det A$　例如，对于**四元数**（quaternion）除环上的矩阵

$$A=\left\|\begin{matrix} i & j \\ k & -1\end{matrix}\right\|$$

来说，$\det A=\overline{2i}$，而 $\det A^T=\bar{0}$

无穷行列式，即无穷矩阵的行列式，定义为一个有限子矩阵的行列式当其阶无限增大时收敛所趋的极限．如果这个极限存在，则这个行列式就称为收敛的，反之，就称为发散的

行列式的概念要追溯到 G Leibniz (1678)　H Cramer 是第一个发表有关这个主题的人（1750）　行列式的理论奠基于 A Vandermonde, P Laplace, A L Cayley 和 C G J Jacobi 等人的工作　“行列式”这一名词首先是由 C F Gauss (1801) 创立的　现代的意义是由 A Cayley (1841) 所引入的

参考文献

[1] Курош, А Г , Курс высшей алгебры, 11 изд М , 1975（中译本　А Г 库洛什，高等代数教程，高等教育出版社，1962）

[2] Кострикин, А И , Введение в алгебру, М , 1977（英译本　Kostrikin, A I , Introduction to algebra, Springer, 1982）

[3] Ефимов, Н В , Розендорн,　　Р , Линейная алгебра и многомерная геометрия, М , 1970

[4] Тышкевич, Р И , Феденко, А С , Линейная алгебра и аналитическая геометрия, 2 изд , Минск, 1976

[5] Artin, E , Geometric algebra, Interscience, 1957

[6] Bourbaki, N , Elements of mathematics, Algebra Algebraic structures, Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974, Chapt 1, 2（译自法文）

[7] Каган, В Ф , Основания теории определителей, Одесса, 1922

Д А Супруненко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Dieudonné, J A , La géometrie des groups classiques, Springer, 1955

[A2] Hoffman, K and Kunze, R , Linear algebra, Prentice Hall, 1961

[A3] Koecher, M , Lineare Algebra und analytische Geometrie, Springer, 1983

[A4] Lang, S , Linear algebra, Addison-Wesley, 1970

郝钢新 译

行列式簇［**determinant variety**, **детерминантное многообразие**］

秩小于 t 的 $d\times n$ 矩阵的集合 $D_t(d,n)$，再带上代数簇的结构　把系数取在域 k 里的多项式环

$$k\left[(T_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant d\\1\leqslant j\leqslant n}}\right]$$

中以变量 T_{ij} 作为元素的 $d\times n$ 矩阵的 t 阶子式生成的理想（行列式理想（determinant ideal））记为 $J_t(d,n)$ 理想 $J_t(d,n)$ 在仿射空间 $A^{dn}=\mathrm{Spec}(k[(T_{ij})])$ 里的零点集就是行列式簇（determinant variety），记为 $D_t(d,n)$ 对于任意的交换 k 代数 k'，行列式簇 $D_t(d,n)$ 的 k' 点的集合是与系数取在 k' 中的秩 $<t$ 的 $d\times n$ 矩阵的集合自然地一致的．

下面是行列式簇的几种特殊情形 $D_d(d,d)$ 是 A^{d^2} 里的超曲面（行列式超曲面（determinant hypersurface）），它由以独立变量作为元素的 d 级方阵的行列式等于零来定义，$D_2(d,n)$ 是射影空间的积在 Segre 嵌入

$$P^{d-1}\times P^{n-1}\rightarrow P^{dn-1}$$

下的象的仿射锥面（[2]）

行列式簇有下列性质 $D_t(d,n)$ 是不可约的、既约的（即理想 $J_t(d,n)$ 是素理想），是 Cohen-Macaulay 簇（见 **Cohen-Macaulay 环**（Cohen-Macaulay ring）），是正规的，$D_t(d,n)$ 的维数等于 $(t-1)\ (n+d-1)$（[1]，[2]）$D_t(d,n)$ 为 Gorenstein 概形，当且仅当 $t=1$ 或 $d=n$（见 **Gorenstein 环**（Gorenstein ring））（[5]）行列式簇与 Grassmann 流形的 **Schubert 簇**（Schubert variety）有密切联系．

参考文献

[1] Hochster, M and Eagon, J, Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfection of determinantal loci, *Amer J Math*, **93**(1971), 4, 1020-1058

[2] Kleiman, S and Landolfi, J, Geometry and deformation of special Schubert varieties, *Compositio Math*, **23**(1971), 407-434

[3] Laksov, D, Deformation of determinantal schemes, *Compositio Math*, **30**(1975), 273-292

[4] Musili, C, Some properties of Schubert varieties, *J Indian Math Soc*, **38**(1974), 131-145

[5] Svanes, T, Coherent cohomology on Schubert subschemes of flag schemes and applications, *Adv in Math*, **14**(1974), 369-453

И В Долгачев 撰

【补注】 行列式簇的许多几何性质可在 [A1] 中找到．行列式簇的英文名也有用 determinantal variety 的，依此类推

参考文献

[A1] Room, T G, Geometry of determinantal loci, Cambridge Univ Press, 1938

陈志杰 译

可展曲面 [**developable surface** 或 torse，**развертывающаяся поверхность**]

零 Gauss 曲率的**直纹曲面**（ruled surface） 在可展曲面的一条母线上，各点均有同一切平面 可展曲面的分布参数是零．若可展曲面的母线平行于同一直线，则它是柱面（cylindrical surface） 若所有母线都通过一点，则它是锥面（conical surface） 除此以外，可展曲面是由某一空间曲线 Γ 的切线构成的，Γ 称为可展曲面的脊棱（cuspidal edge）（或回归棱（edge of regression）） 在这种情况下，曲率线是由直母线及其正交轨线给出的．

可展曲面是单参数平面族的包络面（例如，伸长曲面），所以它局部地可由等距变形一片平面来得到．

И.Х Сабитов 撰

【补注】 设 S 是零 Gauss 曲率曲面（不一定是直纹面），p 是 S 上的一个非平点（见**平坦点**（flat point）），则在 p 附近曲面 S 局部地是可展的 关于（直纹面的）母线和分布参数的概念，见**直纹曲面**（ruled surface）

参考文献

[A1] Hsiung, C C A first course in differential geometry, Wiley, 1981

[A2] Blaschke, W and Leichtweiss, K, Elementare Differentialgeometrie, Springer, 1973

沈一兵 译

逼近函数的偏差 [**deviation of an approximating function**, **уклонение приближающей функции**]

逼近函数 $g\in K$ 和一个给定函数 $f\in\mathfrak{M}$ 之间的距离 $\rho(g,f)$．在同一个类 $\mathfrak{M}$ 内可以考虑用不同度量 ρ，譬如一致度量

$$\rho(g,f)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|g(x)-f(x)|,$$

以及积分度量

$$\rho(g,f)=\left(\int_a^b|g(x)-f(x)|^p dx\right)^{1/p},\quad p\geqslant 1,$$

和别的度量 至于逼近函数的类 K 则可以用代数多项式、三角多项式，还有 f 关于某个正交系的正交展开的部分和，这些部分和的线性平均，以及一些别的集合

参考文献

[1] Чебышев, П Л, Полн собр соч т 2, М-Л, 1947

[2] Натансон, И П, Конструктивная теория функций, М-Л, 1949（中译本 И П 纳唐松，函数构造论，上、中、下册，科学出版社，1965)

[3] Гончаров, В Л, Теория интерполирования и приближения функций, 2изд, М, 1954（中译本 В Л 冈察洛夫，函数插补与逼近理论，科学出版社，1958)．

[4] Ахиезер, Н И, Лекции по теории аппроксимации, 2 изд, М, 1965（中译本 Н И 阿赫叶惹尔，逼近论讲义，科学出版社，1957)

[5] Никольский, С М, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М, 1969（英译本 Nikol'skii, S M, Approximation of functions of several

variables and imbedding theorems, Springer, 1975)

A. B Ефимов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cheney, E W, Introduction to approximation theory, Chelsea, reprint, 1982

[A2] Schönhage, A, Approximationstheorie, de Gruyter, 1971

孙永生 译 葛显良 校

偏差 [deviator, девиатор]

第一不变量为零的（应力或形变）张量，即张量矩阵的主对角线元素之和为零的张量 见**形变张量** (deformation tensor)，**应力张量** (stress tensor).

沈一兵 译

对角线 [diagonal, диагональ]

连接多边形（多面体）的不处于同一边（面）上的两个顶点的直线段．如果一个多边形的顶点个数为 n，则它的对角线的条数为 $n(n-3)/2$

Е В Шикин 撰 张鸿林 译

对角连分数 [diagonal continued fraction, диагональная цепная дробь]

连分数 (continued fraction)

$$a_0+\frac{b_1|}{|a_1}+\cdots+\frac{b_n|}{|a_n}+\cdots,$$

其中数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\omega}$ 和 $\{b_n\}_{n=1}^{\omega}$ 必须满足下列条件

1) a_n, b_n 是整数，$|b_n|=1$, $a_n\geqslant 1(n\geqslant 1)$, $a_\omega\geqslant 2$ $(0<\omega<\infty)$,

2) 对所有的 $n, b_n+a_n\geqslant 1$，若 $\omega=\infty$，则有无穷多个 n，使得 $b_n+a_n\geqslant 2$,

3) 对所有的 n, $Q_n<Q_{n+1}$,

4) 连分数的渐近分数是所有这样的既约分数 A/B，它们满足 $|r-A/B|<1/(2B^2)$ 及 $B>0$，其中 r 是连分数的值

对每个实数 r，存在唯一的其值等于 r 的对角连分数，当 r 是**二次无理数** (quadratic irrationality) 时，这个连分数是周期的

В. И Нечаев 撰

【补注】 取连分数的一段并计算，可得

$$a_0+\frac{b_1|}{|a_1}+\cdots+\frac{b_n|}{|a_n}=\frac{P_n}{Q_n},$$

其中 $P_n, Q_n\in\mathbf{Z}$，$(P_n, Q_n)=1$，$Q_n>0$ 在条件 3) 中所指的 Q_n 就是这些数．对一个实数 x_0，上面所说的它的连分数可用最近整数算法 (nearest integer algorithm) 得到，即 $a_0=<x_0>$，$x_1=1/(x_0-a_0)$，$a_1=<x_1>$，$x_2=1/(x_1-a_1)$，$a_2=<x_2>$，等等，其中 $<x>$ 表示离 x 最近的整数 也可以取整数部分函数 $[x]$ 代替 $<x>$，这是更为常用的连分数算法

形容词“对角”来自这一事实 对所有的 n，$b_n=\pm 1$.

参考文献

[A1] Hardy, G H, Wright, E M, An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ Press, 1979

[A2] Perron, O, Die Lehre von den Kettenbrüchen, 1, Teubner, 1977

潘承彪 译 戚鸣皋 校

对角群 [diagonal group, диагональная группа]

非退化对角矩阵的群．与对角群共轭的矩阵群常称作可对角化的线性群 (diagonizable linear group)

参考文献

[1] Каргаполов, М И, Мерзляков, Ю И, Основы теории групп, 2 изд, М, 1977(英译本 Kargapolov, M I and Merzlyakov, Yu I, Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979)

Ю. И Мерзляков 撰

【补注】 可对角化群在**线性代数群** (linear algebraic group) 理论中的作用参见 [A1]

参考文献

[A1] Borel, A, Linear algebraic groups, Benjamin, 1969

石生明 译 许以超 校

对角矩阵 [diagonal matrix, диагональная матрица]

一个方阵，其中除主对角线上的元素可能不是零以外，其余元素都是零

О А Иванова 撰

【补注】 域 K 上的 $(n\times n)$ 对角矩阵具有下列形式

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & a_n \end{pmatrix},$$

其中 a_i 是 K 的元素．

张鸿林 译

对角算子 [diagonal operator; диагональный оператор]

定义于赋范（或仅为局部凸）空间 X 中的基 $\{e_k\}_{k\geqslant 1}$ 的（闭）线性包上由等式 $De_k=\lambda_k e_k$ 给出的线性算子 D，其中 $k\geqslant 1$，而 λ_k 为复数．如果 D 是连续算子，那么有

$$\sup_{k\geqslant 1}|\lambda_k|<+\infty.$$

如果 X 是 Banach 空间，那么当且仅当 $\{e_k\}_{k\geqslant 1}$ 是 X 中的一个无条件基时，以上条件等价于 D 的连续性．如果 $\{e_k\}_{k\geqslant 1}$ 是 Hilbert 空间 H 中的一个规范正交基，那么 D 是正规算子，且 $\|D\|=\sup_{k\geqslant 1}|\lambda_k|$，而 D 的谱则与集合 $\{\lambda_k\ k=1, 2, \cdots\}$ 的闭包一致．一个正规且全连续的算子 N 在它自身的本征向量构成的基上为对角算子，一个对角算子在它的不变子空间上的限制（即使它是正规的）未必是对角的，给定 $\varepsilon>0$,

可分空间 H 上的任何正规算子 N 可表示成 $N=D+C$，这里 D 是对角算子，C 是全连续算子，且 $\|C\|<\varepsilon$

在广泛的意义下，一个对角算子是在 Hilbert 空间的直积分

$$H=\int_M \oplus H(t)d\mu(t)$$

中乘以复函数 λ 的算子 D，即

$$(Df)(t)=\lambda(t)f(t),\ t\in M,\ f\in H$$

见**分块对角算子**（block-diagonal operator）

参考文献

[1] Singer, I , Bases in Banach spaces, 1, Springer, 1970

[2] Wermer, J , On invariant subspaces of normal operators, *Proc Amer Math Soc* **3**, (1952), 2, 270-277

[3] Berg, I D , An extension of the Weyl-von Neumann theorem to normal operators, *Trans Amer Math Soc*, **160**(1971), 365-371

Н К Никольский, Б С Павлов 撰

【补注】关于无条件基的概念见**基**（basis）. 关于广义下的对角算子以及相应的对角代数（diagonal algebra）概念，见 [A1]

参考文献

[A1] Takesaki, M , Theory of operator algebras, 1, Springer, 1979, 259, 273

[A2] Halmos, P R , A Hilbert space problem book, Springer, 1982

王声望 译 郑维行 校

对角线过程 [**diagonal process**, **диагональный процесс**]，亦称对角线法

一种由序列

$$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\ \ ),\ i=1,2,\ \ ,$$

组成的序列去构造一个序列 $\alpha=(a_1,a_2,\ \ )$ 的方法，使得对所有 $i=1,2,\ \ $, $a_i\neq a_{ii}$，或对所有 i, $a_i=a_{ii}$ G Cantor（[1]）首先用对角线过程证明在区间 $[0,1]$ 上的实数集是不可数的，因此，这种方法又被称为 Cantor 对角线过程（Cantor diagonal process）. 对角线过程的第二种形式，是在一元的实变或复变函数论中被用来从一个集合 E 上的有界函数族中给出一个在 E 的可数子集上收敛的函数序列 .

重新编号的对角线过程将多重序列 $\{a_{ik}\}$，$i=1,2,\ \ $, $k=1,2,\ \ $，与序列 $a_{11},a_{12},a_{21},\ \ ,a_{k1},a_{k-1\ 2},\ \ ,a_{k-i\ i+1},\ \ ,a_{1k},$ 对应起来，并且例如用来证明可数个可数集的并集是可数的（[2]）

参考文献

[1A] Cantor, G , Ueber eine Eigenschaft des inbegriffes aller reelen algebraischen Zahlen, in Gesammelte Abhandlungen, G Olms, 1932, 115-118

[1B] Cantor, G , Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reelen algebraischen Zahlen, *J Reine Angew Math*, **77** (1874), 258-262

[2] Колмогоров, А Н , Фомин, С В , Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд , М , 1976（英译本 Kolmogorov, A N and Fomin, S V, Elements of the theory of functions and functional analysis, Graylock, 1957-1961）

[3] Péter, R , Rekursive Funktionen, Verlag Ungar Akad Wissenschaft , 1957（中译本 罗莎·培特，递归函数论，科学出版社，1958）

[4] Kleene, S C , Mathematical logic, Wiley, 1967

[5] Shoenfield J R , Mathematical logic, Addison-Wesley,

Ю Н. Субботин 撰

【补注】关于一元复变函数的叙述亦见**正规族**（normal family）

事实上，没有单一的对角线过程，而是有几种形式不同的对角线过程（diagonal method）或对角线论证（diagonal argument） 它的最简单的形式组成如下 设 $M=\{a_{ik}\}_{i\ k}$ 是一个由 0 和 1 组成的方阵，则能构造一个（0 和 1 的）序列 $\{b_i\}_i$，它与 M 的每一行（和列）$\{a_{ik}\}_i$ 不相同 实际上，考虑 M 的对角线（diagonal）$\{a_{ii}\}_i$，用 $b_i=0$，当且仅当 $a_{ii}=1$ 的方法，定义一个它的"对偶"的序列 $\{b_i\}_i$ 无论那个 k, $\{b_i\}_i$ 不可能是 $\{a_{ik}\}_i$，因为它们有一个不相同的第 k 个分量 . 如果这些指标遍历小于 m 的非负整数，这就证明了 $m<2^m$（存在 2^m 个长度为 m 的 0 和 1 的序列，并且对角线论证证明了每一个 m 个序列的串必须至少漏掉其中一个序列）. 更重要的是，如果这些指标遍历所有非负整数，这就证明了存在不可数无穷多个 0 和 1 的序列（因此，例如，实数集是不可数的） 但是，这种论证并不依赖于那些遍历一个可数集的指标，对任取集合此法都适用 如果将一个序列 $\{b_i\}_i$ 和与之相关的集合 $\{i\ \ b_i=1\}$ 等同起来，这就证明了 **Cantor 定理**（Cantor theorem）. 就**势**（cardinality）而言，每一个集合的子集个数多于它的元素个数 在 Russell 悖论（Russell paradox）（见**悖论**（antinomy））中出现的一种更抽象（虽然等价）的形式如下 . 如果 A 是一集合，而 R 是一个 A 上的二元关系，则不存在 $b\in A$，使得 $\{a\in A\ \ \neg aRa\}=\{a\in A\cdot aRb\}$（在这里对角线化是用 aRa 来表示的：否定对应于上述论证中 0 与 1 的互换） 如不用对角线化，则例如通过取 $\{a\in A$ 不存在无穷序列 $a_1Ra_0Ra\}$，亦可得同样的效果（不同于每个集合 $\{a\in A\ \ aRb\}$） 除基数性理论外，类似的对角线化论证，例如，还出现在 **Gödel 不完全性定理**（Gödel incompleteness theorem），Tarski 的不可定义性定理以及递归论的分层定理（见**递归集合论**（recursive set theory）和**描述集合论**（descriptive set theory）中

当我们把一个无穷方阵 $M=\{a_{i\ k}\}_{i\ k}$（此处指标遍历

非负整数集)的元素排成一个如下的可数的无穷的序列 $a_{00}, a_{01}, a_{10}, \cdots, a_{k0}, a_{k-11}, \cdots, a_{k-ii}, \cdots, a_{0k}, \cdots$, 一种不同的用(不同的)对角线的方法出现了.这方法可用来,举例说,证明有理数集,更一般地说,可数个可数集 $\{a_{ik}: i\in\mathbf{N}\}$ 的并集 $\{a_{ik}: i,k\in\mathbf{N}\}=\bigcup_k\{a_{ik}: i\in N\}$ 是可数的.　　丁德成 译　莫绍揆 校

对角积[diagonal product, диагональное произведение], 映射 $f_\alpha: X\to Y_\alpha(\alpha\in\mathscr{A})$ 的

映射 $f: X\to Y=\prod\{Y_\alpha: \alpha\in\mathscr{A}\}$, 它由方程 $f(x)=\{f_\alpha(x)\}\in Y$ 所定义.对于任一 α, 映射 f_α 的对角积满足关系 $f_\alpha=\pi_\alpha f$, 其中 π_α 表示 Y 到因子 Y_α 上的投影.连续映射的对角积仍是连续的.设 $f_\alpha: X\to Y_\alpha$ 为拓扑空间的一族映射,若对于任一点 $x\in X$ 和 x 的任一邻域 Ox, 存在指标 α 和开子集 $U_\alpha\subset Y_\alpha$, 使得 $x\in f_\alpha^{-1}U_\alpha\subset Ox$, 则映射族 f_α 称为分块的(partitioning).若 $\{f_\alpha: X\to Y_\alpha\}$ 是分块映射族且 f 是映射 f_α 的对角积,则 f 是 X 到乘积 $\prod Y_\alpha$ 的嵌入,即 $f: X\to fX$ 是同胚.映射的对角积被 A.H.Тихонов 用来把权 τ 的完全正则空间嵌入到立方体 I^τ 中.　　B.B.Федорчук 撰

【补注】 分块映射族也称为分离点(separate points)和闭集(closed sets).

在具有乘积(见**直积**(direct product))的任何范畴中,映射的对角积由定义直积的通用性质所给出.其实,在范畴上,积 $Y=\prod_\alpha Y_\alpha$ 是一个对象连同态射 $\pi_\alpha: Y\to Y_\alpha$, 使得对每族态射 $\varphi_\alpha: X\to Y_\alpha$, 存在唯一的态射 $f: X\to Y$, 满足 $\pi_\alpha f=f_\alpha$.

Тихонов 的嵌入结果在[A2]中.受 Тихонов 结果的影响,E.Čech 得到了下列嵌入定理([A1]):设 $\mathscr{C}$ 是从**完全正则空间**(completely-regular space) X 到单位区间 I 的连续映射族.那么,对角映射 $F: X\to I^{\mathscr{C}}$ 是一个嵌入,且 $F(x)$ 在 $I^{\mathscr{C}}$ 中的闭包等价于 X 的 **Stone-Čech 紧化**(Stone-Čech compactification).

参考文献

[A1] Čech, E., On bicompact spaces, *Ann. of Math.*, **38** (1937), 823-844.

[A2] Tichonoff, A. N. (A. N. Tikhonov), Ueber die topologische Erweiterung von Raumen, *Math. Ann.*, **102**(1929), 544-561.　　沈一兵 译

对角环[diagonal ring, диагональное кольцо].

设 R 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子的闭对称代数, R 的对角环是 H 上算子的交换对称 Banach 代数 E, 且满足 $(R\cup E)'=E$. 对角环用于分解算子代数成不可约代数.

参考文献

[1] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968.　　М. И. Войцеховский 撰

【补注】 在上文中, $(R\cup E)'$ 表示包含 R 和 E 的极小闭**对称代数**(symmetric algebra)的交换子.

在西方的术语中,对角环称作对角代数(diagonal algebra),这个概念属于 T. Tomita([A1]).“对角环”一词仅在[1]的第一版和该版的译本中出现.在第二版美国版(第一次修订版)的序言中,M. A. Наймарк 指出“Tomita 的理论仅在可分型的补充假定下有效”,因而他宁愿给出与“von Neumann 在可分情形的最初的简单理论”更密切的讨论.关于对角代数的不同概念,例如可见[A3].

参考文献

[A1] Tomita, T., Representations of operator algebras, *Math. J. Okayama Univ.*, **3** (1954), 147-173.

[A2] Naimark, M. A., Normed algebras, Wolters-Noordhoff, 1972, 3rd American ed.

[A3] Takesaki, M., Theory of operator algebras, 1, Springer, 1979, p. 259, 273.　　余庆余 译

对角子群[diagonal subgroup, диагональная подгруппа]

给定群 G 的 Descartes 幂的子群,由具有相同分量的所有元素组成.例如,积 $G\times G$ 的对角子群是元素对 $(g,g)(g\in G)$ 的群.　　Ю. И. Мерзляков 撰

【补注】 对角群(diagonal group)(或对角子群)一词也用于域 k 上 $GL(n,k)$ 的子群概形 $D(n,k)$, 它的值在某 k 代数 R 上的点是系数在 R 中的对角可逆矩阵.

令 Γ 是交换群.函子 $D(\Gamma): R\to\mathscr{G}_r(\Gamma, R^{\#})$ 是从有单位元的环到群,就定义了**群概形**(group scheme).其中 $R^{\#}$ 是 R 中可逆元素的群, $\mathscr{G}_r$ 是群范畴.与这种群概形同构的群概形称为可对角化的群概形(diagonizable group schemes).

参考文献

[A1] Demazure, M. and Gabriel, P., Groupes algebriques, North-Holland, 1970.　　石生明 译　许以超 校

可对角化的代数群[diagonalizable algebraic group, диагонализируемая алгебраическая группа]

与**代数环面**(algebraic torus)的闭子群同构的仿射代数群 G.于是, G 同构于给定大小的全部对角矩阵的乘法群的闭子群.若 G 定义在域 k 上且同构定义在 k 上,则可对角化代数群 G 称为在 k 上分裂的(split)或可分解的(decomposable).

可对角化代数群 G 的任意闭子群 H, 以及 G 在任意有理同态 φ 下的象,是可对角化代数群.此外,若 G 在域 k 上定义且分裂,而 φ 在 k 上定义,则 H 和 $\varphi(G)$ 两者都在 k 上定义且分裂.

可对角化代数群在 k 上分裂,当且仅当它的有理特征标群 $\hat{G}$ 的元素在 k 上是有理的,若 $\hat{G}$ 不含 k 上有理的非单位元,则可对角化代数群 G 称为在 k 上非迷

向的 (anısotropıc) 任一在域 k 上定义的可对角化代数群 G 在 k 的某有限可分扩张域上分裂

可对角化代数群是连通的，当且仅当它是代数环面 G 的连通性也等价于 $\hat{G}$ 无扭 对 k 上定义的任何可对角化代数群 G，群 $\hat{G}$ 是无 p 扭的有限生成 Abel 群，其中 p 是域 k 的特征

域 k 上定义且分裂的可对角化代数群 G 是有限 Abel 群及某个在 k 上定义且分裂的代数环面的直积 任何连通的且定义在域 k 上的可对角化代数群 G 含有最大非迷向子环面 G_a 及在 k 上分裂的最大子环面 G_d，对这些群有 $G=G_aG_d$，且 $G_a \cap G_d$ 是有限集

若可对角化代数群 G 在域 k 上定义，且 Γ 是 k 的可分闭包的 Galoıs 群，则 $\hat{G}$ 上可赋予 Γ 的连续作用．此外，若 φ $G \to H$ 是可对角代数群之间的有理同态，且 G, H 和 φ 都在 k 上定义，则同态 $\hat{\varphi}$ $\hat{H} \to \hat{G}$ 是 Γ 等价（即 Γ 模的同态） 这就得到可对角化 k 群及它们的 k 态射的范畴到无 p 扭的有 Γ 群连续作用的有限生成 Abel 群和它们的 Γ 等价同态的范畴间的逆变函子，它是这两个范畴间的等价．

参考文献

[1] Borel, A, Lınear algebraıc groups, Benjamın, 1969

[2] Ono, T, Arithmetıc of algebraıc torı, *Ann of Math*, **74** (1961), 1, 101－139

В Л Попов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Humphreys, J E, Lınear algebraıc groups, Sprınger, 1975

石生明 译 许以超 校

图式 [diagram, диаграмма]，范畴 C 中的一个映射 D，它将一个有顶点集 I，边集 U 的有向图 Γ 映入范畴 C，使

$$D(I) \subset \mathrm{Ob}(C),\ D(U) \subset \mathrm{Mor}(C),$$

且当边 $u \in U$ 有源（始点）i 与靶（终点）j 时，$D(u) \in \mathrm{Hom}(D(i), D(j))$.$C$ 中的一个图式的概念也可以定义为映射 D 的象，为的是对于图式得到一个较好的直观形象

设 $\varphi=(u_1, \quad, u_n)$ 为图 Γ 的一个有向链，源为 i，靶为 j，也就是说，它是一些边的非空有限序列，其中每一个边的源都是前一个边的靶，并且，设 $D(\varphi)$ $D(i) \to D(j)$ 表示态射的合成

$$D(u_n) \circ \quad \circ D(u_1)$$

图式 D 称为交换的（commutatıve），如果对于任何两个具有相同的源与相同的靶的有向链 φ 与 φ'，总有 $D(\varphi)=D(\varphi')$

最常见到的图式的形式是序列（sequences），三角形图式（trıangular dıagrams）与正方形图式（square dıagrams）要定义一个序列．定义的l 式取如下形式

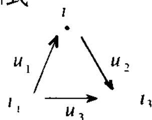
$$\underset{i_1}{\cdot} \xrightarrow{u_1} \qquad \longrightarrow \underset{i_{n-1}}{\cdot} \xrightarrow{u_{n-1}} \underset{i_n}{\cdot}$$

其相应的图式表示如下

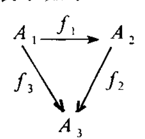
$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \longrightarrow \qquad \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n,$$

其中 $A_k = D(i_k)$ 为范畴 C 中的对象，而 $f_k = D(u_k)$ 为这个范畴中的心射

在范畴 (中与图式



相对应的三角形图式表示如下



这个图式的交换性是指 $f_3 = f_2 \circ f_1$

与图式

$$\begin{array}{ccc} i_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & i_2 \\ \varphi_4 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ i_4 & \xrightarrow[\varphi_3]{} & i_3 \end{array}$$

相对应的正方形图式表示如下

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 \\ f_4 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ A_4 & \xrightarrow[f_3]{} & A_3 \end{array}$$

这个图式的交换性是指 $f_2 \circ f_1 = f_3 \circ f_4$

对一个给定的图 Γ，其所有图式的类形成一个范畴．把从一个图式 D 到一个图式 D_1 的态射取为一族态射 v_i $D(i) \to D_1(i)$，这里 i 取遍 Γ 的顶点集，使得对任何以 i 为源 j 为靶的边 u，都能满足条件 $D_1(u) \circ v_i = v_j \circ D(u)$ 特别，可以考虑同构图式（ısomorphıc dıagrams） 图 Γ 有时也称为 C 中一个图式的概形

参考文献

[1] Grothendıeck, A, Sur quelques poınts d'algebre homologıque, *Tohoku Math J*, **9** (1957), 119－221

И В Долгачев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cartan, H and Eılenberg, S, Homologıcal algebra, Prınceton Unıv Press, 1956

[A2] MacLane, S, Categorıes for the workıng mathematıcıan, Sprınger, 1971

周伯埙 译 刘木兰 校

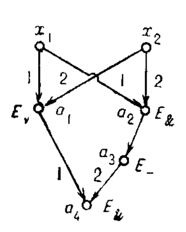
功能元图 [diagram of functional elements, схема из функциональных элементов]，功能元回路 (cırcuıt of

functional elements)，功能元网络（network of functional elements）

与信息处理有关的实际对象的一种数学模型，其中各中间结果可能要用到多次 这些对象包括例如电子管设备、神经网络和某些形式的计算算法，这是基本的**控制系统**（control system)类之一．功能元图可认为是一个无记忆的**自动机**（automaton）．

数学上，功能元图可定义为一个无圈有向**图**(graph)，其中边和顶点带有标记 顶点集合可分为两个子集合 其中一个子集合的顶点称为图的输入(inputs) 没有边指向这些顶点，且每个顶点指定了变量字母表 $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$ 中的一个字母．另一个子集中的顶点指定了功能函数符号字母表 $\mathscr{F}=\{\varphi_1(\ ), \ldots, \varphi_m(\ )\}$ 中的字母．

字母表 $\mathscr{F}$ 与函数集合 $\overline{\mathscr{F}}=\{\varphi_1(\ ), \ldots, \varphi_m(\ )\}$ 是一一对应的 特别指明图的一些顶点并称之为图的输出(outputs)．一个顶点如果有（编号的）边指向它，且注明了 $\mathscr{F}$ 中的符号 φ_i（其价等于指向它边的个数），则称为功能元（functional element）$E\varphi_i$，与该顶点相连边的另一端称为 $E\varphi_i$ 的输入，而该顶点则称为 $E\varphi_i$ 的输出．对于 $E\varphi_i$ 的输入的任意给定值 $\tilde{\sigma}$，$E\varphi_i$ 的输出处（即在顶点 φ_i）可得到 φ_i 在 $\tilde{\sigma}$ 上的值，从而功能元 $E\varphi_i$ 实现了函数 φ_i 因此，每个功能元图在其输出实现了某些函数．相应于用来构造功能元图的，字母表 $\mathscr{F}$ 中的功能元集合称为基（basis）$B_{\mathscr{F}}$ 用 $B_{\mathscr{F}}$ 中的功能元构造的所有功能元图的全体称为在基 $B_{\mathscr{F}}$ 上的功能元图集合．如果 $\overline{\mathscr{F}}$ 是完全的，那么 $B_{\mathscr{F}}$ 是完全的，$B_{\mathscr{F}}$ 上的一个功能元图可实现任意函数 进一步假设 X 中的变量取值为 0, 1，且 $\overline{\mathscr{F}}$ 是逻辑代数函数的子集合．对这种类型基的研究结果比较最为完整



在基 $\{\&, \vee, -\}$（见图）上的图是功能元图的一个例子．它的输入是顶点 x_1 和 x_2，输出是顶点 $E_\&(a_4)$，在这个顶点实现的函数是

$$(x_1 \vee x_2) \ \& \ \overline{x_1 \& x_2}, \quad \text{即} \quad x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_2$$

也可用等式来给出功能元图的等价定义．对图示中的例子，这个系统可写为

$$a_1=x_1 \vee x_2, \ a_2=x_1 \& x_2,$$
$$a_3=\overline{a}_2, \ a_4=a_1 \& a_3=x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_2$$

$B_{\mathscr{F}}$ 中的功能元通常可归结为一非负数值，称为基的功能元的权（weight）．所谓功能元图的权（weight of a diagram of functional elements）指的是所有出现在图中功能元的权之总和 通过在任意有限基（具有非零权）上的一个功能元图足以实现的每个 n 变量 Boole 函数的最小成色渐近等于 $\rho 2^n/n$（见[1]），其中 ρ 是不依赖于基的一个常数（见**综合问题**（synthesis problems））通过功能元图足以实现的依赖于相同变量的函数族 F 的最小成色渐近等于

$$\rho \frac{\log_2|F|}{\log_2\log_2|F|},$$

其中 $|F|$ 是 F 中函数的个数 ρ 是为基所计算出来的一个常数（见[2]）．

根据任意功能元图中与一个输出结点相关联的输入个数，可从功能元图的全体区分出所谓没有输出分支或公式的功能元图（这样的图中每个功能元的输出只能有一个输入与其相关联） 与公式不同，一般形式的功能元图可认为是考虑了中间结果的计算程序．对于公式，用任意有限基（具有非零权）上的一个公式实现每个 n 变量 Boole 函数的最小成色渐近等于 $\rho 2^n/\log n$，其中 ρ 是依赖于基的一个常数（为与触点 π 模式比较，见**触点模式**（contact scheme）） 对于包含具有零权元素的基，功能元图的成色是不同的（见，例如[5]）

进一步，图在无限基上的综合问题是有意义的．研究最完整的是基元素实现阈值函数的情形．Boole 函数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 称为门限函数（threshold function），如果存在实数 $w_1, \ldots, w_n$ 和 h，使得

$$w_1x_1+\cdots+w_nx_n \geqslant h \qquad (*)$$

成立的充要条件是 $f(x_1, \ldots, x_n)=1$ 实现门限函数的功能元称为门限元（threshold element）．在门限元基上的功能元图称为门限元图（diagram of threshold elements） 通常研究两类这种基 1) 门限元的权等于 1，或 2) 门限元的权等于所有系数 w_i（假定门限函数由整数不等式 (*) 所定义）绝对值之和．对这些基，得到的门限元图成色的渐近估计是 1) $2(2^n/n)^{1/2}$（见[6]），2) $2^n/n$（见[7]）

功能元图输入和输出间的道路称为链（chain）．不计输入之链的顶点数称为链的长度（length of the chain） 功能元图中最大的链长度称为图的深度（depth of the diagram） 足以实现基 $\{\&, \vee, -\}$ 上的每个 n 变量 Boole 函数的功能元（或公式）图的最小深度等于

$$n-\log_2\log_2 n+O(1)$$

见（[8]）

除了权以外，基中的功能元还可给定称之为延迟的非负数　所谓链的延迟（delay of a chain）指的是其中功能元的延迟之和　所谓功能元图的延迟（delay of a diagram of functional elements）指的是该图中最大的链延迟　功能元图的延迟（当基具单位延迟时）和深度概念一般是不一致的（见[9]）

图的势也可取为图的成色　功能元图在输入变量的设定值 $\tilde{\sigma}$ 上的势（power of a diagram of functional elements）是其输入等于 1 的功能元的个数　功能元图 S 的势是其在所有可能的 $\tilde{\sigma}$ 的势的最大值．足以用在任意有限基上的功能元图实现每个 n 变量 Boole 函数的最小势不小于 n，且不大于 $2^n/n$（见[10]，[11]）

参考文献

[1] Лупанов, О Б ,《Изв вузов Радиофизика》, **1** (1958), 1, 120－140

[2] Лупанов, О Б ,《Проблемы кибернетики》, 1965, 14, 31－110

[3A] Лупанов, О Б ,《Проблемы кибернетики》, 1960, 3, 61－80

[3B] Лупанов, О Б ,《Проблемы кибернетики》, 1962, 7, 61－114

[4] Нечипорук, Э И ,《Проблемы кибернетики》, 1962, 8, 123－160

[5] Лупанов, О Б ,《Проблемы кибернетики》, 1973, 26, 109－140

[6] Захарова, Е Ю ,《Проблемы кибернетики》, 1963, 9, 317－319

[7] Гашков, С Б ,《Проблемы кибернетики》, 1978, 34, 265－268

[8] Храпченко, В М ,《Проблемы кибернетики》, 1979, 35, 141－168

[9] Лупанов, О Б ,《Проблемы кибернетики》, 1970, 23, 43－81

[10] Вайнцвайг, М Н ,《Докл АН СССР》, **139** (1961), 2, 320－323

[11A] Касим-Заде, О М ,《Проблемы кибернетики》, 1981, 38, 117－179

[11B] Касим-Заде, О М ,《Проблемы кибернетики》, 1978, 33, 215－220

[12] Savage, J E , The complexity of computing, Wiley (Interscience), 1976

Н А. Карнова 撰　夏小华 译

图表可归约性 [diagram reducibility; диаграммная приводимость]

【补注】通常称为**真假值表可归约性**（truthtable reducibility）

直径 [diameter, диаметр]

1) 二次曲线的直径（diameter of a second-order curve）是通过平行弦中心的直线　称直径相对被它平分的弦（以及相对这些弦的方向）是共轭的（conjugate）　有心二次曲线的直径在曲线中心彼此相交，无心二次曲线的直径是平行的（或者重合）　椭圆和双曲线的直径是通过其中心的直线．抛物线的直径是抛物线的轴以及与轴平行的直线

2) 度量空间中集合的直径（diameter of a set）是集合的各对点之间的距离的最小上界．

А Б Иванов 撰　张鸿林 译

二分性 [dichotomy, дихотомия]

具有有界连续系数的线性常微分方程组

$$\dot{x}=A(t)x,\ x\in E^n,\ t\geqslant 0$$

的下述性质　有正的常数 K, L, α 和 β 使得存在一个分解 $E^n=E^m+E^{n-m}$，对此分解有

$$x(0)\in E^m \Rightarrow \|x(t)\|\leqslant K\|x(\tau)\|\exp[-\alpha(t-\tau)],\quad t\geqslant\tau\geqslant 0,$$

$$x(0)\in E^{n-m}\Rightarrow \|x(t)\|\leqslant L\|x(\tau)\|\exp[-\beta(\tau-t)],\quad \tau\geqslant t\geqslant 0$$

（指数二分性（exponential dichotomy），如果 $\alpha=\beta=0$，则为正常二分性（ordinary dichotomy））　指数二分性的存在性的等价说法是，对任意有界连续函数 $f(t)$，$t\geqslant 0$，非齐次方程组

$$\dot{x}=A(t)x+f(t)$$

在 $[0,\infty)$ 上至少有一个有界解（[1]）　变换到 Banach 空间中的方程的二分性理论（[2]）也用于研究光滑流形上的流和瀑布（[4]）

参考文献

[1] Perron, O , Stability of differential equations, *Math Z* , **32** (1930), 5, 703－728

[2] Masserat, H L and Scheffer, H H , Linear differential equations and function spaces, Acad Press, 1966

[3] Далецкий, Ю Л , Крейн, М Г , Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М , 1970（英译本 Daletskiĭ, Yu L and Krein, M G , Stability of solutions of differential equations in Banach space, Amer Math Soc , 1974）

[4] Аносов, Д В ,《Тр матем ин-та АН СССР》, **90** (1967)

Р А Прохорова 撰

【补注】

参考文献

[A1] Oseledec, V I , A multiplicative ergodic theorem Characteristic Lyapunov numbers for dynamical systems, *Trans Moscow Math Soc* , **19** (1969), 197－232 (*Trudy Moskov Mat Obshch* , **19** (1968), 179－210)

周芝英 译　叶彦谦 校

对分法 [**dichotomy method** 或 method of division in halves, **половинного деления метод**]

1) 数值求解单个未知数方程的一种方法．考虑方程 $f(x)=0$, 并设 f 是在 $[a, b]$ 区间上的连续函数，在区间端点取不同符号的值，而且在 $[a, b]$ 内有唯一根 x^* 为了近似地找到 x^*，把 $[a, b]$ 二等分并在区间中点 $x_1=(a+b)/2$ 处计算 $f(x_1)$ 的值．如果 $f(x_1)\neq 0$，就取两个区间 $[a, x_1]$ 和 $[x_1, b]$ 并从中选出下一个对分区间，选中的区间两个端点处函数值符号应不相同．这个连续对分过程给出一个序列 $x_1, x_2, \quad$，它以几何级数

$$|x_n-x^*|\leqslant \frac{b-a}{2^n}, \quad n=1,2, \tag{1}$$

的速度收敛到根 x^*，此处式 (1) 给出的界在这类函数上不能再改进 如果 f 在 $[a, b]$ 中的根多于一个，该序列收敛到其中之一

2) 极小化单变量函数的一种方法．假设需要求出在区间 $[a, b]$ 上单峰函数 $f(x)$ 的极小值

$$f^*=\min_{a\leqslant x\leqslant b} f(x),$$

并确定函数达到其极小值的点 x^* 为此把 $[a, b]$ 二等分并在中点 $\overline{x_1}=(a+b)/2$ 的附近取两个点 $x_1=\overline{x_1}-\varepsilon/2$ 和 $x_2=\overline{x_1}+\varepsilon/2$，这里 $\varepsilon>0$ 是方法的参数并充分地小，在这两个点上计算 f 的值 然后比较 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$．基于函数是单峰的，人们从两个区间 $[a, x_2]$ 和 $[x_1, b]$ 中选肯定包含 x^* 的一个 例如，如果 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，这个区间应是 $[a, x_2]$，否则就是 $[x_1, b]$．然后这个区间再被二等分并且在中点 $\overline{x_2}$ 附近取两个点 $x_1=\overline{x_2}-\varepsilon/2$ 和 $x_2=\overline{x_2}+\varepsilon/2$，再比较函数值，如此等等．最终得到一个中点序列 $\{\overline{x_n}\}$，对这个序列有

$$|\overline{x_n}-x_*|\leqslant \frac{b-a-\varepsilon}{2^n}+\frac{\varepsilon}{2}, \quad n=1,2, \quad . \tag{2}$$

对于充分大的 n，可以把 $f(\overline{x_n})$ 取为 f^* 的近似值．

方法之所以取这个名子，是因为在算法的每一步包含极小值的区间长度大约减半．对分法并非在单峰函数类中的最好方法 有一些更有效的方法，它们能经过同样次数计算函数值得到比 (2) 更精确的结果 (例如，见 **Fibonacci 法** (Fibonacci method))

参考文献

[1] Демидович, Б П , Марон, И А , Основы вычислительной математики, 3 изд , М , 1966

[2] Wilde, D J , Optimum seeking methods, Prentice-Hall, 1964

М М Потапов 撰

【补注】 在英文文献里，前面叙述的两个对分法中的第一个例子通称为对分法 (bisection method)．它是界线法 (enclosure method) (一种双边方法) 的古典例子．因为它收敛得相当慢，人们已经尝试研究更快的收敛方法．这种方法之一是**试位法** (regula falsi method)(见 [A1])，它常常 (但不是永远) 收敛得比对分法快而且它的收敛性也可以得到保证．这种方法的一种修正是 H. Brent 方法 ([A2])，它基于 T Dekker 的早期算法 ([A3])，避免了试位法的缺点．

区间上的单峰函数 (unimodal function) 是指在该区间内仅有一个极值的函数．

参考文献

[A1] Atkinson, K E , An introduction to numerical analysis, Wiley, 1978

[A2] Brent, H , Algorithms for minimization without derivatives, Prentice-Hall, 1973

[A3] Dekker, T , Finding a zero by successive linear interpolation, in B Dejon and P Henrici (eds) Constructive aspects of the fundamental theorem of algebra, Wiley, 1969, 37－48

蔡大用 译

Dickson 群 [**Dickson group**, **Диксона группа**]

有限域 F 上型 G_2 的经典单 Lie 代数的指数自同构的群 如果 F 的阶是 q，那么 Dickson 群的阶是 $q^6(q^2-1)(q^6-1)$ 如果 $q>2$，那么 Dickson 群是一个单群．这些群是由 L E. Dickson ([1]) 发现的 自此以后一直到 C Chevalley ([2]) 发现了用单 Lie 代数的自同构群来获得单群的一般方法为止，在这 50 年间人们没能发现新的有限单群．特别地，Chevalley 的方法也使获得 Dickson 群成为可能 ([3])

参考文献

[1] Dickson, L E , A new system of simple groups, *Math Ann* , **60** (1905), 137－150

[2] Chevalley, C , Sur certains groups simples, *Tôhoku Math J* , 7 (1955), 14－66

[3] Carter, R , Simple groups of Lie type, Wiley, 1972

В Д Мазуров 撰 许永华 译

Dickson 不变量 [**Dickson invariant**, **Диксона инвариант**]

研究特征为 2 的域上的二次型时所用的一种构造，特别地，它使得可以在这种域上引进类似特殊正交群的研究对象．实际上，Dickson 不变量是特征为 2 的域 k 中的一个元素 $D(u)$，它由 k 上可数维向量空间 E 的关于对称双线性型 f 的任何**相似变换** (similarity) u 给出，f 则由 E 上一个非退化二次型 Q 给出．它是由 L E Dickson ([1]) 引进的．

根据对域的特征所加的条件，型 f 是变号的，且 E 中存在一组基 $e_1, \quad, e_{2s}$，使得对 $1\leqslant i\leqslant s$，$1\leqslant j\leqslant s$ 有

$$f(e_i, e_j)=f(e_{s+i}, e_{s+j})=0,$$

$$f(e_i, e_{s+j})=\delta_{ij}$$

参见 **Witt 分解** (Witt decomposition) 对 E 中任何向

量 x 及 y, 设

$$f(u(x),u(y))=\alpha(u)f(x,y),$$

又对每个 $i=1,\ \ ,s$, 设

$$u(e_i)=\sum_{j=1}^{s} a_{ij}e_j+\sum_{j=1}^{s} b_{ij}e_{s+j},$$

$$u(e_{s+i})=\sum_{j=1}^{s} c_{ij}e_j+\sum_{j=1}^{s} d_{ij}e_{s+j}$$

则 k 中的下述元素

$$D(u)=\sum_{i,j}(Q(e_i)a_{ij}c_{ij}+Q(e_{s+i})b_{ij}d_{ij}+b_{ij}c_{ij})$$

称为相似变换 u 的(关于基 $e_1,\ \ ,e_{2s}$ 的)Dickson 不变量(Dickson invariant) 为使 u 是关于 Q 的具有相似变换系数 $\alpha(u)$ 的相似变换(即对任何向量 $x\in E$ 有 $Q(u(x))=\alpha(u)Q(x)$), 其必要充分条件是 $D(u)=0$ 或 $D(u)=\alpha(u)$ 关于 Q 的使 $D(u)=0$ 成立的相似变换 u 称为直接相似变换(direct similarities) 在关于 Q 的所有相似变换形成的群中, 直接相似变换形成一个指数为 2 的正规子群

如果 Q_1 是对任何向量 $x\in E$ 由 $Q_1(x)=Q(u(x))$ 所定义的型, 又如果 $\Delta(Q)$ 与 $\Delta(Q_1)$ 是这些型关于基 $e_1,\ \ ,e_{2s}$ 的伪判别式(pseudo-discriminants), 即

$$\Delta(Q)=Q(e_1)Q(e_{s+1})+\ \ +Q(e_s)Q(e_{2s}),$$

$$\Delta(Q_1)=Q_1(e_1)Q_1(e_{s+1})+\ \ +Q_1(e_s)Q_1(e_{2s}),$$

那么

$$\Delta(Q_1)=(\alpha(u))^2\Delta(Q)+(D(u))^2+\alpha(u)D(u)$$

参考文献

[1] Dickson, L E , Linear groups, Teubner, 1901

[2] Bourbaki, N , Elements of mathematics Algebra Modules Rings Forms, 2, Addison-Wesley, 1975, Chapt, 4, 5, 6(译自法文)

[3] Dieudonne, J A , La geometrie des groups classiques, Springer, 1955

В Л Попов 撰 张明尧 译 徐广善 校

Dieudonné 模 [Dieudonné module, Дьедонне модуль]

Witt 向量(Witt vector) $W(k)$ 的环上的一个模 M, 其中 k 是特征 $p>0$ 的完满域, 且有二个自同态 F_M 及 V_M, 满足下列关系

$$F_M(\omega m)=\omega^{(p)}F_M(m),$$
$$\omega V_M(m)=V_M(\omega^{(p)}m),$$
$$F_M(V_M(m))=V_M(F_M(m))=pm$$

这里 $m\in M$, $\omega=(a_0,\ \ ,a_n,\ \ )\in W(k)$, $\omega^{(p)}=(a_0^p,\ \ ,a_n^p,\ \ )$ 等价地定义, M 是环 D_k(Dieudonné 环(Dieudonné ring))上的一个左模, 其中 D_k 是由 $W(k)$ 和两个变量 F 及 V 生成的, 它们满足下列关系式

$$F\omega=\omega^{(p)}F,\ \omega V=V\omega^{(p)},\ FV=VF=p,\quad \omega\in W(k)$$

对于任何正整数 n, 存在同构

$$D_k/D_kV^n\simeq \mathrm{End}_k(W_{nk}),$$

其中 D_kV^n 是由 V^n 生成的左理想, W_{nk} 是斜截 Witt 向量的 k 概形 Dieudonné 模在幂幺交换代数群的分类中起着重要作用([1]) Dieudonné 模一词也用来称呼 $\hat{D}_k$ 上的左模, 其中 $\hat{D}_k$ 是 D_k 在 D_k 的双边理想 (F,V) 的幂所生成的拓扑上的完全化

参考文献

[1] Dieudonné, J , Lie group and Lie hyperalgebras over a field of characteristic $p>0$, VI, *Amer J Math* , **79**(1957), 2, 311-388

[2] Demazure, M and Gabriel, P , Groupes algebriques, 1, Masson, 1970

[3] Манин Ю И ,《Успехи матем наук》, **18**(1963), 6, 3-90

И В Долгачев 撰

【补注】 Dieudonne 模在有正特征域上的代数簇的不同上同调理论([A1])及在形式群(分类)理论([3], [A2])中也有作用 Cartier 对偶性(Cartier duality)([A2], [A3])(见**形式群** (formal group))给出了在形式群理论中使用 Dieudonné 模(在历史上首次)和在交换的幂幺代数群([2])的分类理论中使用 Dieudonné 模之间的联系 .

参考文献

[A1] Berthelot, P and Ogus, A , Notes on crystalline cohomology, Princeton Univ Press 1978

[A2] Hazewinkel, M , Formal groups and applications, Acad Press, 1978

[A3] Cartier, P , Groups algébriques et groupes formels, in Coll sur la théorie des groupes algébriques, Bruxelles, 1962, CBRM, 1962, 87-111

许永华 译 牛凤文 校

微分同胚 [diffeomorphism, диффеоморфизм], 可微同胚(differentiable homeomorphism), 光滑同胚(smooth homeomorphism)

从微分流形 M(例如在 Euclid 空间中的区域)到微分流形 N 中的一对一的连续可微, 且其逆映射也连续可微的映射 $f\ M\to N$ 若 $f(M)=N$, 则说 M 和 N 是微分同胚的(diffeomorphic) 从微分拓扑的观点来看, 微分同胚的流形有相同的性质, 感兴趣的是在微分同胚意义下的流形的分类(除小维数的情形外, 这个分类与**同胚**(homeomorphism)意义下的较粗糙的分类不一致)

虽然名词"微分同胚"是较近期引入的, 实际在

数学中长时间用的大量的变换及变量代换都是微分同胚，而许多变换族都是微分同胚的群．特别地，这适用于在流形上保持了一个附加结构（例如接触结构，辛结构，共形结构或复结构）的微分同胚．过去，这样的微分同胚有特别的名称（在上面的例子里是接触变换，标准映射，共形映射及双全纯映射），这些名称在近期（20世纪70年代）常用带有一个保持结构特征的修饰词的“微分同胚”术语来代替（例如用“辛微分同胚”代替“标准变换”）

一个流形 M 到它自身上的所有微分同胚的群 Diff M(在 Diff M 中，已用恰当的方式引进了拓扑）的拓扑（更精确地，同伦）性质已经被研究过．它们可以是意外地复杂（例如见[1]，[4]，[5]，其中也包括一些评论和参考）．这个问题是与同伦拓扑中的许多重要问题（例如与球面的同伦群）相联系的．原则上，Diff M 的性质的认识会有助于解决这些问题，但在目前（1978）情况看起来几乎是相反的 在 Diff M 的研究中的进展包括问题的已知特点的使用，或者充其量是与这些问题的解决平行地、用同样方法实现的．关于一个闭 n 维流形的 C^r类（包括 $r=\infty$ 的情形）微分同胚的群的代数性质，已经证明 如果 $r\neq n+1$,则它的单位连通分支是单群，即没有非平凡的**正规子群**(normal subgroup，见[2]，[3]，对于 $r=n+1$，情形不清楚） 至于一个非闭的 n 维流形 M,已经证明，通过微分同胚的连续族 $f_t(0\leqslant t\leqslant 1, f_0=1_M, f_1=f)$（其中 f_t 不移动某个（依赖于族 f_t 的）紧集外部的点）可以与恒等映射 1_M 连接的 $C^r(r\neq n+1)$类的所有微分同胚 f 组成的群是单群．

参考文献

[1] Antonelli, P L , Burghelea, D and Kahn, P J , The non-finite homotopy type of some diffeomorphism groups, Topology, **11**(1972), 1, 1-49

[2] Thurston, W , Foliations and groups of diffeomorphisms, *Bull Amer Math Soc* , **80**(1974), 2, 304-307

[3A] Mather, J N , Commutators of diffeomorphisms, *Comm Math Helv* , **49**(1974), 4, 512-528

[3B] Mather, J N , Commutators of diffeomorphisms Ⅱ , *Comm Math Helv* , **50**(1975), 1, 33-40

[4] Farrell, F T and Hsiang, W C , On the rational homotopy groups of the diffeomorphism groups of disks, spheres and aspherical manifolds, in R J Milgram (ed) Algebraic and geometric topology, Proc Symp Pure Math , Vol 32 1, Amer Math Soc , 1978, 325-328

[5] Burghelea, D and Lashof, R , Geometric transfer and the homotopy type of the automorphism groups of manifold, *Trans Amer Math Soc* , **269** (1982), 1, 1-38

Д В. Аносов 撰

【补注】 紧 2 维流形的微分同胚的分类在[A1]中介绍．对 3 维或更低维的流形，用微分同胚，同胚和组合等价的分类是一致的，见[A5]，[A6] 对维数 $n\geqslant 5$ 的紧单连通流形 M_1, M_2，得到微分同胚的最有用的工具之一是 Smale 的 h 配边定理（h-cobordism theorem)（[A7]），也见[A4] M_1 和 M_2 是微分同胚的，如果存在一个 $n+1$ 维的紧流形 N，它的边界是不交并 $M_1\cup M_2$，并且 M_1 和 M_2 二者都是 N 的形变收缩核（见**形变收缩核** (deformation retract)；**h 配边** (h-cobordism)）．事实上，在这种情形下 N 微分同胚于 M_1(或 M_2)与闭单位区间的 Descartes 积．

许多进一步的结果是通过将 h 配边定理与代数和微分拓扑等其他工具结合在一起而得到的，见[A1]，[A3]

参考文献

[A1] Browder, W , Surgery on simply-connectes manifolds, Springer, 1972

[A2] Hirsch, M W , Differential topology, Springer, 1976

[A3] Kirby, R C and Siebenmann, L C , Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations, Princeton Univ, Press 1977, 155-213

[A4] Milnor, J , Lecture notes on the h-cobordism theorem, Princeton Univ Press , 1965

[A5] Moise, E E , Geometric topology in dimensions 2 and 3, Springer, 1977

[A6] Munkres, J , Obstructions to smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms, *Ann of Math* , **72** (1960), 521-554

[A7] Smale, S , On the structure of manifolds, *Amer J Math* , **84**(1962), 387-399

薛春华 译 徐森林 校

差异上链 [**difference cochain** , **различающая коцепь**]

差异上链是两个映射扩张为同伦的**阻碍** (obstruction)，设 X 为胞腔空间，Y 为单连通拓扑空间．设已给两个映射 f, g $X\to Y$ 以及它们在 $(n-1)$ 维骨架上的同伦 F $(X\times 0)\cup(X^{n-1}\times I)\cup(X\times 1)\to Y$，其中 $I=[0,1]$，X^n 为 X 的 n 维骨架．对于 X 的每个 n 维定向胞腔 e^n，F 在 $\partial(\overline{e}\times I)$上的限制给出了一个映射 $S^n\to Y$ (S^n 为 n 维球面)，从而得到群 $\pi_n(Y)$的一个元素．这样就得到一个上链 $d^n(f,g)\in C^n(X,\pi_n(Y))$（记作 $d^n_F(f,g)$ 更精确些），称为**差异上链**，上链 $d^n(f,g)$ 是 F 扩张到 $(X\times 0)\cup(X^n\times I)\cup(X\times 1)=(X\times I)^{n-1}\cup(X\times\{0,1\})$的阻碍．

下列的结论成立 1) $d^n(f,g)=0$，当且仅当 f 与 g 之间的同伦可以扩张到 X^n，2) 上链

$$d^n(f,g)\in C^n(X\times I, X\times\{0,1\},\pi_n(Y))$$

为上闭链，3)上同调类

$$[d^n(f,g)]\in H^n(X\times I, X\times\{0,1\},\pi_n(Y))$$

等于0，当且仅当有f与g在X^n上的同伦，使限制在X^{n-2}上时与F相同．不失去普遍性，可假设f与g在X^{n-1}上一致并且$F(x,t)=f(x)=g(x)$，当$x\in X^{n-2}$于是有下面的结论．

1) $d^n(f,g)=-d^n(g,f)$，特别$d^n(f,f)=0$，

2) $d^n(f,g)+d^n(g,h)=d^n(f,h)$，

3) 对于任何映射f $X\to Y$与任何上链$d\in C^n(X,\pi_n(Y))$必有映射g满足$f|_{X^{n-1}}=g|_{X^{n-1}}$且$d^n(f,g)=d$

现设已给两个映射f,g $X^n\to Y$，$f|_{X^{n-1}}=g|_{X^{n-1}}$令$c_f^{n+1}$与$c_g^{n+1}$分别为它们扩张的阻碍．差异上链在阻碍理论中的作用可由下面的命题看出

$$c_f^{n+1}-c_g^{n+1}=\delta d^n(f,g)$$

因此，若g可以扩张到X^{n+1}，则$[c_f^{n+1}]=0$，若$[c_f^{n+1}]=0$，则$f|_{X^{n-1}}$可扩张到X^{n+1}

Ю Б．Рудяк 撰

【补注】

参考文献

[A1] Whitehead, G W, Elements of homotypy theory, Springer, 1978, p 228

孙以丰 译

K理论中的差异元素 [difference element in K-theory, различающий элемент в K-теории]

群$K(X,A)$中的一个元素（这里（X,A）为一对空间，X通常假设为一有限胞腔空间（cellular space），A为X的胞腔子空间），由一个三元组（ξ,η,ζ）构造出来，其中ξ与η是X上的同维数向量丛，ζ $\xi|_A\to\eta|_A$为向量丛同构（这里$\sigma|_A$是指X上的向量丛σ限制在子空间A上的部分） 差异元素的构成可按下述方式进行 先假定η为平凡丛而且η在X上已给定了一个平凡化．于是ζ给出了$\xi|_A$的一个平凡化，从而给出了群$\widetilde{K}(X/A)=K(X,A)$的一个元素．这个元素与$\eta$在整个$X$上平凡化的选择无关 对于一般情形，选择$X$上的向量丛$\sigma$使得丛$\eta\oplus\sigma$为平凡的，并令三元素（$\xi,\eta,\zeta$）对应于三元组（$\xi\oplus\sigma,\eta\oplus\sigma,\zeta\oplus\mathrm{id}\,\sigma$）所给出的元素

Ю Б Рудяк 撰

【补注】

参考文献

[A1] Atiyah, M F and Hirezebruch, F, Analytic cycles on complex manifolds, *Topology*, **1** (1961), 28 – 45

[A2] Atiyah, M F, Bott, R and Shapiro, A, Clifford modules, *Topology*, **3**, Suppl, **1** (1964), 3 – 38

孙以丰 译

差分方程 [difference equation, разностное уравнение]

含有未知函数的有限差分的方程．假设$y(n)=y_n$是依赖于整数变量$n=0,\pm1,\pm2,$ 的函数，令

$$\Delta y_n=y_{n+1}-y_n,\ \Delta^{m+1}y_n=\Delta(\Delta^m y_n),$$
$$\Delta^1 y_n=\Delta y_n,\ m=1,2,$$

是有限差分 $\Delta^m y_n$含有函数y在$m+1$个点n， ，$n+m$上的值 公式

$$\Delta^m y_n=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\begin{bmatrix}m\\y\end{bmatrix}y_{n+k} \tag{1}$$

成立．方程

$$F(n,y_n,\Delta y_n,\quad,\Delta^m y_n)=0 \tag{2}$$

称为差分方程（difference equation），其中y是未知函数，而F是给定函数 用由所求函数值表示的表达式（1）代替（2）中的有限差分，它就化成形如

$$F(n,y_n,y_{n+1},\quad,y_{n+m})=0 \tag{3}$$

的方程．

如果$\partial F/\partial y_n\neq0$，$\partial F/\partial y_{n+m}\neq0$，即方程（3）确实含有$y_n$和$y_{n+m}$，则方程（3）称为$m$阶差分方程（$m$-th order difference equation）

线性差分方程理论得到最充分的发展，它与线性常微分方程理论有很多共同之处（见[1]－[3]） 方程

$$a_m(n)y_{n+m}+\quad+a_0(n)y_n=f_n \tag{4}$$

是m阶线性差分方程 这里$f_n=f(n)$是给定函数，$a_k(n)(k=0,\quad,m)$是给定系数，$a_m(n)\neq0$，$a_0(n)\neq0$满足方程（4）的函数$y_n=y(n)$称为差分方程的解．和微分方程情形一样，差分方程的解也有特解和通解之别．差分方程（4）的通解（general solution to the difference equation）是依赖于m个任意参数的解，而每个特解都可以由取定参数的某些值得到．通常，具体的参数值是由补充条件来确定的 Cauchy问题是一个典型 给定y_0， ，y_{m-1}，f_n，当$n=m,m+1$， 时求方程（4）的解y_n 差分方程（4）的解的存在性及构造解的方法由下面的格式来建立．考虑（4）的齐次差分方程

$$a_m(n)y_{n+m}+\quad+a_0(n)y_n=0 \tag{5}$$

下面的命题成立

1) 假设$y_n^{(1)}$， ，$y_n^{(k)}$是方程（5）的解以及c_1， ，c_k是一组任意常数，则函数$c_1y_n^{(1)}+\quad+c_ky_n^{(k)}$也是方程（5）的解

2) 假设$y_n^{(1)}$， ，$y_n^{(m)}$是方程（5）的m个解以及行列式

$$\begin{vmatrix}y_0^{(1)} & & y_0^{(m)}\\ & & \\ y_{m-1}^{(1)} & & y_{m-1}^{(m)}\end{vmatrix}$$

不为零，则齐次差分方程（5）的通解为

$$y_n=\sum_{k=1}^{m}c_k y_n^{(k)}, \qquad (6)$$

其中 c_k 是任意常数．

3) 非齐次差分方程（4）的通解是它的任意一个特解与齐次差分方程（5）的通解的和．非齐次方程（4）的特解可以从齐次方程的通解（6）用参数变易法来构造（例如，见[2]）．在常系数差分方程

$$a_m y_{m+n}+\cdots+a_0 y_n=0 \qquad (7)$$

的情形下，可以立刻找到 m 个线性无关的特解．即考虑特征方程

$$a_m q^m+a_{m-1}q^{m-1}+\cdots+a_0=0 \qquad (8)$$

并求其根 $q_1,\cdots,q_m$．如果所有的根都是单根，则函数

$$y_n^{(1)}=q_1^n,\cdots,y_n^{(m)}=q_m^n$$

是方程（7）的线性无关解组．当 q_k 是 r 重根时，解

$$q_k^n, nq_k^n,\cdots,n^{r-1}q_k^n$$

是线性无关的．

如果系数 $a_0,\cdots,a_m$ 是实数，方程（8）有一复数根，例如有一单根 $q_k=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，则代替复数解 $q_k^n,\bar{q}_k^n$，可以得到两个线性无关的实数解

$$\rho^n\cos n\varphi,\ \rho^n\sin n\varphi$$

设有二阶常实系数差分方程

$$a_2y_{n+2}+a_1y_{n+1}+a_0y_n=0 \qquad (9)$$

特征方程

$$a_2q^2+a_1q+a_0=0$$

具有根

$$q_{1,2}=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_2}$$

当 $q_2\neq q_1$ 时，把（9）的通解写成

$$y_n=c_1\frac{q_2q_1^n-q_1q_2^n}{q_2-q_1}+c_2\frac{q_2^n-q_1^n}{q_2-q_1} \qquad (10)$$

是方便的，其中 c_1 和 c_2 是任意常数．如果 q_1 和 q_2 是复共轭根

$$q_{1,2}=\rho(\cos\varphi\pm i\sin\varphi),$$

则通解的另一种表示是

$$y_n=-c_1\rho^n\frac{\sin(n-1)\varphi}{\sin\varphi}+c_2\rho^{n-1}\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} \qquad (11)$$

在多重根的情形下，通解可以在（10）或（11）中取极限得到．它将具有形式

$$y_n=-c_1(n-1)q_1^n+c_2nq_1^{n-1}$$

用与处理任意阶方程一样的方法，可以考虑二阶差分方程的 Cauchy 问题或者各种边值问题．例如，Cachy 问题

$$\left.\begin{aligned}&T_{n+2}(x)-2xT_{n+1}(x)+T_n(x)=0,\\&\qquad\qquad n=0,1,\cdots,\\&T_0(x)=1,\ T_1(x)=x,\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

其中 x 是任意实数，（12）的解是 n 次多项式 $T_n(x)$（第一类 Чебышев 多项式（Chebyshev polynomial of the first kind）），定义为

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$$
$$=\frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^{-n}\right]$$

二阶差分方程的边值问题是求函数 y_n，当 $n=1,\cdots,N-1$ 时满足方程

$$Ly_n=a_ny_{n-1}-c_ny_n+b_ny_{n+1}=-f_n \qquad (13)$$

以及两个线性无关的边界条件．这种边界条件，例如可以是

$$y_0=\kappa_1y_1+\mu_1,\ y_N=\kappa_2y_{N-1}+\mu_2 \qquad (14)$$

或

$$y_0=\mu_1,\ y_N=\mu_2 \qquad (15)$$

对二阶差分方程下面的极大值原理成立．给定问题（13），（15），假设满足条件

$$a_n>0,\ b_n>0,\ c_n\geqslant a_n+b_n,\ n=1,\cdots,N-1$$

设 $Ly_n\geqslant0$（$Ly_n\leqslant0$），$n=1,\cdots,N-1$，则当 $n=1,\cdots,N-1$ 时，$y_n\not\equiv$ 常数不能有最大正（最小负）值．最大值原理表明，边值问题（13），（15）是唯一可解的，它的解在边界条件 μ_1,μ_2 和右端 f_n 变动时是稳定的．求解差分边值问题（13），（14）可以用**打靶法**（shooting method）（见[2]）．

只是在个别的、十分特殊的情况下才能构造出非线性差分方程

$$y_{n+1}=f_n(y_n),\ n=0,1,\cdots \qquad (16)$$

的显式解．对方程（16）可研究当 $n\to\infty$ 时解的性态的定性问题以及稳定性理论，后者大致与常微分方程稳定性理论相类似（见[4]，[5]）．

偏微分方程的差分逼近导出了多维差分方程（见[2]，[6]）．例如，Poisson 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x_1, x_2)$$

能够被差分方程

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} = -f_{i,j}$$

逼近，其中

$$u_{i,j} = u(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}),\ x_1^{(i)} = ih_1,\ x_2^{(j)} = jh_2,$$

$$i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \quad ,$$

h_1 和 h_2 是网格的步长 多维差分方程组及其附加的初始条件和边界条件构成**差分格式**(difference scheme). 与多维差分方程研究有关的问题有 差分问题的正确性，求解的方法，网格加密时对原微分方程解的收敛性（见**差分格式理论**(difference schemes, theory of))

虽然各种各样的数学和技术问题都导出差分方程(例如，见[4]，[5])，但其主要的应用领域还在于近似求解微分方程（例如，见[6]，[9])

参考文献

[1] Гельфонд, А О, Исчисление конечных разностей, 3 изд М, 1967

[2] Самарский, А А, Николаев, Е С, Методы решения сеточных уравнений, М, 1978

[3] Самарский, А А, Карамзин, Ю Н, Разностные уравнения, М, 1978

[4] Мартынюк, Д И, Лекции по качественной теории разностных уравнений, К, 1972

[5] Halanay, A, Wexler D, Qualitative theory of impulse systems, Acad R S Romania, 1968 (译自罗马尼亚文)

[6] Самарский, А А, Теория разностных схем, М, 1977

[7] Березин, И С, Жидков, Н П, Методы вычислений, 2 изд, т 2, М, 1962 (英译本 Berezin, I S, Zhidkov, N P, Computing methods, 2, Pergamon, 1973)

[8] Бахвалов, Н С, Численные методы, 2 изд, М, 1975 (英译本 Bakhvalov, N S, Numerical methods analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977)

[9] Горбунов, А Д, Разностные уравнения, М, 1972

А В Гулин, А А Самарский 撰

【补注】 关于参考文献，亦见**差分格式**（difference scheme) 此外，下面[A1]，[A2] 给出差分方程和**差分算子**(difference operator) 更一般的处理以及对微分方程的应用

参考文献

[A1] Henrici, P, Discrete variable methods in ordinary differential equations, Wiley, 1962

[A2] Hildebrand, F B, Finite-difference equations and simulations, Prentice-Hall, 1968

[A3] Spiegel, M R, Calculus of finite differences and difference equations, McGraw-Hill, 1971

[A4] Milne-Thomson, L M, The calculus of finite differences, Chelsea, reprint, 1981

[A5] Norlund, N E, Volesungen über Differenzen rechnung, Springer, 1924

沈祖和 译 郑维行 校

差分法 [difference methods, разностные методы]

微分方程的近似解法，其基础是用关于离散变量的函数的方程（即差分方程）来代替微分方程．见**双曲型偏微分方程，数值方法**(hyperbolic partial differential equation, numerical methods)，**抛物型偏微分方程，数值方法**（parabolic partial differential equation, numrical methods)，**椭圆型偏微分方程，数值方法**(elliptic partial differential equation, numrical methods)，**常微分方程的近似解法**(differential equations, ordinary, approximate methods of solution of)

Н С Бахвалов 撰 张鸿林 译

两集合的差 [difference of two sets, разность множеств]

集合的一种运算 设 A, B 是两个集合（第二个集合不一定含于第一个集合中） 这时，由属于集合 A 但不属于集合 B 的元素组成的集合称为这两个集合的差．

两个集合 A 与 B 的差记作 $A\backslash B$

М И Войцеховский 撰

【补注】 亦见**集合的对称差**（symmetric difference of sets） 张鸿林 译

差分算子 [difference operator, разностный оператор]

作用在网格函数空间上的算子．差分算子在逼近微分差分问题中出现，是**差分格式理论**(difference schemes, theory of) 中的研究课题 差分格式可以看成是作用在某函数空间，即网格函数空间上的算子的方程．网格函数空间是定义在给定网格点上函数的集合并组成有限维空间 网格函数空间通常是在逼近某连续变量的函数空间时出现的

例 1 令 $C[0, 1]$ 是定义在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上的具有范数

$$\| u \|_C = \max_{x \in [0, 1]} |u(x)|$$

的连续函数空间．引入网格

$$\omega_h = \{x_i = ih \quad i = 0, \quad , N, hN = 1\}$$

并考虑给定在网格 ω_h 上的函数 $y = \{y_i\}_{i=0}^N$, $y_i = y(x_i)$ 的集合 $C_h[0, 1]$ 集合 $C_h[0, 1]$ 依坐标分量相加和数乘组成（$N+1$）维向量空间 在 $C_h[0, 1]$ 中的范数

$$\| y \|_{C_h} = \max_{0 \leqslant i \leqslant N} |y_i|$$

在下述意义下与 $C[0, 1]$ 上的范数是相容的，即对任何函数 $u \in C[0, 1]$，向量

$$u_h = \{u_i\}_{i=0}^{N} \in C_h[0, 1], \quad u_i = u(x_i)$$

是确定的，且

$$\lim_{h \to 0} \| u_h \|_{C_h} = \| u \|_C$$

任何线性差分算子 A_h，把它看成是作用在一有限维空间上的算子，都能用矩阵表示　差分算子生成的矩阵的特点是大型的和含有相当多的零元素

一般地，网格函数空间和差分算子的构造是十分复杂的．研究得较多的是作用在具有 Hilbert 度量的空间上的差分算子的性质　在这种情况下，最有兴趣的性质是自伴性和正定性　乘积的微分和分部积分公式的差分模拟是研究差分算子性质的基本数学工具．

例 2　设给定网格 ω_h 上的实值函数集合　引入记号

$$y_{\bar{x}, i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad y_{x, i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h},$$

$$y_{\overset{0}{x}, i} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y_{\bar{x}x, i} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad (y, v] = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i h$$

$$[y, v) = \sum_{i=0}^{N-1} y_i v_i h$$

下列公式成立

$$(yv)_{\bar{x}, i} = y_{\bar{x}, i} v_i + y_i v_{\bar{x}, i} - h y_{\bar{x}, i} v_{\bar{x}, i},$$

$$(yv)_{x, i} = y_{x, i} v_i + y_i v_{x, i} + h y_{x, i} v_{x, i}$$

还有分部求和公式

$$(y, v_{\bar{x}}] = -[y_x, v) + y_N v_N - y_0 v_0$$

特别是，由这公式可知，二阶差分导算子

$$(Ay)_i = -y_{\bar{x}x, i}, \quad i = 1, \quad , N-1$$

在定义于 ω_h 上并在边界 $i = 0$, $i = N$ 上为零的函数集合上是自伴的和正定的

许多研究工作致力于椭圆型微分算子差分逼近性质的研究（见 [1]—[4]）构造相应的差分算子的有效方法有，诸如平衡法，有限元素法，变分和投影法　所得到的差分逼近是原算子基本性质如椭圆型、满足极大值原理等的良好模型　逼近带有各种边界条件的复杂区域上的椭圆微分算子以及不规则网格都构造了相应的差分算子（见 [5]）

定常差分算子的性质用于研究非定常差分问题的稳定性和构造迭代方法，而且迭代法的理论可以成为差分格式稳定性理论的一部分（见 [6], [7]）

在构造数学物理中多维问题的经济差分格式时研究了因子化差分算子（factorized difference operators）这是一些可以表示成一维差分算子乘积的多维差分算子（见 [1]）非线性差分算子也在研究中（见 [8]）

参考文献

[1] Самарский, А　А, Теория разностных схем, М, 1977

[2] Самарский, А　А, Андреев, В　Б, Разностные методы для эллиптических уравнений, М, 1976

[3] Корнеев, В　Г, Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности, Л, 1977

[4] Aubin, J -P, Approximation of elliptic boundary-value problems, Wiley, 1972

[5] Самарский, А　А, Фрязинов, И　В, 《Успехи матем　наук》, **31** (1976), 6, 167－197

[6] Самарский, А　А, Гулин, А　В, Устойчивость разностных схем, М, 1973

[7] Самарский, А　А, Николаев, Е　С, Методы решения сеточных уравнений, М, 1978

[8A] Карчевский, М　М, Ляшко, А　Д, 《Изв вузов Математика》, 1972, **11**, 23－31

[8B] Карчевский, М　М, Ляшко, А　Д, 《Изв вузов Математика》, 1973, **3**, 44－52

А　В　Гулин, А　А　Самарский　撰

【补注】关于参考文献，亦见**差分方程**（difference equation）和**差分格式**（difference scheme）

参考文献

[A1] Godunov, S　K, Ryaben'kiĭ, V　S, The theory of difference schemes, North-Holland, 1964（译自俄文）

沈祖和　译　郑维行　校

差分格式 [difference scheme, разностная схема]

逼近微分方程和附加（初值、边值和其他）条件的差分方程组（见**差分方程**（difference equation））用差分格式逼近原微分问题是用离散问题逼近原问题的方法之一　为此，独立变量的区域 G 用离散的点集 G_h——网格（grid）代替，微分方程中的导数用网格 G_h 上的差分关系代替　如此变换后便得到封闭的大型代数方程组（线性或非线性、依赖于原微分方程），构成了差分格式　差分格式本质上是一族依赖于网格步长的差分方程　差分格式的解也依赖于网格步长参数．差分格式是一个多参数的和复杂的对象．除原微分方程的系数外，还包含其自身的特征参数，诸如关于时间和空间的步长、权因子和其它参数．这些参数的影响可能严重地扭曲原微分问题所表现的性态．

关于用差分格式逼近微分方程的问题有　构造差分格式的方法，在网格加密时差分问题的解对原微分方程问题解的收敛性，以及解差分方程组的方法　这些问题都在**差分格式理论**（difference schemes, the-

ory of) 中考虑 利用高速计算机解常微分方程和偏微分方程的典型差分格式的有效数值方法已经发展起来

下面给出差分格式的一个简单例子 假设给定微分方程

$$\left.\begin{array}{l} u''(x) - q(x)u(x) = -f(x), \\ q(x) \geqslant 0,\ 0 < x < 1, \\ u'(0) = \sigma u(0) - \mu_1,\ u(1) = \mu_2,\ \sigma > 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

区域 $G = \{0 < x < 1\}$ 由网格

$$G_h = \{x_i = ih \quad i = 0, \quad , N,\ hN = 1\}$$

代替

问题（1）的差分格式为

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - q_i y_i = -f_i, \\ \qquad i = 1, \quad , N-1, \\ \dfrac{y_1 - y_0}{h} = (\sigma + 05hq_0)y_0 \\ \qquad -(\mu_1 + 05hf_0)y_N = \mu_2. \end{array}\right\} \quad (2)$$

这里 $y_i = y(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $x_i \in G_h$ 可以证明，当 $h \to 0$ 时，对充分光滑的函数 q, f, 差分问题（2）的解收敛到原问题（1）的解

差分格式（2）有二阶精度，即

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant N} |y_i - u(x_i)| \leqslant Mh^2,$$

其中 M 是不依赖于 h 的常数．差分格式（2）的解可以用**打靶法**（shooting method）求得

参考文献

[1] Самарский, А А, Теория разностных схем, М, 1977

[2] Самарский, А А, Николаев, Е С, Методы решения сеточных уравнений, М, 1978

А В Гулин, А А Самарский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Forsythe, G, E, Wasow, W R, Finite difference methods for partial differential equations, Wiley, 1960

[A2] Garabedian, P R, Partial differential equations, Wiley, 1964

[A3] Gladwell, I, Wait, R (eds), A survey of numerical methods for partial differential equations, Clarendon Press, 1979

[A4] Mitchell, A R, Griffiths, D F, The finite difference method in partial differential equations, Wiley, 1980

[A5] Richtmeyer, R D, Morton, K W, Difference methods for initial value problems, Wiley, 1967

[A6] Smith, G D, Numerical solution of partial differential equations, Oxford Univ Press, 1977

[A7] Yanenko, N N, The method of fractional steps, Springer, 1971 (译自俄文)

沈祖和 译 郑维行 校

变分差分格式 [**difference scheme, variational разностная вариационная схема**]

基于微分方程边值问题的变分问题的差分格式构造变分差分格式的基本思想是在 **Ritz 法**（Ritz method）中选择特殊的坐标函数（coordinate functions）求得与差分方程组（见**差分方程**（difference equation））相同结构的线代数方程组，通常，未知参数是精确解，也可能是它的某些导数在网格结点上的近似值．可以用逐段线性函数、半线性函数或其他函数作为坐标函数．

差分格式也可以在 Галеркин 法（Galerkin method）中特别选择坐标函数得到 由 Галеркин 法得到差分格式的方法称为变分差分法（variational difference method）或投影差分法（projection difference method）. 变分差分法有时也称为有限元法（finite-element method），尽管后一术语也在更广的意义下使用．

给定边值问题

$$-(p(x)u'(x))' = f(x),\ 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (2)$$

其中 f 是连续函数，p 是连续可微函数，且 $p(x) \geqslant p_0 > 0$

用满足条件（2）的任意函数 φ 乘（1）并对 x 积分

$$-\int_0^1 (pu')'\varphi dx = \int_0^1 f\varphi dx,$$

得到问题（1),（2）的解满足的恒等式

$$L(u, \varphi) \equiv \int_0^1 pu'\varphi' dx = \int_0^1 f\varphi dx \quad (3)$$

反之亦然 对任意函数 φ, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, 满足边界条件（2）和恒等式（3）的函数 u 是问题（1),（2）的解 恒等式（3）用于由 Галеркин 方法来构造近似解 用点 $x_i = ih\ (i = 1, \cdot, N-1, h = N^{-1})$ 将区间 $[0, 1]$ 分成 N 分．点集 $\{x_i\}$ 称为网格（grid)，点 x_i 称为网格的结点（nodes)，并且 h 称为网格的步长（step） 函数

$$\varphi_i(x) = \psi(h^{-1}x - i),\ i = 1, \quad \cdot, N-1,$$

取为 Галеркин 方法中的坐标函数，其中

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & 当 |t| \leqslant 1 时, \\ 0, & 当 |t| > 1 时 \end{cases}$$

显然，在区间 $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ 外 $\varphi_i(x) \equiv 0$ 坐标函数的这种性质通常称为局部性质（property of locality）或局部支集性质（property of local support）. 具有这种性质的坐标函数，称为局部坐标函数（local coordinate functions）设所求问题的近似解形为

$$v = \sum_{i=1}^{N-1} v_i \varphi_i(x), \tag{4}$$

其中所要求的参数 v_i 就是近似解在网格结点

$$v_i = v(x_i), \ i = 1, \quad , N-1$$

上的值

令 K 是形如（4）的函数集合．K 中的函数在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是线性的，在 $[0, 1]$ 上连续，在 $x = 0, x = 1$ 上为零　按照 Галеркин 方法在（3）中用函数 v 代 u，用函数 φ_i 代 φ，得到方程组

$$L(v, \varphi_i) = \sum_{j=1}^{N-1} v_j \int_0^1 p(x) \varphi_j'(x) \varphi_i(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx, \tag{5}$$

$$i = 1, \quad , N-1,$$

这里

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1/h, & \text{当 } x_{i-1} < x < x_i \text{ 时}, \\ -1/h, & \text{当 } x_i < x < x_{i+1} \text{ 时}, \end{cases}$$

以及

$$L(\varphi_j, \varphi_i) = \int_0^1 p \varphi_j \varphi_i dx = 0$$

仅对 $j = 1, i, i+1$ 成立，所以每个方程中至多有三个未知数．

方程组（5）可以写成

$$\frac{1}{h^2} [-\alpha_{i-1/2} v_{i-1} + (\alpha_{i-1/2} + \alpha_{i+1/2}) v_i - \alpha_{i+1/2} v_{i+1}] = f_i,$$

$$i = 1, \quad , N-1,$$

其中

$$\alpha_{i-1/2} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx,$$

$$f_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx, \ v_0 = v_N = 0.$$

这个方程组在结构上与常微分方程组相似．用这种方法得到的方程组也称为变分差分格式（variational difference schemes）与通常的差分格式相对照，系数 $\alpha_{i-1/2}$ 和 f_i 不是函数 p 和 f 在固定点上的值，而是这些值的平均值．这一性质使我们可以对具有“坏”（例如，不连续）系数的方程使用变分差分格式．

令 $L_h = \{L(\varphi_j, \varphi_i)\}$ 是方程组（5）的矩阵　因为 $L(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i, \varphi_j)$，矩阵 L_h 是对称的．方程

$$(L_h, w_h, w_h) = \int_0^1 p(w')^2 dx$$

成立，其中 $w_h = \{w_i\}_{i=1}^{N-1}$ 是 $N-1$ 维 Euclid 空间 E^{N-1} 中任意向量，$(\cdot, \ \cdot)$ 是 E^{N-1} 中的内积，且

$$w = \sum_{i=1}^{N-1} w_i \varphi_i(x)$$

不等式

$$\max_x u^2(x) = \max [\int_0^x u'(x) dt]^2 \leqslant \int_0^1 (u')^2 dx$$

对满足 $u(0) = 0$ 的任意函数 u 都成立，我们有估计式

$$\int_0^1 p(x)(w'(x))^2 dx \geqslant p_0 \max_x (w(x))^2 \geqslant p_0 h \sum_{i=1}^{N-1} w_i^2,$$

并由此推出不等式

$$(L_h w_h, w_h) \geqslant p_0 h (w_h, w_h) \tag{6}$$

矩阵 L_h 是正定的，方程组（5）有唯一解

对于小的 h 值，方程组（5）由许多方程组成代数方程组解的精度与求其解所需要的工作量在很大程度上依赖于方程组系数矩阵的所谓条件数（condition number）$P = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ 的大小　这里 $\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$ 是 L_h 的最大和最小特征值．不等式（6）推出 $\lambda_{\min} \geqslant p_0 h$　估计式

$$\lambda_{\max} \leqslant \frac{1}{4h} \max_x p(x)$$

也是成立的

条件数 $P = O(h^{-2})$，它与通常差分格式矩阵关于 h 的已知估计阶是一样的

近似解对精确解的收敛性是由 Галеркин 方法的通常格式证明的．

对 K 中任意函数 φ 方程（3）和（5）推出

$$L(u-v, \varphi) = 0, \tag{7}$$

由此

$$L(u-v, u-v) = L(u-v, u-w), \tag{8}$$

其中 w 是 K 中任意函数．借助于不等式

$$[L(\varphi, \psi)]^2 \leqslant L(\varphi, \varphi) L(\psi, \psi)$$

得到（8）式右端的估计．由此

$$L(u-v, u-v) = \int_0^1 p(x)(u'-v')^2 dx \leqslant \inf_{w \in K} \int_0^1 p(x)(u'-w')^2 dx$$

用记号

$$|u| = \left[\int_0^1 p u'^2 dx\right]^{1/2}$$

(数 $|u|$ 称为函数 u 的能量范数 (energy norm)) 可以把上面不等式写成

$$|u-v| \leqslant \inf_{w \in K} |u-w|$$

估计变分差分格式的误差，导致估计用 K 中函数对精确解的最佳逼近．如果把 w 取为在网格结点上与函数 u 一致的逐段线性函数

$$w(x)=\sum_{i=1}^{N-1} u(x_i)\ \varphi_i(x),$$

则对某常数 C 估计式

$$|u-v| \leqslant Ch^2 \max p(x) \int_0^1 (u'')^2 dx$$

成立

在上面的例中变分差分法的特征是明显的　坐标函数是局部的，保证了变分差分格式的结构与差分格式的结构相近以及可以应用投影方法技巧去研究变分差分格式的收敛性．

选择具有所要求逼近性质的局部坐标函数对构造变分差分格式是基本的．可以在各种函数空间中提出逼近问题．对数学物理中的问题 Соболев 空间 $W_p^l(\Omega)$ 是重要的，此空间就是有有限范数

$$\|u\|_{p,l}=\sum_{|\alpha| \leqslant l}\left[\int_\Omega |D^\alpha u|^p dx_1 \cdots dx_n\right]^{1/p}$$

的函数的线性集合，其中 Ω 是 E^n 中的区域，$p \geqslant 1$，l 是非负整数，$\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 是整数坐标的向量，$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ 以及

$$D^\alpha u=\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

很多局部坐标函数类都可以按照下面格式来构造．设 $\varphi^1(\xi), \cdots, \varphi^r(\xi)$ 是属于 $W_p^k(E_n)$ 在 n 维立方体 $|\xi_j|<R, j=1, \cdots, n$ 外为零的函数．设 $h=(h_1, \cdot, h_n)$ 是具有正坐标的固定向量，$i=(i_1, \cdots, i_n)$ 是任意整数向量以及

$$h^{-1}(x) \equiv (h_1^{-1} x_1, \cdots, h_n^{-1} x_n)$$

用 I 表示 n 维平行多面体 $|h_j^{-1} x_j-i_j|<R(j=1, \cdots, n)$ 与 Ω 相交的那些向量 i 的集合．对给定区域 Ω 取

$$\varphi_i^\mu(x)=\varphi^\mu(h^{-1}x-i),\ i \in I,\ \mu=1, \cdots, r$$

作为坐标函数，即从原来的函数改变自变量的比例并平移向量 i 得到的函数　这种坐标函数称为正则的 (regular)　设 K 是形如

$$w(x)=\sum_{i \in I} \sum_{\mu=1}^r w_i^\mu \varphi_i^\mu(x)$$

的函数集合．如果 ξ 的任意 l 次多项式 P_{l-1} 可以表示成 $\varphi^l(\xi), \cdots, \varphi^r(\xi)$ 的线性组合，则对任意函数 $u \in W_p^l(\Omega)$，可以找到函数 $w \in K$，使得近似不等式

$$\|u-w\|_{p,k} \leqslant C\bar{h}^{l-k}\|u\|_{p,l}\ (0 \leqslant k<l) \quad (9)$$

成立，其中 $\bar{h}=\max_{1 \leqslant j \leqslant n} h_j$，且 C 不依赖于 h 和 u

椭圆型方程边值问题的变分差分格式的构造，是建立在求满足积分恒等式的函数这一等价问题的基础上．许多这类问题归之于求函数 $u \in W_2^m(\Omega)$，使得对任意函数 $\varphi \in W_2^m(\Omega)$，满足积分恒等式

$$\begin{aligned} L(u, \varphi)= & \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} \int_\Omega a_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta \varphi d\Omega \\ & +\sum_{|\rho|,|\tau|<m} \int_S b_{\rho\tau} D^\rho u D^\tau \varphi dS=\int_\Omega f\varphi d\Omega, \end{aligned} \quad (10)$$

其中 S 是 Ω 的边界，$a_{\alpha\beta}$，$b_{\rho\tau}$ 和 f 是给定的函数．这里假设

$$a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha},\ b_{\rho\tau}=b_{\tau\rho}$$

和

$$L(u, u) \geqslant \gamma\|u\|_{2,m}^2,\ \gamma=\text{常数}>0$$

利用坐标函数 φ_i^μ 把 Галеркин 方法用于 (10)，便导出问题 (10) 的变分差分格式．假设 (10) 的解 u 属于 $W_2^l(\Omega)$，$l>m$ 以及函数 φ_i^μ 满足使不等式 (9) 成立的条件．为估计变分差分格式的误差，利用 Галеркин 方法的通常技巧

$$\begin{aligned} & \gamma\|u-v\|_{2,m}^2 \leqslant L(u-v, u-v) \leqslant \\ & \leqslant \inf_{w \in K} L(u-w, u-w) \leqslant Ch^{2(l-m)}\|u\|_{2l}^2, \end{aligned}$$

这里 v 是近似解．凡 $W_2^m(\Omega)$ 中任意函数都可以作为函数 φ 的这类问题 (10) 称为具有自然边界条件的问题 (problems with natural boundary conditions) 还有另一类边值问题，在边界 S 上给出边界条件

$$\left[\sum_{|\alpha|<m} b_\alpha^j D^\alpha u\right]\Bigg|_S=0,\ 0 \leqslant j \leqslant v \leqslant m-1 \quad (11)$$

在这种情况下，恒等式 (10) 中的函数 $\varphi \in W_2^m(\Omega)$ 也应满足边值条件 (11) 为了用 Галеркин 方法得到这类问题的近似解，其坐标函数必须满足条件 (11)．上面引进的坐标函数 $\varphi_i^\mu(x)$，由于其自身的构造方法，一般而言用于表示满足条件 (11) 的近似解是不合适的．对于带有边界条件 (11) 的问题，其变分差分格式的构造方法中有用到补偿法 (penalty method) 的．例如，求解 Poisson 方程的 Dirichlet 问题．这个问题等价于求函数 u，$u|_S=0$，使得对任意函数 φ，$\varphi|_S=0$ 满足积分方程

$$\int_\Omega\left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] d\Omega=\int_\Omega f\varphi d\Omega$$

在补偿法中，引入函数 v 使得对任意函数 φ 和 $\varepsilon > 0$，满足积分方程

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] d\Omega + \\ + \frac{1}{\varepsilon}\int_S v\varphi\, dS = \int_\Omega f\varphi\, d\Omega$$

函数 v 是带有自然边界条件问题的解 对小的 ε 值，解 u 和 v 是接近的 为了求这个问题的近似解，可以采用正则坐标函数的变分差分格式

构造坐标函数的一般方法如下

对任意正数 h，假定给定 Ω 中一组点 $z_i(i = 1, \quad, N)$，称为网格的结点，使得区域 Ω 中每一点到某一结点的距离至多为 h 对每个结点 z_i，在 $W_2^m(\Omega)$ 中取满足边界条件（11）的函数组 $\varphi_1^i, \quad, \varphi_{v(i)}^i$，并且 $v(i) \leqslant M$，这里 M 不依赖于 i 和 h 对每个 i 和一切 j，假设积分

$$\int_\Omega \varphi_j^i \varphi_m^k d\Omega$$

仅对一些上标 k 不为零，k 囿于某个不依赖于 i 和 h 的数（坐标函数的局部性条件） 设 K 是形如

$$w = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{v(i)} \lambda_j^i \varphi_j^i$$

的函数类，其中 λ_j^i 是数值参数

如果边值问题的解 u 可以用 K 中的函数依不等式

$$\inf_{w \in K} \| u - w \|_{2\ m} \leqslant Ch^{l-m} \| u \|_{2\ l} \quad m < l$$

所表示的精度逼近，则由变分差分格式得到的解有误差估计

$$\| u - v \|_{2,m} \leqslant Ch^{l-m} \| u \|_{2\ l}$$

为了对问题性质进行更完全的考察有时采用不规则网格 例如，为了在边界隅角的邻域内更精确地恢复函数，可以在径向环上安排结点

为了进行数值计算，变分差分格式矩阵的条件数不应太坏

对于问题（10），关系式 $P = O(N^{2m/n})$ 所表示的条件数被认为是最佳的，这里 P 是变分差分格式矩阵的条件数，N 是网格结点的个数，n 是包含区域 Ω 的空间维数．许多实际问题确实满足这一条件

变分差分格式的使用融合了网格法和投影法的长处．变分差分格式的结构使我们可以利用各种经济的解法 变分差分格式的可解性是容易建立的 如果差分算子是正定的，变分差分格式的矩阵是正定的．收敛性的问题归之于用变分差分格式的坐标函数逼近精确解的问题，因而其收敛速度是由精确解的微分性质决定的 变分差分格式可以用来解条件很弱的问题

变分差分格式的研究依下面几个基本方向进行

1）建立满足边界条件的坐标函数，研究其逼近性质，

2）在各种范数意义下获得精确性的估计，

3）构造具有某些奇异性（系数的不连续线，边界上的隅角，等等）问题的差分格式，

4）设计解变分差分格式的方法和优化求解的方法，

5）解非线性方程，

6）应用变分差分格式于不定常方程．

参考文献

[1] Оганесян, Л А, Ривкинд, В Я, Руховец, Л А, Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, 1–2, Вильнюс, 1973 – 1974

[2] Strang, G, Fix, G, An analysis of the finite element method, Prentice-Hall, 1973

[3] Aubin, J-P, Approximation of elliptic boundary-value problems, Wiley, 1972

[4] Варга, Р, Функционаальный анализ и теория аппроксимации в численном анализе, пер с англ, М, 1974（英译本 Varga, R G, Functional analysis and approximation theory in numerical analysis, SIAM, 1971

[5] Михлин, С Г, 《Зап научн Семинаров ЛОМИ》, **48** (1974), 32 – 188

[6] Марчук, Г И, Методы вычислительной математики, 2 изд, М, 1980（英译本 Marchuk, G I, Methods of numerical mathematics, Springer, 1982）

[7] Дьяконов, Е Г, Разностные методы решения краевых Задач М, 1971

Л А. Оганесян 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ciarlet, P G, Introduction to the numerical analysis of the finite element method, North-Holland, 1977

[A2] Ciarlet, P G, The finite element method for elliptic problems, North-Holland, 1978

[A3] Mitchell, A R, Wait, R, The finite element method in partial differential equations, Wiley, 1973

沈祖和 译 郑维行 校

差分格式的粘性 [**difference, scheme viscosity of a, схемная вязкость**]

刻画差分格式耗散的一种概念（见[1]） 差分格式的粘性表示在**微分方程的差分方程逼近**（approximation of a differential equation by difference equation）时出现什么样的附加的耗散性质（见[2]，[3]） 与引用“差分格式粘性”（viscosity）这一术语的同时，也用“近似粘性”（approximative viscosity）这一术语（见[4]，[5]） 差分格式的粘性是**一耗散函数**（dissipative function）（见[6]） 差分格式粘性的结构是由

差分函数关于网格参数的 Taylor 展式中关于空间变量的最低偶数阶导数的系数形式来确定的（见[7]-[9]）关于空间变量的三阶导数是差分格式耗散的系数（矩阵）（见[10]）其微分表示包含差分算子展成关于网格参数的 Taylor 级数（无穷多项）的一切项（见[9]，[10]） 微分近似包含展式的部分项 首次微分近似由原微分算子与展式的第一个非零项组成

根据原微分方程组的形式以及展式的基本函数的类型，出现不同形式的粘性与耗散矩阵 在**气体动力学的数值方法**（gas dynamics, numerical methods of）的研究中，有六种不同形式的粘性矩阵（见[10]）

首次微分逼近的抛物型粘性矩阵的非负性条件被看成差分格式的稳定性条件，在这种情况下出现了**适定的问题**（well-posed problem）（见[8]）借助于微分逼近这一工具来考虑差分格式粘性的方程能够得到差分格式的分类（见[9]）

差分格式的粘性对每一个确定的差分格式有唯一的定义．为了有效地控制粘性，考虑差分格式的类别是合适的．于是，引入多参数分裂差分格式类（见[10]），用变动参数数值的方法，就能够改变具有 Navier-Stokes 型，湍流型和其他型的粘性项的值．根据它的参数，粘性可以在满足数学的，程序的以及结构的性质的条件下优化（见[11]）当粘性关于多参数分裂差分格式类的参数的非负性和最小性条件满足时，就得到一族最优格式（最小耗散的和稳定的），而**大质点法**（large-particle method）的差分格式就属于这一族（见[12]）

研究差分格式的粘性，最好去揭示格式粘性矩阵的内在结构（见[11]），例如考虑分裂的粘性矩阵，不定常粘度矩阵，平移粘度矩阵，结构粘度矩阵，等等．

在解边值问题时，常引进差分格式粘度的概念以及微分逼近或差分边值条件表现的概念（见[10]）

在计算区域的点上以及在边界上或他们的邻域内的非线性差分格式的稳定性的研究中，要用到差分格式的粘性

参考文献

[1] Марчук, Г И, Методы вычислительной математики, 2 изд, М, 1980（英译本 Marchuk, G I, Methods of numerical mathematics, Springer, 1982）

[2] Бахвалов, Н С, Численные методы, 2 изд, М, 1975（英译本 Bakhvalov, N S, Numerical methods analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977）

[3] Самарский, А А, Попов, Ю П, Разностные методы решения задач газовой динамики, 2 изд, М, 1980

[4] Годунов, С К, Рябенький, В С, Разностные схемы, 2 изд, М, 1977（英译本 Godunov, S K, Ryaben'kii, V S, The theory of difference schemes, North-Holland, 1964）

[5] Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики, М, 1979

[6] Белоцерковский, О М, Давыдов, Ю М, Диссипативные свойства разностных схем, М, 1981

[7] Рождественский, Б Л, Яненко, Н Н, Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, 2 изд, М, 1978（英译本 Rozhdestvenskii, B, L, Yanenkv, N N, Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics, Amer Math Soc, 1983）

[8] Яненко, Н Н, Шокин, Ю И, 《Докл АН СССР》, **182**（1968）, 2, 280-281

[9] Шокин, Ю И, Методы дифференциального приближения новосиб, 1979（英译本 Shokin, Yu I, The method of differential approximation, Springer, 1983）

[10] Давыдов, Ю М, Дифференциальные приближения и представления разностных схем, М, 1981

[11] Давыдов, Ю М, 《Докл АН СССР》, **245**（1979）, 4, 812-816

[12] Белоцерковский, О М, Давыдов, Ю М, Метод Крупных частиция газовой динамике, М, 1982

Ю М Давыдов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hedsfrom, G W, Models of difference schemes for $u_t + u_x = 0$ by partial differential equations, *Math Comp*, **29**（1975）, 969-977

沈祖和 译 郑维行 校

差分格式理论 [difference schemes, theory of, разностных схем теория]

研究用有限差分方程(差分格式（difference schemes))代替微分方程的近似解法的数值数学分支．

差分格式理论研究构造差分格式的方法，讨论差分问题的正确性和差分问题的解对原微分问题的收敛性以及关于差分问题解的算法的合理性．有限差分法(又称网格法（grid method))是一种有效地解数学物理中复杂问题，包括非线性问题的通用计算方法 当前差分格式理论的显著特点是朝着建立和研究适合于计算机的方法这一方向发展．

基本概念 在微分方程论中有限差分法是用来作为证明存在定理的有效工具 而当差分格式用于数学计算的目的时，其中的问题就截然不同了 当求数学物理中某问题的近似解时，事先就假定这个问题是适定的 而差分格式理论的基本目的就成为寻求和论证解原微分方程的最好方法，对数学物理中广泛一类的问题就构造具有给定性质的差分格式提出一般原则．

下面通过一个非常一般的例子说明差分格式论中用到的基本概念——逼近、稳定性和收敛性的概念以及建立差分格式理论的一种可能途径

假设在边界为 Γ 的 n 维区域 G 上求微分方程

$$Lu(x)=f(x),\ x=(x_1,\ \ ,x_n)\in G \qquad (1)$$

并满足附加的（边值，初值）条件

$$lu(x)=\mu(x),\ x\in\Gamma \qquad (2)$$

的解，其中 L 和 l 是线性微分算子以及 f, μ 是给定函数．假设问题（1),(2）在某函数类上是适定的（即它的解 u 存在且唯一地、连续地依赖于输入数据 f 和 μ）在有限差分法中区域 $\bar{G}=G+\Gamma$ 被离散的点集——网格（grid）$\bar{G}_h=G_h+\Gamma_h$ 代替　参数 $h=(h_1,\ \ ,h_n)$，也就是网格的步长反映了网格的密度　通常，当 $|h|\to 0$ 时，网格序列 G_h 趋于充满整个区域 $\bar{G}$ 在网格 $\bar{G}_h$ 上，（1),(2）中的导数被相应的差分关系逼近，因而，得到线性代数方程组

$$L_hy_h(x)=\varphi_h(x),\ x\in G_h,\ l_hy_h(x)=\chi_h(x),\ x\in\Gamma_h, \qquad (3)$$

其中 y_h 是未知网格函数，φ_h, χ_h 是给定的网格函数，L_h, l_h 是差分算子　方程组（3）依赖于参数 h，称为差分格式（difference scheme）虽然方程组（3）是由逼近原问题（1),(2）得到的，但是它可以看成是独立的数学对象　问题（1),(2)是适定的，一般讲并不意味着差分问题（3）是适定的（正确的）．所以，在差分格式论中研究问题（3）的适定性是首要的问题．此外，在差分格式论中还研究差分问题的解 y_h，当 $h\to 0$ 时是否收敛到原微分问题的解 u　适定性与收敛性是密切相关的

假设 $\bar{G}_h$ 上的网格函数集合构成空间 H_h，算子 L_h 和 l_h 作用在这个空间上　在解 y_h 和右端 φ_h, χ_h 的空间中引入范数 $\|\cdot\|_{(1h)}$, $\|\cdot\|_{(2h)}$, $\|\cdot\|_{(3h)}$ 如果对一切充分小的 $|h|$ 和任意 φ_h, $\chi_h\in H_h$ 存在唯一的解，并且对某不依赖于 h 的常数 M 满足估计式

$$\|y_h\|_{(1h)}\leqslant M(\|\varphi_h\|_{(2h)}+\|\chi_h\|_{(3h)}), \qquad (4)$$

则差分问题（3）是适定的（正确的）　这一不等式表明解关于 h 一致地依赖于输入数据，称为差分格式的稳定性（stability of the difference scheme）　用（4）式已知右端来估计差分问题的解称为先验估计（a priori estimates）获得先验估计是差分格式理论的基础．

为估计误差，把问题（3）的解写成和式

$$y_h(x)=u_h(x)+z_h(x),$$

其中 u_h 是问题（1),(2）的解 u 在空间 H_h 上的投影，z_h 是近似解的误差　因为问题（3）是线性的，关于误差 z_h 有

$$L_hz_h(x)=\psi_h(x),\ x\in G_h,\ l_hz_h(x)=\nu_h(x),\ x\in\Gamma_h \qquad (5)$$

其中，

$$\psi_h(x)=\varphi_h(x)-L_hu_h(x),$$
$$\nu_h(x)=\chi_h(x)-l_hu_h(x),$$

函数 ψ_h 和 ν_h 分别称为方程（1）和附加条件（2）的差分格式（3）的逼近误差（errors of approximation）或局部离散化误差（local discretization errors）如果

$$\|\psi\|_{(2h)}=O(|h|^m),\ \|\nu\|_{(3h)}=O(|h|^m),\ m>0,$$

则称差分格式（3）是 m 阶逼近到问题（1),(2）如果

$$\|y_h-u_h\|_{(1h)}=O(|h|^m),$$

则称差分格式（3)有 m 阶精度或依速率 $O(|h|^m)$ 收敛　关于差分格式的收敛性，一般而言，单靠一个逼近是不够的，必须进一步要求差分问题（3)是适定的　也就是说，下面命题成立　如果差分格式（3）是适定的并且有 m 阶近似，则它依速率 $O(|h|^m)$ 收敛（见[28]）

由另外的途径来建立差分格式理论也是可能的　由此，在 Lax 的理论中（见[8]），不是在网格函数空间而是在原微分问题的解空间中来研究差分格式的收敛性的，在这里证明了所谓的等价性定理　如果原问题（1),（2）是适定的，差分格式（3）逼近问题（1),(2)，则稳定性对于收敛性是充分和必要的　稳定性和收敛性之间关系的其他描述是可能的（例如，见[9]）还有在广义解空间中研究差分格式的收敛性（见[10]）

差分格式的要求　为了在现代计算机上进行计算，只要求当 $|h|\to 0$ 时差分格式收敛是不够的．使用具有有限步长的实际网格，对差分格式提出了一系列的补充要求．除了具有通常的逼近性质和稳定性以外，差分格式还应当很好地模拟原微分方程的特性．此外，差分格式应该满足确定的条件使得计算算法的实现是最简单的．下面考虑其中一些补充要求

一致差分格式（uniform difference scheme）（见[1],[11]）理解为一类既不依赖给定函数类上实际问题的选择，又不依赖差分网格选择的差分格式．对于给定函数类上的任何问题，在网格的所有结点上差分方程具有相同的形式　特别地，解带有快速变化系数或不连续系数方程的直接计算格式就是一致差分格式　在直接计算格式中，系数中的不连续点不必明显地指出来，而且用同样的公式施行计算．直接计算格

式广泛用于气体动力学方程差分解的计算(见[1], [5], [12])

差分格式可以是守恒的 (conservative), 其意义是给定的差分格式在网格上具有与原微分方程一样的守恒律 特别是, 如果 L 是自伴算子且格式 (3) 是守恒的, 则 L_h 在 H 中是自伴的, 即守恒格式保持自伴性

得到守恒一致格式的通常方法就是所谓的平衡法 (balance method) 或积分插值法 (integro-interpolation method) 平衡法的实质就是在差分网格上逼近相应于给定微分方程的积分守恒律 (平衡方程) 在逼近变系数, 包括不连续系数的方程中平衡法有广泛的应用 另外一些构造保持原算子自伴性和正定性的差分格式的方法, 是建立在变分原理基础上的 (Ritz 法, 有限元法, 见**变分差分格式** (Variational difference scheme), **Ritz 法** (Ritz method)).

在构造气体动力学的差分格式中用到全守恒原理 (见[5]) 对于双曲型方程, 研究其相应差分方程的频散性质是有用的(见[13])

如果已知当 $t \to \infty$ 时原微分问题的解趋于零, 那么对近似差分公式的解自然也有同样的要求 具有这种性质的差分格式称为是渐近稳定的 (asymptotically stable) (见[4])

另外的构造更优质差分格式的方法是设法得到满足与原微分方程一样的先验估计的差分格式, 这种先验估计反映了原微分方程的特征 (且不能再改进了) (见[14])

数学物理中多维问题的经济差分格式 在解逼近数学物理中 (有二个或更多个空间坐标的) 多维非平稳问题的差分方程组时, 特别困难的是当网格加密时确定下一个时间层的解所必需的算术运算量骤增. 与此同时, 一维非平稳问题的解能够很有效地由打靶法得到, 这种方法在下述意义下是经济的, 即在网格的单个结点上要求有限多次 (不依赖于结点步长 h) 运算 一般而言, 如果求下一个时间层的解所需要的运算次数与空间网格结点个数之比不依赖于网格结点的个数, 则称这个差分格式是经济的 (economic) 通常的隐式差分格式是不经济的 构造经济差分格式的最有效的方法是把多维问题退化成少数几个一维问题 (交替方向法, 分解法) (见[1], [15], [16])

新的算法也推动了对差分格式理论中基本概念 逼近、稳定性和收敛性的新的探讨 例如, 全逼近或在弱意义下的逼近概念已经是成果累累 (见[1], [16]) 可加性原理的建立可以在一般情况下构造有全逼近性质的经济差分格式 (见[17]) 图上方程的格式与向量格式是交替方向差分格式的进一步推广 (见[18])

研究差分格式的适定性和收敛性的方法 对线性问题, 稳定性与相容性蕴含收敛性 所以, 差分格式理论主要集中于获得先验估计, 这个先验估计蕴含问题依某种范数的适定性 获得差分格式先验估计的方法在很大程度上类似于微分方程论中同样的方法 例如可以指出下列方法 分离变量法, Fourier 变换, 极大值原理, 能量不等式

解网格方程的方法. 微分方程的任何网格法都导出一个大型线性代数方程组 例如, 对多维问题, 方程个数一般达到 10^4-10^6 阶 一维差分问题通常用**打靶法** (shooting method)求解 (见[2]), 这种方法是逐次消元法的变形 迭代法是解多维网格方程的最常用的方法 普遍用于实际计算的迭代法是带 Чебышев 参数的 Richardson 方法, 交替方向法, 交替方向法 (内迭代) 与某经典方法 (外迭代) 相结合的二步迭代法 上松弛法和交替三角形迭代法也是常用的 (见 [2], [6]) 迭代法的理论可以看成差分格式稳定性理论的一个分支 (见[2])

值得注意的动向是用直接 (非迭代) 方法解多维差分问题. 这类方法有矩阵打靶法, 离散快速 Fourier 变换法及其推广和全表示法.

非线性问题 非线性抛物型方程的一致差分格式理论已经发展起来 (见[19]) 关于稳定性和收敛性关系的 Lax 定理已经推广到非线性的情形. (见[20], [21]) 非线性椭圆型方程 (见[23], [24]) 和非线性抛物型方程 (见[21], [22]) 的差分格式已有考虑 对一些非线性抽象 Cauchy 问题 (见[25]) 的差分格式适定性, 已有些一般定理. 对非线性发展方程差分格式的收敛性 (见[26], [27]) 已有研究

参考文献

[1] Самарский, А А, Теория разностных схем, М, 1977

[2] Самарский, А А, Николаев, Е С, Методы решения сеточных уравнений, М, 1978

[3] Самарский, А А, Андреев В Б, Разностные методы для эллиптических уравнений, М, 1976

[4] Самарский, А А, Гулин, А В, Устойчивость разностных схем, М, 1973

[5] Самарский, А А, Попов, Ю. П, Разностные методы решения задач газовой динамики, М, 1980

[6] Марчук, Г И, Методы вычислительной математики, 2 изд, М, 1980 (英译本 Marchuk, G I, Methods of numerical mathematics, Springer, 1982)

[7] Годунов, С К, Рябенький, В С, Разностные схемы Введение в теорию, М, 1973 (英译本 Godunov, S K, Ryaben'kii, V S, The theory of difference schemes, North-Holland, 1964)

[8] Richtmyer, R D, Morton, K, Difference methods for initial value problems, Interscience, 1967

[9] Гудович, Н Н, 《Ж вычисл матем и матем

физ », 6 (1966), 5, 916 – 921
[10] Кузнедов, Н Н, «Ж вычисл матем и матем физ », 12 (1972), 2, 334 – 351
[11] Тихонов, А Н, Самарский, А А, «Ж, вычисл матем и матем физ », 1 (1961), 1, 5 – 63
[12] Рождественский, Б Л, Яненко, Н Н, Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, М, 1978 (英译本 Rozhdestvenskiї, B L, Yanenko, N N, Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics, Amer Math Soc, 1983)
[13] Potter, D, Computational physics, Wiley, 1973
[14] Мокин, Ю И, «Ж вычисл матем и матем физ », 15 (1975), 3, 661 – 671
[15] Фрязинов, И В, «Ж вычисл матем и матем физ », 16 (1976), 4, 908 – 921
[16] Яненко, Н Н, Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосиб, 1967 (英译本 Yanenko, N N, The method of fractional steps, the solution of problems of mathematical physics in several variables, Springer, 1971)
[17] Самарский, А А, «Докл АН СССР», 165 (1965), 6, 1253 – 1256
[18] Самарский, А А, Фрязинов, И В, « Beitr Numer Math », 4 (1975) 191 – 203
[19] Самарский, А А, «Ж вычисл матем и матем физ », 2 (1962), 1, 25 – 56
[20] Якут, Л И, «Докл АН СССР », 156 (1964), 6, 1304 – 1307
[21] Ansorge, R, Hass, R, Konvergenz von Differenzenverfahren für lineare und nichtlineare Anfangswertaufgaben, Springer, 1970
[22] Дьяконов, Е Г, Разностные методы решения краевых задач, в 2 - Нестационарные задачи, М, 1972
[23A] Карчевский, М М, Ляшко, А Д, «Изв высш учебн заведений Математика», 1972, 11, 23 – 31
[23B] Карчевский, М М, Ляшко А Д, «Изв высш учебн заведений Математика», 1973, 3, 44 – 52
[24] Сапаговас, М М, «Ж вычисл матем и матем физ », 5 (1965), 4, 638 – 647
[25] Карчевский, М М, Лапин, А В, Ляшко, А Д, «Изв высш учебн заведений Математика», 1972, 3, 23 – 31
[26] Лапин, А В, Ляшко, А Д, «Изв высш учебн заведений Математика», 1973, 1, 71 – 77
[27A] Raviart, P A, Sur l'approximation de certaines equations d'évolution linéaires et non linéaires, *J Math Pures Appl* 46 (1967), 1, 11 – 107
[27B] Raviart, P A, Sur l'approximation de certaines équations d'évolution linéaires et non linéaires, *J Math Pures Appl*, 46 (1967), 2, 109 – 183
[28] Рябенький, В С, Филиппов, А Ф, Об устойчивости разностных уравнений, М, 1956

А. В Гулин, А А Самарский 撰

【补注】 关于用差分格式逼近连续问题的理论以及关于得到的网格方程的解,下面给出补充参考文献

除了本条目中的各种解网格方程的方法外,还有最近发展起来的多重网格法(multi-grid method)的技巧.实质上,多重网格法是利用减少粗糙性的网格序列的迭代法(iteration method). 这个方法要追溯到1962年R P Federenko 的工作[A3]并且被 A Brandt 极力提倡的[A1] 导引[A2] 给出了多重网格法极好介绍 [A4]给出了多重网格法的更先进和最新的分析.

参考文献

[A1] Brandt, A, Multi - grid adaptive technique (MLAT) for fast numerical solutions to boundary value problems, in H Cabannes and R Teman (eds) Proc 3 - rd Internat Conf Numer Methods in Fluid Mechanics, Springer, 1977, 82 – 89
[A2] Briggs, W L, A multigrid tutorial, SIAM, 1987
[A3] Fedorenko, R P, A relaxation method for solving elliptic difference equations, *USSR Comp Math Math Physics*, 1 (1962), 5, 1092 – 1096 (*Zh Vychisl Mat i Mat Fiz*, 1 (1961), 5, 922 – 927)
[A4] Forsythe, G E, Wasow, W R, Finite difference methods for partial differential equations, Wiley, 1960
[A5] Garabedian, P R, Partial differential equations, Wiley, 1964
[A6] Gladwell, I, Wait, R (eds), A survey of numerical methods for partial differential equations, Clarendon Press, 1979
[A7] Hackbush, W, Multigrid methods and applications, Springer, 1985
[A8] Mitchell, A R, Griffiths, D F, The finite difference method in partial differential equations, Wiley, 1980
[A9] Richtmeyer, R D, Morton, K W, Difference methods for initial value problems, Wiley, 1967
[A10] Smith, G D, Numerical solution of partial differential equations, Oxford Univ Press, 1977
[A11] Bank, R E, Rose, D. J, Marching algorithms for elliptic boundary value problems, *SIAM J Numer Anal*, 14 (1977), 792 – 829
[A12] Doolan, E P, Miller, J J H, Schilders, W H A, Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers, Boole Press, 1980
[A13] Birkhoff, G, Lynch, R E, Numerical solution of elliptic problems, SIAM, 1984

沈祖和 译 郑维行 校

差集 [**difference set, разностное множество**]，完全差集（complete difference set）

以某个自然数 v 为模的 k 个剩余 $d_1, \cdots, d_k$ 所构成的集合 D，使得对于每个 $a \in D$, $a \not\equiv 0 \pmod v$，恰有 λ 个由 D 的元素构成的有序对 (d_i, d_j) 满足

$$a \equiv d_i - d_j \pmod v,$$

数 v, k, λ 称为该差集的参数（parameters of the difference set）例如，模 11 的剩余集 $D = \{1, 3, 4, 5, 9\}$ 是 $\lambda = 2$ 的一个差集.

差集与**区组设计**（block design）有密切联系，即存在一个具有参数组（v, k, λ）的差集等价于存在一个具有相同参数组的对称区组设计，且该设计有 v 阶循环自同构群（该设计的区组是集合 $\{d_{1+i}, \cdots, d_{k+i}\}$, $i = 0, \cdots, v-1$）差集的概念可推广如下 由 v 阶群 G 的 k 个相异元 $d_1, \cdots, d_k$ 所构成的集合 D 称为 G 中的一个（v, k, λ）差集，如果对于任意 $a \in G$, $a \neq 1$，恰有 λ 个有序对（d_i, d_j），$d_i, d_j \in G$，使 $d_i d_j^{-1} = a$（或 λ 个有序对（d_i, d_j）满足 $d_i^{-1} d_j = a$）这时前面定义的差集称为循环差集（cyclic difference set）（因为模 v 的剩余类群是循环群）存在 v 阶群 G 的（v, k, λ）差集等价于存在具有参数组（v, k, λ）的对称区组设计，且该设计以 G 作为一个正则（即没有固定点）自同构群（该设计通过把区组的元素与群的元素等同，并且把区组与集合 $\{d_1 g, \cdots, d_k g\}$ 等同而得到，其中 g 遍历 G）

具有给定参数组的一个差集的存在和构造的问题是差集理论的基本问题 对于这个问题，差集的乘子概念是有用的 群 G 的一个自同构称为 G 的一个（v, k, λ）差集 D 的乘子（multiplier），如果它也是由 D 所确定的区组设计的一个自同构 对于一个循环差集，一个乘子是一个与 v 互素的数 t，且有性质

$$\{td_1, \cdots, td_k\} = \{d_1 + i, \cdots, d_k + i\},$$

对于某个 i 成立，$0 \leqslant i \leqslant v-1$ 一个循环差集的所有乘子构成一群. 下述断言成立 若 D 是一个循环（v, k, λ）差集，且若 p 是一个素数并整除 $k - \lambda$，使 $(p, v) = 1$ 以及 $p > \lambda$，则 p 是 D 的一个乘子（差集的乘子定理（multiplier theorem for difference sets））在构造差集时，下述结果是有用的 对于一个 v 阶 Abel 群 G 的一个（v, k, λ）差集 D 的任一乘子，必存在由 D 所确定的区组设计的一个区组，它在该乘子下保持固定，当（v, k）= 1 时，存在一个区组，它在任一乘子下保持固定

差集通常由直接法构造出来，这时要利用有限域和**分圆域**（cyclotomic field）的特性以及有限几何 现已知道几个差集的无限系列，例如下面的 S 型和 Q 型差集

S 型（Singer 差集（Singer difference sets））这是 q 阶域上的一个 n 维射影几何的超平面 参数是

$$v = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}, \; k = \frac{q^n - 1}{q-1}, \; \lambda = \frac{q^{n-1}-1}{q-1}$$

Q 型 域 $GF(p^r)$，$p^r \equiv 3 \pmod 4$（p 是素数）的二次剩余 参数是

$$v = p^r = 4t - 1, \; k = 2t - 1, \; \lambda = t - 1$$

关于差集的其他无限系列，见 [1] – [3] 此外，也常研究广义差集（generalized difference sets），亦称差族（difference families）它们是由模 v 的剩余所构成的集合 $D_1, \cdots, D_r$，使得对于任意 $a \not\equiv 0 \pmod v$，恰有 λ 个有序对（d_i, d_j），$d_i, d_j \in D_k$，使得

$$a \equiv d_i - d_j \pmod v$$

对某个 k 成立，$1 \leqslant k \leqslant r$.

此外，还有差集的其他推广

参考文献

[1] Холл, М, Комбинаторика, пер с англ, М, 1970

[2] Baumert, L D, Cyclic difference sets, Springer, 1971

[3] Hall, M, Difference sets, in Combinatorics 3 Combinatorial group theory Proc NATO Breukelen, Math Centre Tracts, Vol 57, C W I, 1974, 1–26 B E Тараканов 撰 锺集 译 李乔 校

解的可微性（微分方程的）[**differentiability of solutions (of differential equations), дифференцируемость решений дифференциальных уравнений**]

微分方程解的一个性质，即，解对于自变量 t 及方程中出现的参数 μ 具有确定阶数的连续导数 在微分方程理论中，问题的提法是 为使解关于 t 和 μ 有给定阶数的连续导数，方程的右端必须具备什么性质？在常微分方程中，这个问题已有了最透彻的研究（[1]，[4]）

考虑形如

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu) \tag{1}$$

的方程（x 可以是向量），其中 μ 是参数（通常也是向量），设 $x(t, \mu)$ 是（1）的由初始条件

$$x|_{t=t_0} = x_0 \tag{2}$$

确定的一个解 先考虑解关于 t 的可微性 如果 f 关于 t 和 x 连续，则在某区域上可以应用问题（1）–（2）的连续解的存在性定理，而且根据在（1）中用 $x(t, \mu)$ 代替之后得到的恒等式，即得连续导数 x_t 也存在. f 关于 t 和 x 的 n 阶连续导数的存在性蕴含着解关于 t 具有 $n+1$ 阶连续导数，对（1）中用 $x(t, \mu)$ 代替后的恒等式逐

步求微商可以得到 $x_t^{(n)}$（用 $x(t,\mu)$ 表示）.

在有些问题中，例如，在构造解对参数 μ 的渐近线时，必须研究 $x(t,\mu)$ 关于 μ 的导数　为了明确起见，考虑关于 μ 在 $\mu=0$ 处的导数的存在性　如果 $f(t,x,\mu)$ 在某区域内连续且关于 x 和 μ 有连续的偏导数，则 $\eta_1=x_\mu$ 存在且由所谓的变分方程（variational equation 或 equation in variations, 它关于 η_1 是线性的）确定，而变分方程是由（1）的两边关于 μ 求偏导数再设 $\mu=0$ 而得到

$$\frac{d\eta_1}{dt}=f_x(t,x(t,0),0)\eta_1+f_\mu(t,x(t,0),0), \quad (3)$$

另外，如果 x_0 不依赖 μ，则加上初始条件

$$\eta_1|_{t=t_0}=0, \quad (4)$$

如果 $x_0=x_0(\mu)$，则加上 $\eta_1|_{t=t_0}=x_0(0)$

$x(t,\mu)$ 关于 μ 的 k 阶导数 η_k（在 f 有直到 k 阶的连续偏导数的条件下）由第 k 阶的变分方程定义，它与(3)的不同之处仅在于它的非齐次性，并且依赖于 $t,x(t,0),\eta_1\ ,\eta_{k-1}$　在 $x(t,\mu)$ 关于 μ 有 $k+1$ 阶连续导数的情况下，可用 Taylor 公式作为 $x(t,\mu)$ 关于 μ 的渐近公式

$$x(t,\mu)=x(t,0)+\mu\eta_1(t)+\quad+\mu^k\eta_k(t)+O(\mu^{k+1}) \quad (5)$$

这很重要，因为这样一来 $x(t,0)$ 和 η_i 就能从比（1）更简单的方程求得.

如果方程右端关于自变量是解析的，那么解是参数 μ 的解析函数（例如，见[2]）

如果方程右端关于 μ 不解析，则解关于 μ 的可微性问题在某些情况下仍是有意义的．一种情况是，μ 作为系数出现在导数的前面

$$\mu\frac{dy}{dt}=F(y,x,t),\ y|_{t=t_0}=y_0,$$
$$\frac{dx}{dt}=f(y,x,t),\quad x|_{t=t_0}=x_0 \quad (6)$$

如果将 (6) 改写成 (1) 的形式，即解出导数，那么当 $\mu\to 0$ 时在右端就出现极点型奇异性　在右端有 $k+1$ 阶连续导数及某些附加的特殊条件（所谓稳定性条件 (stability conditions)）的情况下，展开式（5）成立，其中的 η_i 是（6）的解关于 μ 的导数当 $\mu\to 0$ 时的极限值，它是由根据下列规则构成的变分方程确定的(6) 对 μ 微分再设 μ 等于零　但是不同于正常情形，变分方程的阶数将低于（6），并且 η_i 的初值不再是零——但将等于根据某一确定的规则得到的（通常是非零的）常数（[3]）.

参考文献

[1] Петровский, И Г, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд, М, 1970

[2] Тихонов, А Н, 《Матем сб》, **22** (1948), 2, 193－204

[3] Васильева, А Б, Бутузов, В Ф　Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, М, 1973

[4] Tikhonov, A N, Vasil'eva, A B and Sveshnikov, A G, Differential equations, Springer, 1985(译自俄文)

А.Б Васильева　撰

【补注】

参考文献

[A1] Coddington, E A and Levinson, N, Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955

[A2] Smith, D R, Singular perturbation theory, Cambridge Univ Press, 1985

周芝英 译　叶彦谦 校

可微函数 [differentiable function, дифференцируемая функция]

具有**微分** (differential) 的函数　　张鸿林 译

微分流形 [differentiable manifold, дифференцируемое многообразие]

具有微分结构的局部 Euclid 空间　设 X 是 Hausdoff 拓扑空间，如果对每个点 $x\in X$，可以找到 x 的一个邻域 U 同胚于 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集，则 X 称为局部 Euclid 空间（locally Euclidena space）或是维数为 n 的拓扑流形（topological manifold）. 对 (U,φ) 称为 X 在 x 处的局部坐标卡（local chart），其中 φ 为其同胚　因而，对每个点有 n 个实数 $(x^1,\ ,x^n)$ 与之对应，称为 x 在坐标卡 (U,φ) 中的坐标（coordinates）

一族坐标卡 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}(\alpha\in A)$ 称为 X 的 n 维 C^k 图册（C^k-atlas）$(0\leqslant k\leqslant\infty, a)$，如果 a) 所有 U_α 的并覆盖 X，$X=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$，b) 对任何使 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$ 的 $\alpha,\beta\in A$，映射

$$\varphi_\beta^\alpha=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}\quad\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

属于**可微类**（class of differentiability）C^k，φ_β^α 是具有非零 Jacobi 行列式的微分映射且称为 x 从坐标卡 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 到坐标卡 (U_β,φ_β) 中的坐标变换.

两个 C^k 图册称为等价的（eqvivalent），如果它们的并还是 C^k 图册　因此 C^k 图册的集合被划分成等价类，称为 C^k 结构（C^k-structures），如果 $1\leqslant k\leqslant\infty$，则称为可微结构（differentiable structures）（或光滑结构（smooth structures））. 如果 $k=a$，则称为解析结构（analytic structures）　具有 C^k 结构的拓扑流形 X 称为 C^k 流形 (C^k-manifold) 或 C^k 类的微分流形 (differentiable manifold of class C^k)

对于任意一个集合 X，通过用 $\mathbf{R}^n$ 中的开集上的双射来代替同胚 φ_α，可以引进微分结构的概念，这里，C^k 流形的拓扑可以描述为从相应的结构的任意图册构造

的并集的拓扑．在这样的条件下，n 维流形显然有 n 维的 C^0 结构

解析几何和代数几何的问题使得有必要在微分结构的定义中不仅要考虑空间 $\mathbf{R}^n$，而且也要考虑更一般的空间，诸如 $\mathbf{C}^n$ 或者甚至 K^n，其中 K 是完全的非离散赋范域．因此，如果 $K=\mathbf{C}$，$k\geqslant 1$，则相应的 C^k 结构一定是 C^a 结构，并且当相应的微分流形称为复流形（complex manifold）时，就称为复解析的（complex-analytic）或简称为复的（complex） 这样的流形也产生一个自的实 C^a 结构．

任何一个 C^a 流形包含着一个 C^∞ 结构，且对 $0\leqslant k\leqslant\infty$，如果 $0\leqslant r\leqslant k$，则在 C^k 流形上有一个 C^r 结构 反之，对任何仿紧的 C^r 流形（$r\geqslant 1$）可以赋予一个与其已给的结构相容的 C^a 结构，并且这个结构在同构意义上是唯一的（见下文） 然而可能出现这种情形 C^0 流形不能赋予一个 C^1 结构（即存在非光滑的流形，见**非可光滑流形**（non-smoothable manifold）），而且即使能够赋予这样的结构，其结构也不一定是唯一的 例如，在 n 维球面上 C^1 不同构的 C^∞ 结构的数目 $\theta(n)$ 是

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\theta(n)$	1	1	1	?	1	1	28	2	8	6	992	1

设 f $X\to Y$ 是 C^r 流形 X，Y 的连续映射，如果对满 $f(U_\alpha)\subset V_\beta$ 的 X 上的任何坐标卡（U_α,φ_α）和 Y 上的坐标卡（V_β,ψ_β）的一个对，映射

$$\varphi_\alpha\circ f\circ\varphi_\beta^{-1}\quad \varphi_\alpha(U_\alpha)\to\psi_\beta(V_\beta)$$

属于 C^k 类的，则称 f 为微分流形的 C^k 态射（C^k-morphism）（或 C^k 映射（C^k-mapping），$k\leqslant r$，或称为 C^k 类的映射（mapping of class C^k））．一个双射 f 以及它的逆 f^{-1} 都是 C^k 映射的，f 就称为 C^k 同构（C^k-isomorphism）（或 C^k 类的微分同胚（diffeomorphism of class C^k）） 在这样的情况下，X 及 Y 和它们所决定的 C^r 结构称为 C^k 微分同胚的．

n 维 C^k 流形 X 的子空间 Y 称为 X 中的 m 维 C^k 子流形（C^k-submanifold），是指结任何点 $y\in Y$，存在它的一个邻域 $V\subset Y$ 和 X 的 C^k 结构的坐标卡（U，φ），使得 $V\subset U$，以及 φ 诱导一个从 V 到 $\varphi(U\cap Y)$ 与闭子空间 $\mathbf{R}^m\subset\mathbf{R}$ 恰交上的同胚，换言之，存在一个具有坐标 x^1， ，x^n 的坐标卡，使得 $U\cap Y$ 由关系 $x^{m+1}=$ $x^n=0$ 所确定

映射 f $X\to Y$ 称为 C^k 嵌入（C^k-imbedding），如果 $f(X)$ 是 Y 中的 C^k 子流形，并且 $X\to f(X)$ 是 C^k 微分同胚 任何 n 维 C^k 流形允许嵌入到 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 甚至 $\mathbf{R}^{2n}$ 中．此外，这种嵌入的集合在关于紧开拓扑的映射空间 $C^k(X,\mathbf{R}^{2n+1})$ 中是处处稠密的 因此，把微分流形视作 Euclid 空间的子流形是解释微分流形理论的方法之一，例如，上面关于 C^a 结构的定理可以用这种方式证明

微分流形的拓扑（也称为**微分拓扑**（differential topology））中有两个基本的问题 第一问题是微分流形的分类 有三个主要的微分流形类 —— 闭（或紧）流形，带边的紧流形和开流形，使微分流形可区别的重要不变量是**同伦型**（homotopy type） 和**切丛**（tangent bundle），特别是示性类（见**示性类**（characteristic class）） 利用这些便给出了已给同伦型的单连通流形的光滑结构的分类 另一个不变量 —— 微分流形的下配边（bordism）类 —— 用于解决推广的 **Poincaré 猜想**（Poincaré conjecture），群在流形上的作用下的动点的研究，等等 这包括了在带边和具有光滑结构的流形上微分结构的引入 最后，在本文中，代数拓扑的方法也证明是有用的，例如，允许建立任何 C^1 流形可以三角剖分

第二个问题是微分流形的映射的分类 考虑的第一类是浸入，它是嵌入的推广，它们的分类简化为同伦问题，与嵌入不同的是，至今（1978）还未将其完全分类（见**嵌入的拓扑**（topology of imbeddings）），再考虑的是一个微分流形到另一个中的浸没或纤维化．特别地，沿一个子流形的横截映射的概念在**稳定性**（stability）问题和映射的典型奇异性的研究中起着重要的作用 横截映射的存在性由诸如 **Sard 定理**（Sard theorem）来保证．所有这些和微分动力学中的问题，处理**微分同胚**（diffeomorphism）的各种群结构，特别，积分的轨道和在微分流形上的向量场的奇点（动力系统）以及各种等价关系（合痕、拓扑的与 C^k 共轭性，等等），使得研究有限维空间 $\mathbf{R}^n$ 和任意的 Banach（或 Hilbert）空间以及决定相应的微分结构成为必要的 这意味着寻找附加条件，从应用的观点来看是合情合理的．例如，微分流形是可分的，当且仅当坐标变换有闭图．一般情况下，具备如此结构的无穷维流形（熟知的分别如 Banach 流形（Banach manifold）或 Hilbert 流形（Hilbert manifold），有限维流形的映射的流形是它们的典型例子）是有用的研究成果，并且是在闭路空间的分析中（为 Morse 理论的建义的合适的区域，见**闭路空间**（loop space））映射逼近问题的几何解释（就如上面的嵌入定理），等等．

微分流形为发展微分几何形成了自然的基础，增补的无穷小结构（定向、度量、联络，等等）是在微分流形上引进的．在此之后，研究就以保持增补结构的微分同胚群为着眼点的不变量为目标．反之，特殊结构的使用允许人们研究微分流形本身的结构．最简单的例子是应用具有线性联络的微分流形的曲率来表达示性类

参考文献

[1] Понтрягин, Л С Гладкие многообразия и их применения в теории гомотоний, 2 изд , М , 1976

[2] Bourbakı, N , Elements of mathematıcs Dıfferentıable and analytıc manıfolds, Addıson - Wesley, 1966 (译自法文)

[3] Rham, G de, Dıfferentıable manıfolds, Sprınger, 1984 (译自法文)

[4] Lang, S., Introductıon to dıfferentıable manıfolds, Interscıence, 1967

[5] Рохлин, В А Фукс Д Б Начальный кузс топологии Геометрические главы, М , 1977(英译本 Rokhlın, V A and Fuks, D B , Begınner's course ın topolıgy Geometrıc chapters, Sprınger, 1984)

[6] Whıtney, H , Gtometrıc ıntegratıon theory, Prınceton Unıv Press, 1957

[7] Постников, М М , Введение в теорию Морса, М , 1971

[8] Narasımhan, R., Analysıs on real and complex manıfolds, Sprınger, 1971

[9] Wells, jr , R O , Dıfferentıal analysıs on comples manıfolds, Sprınger, 1980

[10] Golubıtskiı̆, M and Guıllemın, V , Stable mappıngs and theır sıngularıtıes, Sprınger, 1973

[11] Brocker, P and Lander, L , Dıfferentıable germs and catastrophes, Cambrıdge Unıv Press, 1975

[12] Nıteckı, Z , Dıfferentıable dynamıcs An ıntroductıon to the orbıt structure of dıffeomorphısms, M I T , 1971

[13] Sternberg, S , Lectures on dıfferentıal geometry, Prentıce-Hall, 1964

[14] Godbıllon, C , Géometrıe dıfférentıelle et mécanıque analytıque, Hermann, 1969

[15] Sulanke, R and Wıntgen, P , Dıfferentıal geometrıe und Faserbundel Bırkhauser, 1972

也见**微分拓扑** (dıfferentıal topology) 的参考文献 .

М И Войцехоиский 撰

【补注】 经常把仿紧的性质当作拓扑或微分流形的定义的一部分 . 局部 Euclıd 的空间不必是仿紧的 .

参考文献

[A1] Mılnor, J , Morse theory, Prınceton Unıv Press, 1963 (中译本. J W 米尔诺, 莫尔斯理论, 科学出版社, 1988)

[A2] Mılnor, J Topology from the dıfferentıable vıewpoınt, Unıv Press of Vırgınıa, 1965 (中译本 J W 米尔诺,从微分观点看拓扑,上海科学技术出版社, 1983)

[A3] Mılnor, J and Stasheff, J D Characterıstıc classes, Prınceton Unıv Press, 1974

[A4] Munkres, M R , Elementary dıfferentıal topology, Prınceton Unıv Press, 1963 (中译本 J R 曼克勒斯,初等微分拓扑学,上海科学技术出版社, 1966)

[A5] Hırsch, M , Dıfferentıal topology, Sprınger, 1976

[A6] Wall, C T C , Surgery on compact manıfolds, Acad Press, 1970

[A7] Freed, D. S and Uhlenbeck, K K , Instantons and four - manıfolds, Sprınger, 1984

薛春华 译 徐森林 校

可微向量 [**differentiable vector**;**дифференцируемый вектор**], Lıe 群 G 的表示 T 的表示空间 V 中的 V 中向量 ξ,使映射

$$g \to T(g)\xi$$

为 G 到 V 上 (类 C^∞ 的) 无限可微向量函数 . 向量函数 f $G \to V$ 是可微的一个必要条件 (并且在 V 是局部凸的拟完全空间情形下也是一个充分条件) 是型 $F \circ f$ 的所有标量函数是可微的 ([1]),其中 F 是 V 中一个线性连续函数 . Гельфанд-Gårding 定理 (Gel'fand - Gårdıng theorem) 可以表述如下. 如果 T 是 **Lie 群** (Lıe group) G 在一个 **Banach 空间** (Banach space) V 中一个连续表示, 那么可微向量集合 V^∞ 是在 V 中稠密的 . 此定理对一个参数群已在 [2] 中得到证明, 对一般情形已在 [3] 中得到证明 . 此结果可以推广到局部凸空间上的一个更广的表示类中, 见 [4] 及 [5]

Lıe 群表示空间中可微向量的存在使得构造相对应的 Lıe 代数的表示成为可能 . 于是群的表示理论与 Lıe 代数的表示理论可以联系起来 ([6])

参考文献

[1] Grothendıeck, A , Espaces vectorıels topologıques, Unıv Sao Paulo, 1954

[2] Гельфанд, И М , 《Докл АН СССР》, **25** (1939), 713－716

[3] Gårdıng, L , Note on contınuous representatıons of Lıe groups, *Proc Nat Acad Scı USA*, **33** (1947), 331－332

[4] Moore, R T , Measurable, contınuous and smooth vectors for semıgroups and group representatıons, *Amer Math Soc* , 1968

[5] Желобенко, Д П , 《Вестн МГУ Сер матем 》, **1** (1965), 3－10

[6] Кириллов, А А , Элементы теории представлений, 2 изд , М , 1978 (英译本 Kırıllov, A A , Elements of the theory of representatıons, Sprınger, 1976)

A. A. Кириллов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Warner, G , Harmonıc analysıs on semı - sımple Lıe groups, 1, Sprınger, 1976 (译自俄文)

许永华、朱胜林 译

微分 [**differential**, **дифференциал**]

函数增量的线性主部 .

1) 实变量 x 的实值函数 f 称为在点 x 上是可微的(differentiable)，如果它在这一点的某个邻域内有定义，并且存在数 A，使得增量

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$$

可以写为下列形式（假设点 $x+\Delta x$ 处于这个邻域内）

$$\Delta y = A\Delta x+\omega,$$

其中当 $\Delta x \to 0$ 时 $\omega/\Delta x \to 0$ 这里 $A\Delta x$ 通常记作 dy，并且称为函数 f 在点 x 上的微分(differential)。对于给定的 x，微分 dy 与 Δx 成正比，也就是说，它是 Δx 的线性函数(linear function) 根据定义，当 $\Delta x \to 0$ 时，附加项 ω 与 Δx 相比是高阶无穷小（如果 $A \neq 0$，则与 dy 相比也是高阶无穷小） 因此，微分称为函数增量的主部(main part)

对于在点 x 上可微的函数，如果 $\Delta x \to 0$，则 $\Delta y \to 0$，也就是说，在一点上可微的函数在这一点上是连续的 函数 f 在点 x 上是可微的，当且仅当它在这一点上具有有限的导数

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A,$$

并且

$$dy = f'(x)\Delta x$$

存在连续但不可微的函数

可以用记号 $df(x)$ 来代替 dy，这时上面的等式取下列形式

$$df(x) = f'(x)\Delta x$$

自变量的增量 Δx 通常记为 dx，称为自变量的微分(differential of an independent variable) 相应地，函数的微分可以写成

$$dy = f'(x)dx$$

因此，$f'(x)=dy/dx$，即导数 $f'(x)$ 等于微分 dy 和 dx 之比 如果 $A \neq 0$，则当 $\Delta x \to 0$ 时，$\Delta y/dy \to 1$，也就是说，如果 $A \neq 0$，则当 $\Delta x \to 0$ 时 Δy 和 dy 是同阶无穷小，这一事实，以及微分的简单结构（即与 Δx 之间的线性关系），常常用于近似计算 对于微小的 Δx，假设 $\Delta y \approx dy$ 例如，如果当 Δx 为小量时想要由已知的 $f(x)$ 计算 $f(x+\Delta x)$，则可取

$$f(x+\Delta x) \approx f(x)+dy$$

显然，仅当可以估计相应误差的大小时，才能这样处理

微分的几何解释．函数 f 的图形在点 (x_0, y_0) 处的切线的方程具有形式 $y-y_0 = f'(x_0)(x-x_0)$ 如果设 $x=x_0+\Delta x$，则 $y-y_0=f'(x_0)\Delta x$ 其右端表示函数 f 在点 x_0 上与所考虑的 Δx 的值对应的微分的值 因此，微分等于曲线 $y = f(x)$ 的切线纵坐标的相应增量（见图 1 中的线段 NT） 因此，$\omega=\Delta y-dy$，即 $|\omega|$ 的值等于线段 TS 的长度

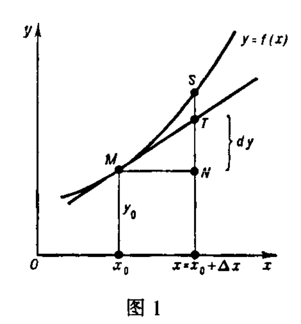


图 1

2) 可微性和微分的定义不难推广到 n 个实变量的实值函数的情况．例如，在 $n=2$ 的情况下，一个实值函数 $f(x, y)$ 称为在点 (x, y) 上关于两个变量 x 和 y 是可微的，如果它在这一点的某个邻域内有定义，并且它的全增量(total increment)

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$$

可以写成

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha,$$

其中 A 和 B 是两个实数，当 $\rho \to 0$ 时 $\alpha/\rho \to 0$，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，假设点 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 属于上述邻域（图 2）.

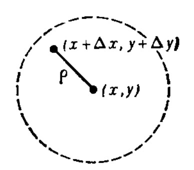


图 2

引入记号

$$dz=df(x, y)=A\Delta x+B\Delta y,$$

dz 称为函数 f 在点 (x, y) 上的全微分(total differential)或简称微分(differential)（有时加上"对两个变量 x 和 y 的"一语）. 对于给定点 (x, y)，微分 dz 是 Δx 和 Δy 的线性函数，差 $\alpha=\Delta z-dz$ 与 ρ 相比是高阶无穷小．在这个意义下，dz 是增量 Δz 的线性主部(main linear part).

如果 f 在点 (x, y) 上是可微的，则它在这一点上是连续的，并且在这一点上具有有限的偏导数（见导数(derivative)）

$$f_x'(x, y)=A, \quad f_y'(x, y)=B$$

于是

$$dz=df(x, y)=f_x'(x, y)\Delta x+f_y'(x, y)\Delta y$$

同单变量的情况一样，增量 Δx 和 Δy 通常记为 dx 和 dy．相应地，函数的微分可以写成

$$dz=df(x,y)=f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy$$

由有限偏导数的存在，一般不能推出函数的可微性（即使假设函数是连续的）．

如果函数 f 在点 (x,y) 上具有对 x 的偏导数，则积 $f_x'(x,y)dx$ 称为对 x 的偏微分（partial differential），同样地，$f_y'(x,y)dy$ 称为对 y 的偏微分 如果函数是可微的，则它的全微分等于偏微分之和 在几何上，全微分是曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 上的切平面在 z 方向上的增量，其中 $z_0=f(x_0,y_0)$（图 3）

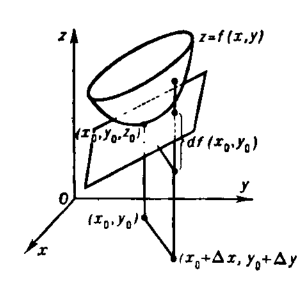


图 3

函数可微性的充分准则（sufficient criterion）如下所述 如果在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内，函数 f 具有在点 (x_0,y_0) 上连续的偏导数 f_x'，并且在这一点上具有偏导数 f_y，则 f 在这一点上是可微的

如果函数 f 在开域 D 的一切点上都是可微的，则在这个区域的任何点上都有

$$dz=A(x,y)dx+B(x,y)dy,$$

其中 $A(x,y)=f_x'(x,y)$，$B(x,y)=f_y'(x,y)$ 这时，如果在区域 D 内存在连续偏导数 A_y' 和 B_x'，则在 D 内处处有

$$A_y=B_x\ .$$

特别是，这表明并不是每个（在区域 D 内）具有连续的 $A(x,y)$ 和 $B(x,y)$ 的表达式

$$A(x,y)dx+B(x,y)dy$$

都是某个二元函数的全微分．这与一元函数不同，对于一元函数来说，任何在某个区间内具有连续函数 $A(x)$ 的表达式 $A(x)dx$ 都是某个函数的微分．

表达式 $Adx+Bdy$ 在一个单连通开域 D 内是某个函数 $z=f(x,y)$ 的全微分，如果 A 和 B 在这个区域内是连续的，满足条件 $A_y'=B_x'$，并且 a) A_y' 和 B_x' 是连续的，或者 b) A 和 B 在 D 内对两个变量 x 和 y 处处可微（[7]，[8]）

关于一个或多个实变量的实值函数的微分，以及关于高阶微分，亦见**微分学**（differential calculus）

3) 设函数 f 在某个实数集合 E 上有定义，x 是这个集合的极限点，设 $x\in E$，$x+\Delta x\in E$，$\Delta y=A\Delta x+\alpha$，其中如果 $\Delta x\to 0$ 则 $\alpha/\Delta x\to 0$，这时，函数 f 称为在点 x 上关于集合 E 是可微的，而 $dy=Adx$ 称为它在 x 上关于集合 E 的微分（differential with respect to a set） 这是单实变量的实值函数的微分的推广 这个推广的一些特殊类型包括在函数定义区间的端点上的微分，以及近似微分（见**近似可微性**（approximate differentiability））．

可以类似地引入多实变量的实值函数关于集合的微分．

4) 上面给出的一切可微性和微分的定义，都能推广（几乎照搬）到单或多实变量的复值函数的情况，推广到单或多实变量的实值和复值向量函数的情况，推广到单或多复变量的复函数和向量函数的情况 在泛函分析中，这些定义还可推广到抽象空间中的点函数的情况．还可讨论集函数关于某个测度的可微性和微分

参考文献

[1] Толстов, Г П, Элементы математического анализа, 2 изд, т 1–2, М, 1974

[2] Фихтенгольц, Г М, Курс дифференциального и интегрального исчисления, 7 изд, т 1, М, 1969（中译本 菲赫金哥尔茨，微积分学教程，人民教育出版社，1980）

[3] Кудрявцев, Л Д, Математический анализ, 2 изд, т 1, М, 1973

[4] Никольский, С М, Курс математического анализа, 2 изд, т 1 М, 1975（中译本 С М 尼科尔斯基，数学分析教程，第一卷，人民教育出版社，1980，1981）

[5] Rudin, W, Principles of mathematical analysis, Mac-Graw-Hill, 1953（中译本 W 卢丁，数学分析基础，人民教育出版社，1979）

[6] Колмогоров, А Н, Фомин, С В, Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд М, 1976（中译本 А Н 柯尔莫戈罗夫、С В 福明，函数论与泛函分析初步，高等教育出版社，1957）

[7] Толстов, Г П, О криволинейном и повторном интеграле, М-Л, 1950（Тр Матем ин-та АН СССР, т 35）

[8] Толстов, Г П, 《Успехи матем наук》, 1948, т 3, в 5, 167–170

Г П Толстов 撰

【补注】 亦见**微分法**（differentiation），**映射的微分法**（differentiation of a mapping）

关于集函数求微分，见**集函数**（set function），**Radon-Nikodým 定理**（Radon-Nikodým theorem）（[A7]）

关于向抽象空间之间的函数的推广，亦见 **Fréchet 导数**（Fréchet derivative），**Gâteaux 导数**（Gâteaux deri-

vative)

关于函数f $\mathbf{C}\to\mathbf{C}$的导数，见**解析函数**(analytic function)

参考文献

[A1] Apostol, T M, Calculus, 1-2, Blaisdell, 1964(中译本 T M 阿波斯托，微积分学，高等教育出版社，1987)

[A2] Apostol, T M, Mathematical analysis, Addison-Wesley, 1974

[A3] Fleming, W, Functions of several variables, Springer, 1977

[A4] Stromberg, K, Introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981

[A5] Courant, R, Vorlesungen uber Differentialund Integralrechnung, 1-2, Springer, 1971-1972(中译本 R 库兰特，微积分学，上海中华书局，1949, 1952)

[A6] Натансон, И П, Теория функций вещественной переменной, 2 изд, М, 1957(中译本 И П 那汤松，实变函数论，高等教育出版社，1956)

[A7] Shilov, G E and Gurevich, B L, Integral, measure and derivative a unified approach, Dover, reprint, 1977(译自俄文)

[A8] Denjoy, A, Introduction à la theorie des functions des variables réelles, Gauthier-Villars, 1937

张鸿林 译 刘德辅 校

微分代数[differential algebra, дифференциальная алгебра]

域(环)K上的构成**微分环**(differential ring)的代数A，并且任一导子∂与用K的元素作乘法可交换，即$\partial(\alpha x)=\alpha\partial(x)$，其中$\alpha\in K$, $x\in A$

О А Иванова 撰

【补注】 亦见**环中的导子**(derivation in a ring)．环K上的**微分分次代数**(differential graded algebra)(或DGA)是具有次数为-1的分次K模同态∂ $A\to A$的分次代数，其中∂满足$\partial^2=0$，且∂是分次意义下的导子，即$\partial(uv)=(\partial u)v+(-1)^{\deg(u)}u(\partial v)$ 这种代数在(上)同调论中是很重要的

参考文献

[A1] MacLane, S, Homology, Springer, 1963

赵春来 译 冯绪宁 校

微分代数学[differential algebra, дифференциальная алгебра]

代数学的一个分支，它所处理的对象不仅具有加法和乘法运算，而且还有微分运算，例如微分环，微分模，微分域，以及微分代数簇

微分代数的一个主要研究对象是微分多项式代数$\mathscr{F}\{Y_1, \quad, Y_n\}$，它类似于交换代数中的多项式环(见**微分域的扩张**(extension of a differential field)) 每个微分方程组

$$F_1=0, \quad ,F_k=0$$

对应于这个组在微分多项式代数中生成的完满微分理想$\{F_1, \quad, F_k\}$ Ritt-Raudenbush基定理(Ritt-Raudenbush basis theorem)说的是 任一完满微分理想都可用这种方法得到(一个微分理想I称为完满的(perfect)，如果对于某个$n>0$有$a^n\in I$，则$a\in I$)，即在任一完满微分理想中总可以选出有限多个微分多项式，使得它们生成的完满微分理想与原来的理想相同 与多项式环中的Hilbert基定理不同，Ritt-Raudenbush定理中理想的完满性有基本的重要性，即微分理想(甚至完满微分理想)并不一定是有限生成的微分模．

一个完满微分理想对应于一个微分代数簇——系数域的某个泛扩张上的仿射空间中满足下述条件的点的集合 在这些点处理想中的任一多项式取值为零 与Hilbert零点定理类似的结果是成立的．设$F_1, \quad, F_p$是一组有限多个微分多项式，又令G是在此多项式组的一切零点上取值为零的多项式，则G的某个方幂等于F_i以及它们的各阶导数的线性组合，其组合系数取自该微分多项式代数．特别地，如果多项式组$F_1, \quad, F_p$无零点，则F_i和它们的各阶导数的某个线性组合等于1

一个完满微分理想可被表示为有限多个素微分理想的交．与这个表示相对应的是一个簇分解为有限多个不可约分支 如同在代数几何中一样，对于素微分理想可以引入泛零点及其维数的概念．对于微分仿射空间(即系数域的泛扩张U上的仿射空间)中的不可约闭集V，定义其微分维数多项式为

$$\omega_V=\sum_{0\leqslant i\leqslant m}a_i\binom{x+i}{i},$$

其中m是域F中微分法的个数，系数a_m称为V的**微分维数**(differential dimension)，此多项式的次数$\tau=\deg\omega_i$称为**集合V的微分型**(differential type of the set)，系数a_τ称为它的**型微分维数** 多项式ω_i是双有理不变量，但不是微分双有理不变量 $a_m(V)$, $\tau(V)$以及$a_{\tau(1)}(V)$也都是如此 确定微分双有理不变量是一个非常重要的问题 另一个问题是估计所得到的不变量的可能取的值．设Σ是$\mathscr{F}\{Y_1, \quad, Y_n\}$的一个子集 如果$\Sigma$中的元素的阶有界，则$\{\Sigma\}$的分支的微分维数多项式被某些限制所支配 特别地，如果Σ的任一元素对于各个Y_j的阶不超过e_j，则由条件$a_m(\mathfrak{p})=0$可知，对于簇$\{\Sigma\}$的任一分支都有$a_{m-1}(\mathfrak{p})\leqslant\Sigma e_j$ 在一般情形下，假设

$$a_{\tau(\mathfrak{p})}(\mathfrak{p})\leqslant\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\binom{e_j+m-\tau(\mathfrak{p})-1}{m-\tau(\mathfrak{p})}$$

正如 M. Kondrat'eva 指出的，这个假设并不总是成立的 如果子集 $\Sigma \subset \mathscr{F}\{Y_1, \quad, Y_n\}$ 由 n 个微分多项式 $F_1, \quad, F_n$ 组成，则还有两个附加的假设 令

$$e_{ij} = \operatorname{ord}_{Y_j} F_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ i \leqslant j \leqslant n,$$

以及

$$h = \max_{\pi} (e_{1\pi(1)} + \quad + e_{n\pi(n)}),$$

其中 π 取遍对称群 S_n 的元素 第一个假设是 对于簇 $\{F_1, \quad, F_n\}$ 的任一分支 $\mathfrak{p}$，由 $a_m(\mathfrak{p})=0$ 可以得到 $a_{m-1}(\mathfrak{p}) \leqslant h$ 这个假设已在若干特殊情形下被证明 第二个假设是 对于簇 $\{F_1, \quad, F_n\}$ 的任一分支 $\mathfrak{p}$，由 $a_m(\mathfrak{p})=a_{m-1}(\mathfrak{p})=0$ 可以得到 $\omega_{\mathfrak{p}}=0$ 这个假设已被证明

微分代数中的一个困难的问题是把微分代数簇分解为不可约分支 即使在 Σ 仅含有一个不可约微分多项式 σ 时，相应的簇也常常由若干个分支组成，其中之一包含方程 $\sigma=0$ 的所有非奇异解（也可能含有某些奇异解），而其余的分支则由满足下述条件的解组成 微分多项式 σ 的任一离式在这些解处取值均为零．超曲面（由一个方程构成的组 Σ）的情形具有基本的重要性，这因为常微分域上的任一微分代数簇都微分双有理同构于一个超曲面

由于任一素微分理想都完全被它的特征集所决定，所以微分代数簇 $\{\mathfrak{p}\}$ 的分解问题可以分为两部分 1) 寻找 $\mathscr{F}\{Y_1, \quad, F_n\}$ 中的自约化子集的有限集合 $\mathscr{A}$，其中的每个自约化子集都是包含 Φ 的微分素理想的特征集，并且 $\mathscr{A}$ 含有 $\{\Phi\}$ 的每个分支的一个特征集，2) 对于 $\mathscr{F}\{Y_1, \quad, Y_n\}$ 中的任一给定的自约化集，判定它是不是 $\{\Phi\}$ 的某个分支的特征集．

上述的第二个问题在一般情形下尚未解决 (1987)．但是在 Φ 仅含一个微分多项式这种重要的特殊情形下，借助于 Ritt 的两个定理可以解决此问题 分支定理和低幂定理（见下文）

求簇 $\{\Phi\}$ 的分支的问题又可分为问题 1) 和下述问题 3) 分别给定素微分理想 $\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{q}$ 的特征集 A 和 B，判定 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ 是否成立

问题 3) 尚远未解决．在 A 只含一个不可约微分多项式 A 并且 $\mathfrak{q}$ 是微分理想 $[Y_1, \quad, Y_n]$ 的特殊情形下，此问题即是决定点 $(0, \quad, 0)$ 是否含于微分方程 $A=0$ 的通解之中

对于有限集合 $\Phi \subset \mathscr{F}\{Y_1, \quad, Y_n\}$，问题 1) "原则上说"已经解决 归纳过程（代数微分方程组的消去理论）把此问题转化为一些关于 $\mathscr{F}$ 上的有限多个未知数的多项式的"较容易"的问题 即关于代数微分方程的问题简化成了代数方程的问题

分支定理指出，奇异分支本身也是其他微分多项式的泛分支，确切地说，设 $\mathscr{F}$ 是微分域，又设 F 是 $\mathscr{F}\{Y_1, \quad, Y_n\}$ 中的一个非零微分多项式．如果 $\mathfrak{p}$ 是环 $\mathscr{F}\{Y_1, \quad, Y_n\}$ 的理想 $\{F\}$ 的一个分支，则存在不可约微分多项式 $B \in \mathscr{F}\{Y_1, \cdot, Y_n\}$，使得 $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_{\mathscr{F}}(B)$ 是簇 $\{B\}$ 的泛分支．

低幂定理（low power theorem）提供了判别一个不可约微分多项式 $A \in \mathscr{F}\{Y_1, \quad, Y_n\}$ 的分支是否为 $\{F\}$ 的分支的方法 确切地说，设 $F, A \in \mathscr{F}\{Y_1, \quad, Y_n\}$，设 F 和 A 关于 Y_n 的阶分别为 m 和 l，设 A_j 是 A 的 j 次导数，再设 S 是 A 的离式．存在 $t \geqslant 0$ 和 $r > 0$，使得

$$S^t F = \sum_{j=1}^{r} c_j A^{p_j} A_1^{i_{1j}} \quad A_{m-l}^{i_{m-l,j}}$$

其中 $p_j \geqslant 0$，$i_{k,j} \geqslant 0$，任二集合的 $i_{1,j}, \cdot, i_{m-l,j}$ 都不相同，c_j 关于 Y_n 的阶不超过 l，且 c_j 不被 A 整除 如果已经找到这样一个分解，则低幂定理断言 簇 $\{A\}$ 的一个泛分支是簇 $\{F\}$ 的一个分支，当且仅当在此分解式中有不含 A 的导数的项 $c_k A^{p_k}$，且此项的次数低于其余各项的次数，这里的次数是将此分解式视为 $A, A_1, \quad, A_{m-l}$ 的多项式的意义下而言的（在特征非零的情形下，这个条件既不必要，也不充分）．

微分代数的另一个研究方向是关于特殊化的扩充的问题 设 $(\eta_1, \quad, \eta_n)$ 和 $(\zeta_1, \quad, \zeta_n)$ 是 U^n 中的点，这里的 U 是微分域 $\mathscr{F}$ 的一个泛扩张．如果任一微分多项式在 $(\eta_1, \quad, \eta_n)$ 处等于零能保证它在 $(\zeta_1, \quad, \zeta_n)$ 处也等于零，则称点 $(\zeta_1, \quad, \zeta_n)$ 为点 $(\eta_1, \quad, \eta_n)$ 在 $\mathscr{F}$ 上的**微分特殊化**（differential specialization of the point）（记作 $(\eta_1, \quad, \eta_n) \to_{\mathscr{F}} (\zeta_1, \quad, \zeta_n)$）．如果 $(\eta_1, \quad, \eta_n) \to_{\mathscr{F}} (\zeta_1, \quad, \zeta_n)$，则对于 $1 \leqslant k \leqslant n$，显然有 $(\eta_1, \quad, \eta_k) \to_{\mathscr{F}} (\zeta_1, \quad, \zeta_k)$ 称第一个特殊化是第二个特殊化的一个扩充．

设 $(\eta_1, \quad, \eta_n)$ 和 k 已经给定，又设 $B \in \mathscr{F}\{Y_1, \quad, Y_n\}$ 使得 $B(\eta_1, \quad, \eta_n) \neq 0$ 可以证明，存在满足 $B_0(\eta_1, \quad, \eta_k) \neq 0$ 的非零微分多项式 $B_0 \in \mathscr{F}\{Y_1, \cdot, Y_k\}$，使得任一微分特殊化 $(\eta_1, \quad, \eta_k) \to_{\mathscr{F}} (\zeta_1, \cdot, \zeta_k)$，只要 $B_0(\zeta_1, \quad, \zeta_k) \neq 0$，都可以扩充成为一个微分特殊化 $(\zeta_1, \quad, \zeta_n)$，满足 $B(\zeta_1, \quad, \zeta_n) \neq 0$ 但是，与代数几何中的情况不同，一个微分特殊化 $(\eta_1, \quad, \eta_k) \to_{\mathscr{F}} (\zeta_1, \quad, \zeta_k)$ 并不总能扩充为微分特殊化 $(\eta_1, \quad, \eta_n) \to_{\mathscr{F}} (\zeta_1, \cdot, \zeta_n)$，即便允许 $\zeta_{k+1}, \cdot, \zeta_n$ 可以取为 ∞ 由此产生的一个问题是 给出一个特殊化 $(\eta_1, \quad, \eta_k) \to_{\mathscr{F}} (\zeta_1, \quad, \zeta_k)$ 扩充成一个微分特殊化 $(\eta_1, \quad, \eta_n) \to_{\mathscr{F}} (\zeta_1, \quad, \zeta_n)$ 的可能性的判别法．

对不定型的问题人们遇到上述问题的一个特殊情形．设多项式 $F, G \in \mathscr{F}\{Y_1, \quad, Y_n\}$ 是互素的，$G \neq 0$，又设 F 和 G 在 $(0, \cdot, 0)$ 处等于零．问题在于 给分式 F/G 在点 $(0, \quad, 0)$ 处指定一个值 设 $t_1, \quad, t_n \in U$ 是一

组在$\mathscr{F}$上微分代数无关的元素，且令

$$u = \frac{F(t_1, \dots, t_n)}{G(t_1, \dots, t_n)}$$

如果 $(t_1, \dots, t_n, u) \to_{\mathscr{F}} (0, \dots, 0, \alpha)$，则把 F/G在$(0, \dots, 0)$处的值设为α是很自然的．于是，问题简化为寻求$(t_1, \dots, t_n) \to_{\mathscr{F}} (0, \dots, 0)$到$(t_1, \dots, t_n, u)$的扩充．这等价于决定一个元素$\alpha \in U$，使得$(0, \dots, 0, \alpha)$是微分多项式$Y_{n+1}G - F \in \mathscr{F}\{Y_1, \cdots, Y_{n+1}\}$的泛分支的零点．J. F. Ritt猜想$\alpha$或者是唯一确定的（可能等于$\infty$），或者是完全任意的．他在常微分域中对于$n=1$, ord$(FG)=1$的情形证明了这个猜想．对于环$\mathscr{F}\{Y_1, \dots, Y_n\}$中具体的微分理想的性质已有若干研究．在$\mathscr{F}[Y_1, \cdots, Y_n]$的素微分理想的无穷序列$\Sigma_1, \dots, \Sigma_p, \dots$的情形下，其中$\Sigma_i$是$\Sigma_{i+1}$的真除子，有：所有$\Sigma_i$的交是素微分理想，而且对于任一$i$，上述的交所对应的簇$\mathscr{M}$的维数高于$\Sigma_i$所对应的簇$\mathscr{M}_i$的维数．

在有关微分代数簇的其他结论中，值得提及的是与Lüroth定理类似的结果：如果$\mathscr{G}$是微分域$\mathscr{F}$的一个含于$\mathscr{F}\langle u\rangle$的扩张，则在$\mathscr{G}$中存在一个元素$v$，使得$\mathscr{F}\langle v\rangle = \mathscr{G}$．

然而，微分代数曲线（微分维数为1的簇）的理论仅处于其发展的初始阶段，即便对于代数几何中曲线的亏格这样的不变量，也尚未找到与之类似的微分代数的概念．微分代数簇的相交理论是很有趣的．对于这样的簇，下述定理不再成立：n维仿射空间中维数分别为p和q的两个不可约簇的交的维数等于或高于$p+q-n$．不过，刻画微分代数簇的特征的不仅有维数，还有它对于选定的一组微分超越基的阶．对于特殊选定的基，已经得到对于簇的交的阶的自上而下的若干估计．下述关于同一微分多项式各分支的交的解析定理已被证明：如果F是一个以$Y_1, \dots, Y_n$为未知量的微分多项式，则在F的含于多于一个分支的零点处，导数$\partial F/\partial Y_{ij}$等于零，其中$i=1, \cdots, n$，而$j$任意．微分代数簇的概念可以进行推广（不再假定它是仿射的）．特别地，可以引入微分齐次多项式以及射影微分代数簇的概念．

对于微分域$\mathscr{F}$，没有微分代数闭包，微分代数闭域也不存在．在某种意义下，它们被所谓“约束”扩张所替代．

微分域的Galois理论代表着微分代数的一个方向．已经构造出微分域$\mathscr{F}$的泛微分扩张U，也已考察了由$\mathscr{F}$的有限生成的微分代数扩张$\mathscr{G}$到U内的且在$\mathscr{F}$上是恒同映射的同构的集合．如果$\mathscr{G}$是$\mathscr{F}$的一个强正规扩张，则可在$\mathscr{G}$到U的微分同构集合G上引入域K(U的常数域)上的代数群结构．强正规扩张的一个特殊情形是Picard - Vessiot扩张，即把一个系数在$\mathscr{F}$中的线性齐次微分方程的解添加到$\mathscr{F}$上所得到的扩张．Picard - Vessiot扩张的Galois群是代数矩阵群．中间域和G的子群之间的对应关系由下面的定理给出．

设$\mathscr{G}$是常数域为C的微分域$\mathscr{F}$的一个强正规扩张．a)如果$\mathscr{F}_1$是一个微分域，满足$\mathscr{F} \subset \mathscr{F}_1 \subset \mathscr{G}$，则$\mathscr{G}$是$\mathscr{F}_1$上的强正规扩张，Galois群$G(\mathscr{G}/\mathscr{F}_1)$是$G(\mathscr{G}/\mathscr{F})$的一个$C$子群，并且在$\mathscr{G}$中$G(\mathscr{G}/\mathscr{F}_1)$的不变域与$\mathscr{F}_1$重合．b)如果$G_1$是$G(\mathscr{G}/\mathscr{F})$的$C$子群，以$\mathscr{F}_1$表示$\mathscr{G}$中群$G_1$的不变元素的集合，则$\mathscr{F}_1$是一个微分域，$\mathscr{F} \subset \mathscr{F}_1 \subset \mathscr{G}$且$G(\mathscr{G}/\mathscr{F}_1) = G_1$．

$G(\mathscr{G}/\mathscr{F})$的正规子群$G_1$对应于$\mathscr{F}$的强正规扩张$\mathscr{F}_1$，反之亦然．Galois反问题——即Galois群$G(\mathscr{G}/\mathscr{F})$与给定的群同构的域$\mathscr{F}$的强正规扩张$\mathscr{G}$的存在性问题——对于连通可解群已经解决．此问题被简化为对于$\mathscr{F}$的常数域C上的某个向量空间的维数和某个Abel群的秩的估计．关于无限扩张的Galois理论也有一些结果．有限形式的积分理论被用于处理与Galois理论有关的问题．

微分代数群的理论正在发展过程中，它与其代数的类比对象有本质上的区别．特别地，在仿射微分代数集上处处有定义的微分有理函数的微分环不是微分坐标环，而且，一般而言，作为微分代数不是有限生成的．

关于用微分有理函数逼近微分代数函数，已经得到类似于有理数逼近代数的Liouvill定理的结果，但是，与Thue - Siegel - Roth定理类似的结果尚未被证明(1987)．

具有高微分法的环的理论正在发展．高微分法是研究非零特征的对象的有力工具．如果微分环A的特征为p，则任一元素的p次幂都是常数，而在具有高微分法的环中却不是这样．对于具有高微分法的环，已经得到关于理想的相交理论以及Galois理论的许多结果，它们与上面所列举的结果类似．

参考文献

[1] Kaplanski, I., An introduction to differential algebra, Hermann, 1957.
[2] Ritt, J. F., Differential algebra, Amer. Math. Soc., 1950.
[3] Kolchin, E. R., Differential algebra and algebraic gro-ups, Acad. Press, 1973.
[4] Kolchin, E. R., Some problems in differential algebra, in Proc. Internat. Congress Mathematicians Moscow, Mir, 1968, 269－276.

А. В. Михалев, Е. В. Панкратьев 撰

【补注】 关于微分域的扩张的维数多项式的概念，参见**维数多项式**（dimension polynomial）．微分域的泛扩张，作为代数几何中人们在其上展开研究的所谓基域k的泛（即足够大的代数闭的）扩张的概念的替代物，在**微分域的扩张**（extension of a differential field）中进行了讨论．对于上面正文中出现的微分代数的其他

各种概念描述如下

设$\mathscr{R}=(R,\partial_1,\ ,\partial_m)$是由有幺元的交换环$R$和一组交换的导子$\partial_i\ R\to R(i=1,\ ,m)$组成的微分环．$\mathscr{R}$的一个微分理想(differential ideal)是R的一个理想$\mathscr{I}$，使得对于所有的i都有$\partial_i\mathscr{I}\subset\mathscr{I}$ 以Θ表示由$\partial_i(i=1,\cdot,m)$生成的自由交换半群．Θ的元素称为$\mathscr{R}$的导数算子(derivative operator) 如果$\theta=\prod_i\partial_i^{e_i}$，则$\theta$的阶为$\operatorname{ord}(\theta)=\Sigma e_i$.

现在考虑$\mathscr{R}$上的微分不定元的集合$\{Y_1,\ ,Y_n\}$(即$Y_1,\ ,Y_n$在$\mathscr{R}$上是微分代数无关的，见**微分域的扩张**(extension of a differential field))．$\{Y_1,\ ,Y_n\}$的一个秩(ranking)是所有导数$\theta Y_i\ (\theta\in\Theta)$的集合上满足下述条件的一个全序 对于所有这种导数$u,v$及所有的$\theta\in\Theta$，都有$u\leqslant\theta u$，$u\leqslant v\Rightarrow\theta u\leqslant\theta v$ 设$A\in\mathscr{R}\{Y_1,\ ,Y_n\}$——$\mathscr{R}$上的以$Y_1,\ ,Y_n$为不定元的微分多项式环 在$A$中出现的秩最高的导数$\theta Y_i$称作微分多项式$A$的引式(leader of the differential polynomial)，记为u_A. 令$d=\deg_{u_A}(A)$，则A可以写成下述形式 $A=\sum_{i=0}^{d}A_iu_A^i$，其中A_i是$\mathscr{R}\{Y_1,\ ,Y_m\}$中的元素，且不含有$u_A$(或任一高秩导数) 微分多项式$A_d$称为$A$的初始微分多项式(initial differential polynomial)，而把$\sum iA_iu_A^{i-1}$ $(=\partial A/\partial u_A)$称作$A$的离式(separant)．所有这些概念都依赖于所采用的秩．把θY_i上的全序扩充为$\mathscr{R}\{Y_1,\cdot,Y_n\}$的全体元素上的比较秩(comparative rank)是有用的．其作法如下.

a)$\mathscr{R}$的任一元素的秩低于$\mathscr{R}\{Y_1,\ ,Y_n\}\backslash\mathscr{R}$的任一元素的秩．

b) 设$A,B\in\mathscr{R}\{Y_1,\ ,Y_n\}\backslash\mathscr{R}$ 如果$u_A<u_B$(或$u_A=u_B$，但$\deg_{u_A}(A)<\deg_{u_A}(B)$)，则$A\leqslant B$

c)$\mathscr{R}$中的全部元素有相同的秩

d) 如果$u_A=u_B$且$\deg_{u_A}(A)=\deg_{u_A}(B)$，则$A$和$B$有相同的秩．当然，不同的微分多项式可能有相同的秩．但是，在任何情况下，这种作法都给出$\mathscr{R}\{Y_1,\cdot\ ,Y_n\}$上的一个偏序

设$A\in\mathscr{R}\{Y_1,\ ,Y_n\}\backslash\mathscr{R}$，又设$F\in\mathscr{R}\{Y_1,\cdot,Y_n\}$. 微分多项式$F$称为关于$A$是偏约化的(partially reduced)，如果F不含u_A的真导数(即不含有$\theta u_A(\theta\in\Theta)$) 若又有$\deg_{u_A}(F)<\deg_{u_A}(A)$，则称$F$关于$A$是约化的(reduced) 更一般地，$F$被称为关于子集$\Sigma\subset\mathscr{R}\{Y_1,\ ,Y_n\}\backslash\mathscr{R}$是约化的，如果$F$关于$\Sigma$的每个元素都是约化的 $\mathscr{R}\{Y_1,\cdot,Y_n\}$的一个子集$\Sigma$称为自约化的(autoreduced)，如果$\Sigma\cap\mathscr{R}=\phi$且$\Sigma$的每个元素$F$关于$\Sigma\backslash\{F\}$都是约化的．每个自约化集都是有限的 这种集合是由Ritt引入的(他称这样的集合为升集(ascending set)或升链(ascending chain))，用以作为他在微分多项式的约化过程中的工具 这个过程类似于通常多项式的Euclid(带余)除法．

$\mathscr{R}\{Y_1,\cdot\ ,Y_n\}$的元素的比较秩的概念如下地扩充为$\mathscr{R}\{Y_1,\ ,Y_n\}$的自约化子集的秩．设$\mathscr{A}=\{A_1,\ ,A_r\}$和$\mathscr{B}=\{B_1,\ ,B_s\}$是$\mathscr{R}\{Y_1,\ ,Y_n\}$的自约化子集，其中$A_1,\ ,A_r$和$B_1,\ ,B_s$都按升秩顺序排列．

e) 如果存在一个$k\in\mathbf{N}=\{1,2,\ \}$，$k\leqslant\min(r,s)$，使得$\operatorname{rank}(A_i)=\operatorname{rank}(B_i)$，$i<k$且$\operatorname{rank}(A_k)<\operatorname{rank}(B_k)$，则$\mathscr{A}$的秩低于$\mathscr{B}$的秩．

f) 如果$r>s$且$\operatorname{rank}(A_i)=\operatorname{rank}(B_i)\ (i=1,\ ,s)$，则$\mathscr{A}$的秩低于$\mathscr{B}$的秩

g) 如果$r=s$且$\operatorname{rank}(A_i)=\operatorname{rank}(B_i)\ (i=1,\ ,r)$，则$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$的秩相同

现在设$\mathscr{I}$是$\mathscr{R}\{Y_1,\ ,Y_n\}$中的一个微分理想．则存在自约化集$\mathscr{A}\subset\mathscr{I}$，使得对于所有的$A\in\mathscr{A}$，$A$的离式$S_A$不在$\mathscr{I}$中 $\mathscr{I}$的这种自约化子集中秩最低者称为$\mathscr{I}$的一个特征集(characteristic set)．

再来考虑微分多项式$A\in\mathscr{R}\{Y_1,\ ,Y_n\}$. 如果存在$u=\theta Y_i$，$\theta\in\Theta$，使得$\partial A/\partial u\neq0$，则存在具有这种性质的阶最高的$u$ 它的阶称为A的本质阶(essential order) 也存在着秩最高的这种v(使得$\partial A/\partial v\neq0$) 如果$A$不含有$v$的任何真导数，则$v$称作$A$的伪引式(pseudo-leader)(相对于给定的秩)，且称$\partial A/\partial v$为A的伪离式(pseudo-separant)(如果对于任意的$k\in\mathbf{N}$以及$0\neq a\in\mathscr{R}$，都有$ka\neq0$，则伪引式与伪离式的概念显然分别同引式与离式的概念一致．但是，譬如说，如果$\mathscr{R}$的特征$p\neq0$，则不一定如此)．

设$\mathscr{U}$是$k\{Y_1,\ ,Y_n\}$的一个泛扩张，这里k是一个微分域．又设$A\in k\{Y_1,\ ,Y_n\}$. 一个点$\eta\in\mathscr{U}^n$称为A的非奇异零点(non-singular zero)或$A=0$的非奇异解(non-singular solution)，如果η是A的零点且存在$\{Y_1,\ ,Y_n\}$的一个秩，使得A关于此秩有伪引式，且相应的伪离式在η处不为零．A的其他的零点($A=0$的其他的解)称为奇异零点(singular zeros)(奇异解(singular solutions))．

赵春来 译 冯绪宁 校

二项式微分 [**differential binomial**, **дифференциальный бином**]，亦称微分二项式

形如

$$x^m(a+bx^n)^p dx$$

的表达式，其中a和b是实数，m,n和p是有理数．二项式微分的不定积分

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx,$$

如果数$p,(m+1)/n$和$p+(m-1)/n$中至少有一个是整数，则可化为有理函数的积分．在一切其他情况下，二项式微分的积分都不能用初等函数来表示(П Л Чебышев, 1853)

Л Д Кудрявцев 撰

【补注】 关于化为有理函数的积分的命题，称为**Чебы-**

шев 定理(关于二项式微分的积分的) (Chebyshev theorem (on the integration of binomial differentials))

张鸿林 译

微分学 [**differential calculus**, **дифференциальное исчисление**]

数学的一个分支，研究**导数**(derivative)和**微分**(differential)概念及其在考察函数性质中的应用．微分学的发展同**积分学**(integral calculus)密切相关，二者的内容也是不可分割的．它们一起构成了数学分析的基础，而数学分析在自然科学和技术中是极其重要的．R. Descartes 把变量引入数学，是促使微分学产生的重要因素．一般都认为微积分是在 17 世纪后期由 I Newton 和 G. Leibniz 创立的，但是直到 19 世纪初在 A L. Cauchy 的工作中才通过**极限** (limit) 概念奠定其严格的基础 微积分的产生开创了数学及有关的应用学科迅速发展的新时期．微分学通常指的是经典微分学，研究一个或多个实变量的实值函数，但是其现代定义也可包括抽象空间上的微分学 微分学是建立在**实数**(real number)、**函数**(function)、**极限**(limit)和**连续性**(continuity)等极其重要的数学概念的基础之上的，这些概念的现代内容是在数学分析的发展及其基础的研究的过程中逐步形成和确定的．微分学的中心概念——导数和微分，以及在微分学中发展的有关方法，为研究局部地类似于线性函数和多项式的函数提供了有力工具，正是这样的函数在应用中是最有意义的

导数 (derivative) 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义．设 $\Delta x \neq 0$ 表示自变量的增量，而 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 表示相应的函数值的增量．如果存在 (有限的或无限的) 极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

则这个极限称为函数 f 在点 x_0 上的导数，记为 $f'(x_0)$, $df(x_0)/dx$, y', $y'x$, dy/dx 因此，根据定义，

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

求导数的运算称为微分法 (differentation) 如果 $f'(x_0)$ 是有限的，则称函数 f 在点 x_0 上是可微的 (differentiable) 如果一个函数在某个区间的每个点上都是可微的，则称为在这个区间上是可微的

导数的几何解释 (geometric interpretation of the derivative) 设 C 是在正交坐标系中由方程 $y=f(x)$ 定义的平面曲线，其中 f 在某个区间 J 内有定义并且是连续的，设 $M(x_0,y_0)$ 是 C 上的一个固定点，$P(x,y)$ ($x\in J$) 是 C 上的一个任意点，MP 是割线 (图 1) 定向直线 MT (点 T 随横坐标 $x_0+\Delta x$ 而变动) 称为曲线 C 在点 M 上的切线 (tangent)，如果当 $x\to x_0$ 时 (换句话说，当点 $P\in C$ 任意接近于点 M 时)，割线 MP 和这条定线直线之间的夹角 φ 趋向于零．如果这样的切线存在，则它是唯一的．设 $x=x_0+\Delta x$, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，对于 MP 和 x 轴的正方向之间的夹角 β，得到方程 $\tan\beta=\Delta y/\Delta x$ (图 1)．曲线 C 在点 M 上具有切线，

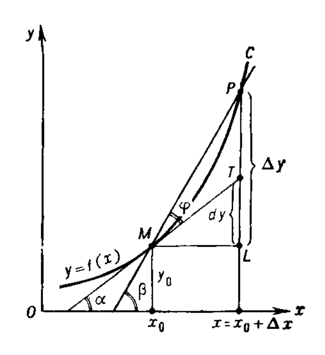


图 1

当且仅当 $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y/\Delta x$ 存在，即 $f'(x_0)$ 存在．对于切线和 x 轴正方向之间的夹角 α，方程 $\tan\alpha=f'(x_0)$ 成立．如果 $f'(x_0)$ 是有限的，则切线和 x 轴的正方向构成锐角，即 $-\pi/2<\alpha<\pi/2$，如果 $f'(x_0)=\infty$，则切线和 x 轴构成直角 (图 2) 因此，连续函数 f 在点 x_0 上的导数，等于由方程 $y=f(x)$ 定义的曲线在其横坐标为 x_0 的点上的切线的斜率 $\tan\alpha$

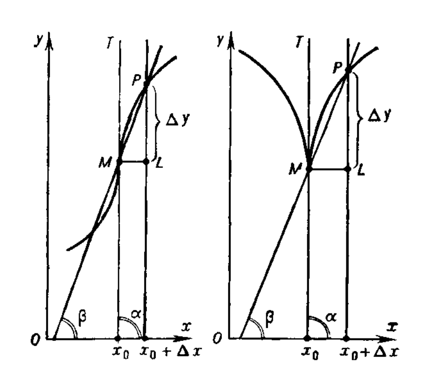


图 2

导数的力学解释 (mechanical interpretation of the derivative)．设点 M 在一条直线上按规律 $s=f(t)$ 运动．在时间 Δt 内，点 M 移动距离 $\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t)$．比 $\Delta s/\Delta t$ 表示在时间 Δt 内的平均速度 v_{av}．如果运动不是匀速的，则 v_{av} 不是常数．在时刻 t 的瞬时速度 (instantaneous velocity) v 是平均速度当 $\Delta t\to 0$ 时的极限，即 $v=f'(t)$ (假设这个导数存在)

因此，导数的概念给出了作平面曲线的切线的问题和求直线运动的速度的问题的一般解法．解决这两

个问题是形成导数概念的主要推动力

在点 x 上具有有限导数的函数在这一点上是连续的．连续函数不一定具有有限导数或无限导数．存在在其定义域的任何点上都没有导数的连续函数．

对于基本初等函数在其定义域的任何点上（另加说明者除外）的导数，下列公式成立.

1) 如果 $f(x)=C=$ 常数，则 $f'(x)=C'=0$,

2) 如果 $f(x)=x$，则 $f'(x)=1$,

3) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha=$ 常数（当 $\alpha\leqslant 1$ 时，$x\neq 0$），

4) $(a^x)'=a^x\ln a$，$a=$ 常数 >0，$a\neq 1$，特别是，$(e^x)'=e^x$;

5) $(\log_a x)'=(\log_a e)/x=1/(x\ln a)$，$a=$ 常数 $>0, a\neq 1$, $(\ln x)'=1/x$,

6) $(\sin x)'=\cos x$,

7) $(\cos x)'=-\sin x$,

8) $(\tan x)'=1/\cos^2 x$,

9) $(\cot x)'=-1/\sin^2 x$,

10) $(\arcsin x)'=1/\sqrt{1-x^2}$，$x\neq\pm 1$,

11) $(\arccos x)'=-1/\sqrt{1-x^2}$，$x\neq\pm 1$,

12) $(\arctan x)'=1/(1+x^2)$,

13) $(\operatorname{arccotan} x)'=-1/(1+x^2)$,

14) $(\sinh x)'=\cosh x$,

15) $(\cosh x)'=\sinh x$,

16) $(\tanh x)'=1/\cosh^2 x$,

17) $(\coth x)'=-1/\sinh^2 x$

下列微分法则成立

(1) 如果两个函数 u 和 v 在点 x_0 上是可微的，则函数

$$cu\ (c=\text{常数}),\ u\pm v,\ uv,\ \frac{u}{v}\ (v\neq 0)$$

在这一点上也是可微的，并且

$$(cu)'=cu',$$
$$(u\pm v)'=u'\pm v',$$
$$(uv)'=u'v+uv',$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v+uv'}{v^2}.$$

(2) 关于复合函数的导数的定理　如果函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 上是可微的，函数 $\varphi(x)$ 在点 x_0 上是可微的，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在 x_0 上是可微的，且 $y'_x=f'(u_0)\varphi'(x_0)$，或者用另一种表示法，$dy/dx=(dy/du)(du/dx)$.

(3) 关于反函数的导数的定理　如果 $y=f(x)$ 和 $x=g(y)$ 是两个互为反函数的增（或减）函数，在相应一些区间上有定义，并且 $f'(x_0)\neq 0$ 存在（即不是无限的），则在点 $y_0=f(x_0)$ 上导数 $g'(y_0)=1/f'(x_0)$ 存在，或者用另一种表示法，$dx/dy=1/(dy/dx)$　这个定理可以推广　如果再加上另一些条件，而 $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)=\infty$，则分别有 $g'(y_0)=\infty$ 或 $g'(y_0)=0$

单侧导数（one-sided derivatives）．如果在点 x_0 上极限

$$\lim_{\Delta x\downarrow 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

存在，则称之为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 上的右导数（right-hand derivative）（在这种情况下，并不需要函数在点 x_0 的某一邻域内处处有定义，只要求当 $x\geqslant x_0$ 时函数有定义）．同样，左导数（left-hand derivative）定义为

$$\lim_{\Delta x\uparrow 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

函数 f 在点 x_0 上有导数，当且仅当在这一点上它的右导数和左导数都存在，并且二者相等．如果函数是连续的，那么在一点上右（左）导数的存在，等价于在函数图形的对应点上右（左）单侧半切线的存在，其斜率等于这个单侧导数的值　其左右半切线不能形成一条直线的点称为角点（angular points）或尖点（cusps）（见图 3）

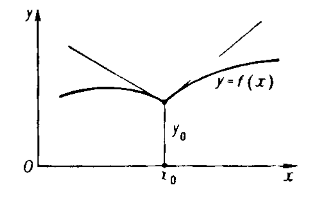


图 3

高阶导数（derivatives of higher orders）．设函数 $y=f(x)$ 在某个区间的所有点上具有有限的导数 $y'=f'(x)$；这个导数也称为一阶导数（first derivative 或 derivative of the first order），它作为 x 的函数又可以具有导数 $y''=f''(x)$，称为函数 f 的二阶导数（second derivative 或 derivative of the second order），等等，一般地，假设在某个区间上已经定义了（$n-1$）阶导数 $y^{(n-1)}$，那么可以由等式 $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$ 归纳地定义 n 阶导数（n-th derivative 或 derivative of order n）．除了符号 $y^{(n)}$ 以外，还采用符号 $f^{(n)}$，$d^nf(x)/dx^n$，当 $n=2, 3$ 时，也采用符号 y''，$f''(x)$，y'''，$f'''(x)$.

二阶导数具有下述力学解释　它是按规律 $s=f(t)$ 作直线运动的一点的加速度 $w=d^2s/dt^2=f''(t)$

微分（differential）　设函数 $y=f(x)$ 在点 x 的某个邻域内有定义，并且存在数 A，使得增量 Δy 可以表示为 $\Delta y=A\Delta x+\omega$，当 $\Delta x\to 0$ 时 $\omega/\Delta x\to 0$ 在这个和式中，$A\Delta x$ 一项用符号 dy 或 df 来表示，称为函数 $f(x)$ 在点 x 处（关于变量 x）的微分　微分是函数增量的线性主部（它的几何表示是图 1 中的线段 LT，其中 MT 是曲线 $y=f(x)$ 在所考虑的点 (x_0, y_0) 上的切线）

函数 $y=f(x)$ 在点 x 上具有微分，当且仅当它在这

一点上具有有限导数

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A$$

具有微分的函数称为在所考虑的点上是可微的(differentiable) 因此，函数的可微性(differentiability)蕴涵微分和有限导数的存在，并且 $dy=df(x)=f'(x)\Delta x$ 对于自变量 x，其微分记为 $dx=\Delta x$，而函数的微分可以相应地记为 $dy=f'(x)dx$，即导数等于函数的微分与自变量的微分之比

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

亦见**微分**(differential).

由计算导数的公式和法则可以推出计算微分的公式和法则．特别是，复合函数微分定理(theorem on the differential of a composite function)成立 如果函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 上是可微的，而函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 上是可微的，且 $u_0=\varphi(x_0)$，那么复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x_0 上是可微的，且 $dy=f'(u_0)du$，其中 $du=\varphi'(x_0)dx$ 复合函数的微分形式与把 u 看成自变量时的微分形式恰好相同 这个性质称为微分形式的不变性(invariance of the form of the differential)．但是，如果 u 是自变量，则 $du=\Delta u$ 是一个任意增量，而如果 u 是一个函数，则 du 是这个函数的微分，一般地说，它与这函数的增量是不同的

高阶微分(differentials of higher orders)．微分 dy 也称为一阶微分(first differential 或 differential of the first order)．设 $y=f(x)$ 在某个区间的每个点上具有微分 $dy=f'(x)dx$．其中 $dx=\Delta x$ 是某个与 x 无关的数，所以可以说，dx = 常数 于是，微分 dy 只是 x 的函数，它又可以具有微分，称为 f 的二阶微分(second differential 或 differential of the second order)，等等．一般地，假设在某个区间上已经定义了$(n-1)$阶微分 $d^{n-1}y$，并且 dx 的值在各步都相同，那么可以由等式 $d^ny=d(d^{n-1}y)$ 归纳地定义 n 阶微分(n-th differential 或 differential of order n)．对于 $d^2y, d^3y,$ ，一般不存在微分形式的不变性(只是 $y=f(u)$，其中 u 是线性函数的情况例外)．

微分 dy 的累次微分(repeated differential)具有形式

$$\delta(dy)=f''dx\delta x,$$

当 $dx=\delta x$ 时，$\delta(dy)$ 的值就是二阶微分

微分法的基本定理及应用 通常认为，单变量函数微分法的基本定理包括 **Rolle 定理**(Rolle theorem)、(关于有限变差的) **Legendre 定理**(Legendre theorem)、**Cauchy 定理**(Cauchy theorem) 和 **Taylor 公式**(Taylor formula)．根据这些定理，应用微分法可以研究函数的一些重要性质，例如函数的增加和减少、函数的凸性和凹性，以及求函数图形的**极值**(extremum)点、**拐点**(point of inflection)和**渐近线**(asymptote) 在许多情况下，由最简单的极限定理不可能算出函数的极限，这时应用微分法则有可能(见**不定极限和不定式的求值**(indefinite limits and expressions, evaluations of)) 微分法在许多数学领域，特别是在几何学中，有着极其广泛的应用

多元函数的微分学(differential calculus of functions in several variables) 为简明起见，下面考虑二元函数的情况(有时例外)，但是一切有关的概念很容易推广到三元或多元函数 设在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内给定函数 $z=f(x,y)$，而值 $y=y_0$ 是固定的 这时，$f(x,y_0)$ 只是 x 的函数 如果它在点 x_0 上对 x 具有导数，则这个导数称为 f 在 (x_0,y_0) 上对 x 的偏导数(partial derivative)，记为 $f'_x(x_0,y_0)$，$\partial f(x_0,y_0)/\partial x$、$\partial f/\partial x$，$z'_x$，$\partial z/\partial x$ 或 $f_x(x_0,y_0)$．因此，根据定义，

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

其中 $\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 对 x 的偏增量(partial increment) (在一般情况下，$\partial z/\partial x$ 不能看成一个分数，$\partial/\partial x$ 是运算符号)

可以类似地定义对 y 的偏导数

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

其中 $\Delta_y z$ 是函数 $f(x,y)$ 对 y 的偏增量，还采用另一些记法．$\partial f(x_0,y_0)/\partial y$，$\partial f/\partial y$，$z'_y$，$\partial z/\partial y$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 可以根据一元函数的微分法则来计算偏导数(当计算 z'_x 时，假设 y = 常数，当计算 z'_y 时，假设 x = 常数)．

函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)上的偏微分(partial differential)分别是

$$d_x z=f'_x(x_0,y_0)\,dx\,,\ d_y z=f'_y(x_0,y_0)\,dy$$

其中，同一元情况一样，$dx=\Delta x$，$dy=\Delta y$ 表示两个自变量的增量

一阶偏导数(first partial derivatives 或 partial derivatives of the first order) $\partial z/\partial x=f'_x(x,y)$ 和 $\partial z/\partial y=f'_y(x,y)$ 本身也可以具有对 x 和 y 的偏导数，称为函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数(partial derivatives of the second order 或 second partial derivaties) 这时，假设

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

也采用下列符号代替 $\partial^2 z/\partial x^2$

$$z''_{xx},\ z''_{x^2},\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ f''_{xx}(x,y),\ f''_{x^2}(x,y);$$

采用下列符号代替 $\partial^2 z/\partial x\partial y$.

$$z''_{xy},\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ f''_{xy}(x,y),$$

等等．同样可以引入三阶或更高阶的偏导数，并分别采用下列符号：$\partial^n z/\partial x^n$ 表示把函数 z 对 x 微分 n 次；$\partial^n z/\partial x^p\partial y^q(n=p+q)$ 表示把函数 z 对 x 微分 p 次、对 y 微分 q 次．对不同自变量进行微分而得到的二阶或更高阶的偏导数称为混合偏导数（mixed partial derivatives）．

每个偏导数都对应于一个偏微分，它是由这个偏导数乘以各自变量微分的相应幂而得到的，而其幂指数分别等于偏导数中对该自变量微分的次数．这样，便得到 n 阶偏微分（n-th partial differentials 或 partial differentials of order n）．

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n},\quad \frac{\partial^n z}{\partial x^p\partial y^q}dx^p dy^q$$

下述重要的混合导数定理（theorem on mixed derivatives）成立：如果在点（x_0, y_0）的某个邻域内，函数 $z=f(x,y)$ 具有混合偏导数 $f''_{xy}(x,y)$ 和 $f''_{yx}(x,y)$，并且这些导数在点（x_0, y_0）上是连续的，则它们在这一点上相等，即 $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$

函数 $z=f(x,y)$ 称为在点 (x_0, y_0) 上对变量 x 和 y 是可微的（differentiable），如果它在这一点的某个邻域内有定义，并且它的全增量（total increment）

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

可以表示为下列形式：

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\omega,$$

其中 A 和 B 是某些数，并且当 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时 $\omega/\rho\to 0$（如果点 $(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$ 处于这个邻域内）．这时，表达式

$$dz=df(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y$$

称为函数 f 在点 (x_0,y_0) 上的（一阶）全微分（total differential），这是增量的线性主部，在某一点上可微的函数，在这一点上是连续的（逆命题不一定成立！）．并且，可微性要求有限偏导数

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A,$$

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=B$$

存在．因此，对于在点 (x_0,y_0) 上可微的函数来说，有

$$dz=df(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y$$

或者

$$dz=df(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)dx+f'_y(x_0,y_0)dy,$$

如果同一元函数情况一样，假设对于自变量有 $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$

在一般情况下，有限偏导数存在并不能保证可微性成立（这与一元函数情况不同）．二元函数可微性的充分条件如下所述　如果在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内，函数 $f(x,y)$ 具有有限的偏导数 f'_x 和 f'_y，并且它们在点 (x_0,y_0) 上是连续的，则 $f(x,y)$ 在这一点上是可微的．在几何上，全微分是曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 上的切平面的竖坐标的增量，其中 $z_0=f(x_0,y_0)$（见图 4）．

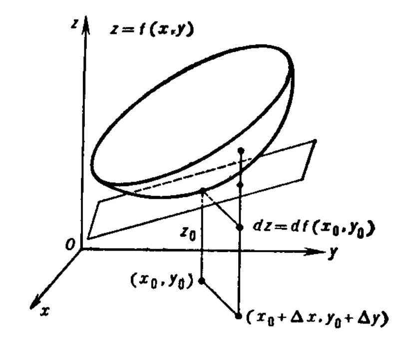


图 4

同一元函数情况一样，可由下列等式归纳地引入高阶全微分（total differentials of higher orders）．

$$d^n z=d(d^{n-1}z),$$

这里假设在所考虑的点的某个邻域内微分 $d^{n-1}z$ 有定义，并且在各步取相同的自变量增量 dx, dy．同样，可以定义累次微分．

复合函数的导数和微分　设 $w=f(u_1,\cdots,u_m)$ 是一个 m 元函数，它在 m 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^m$ 的开区域 D 内的每一点上是可微的，并且设 m 个 n 元函数 $u_1=\varphi_1(x,\cdots,x_n),\cdots,u_m=\varphi_m(x_1,\cdots,x_n)$ 在 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 的开区域 G 内有定义．最后，设与点 $(x_1,\cdots,x_n)\in G$ 对应的点 $(u_1,\cdots,u_m)$ 包含在 D 内．这时，下述定理成立：

A) 如果函数 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 具有对 $x_1,\cdots,x_n$ 的有限偏导数，则 $x_1,\cdots,x_n$ 的复合函数 $w=f(u_1,\cdots,u_m)$ 也具有对 $x_1,\cdots,x_n$ 的有限偏导数，并且

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \quad + \frac{\partial f}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_n}$$

B) 如果函数 $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ 在点 $(x_1, \quad, x_n) \in G$ 上对所有变量是可微的，则复合函数 $w=f(u_1, \quad, u_m)$ 在这一点上也是可微的，并且

$$dw = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \quad + \frac{\partial f}{\partial u_m} du_m,$$

其中 $du_1, \cdot, du_m$ 是函数 $u_1, \quad, u_m$ 的微分．因此，对于多元函数来说，也存在一阶微分的形式不变性．但是，这种不变性对二阶或更高阶微分并不总是成立．

微分学也用于研究多元函数的性质· 求极值，研究由一个或多个隐式定义的函数以及曲面理论，等等．为此目的所需的主要工具之一是 **Taylor 公式** (Taylor formula)

导数和微分的概念及其关于函数的算术运算和函数叠加的一些最简单的性质，包括一阶微分的形式不变性，都可以推广（几乎可以照搬）到单或多实变量复值函数、单或多实变量实值和复值向量函数、单或多复变量复值函数和向量函数．在泛函分析中，导数和微分的概念被推广到抽象空间中的点函数．

关于微积分的历史，见[1]－[6] 关于微积分的发明者和奠基人，见[7]－[13] 关于微积分的手册和教科书，见[14]－[24]

参考文献

[1] История математика с древнейших времен до начала XIX столетия, т 1－3, М , 1970－1972

[2] Рыбников, К А , История математики, т 1－2, М , 1960－1963

[3] Wieleitner, H , Geschichte der Mathematik, de Gruyter, 1923

[4] Struik, D J , A concise history of mathematics, Dover, reprint, 1948 (中译本 D J 斯特洛伊克，数学简史，科学出版社，1956)

[5] Bourbaki, N , Eléments d'histoire de mathématique, Hermann, 1960

[6] Cantor, M , Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, 1－4, Teubner, 1900－1908

[7] Newton, I , The mathematical papers of I Newton, 1－8, Cambridge Univ Press, 1967－1981

[8] Leibniz, G , Mathematische Schriften, 1－7, G Olms, 1971

[9] l'Hôpital, G F de, L'analyse des infinitesimal, Paris, 1696

[10] Euler, L , Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Springer, 1983 (译自拉丁文)

[11] Euler, L , Institutiones calculi differentialis, in Opera omnia, series prima, opera mathematica, Vol 10, Teubner, 1980

[12] Cauchy, A L , Oeuvres II Série, 4－5, Gauthier-Villars, 1894－1903

[13] Cauchy, A L , Algebraische Analyse, Springer, 1885 (译自法文)

[14] Goursat, E , Cours d'analyse mathematique, 1, Gauthier-Villars, 1910

[15] Vallee-Poussin, Ch de la, Cours d'analyse infinitesimale, 1, Libraire Univ Louvain, 1923

[16] Courant, R , Differential and integral calculus, 1, Blackie, 1948 (中译本 R 库兰特，微积分学，上海中华书局，1949，1952)

[17] Rudin, W , Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1976 (中译本 W 卢丁，数学分析基础，人民教育出版社，1979)．

[18] Ильин, В А , Позняк, Э Г , Основы математического анализа, 3 изд , М , т 1, 1971, т 2, 1973 (英译本 Il'in, V A and Poznyak, E G , Fundamentals of mathematical analysis, 1－2, Mir, 1982)

[19] Кудрявцев, Л Д , Математический анализ, 2 изд , М , 1973

[20] Никольский, С М , Курс математического анализа, 2 изд , М , 1975 (中译本 C M 尼科尔斯基，数学分析教程，第一卷，人民教育出版社，1980, 1981)

[21] Толстов, Г П , Элементы математического анализа, т 1－2, 2 изд , М , 1974

[22] Смирнов, В И , Курс высшей математики, 22 изд , т 1, М , 1967 (中译本 B И 斯米诺夫，高等数学教程，第一卷，高等教育出版社，1956)

[23] Фихтенгольц, Г М , Курс дифференциального и интегрального исчисления, 7 изд , М , 1969 (中译本 Г M 菲赫金哥尔茨，微积分学教程，人民教育出版社，1980)

[24] Хинчин, А Я , Восемь лекций по математическому анализу, 3 изд , М-Л , 1948

Г П. Толстов 撰

【补注】 关于推广，亦见 **Gâteaux 导数** (Gâteaux derivative)，**Fréchet 导数** (Fréchet derivative)，**Schwarz 微分** (Schwarz differential)．有许多讨论上述课题的著作．下面列出几本

参考文献

[A1] Apostol, T M , Calculus, 1－2, Blaisdell, 1964 (中译本 T M 阿波斯托，微积分学，高等教育出版社，1987)

[A2] Apostol, T M , Mathematical analysis, Addison-Wesley, 1974

[A3] Boyer, C F , A history of mathematics, Wiley, 1968

[A4] Craven, B D , Functions of several variables, Chapman and Hall, 1981

[A5] Spivak, M , Calculus on manifolds, Benjamin/Cummings, 1965 (中译本 M 斯皮瓦克，流形上的微积分，科学

出版社，1980）

[A6] Dieudonné, J, Foundations of modern analysis, Acad Press, 1960（中译本 J 迪厄多内，现代分析基础，科学出版社，1982）

【译注】

参考文献

[B1] Boyer, C B, The history of the calculus and its conceptual development, Dover Publications, Inc, 1949（中译本 C B 波耶，微积分概念史，上海人民出版社，1977）.

[B2] Edwards, C H, The historical development of the calculus, Springer-Verlag, 1979（中译本 C H 爱德华，微积分发展史，北京出版社，1987） 张鸿林 译

微分学（解析空间上的）[differential calculus (on analytic spaces), дифференциальное исчисление на аналитических пространствах]

关于微分形式与微分算子的经典微分学到解析空间的一种推广．关于复流形微分形式的微分学见**微分形式**（differential form） 设（X, $\mathscr{O}_X$）为域 k 上的**解析空间**（analytic space），Δ为 $X\times X$中的对角线，J 为确定 Δ且由一切形如 $\pi_1^*f-\pi_2^*f$的芽生成的理想所成的层，这里f为$\mathscr{O}_X$中任意芽，并设 π_i $X\times X\to X$为到第i因子上的投影．

解析层 $\pi_1(J/J^2)=\Omega_X^1$ 称为 X上一阶解析微分形式层（sheaf of analytic differential forms） 若f为X上解析函数的芽，则芽 $\pi_1^*f-\pi_2^*f$属于 J并确定 Ω_X^1的元素 df，称为芽 f的微分 (differential of the germ f) 这便定义向量空间的层同态d $\mathscr{O}_X\to\Omega_X^1$ 若 $X=k^n$，则 Ω_X^1为由 dx_1， ，dx_n 生成的自由层，其中 $x_1,\cdots,x_n$ 为 k^n中坐标．若X为 k^n 中由理想的一个层 J 定义的解析子空间，则

$$\Omega_X^1\cong\Omega_{k^n}^1/(J\Omega_{k^n}^1+dJ)|_X$$

每个解析映射 f $X\to Y$可对应于相对微分层（sheaf of relative differentials）$\Omega_{X/Y}^1$ 这便是在f的每个纤维 $X_s(s\in Y)$ 上诱导 $\Omega_{X_s}^1$ 的解析层 $\Omega_{X/Y}^1$，它由正合序列

$$f^*\Omega_Y^1\to\Omega_X^1\to\Omega_{X/Y}^1\to 0$$

定义．

层$\Theta_X=\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\Omega_X^1,\mathscr{O}_X)$ 称为 X上解析向量场的芽层（sheaf of germs of analytic vector fields）．若 X 为流形，则 Ω_X^1 与 Θ_X均为局部自由层，它们分别自然地同构于 X上余切丛与切丛的解析截口层

解析层 $\Omega_X^p=\wedge_{\mathscr{O}_X}^p\Omega_X^1$ 称为 X上 p阶解析外微分形式层（sheaves of analytic exterior differential forms）（若 $k=\mathbf{C}$，它们也称为全纯形式（holomorphic forms））．对任何 $p\geq 0$，可定义向量空间的层同态 d^p $\Omega_X^p\to\Omega_X^{p+1}$，对 $p=0$ 它与上述层同态相同，且满足条件 $d^{p+1}d^p=0$ 层（$\Omega_X^\cdot$, d）的复形称为空间 X的 de Rham复形（de Rham complex） 若 X为流形且 $k=\mathbf{C}$或$\mathbf{R}$，则 de Rham 复形为层的正合复形．若 X为Stein 流形或实解析流形，则截口复形 $\Gamma(\Omega_X^\cdot)$ 的上同调群（也时常称为 de Rham 复形）同构于 $H^p(X, k)$．

若X有奇点，则 de Rham 复形未必是正合的．若 $k=\mathbf{C}$，为使 de Rham 复形在一点 $x\in X$具有正合性的一个充分条件是，存在 x的一复解析可缩邻域 对 $k=\mathbf{C}$，复形 $\Gamma(\Omega_X^\cdot)$ 的超同调群包含系数在$\mathbf{C}$中空间X的上同调群作为直和被加项，且当 X 为光滑时两者恒等．层 Θ_X的截口称为 X上解析向量场（analytic vector field），当 $k=\mathbf{C}$时，称为全纯向量场（holomorphic vector field） 对任何开集 $U\subset X$，场 $Z\in\Gamma(X,\Theta_X)$ 依公式 $\varphi\to Z_\varphi=Z(d\varphi)$ 定义解析函数代数 $\Gamma(U,\mathscr{O}_X)$ 中的导数．若 $k=\mathbf{C}$或$\mathbf{R}$，则 Z定义空间 X的自同构的局部单参数群 $\exp Z$ 此外，若 X 为紧的，则群 $\exp Z$ 为整体可定义的．

赋予 Lie 括号的空间 $\Gamma(X,\Theta_X)$ 为 k上的 Lie 代数．若 X为紧复空间，则 $\Gamma(X,\Theta_X)$ 为群 Aut X的 Lie 代数．

解析空间（X, $\mathscr{O}_X$）上微分算子可类似于**模上的微分算子**（differential operator on a module）来定义．若 F, G均是 X上的解析层，则自 F到 G的阶 $\leq l$ 的线性微分算子（linear differential operator）为向量空间的层同态 $F\to G$，它扩张为一解析同态 $F\otimes\pi_1(\mathscr{O}_{X\times Y}/I^{l+1})\to G$ 若 X光滑且 F, G 均为局部自由的，则此定义给出通常向量丛上的微分算子概念（[3], [4]）

线性微分算子 $F\to G$ 的芽构成具有滤系

$$\mathrm{Diff}^0(F,G)\subset\quad\subset\mathrm{Diff}^l(F,G)\subset$$

的解析层 $\mathrm{Diff}(F,G)$，其中 $\mathrm{Diff}^l(F,G)$ 为阶 $\leq l$ 的算子芽的层．特别地，$\mathrm{Diff}(\mathscr{O},\mathscr{O})$ 为在复合映射下 k上结合代数的滤层 于是有

$$\mathrm{Diff}^0(F,G)\cong\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(F,G),$$

$$\mathrm{Diff}^1(\mathscr{O},\mathscr{O})/\mathrm{Diff}^0(\mathscr{O},\mathscr{O})\cong\Theta_X$$

层 $\mathrm{Diff}(\mathscr{O},\mathscr{O})$ 只对某些特殊类型奇点被研究过（对非光滑情形）．特别地，对不可约一维**复空间**（complex space）X 的情形，证明了代数的层 $\mathrm{Diff}(\mathscr{O},\mathscr{O})$ 与相应的分次代数的层具有有限生成元系（[5]）

参考文献

[1] Malgrange, B, Analytic spaces, *Enseign Math Ser* 2, **14** (1968), 1, 1－28

[2] Kaup W, Infinitesimal Tansformationsgruppen Komplexer Raume, *Math Ann*, **160** (1965), 1, 72－92

[3A] Schwartz, L, Variedades analiticas complejas elipticas, Univ Nac Colombia, 1956

[3B] Schwartz, L , Ecuaciones diferenciales parciales, Univ Nac Colombia, 1956
[4] Wells, jr , R O , Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980
[5] Bloom, Th , Differential operators on curves, *Rice Univ Stud* , **59** (1973), 2, 13 − 19
[6] Berger, R , Kiehl, R , Kunz, E and Nastold, H -J , Differentialrechnung in der analytischen Geometrie, Springer, 1967
[7] Fischer, G , Complex analytic geometry, Springer, 1976

Д. А Пономарев 撰 郑维行 译 沈永欢 校

微分相伴变换 [differential comitant, дифференциальный комитант]

从流形 M 上张量丛 T 到同一流形上张量丛 T' 的可微映射 φ，使得若 p $T\to M$ 和 p' $T'\to M$ 是 T 和 T' 到 M 上的投影，则

$$p'\varphi=p$$

在 M 的局部卡 ξ 上，张量 $T'=\varphi(T)$ 的分量只借助于张量 T 的分量而依赖于 ξ

特别，当 T' 化为权 g 的相对标量丛时，微分相伴变换是权 g 的微分不变量　　　　М И Войцеховский 撰

【补注】 简言之，微分相伴变换是张量丛 T 到张量丛 T' 的向量丛映射 .

权 g 的相对标量丛构造如下　它是一个线丛 . 设 $(U_\alpha)_\alpha$ 是流形 M 的一个图册，具有坐标变换微分同胚 $\varphi_{\alpha\beta}.U_{\alpha\beta}\to U_{\beta\alpha}$. 在每个 U_α 上取平凡线丛 $U_\alpha\times\mathbf{R}$，并利用微分同胚 $\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta}$　$U_{\alpha\beta}\times\mathbf{R}\to U_{\beta\alpha}\times\mathbf{R}$，$(x,t)\mapsto(\varphi_{\alpha\beta}(x),(\det(J(\varphi_{\alpha\beta})(x)))^g t)$，把它们黏合起来，其中 $J(\varphi_{\alpha\beta})(x)$　$T_xU_{\alpha\beta}\to T_{\varphi_{\alpha\beta}(x)}U_{\beta\alpha}$ 是 $\varphi_{\alpha\beta}$ 在 x 的 Jacobi 矩阵

也见**微分不变式** (differential invariant)　然而注意，对于微分不变式，不仅考虑张量丛，也考虑高阶丛及其对偶丛 (的张量积和外积)　　　沈一兵 译

微分差分方程 [differential-difference equation, дифференциально-разностное уравнение]

见**差分方程** (difference equation)

微分熵 [differential entropy, дифференциальная энтропия]

熵的概念在具有分布密度的随机变量上的形式类似 . 假定随机变量 ξ 定义于某个概率空间 $(\Omega,\mathfrak{A},P)$，取值于 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 并有分布密度 $p(x)$，$x\in\mathbf{R}^n$，则 ξ 的微分熵 $h(\xi)$ 由式

$$h(\xi)=\int_{\mathbf{R}^n}p(x)\log p(x)\,dx$$

给出，其中假定 $0\log 0=0$　这样，微分熵与测度 $P(\cdot)$ 关于 Lebesgue 测度 $\lambda(\cdot)$ 的熵相一致，这里 $P(\cdot)$ 为 ξ 的分布 .

在计算各种信息论特征数，尤其是两随机变量 ξ 与 η 的相互信息计量 $J(\xi,\eta)$ 时 (见**信息量** (information, amount of))，微分熵概念显得有用 . 若 $h(\xi),h(\eta)$ 与 $h(\xi,\eta)$ (即偶 (ξ,η) 的微分熵) 均为有限的，则下列公式成立

$$J(\xi,\eta)=-h(\xi,\eta)+h(\xi)+h(\eta)$$

微分熵的下列两条性质是值得提出的. 1) 与平常熵不同，微分熵关于坐标系的变换不是共变的且可取负值， 与 2) 设 $\varphi(\xi)$ 是具有密度的 n 维随机变量 ξ 的离散化，其步长为 Δx，那么对于熵 $H(\varphi(x))$，公式

$$H(\varphi(\xi))=-n\log\Delta x+h(\xi)+o(1)$$

当 $\Delta\to 0$ 时成立　这样，当 $\Delta x\to 0$ 时 $H(\varphi(x))\to+\infty$ $H(\varphi(\xi))$ 的渐近式的主项依赖于 ξ 的值空间的维数，微分熵则定义渐近展式的第二项，该项与 Δx 无关，并且它是含有一个依赖于 ξ 的分布的实际性态中的首项 .

参考文献

[1] Гельфанд, И М , Колмогоров, А Н , Яглома, А М , в кн　Тр 3-го Всесоюзного матем съезда, т 3, М, 1958, 300−320
[2] Rényi, A , Wahrscheinlichkeitsrechnung, Deutsch Verlag Wissenschaft , 1962

Р Л Добрушин, В В Прелов 撰　郑维行 译

抽象微分方程 [differential equation, abstract; дифференциальное уравнение абстрактное]

某个抽象空间 (Hilbert 空间，Banach 空间，等等) 中的微分方程，或者具有算子系数的微分方程 . 最经常遇到的典型的抽象微分方程是

$$Lu=\frac{\partial u}{\partial t}-Au=f, \tag{1}$$

其中未知函数 $u=u(t)$ 属于某个函数空间 X，$0\leqslant t\leqslant T\leqslant\infty$，$A$　$X\to X$ 是作用在空间 X 上的算子 (通常是线性算子)　如果算子 A 是有界的和常值的 (即不依赖于 t)，那么公式

$$u(t)=e^{tA}u_0+\int_0^t e^{(t-\tau)A}f(\tau)\,d\tau$$

即给出了方程 (1) 的满足条件 $u(0)=u_0$ 的唯一解　对于可变算子 $A(t)$，$e^{(T-\tau)A}$ 可用**发展算子** (evolution operator) $U(t,\tau)$ (亦见 **Cauchy 算子** (Cauchy operator)) 替代 . 如果算子 A 是无界的，那么满足 $u(0)=u_0$ 的 Cauchy 问题的解对于某些 u_0 不一定存在，不一定唯一，并且当 $t<T$ 时可能破裂 . 含有常算子的齐次 ($f\equiv 0$) 方程 (1) 的透彻的研究由半群理论给出，利用 A 的预解式解决了存在性和唯一性问题 (见

[1], [5]). 相同的方法也适用于可变算子，如果它光滑地依赖于 t 另一研究方程 (1) 的方法是利用在 A 上作某些假定而得到的能量不等式 $\|u\| \leqslant c\|Lu\|$，此方法通常给出一些不甚精密的结果，然而它适用于较广的方程类（在某些情形下甚至包括非线性方程）. 在 X 为 Hilbert 空间的情形下，通常要求标量积 (Au, u) 具有不同的正性性质（见[2]）上面所述的这些方法在较大程度上可被推广到在条件 $u(0)=u_0$，$u_t'(0)=u_1$ 下研究的更为一般的抽象微分方程

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A_1\frac{du}{dt} + A_2u = f \qquad (2)$$

通常，用各种方法（化为一阶方程组，用代换 $u=\int_0^t v(\tau)d\tau$，把左端写成两个一阶算子的乘积，等等）把方程 (2) 的研究归结为方程 (1) 的研究 对于抽象微分方程感兴趣的主要原因，是经典的二阶抛物型和双曲型方程在柱形域中所谓的混合问题可被化为形为 (1) 或 (2) 的方程 函数 $u(t, x_1, \quad, x_n)$ 被视作 t 的函数，取值于相应的 x 的函数空间中，由关于 x 的微商所生成的算子 A, A_k，在柱形域的侧边曲面（它的母线平行于 t 轴）上满足边界条件. 对算子 A, A_k 要求具有在上述情形下所得到的那些性质的方程 (1) 和 (2) 被称为抽象抛物型的或双曲型的. 较少考虑抽象椭圆型算子

经常用半群和方程 (1) 来叙述区间 $-\infty<t<+\infty$ 中的散射理论的一些问题（[3]）在探讨解的（如，差分[4]）近似方法时，以及在（“小的”和“大的”参数）渐近方法的研究中，把偏微分方程的问题化为抽象微分方程 (1) 和 (2) 的问题是极为有利的. 对无界算子 A_k，只有在关于 A_k 的非常特殊的假设下，才能对具有算子系数

$$\sum_{k=0}^{m} A_k \frac{d^k}{dt^k}$$

并在区间 $(0, T)$ 两端给出边界条件的一般的抽象微分方程进行有意义的研究 对于有界的 A_k，用适当方式推广常微分方程理论不存在什么困难.

参考文献

[1] Hille, E and Phillips, R, Functional analysis and semigroups, Amer Math Soc, 1957

[2] Lions, J L, Equations différentielles operationelles et problèmes aux limites, Springer, 1961

[3] Lax, P and Phillips, R, Scattering theory, Acad Press, 1967

[4] Самарский, А А, Введение в теорию разностных схем М, 1971

[5] Крейн, С Г, Линейные уравнения в банаховом пространстве, М, 1971（英译本 Kreĭn, S G, Linear differential equations in Banach space, Amer Math Soc, 1971）

А А Дезин 撰

【补注】 有关椭圆型问题见[A3]

参考文献

[A1] Tanabe, H, Equations of evolution, Pitman, 1979（译自日文）

[A2] Pazy, A, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer, 1983

[A3] Agmon, S, Unicité convexité dans problèmes differentiels, Univ Montréal, 1966

陆柱家 译

常微分方程 [differential equation, ordinary, дифференциальное уравнение обыкновенное]

含有一个单变量未知函数的方程，其中不仅包含未知函数本身，而且还包含它的各阶导数

“微分方程”一词是 G. Leibniz 于 1676 年提出的 在 17 世纪末叶，由于研究某些力学问题和几何问题而对常微分方程进行了最初的探讨.

常微分方程是研究许多自然科学问题和技术问题的有力工具，因而具有重要的实用价值，它们在力学、天文学、物理学中，在许多化学和生物学问题中，有着广泛的应用 这是因为某些现象（过程）所服从的客观规律往往能够写成常微分方程的形式，因此这些方程本身就是相应客观规律的定量表示. 例如，根据 Newton 力学定律，可以把描述质点系或刚体运动的力学问题化为求解常微分方程的数学问题. 计算无线电线路或者人造卫星轨道，研究飞机飞行的稳定性，以及解释化学反应过程，这一切都可以通过研究和求解常微分方程来进行 常微分方程的最重要的、最有意义的应用在于**振动理论** (oscillations, theory of) 和**自动控制理论** (automatic control theory) 而应用问题本身又是涌现新的常微分方程理论问题的源泉，例如，**最优控制的数学理论** (optimal control, mathematical theory of) 实际上就是这样产生的.

在下面的叙述中，t 表示自变量，$x, y, z, \cdot$ 表示未知函数，$x, x, \quad, x^{(n)}$, 表示未知函数对 t 的导数

在数学分析中已经遇到最简单的常微分方程，求给定的连续函数 $f(t)$ 的原函数，实质上就是这样一个问题 求未知函数 $x=x(t)$，使其满足方程

$$x=f(t) \qquad (1)$$

为了证明这个方程是可解的，需要建立专门的工具——**Riemann 积分** (Riemann integral) 理论.

方程 (1) 的一个自然推广是已解出导数的一阶常微分方程

$$x=f(t, x), \qquad (2)$$

其中 $f(t, x)$ 是在平面 (t, x) 的某个区域 D 内定义的已知函数. 许多实际问题都能化为解（或者如通常所说的，积分）这个方程 在某个区间 I 上定义的可微函

数 $x=x(t)$，如果满足条件

$$(t,x(t))\in D,\ t\in I,$$

$$x'(t)=f(t,x(t)),\ t\in I,$$

则称为常微分方程（2）的解（solution）．在几何上，方程（2）的解可以表示为平面（t,x）上的方程为 $x=x(t)(t\in I)$ 的一条曲线．这条曲线称为**积分曲线**（integral curve），在其每一点上都具有切线，并且整个处于区域 D 内．方程（2）本身在几何上可以解释为区域 D 内的方向场（field of directions），如果通过每一点（t,x）$\in D$ 都画一微小线段 $l_{t,x}$，使其角系数等于 $f(t,x)$，则得到方程（2）的方向场．任何积分曲线 $x=x(t)$，在其每一点（$t,x(t)$）上都与线段 $l_{t,x(t)}$ 相切．

在什么情况下方程（2）才具有解呢？下述存在性定理（existence theorem）回答了这个问题．如果 $f(t,x)\in C(D)$（即在 D 内是连续的），则通过任何点（t_0,x_0）$\in D$，至少有一条方程(2)的连续可微的积分曲线，而且每一条这样的曲线，都可以向两个方面延拓直至完全处于 D 内而本身又包括着点（t_0,x_0）的任何闭子区域的边界．换句话说，对于任何点（t_0,x_0）$\in D$，至少能够找到一个不可延拓的解 $x=x(t)(t\in I)$，使得 $x(t)\in C^1(I)$（即在 I 内 $x(t)$ 及其导数 $x'(t)$ 是连续的），

$$x(t_0)=x_0, \tag{3}$$

且当 t 趋向于区间 I 的右端或左端时，$x(t)$ 趋向于区域 D 的边界．

一个非常重要的理论问题是：说明应对常微分方程的右端做怎样一些假设，并且给方程增添怎样一些附加条件，才能使它具有唯一的解．下述存在和唯一性定理（existence and uniqueness theorem）：如果 $f(t,x)\in C(D)$ 在 D 内对 x 满足 **Lipschitz 条件**（Lipschitz condition），而（t_0,x_0）$\in D$，则方程（2）具有满足条件（3）的唯一不可延拓的解．特别是，如果这样的方程（2）的两个解 $x_1(t)$（$t\in I_1$）和 $x_2(t)$（$t\in I_2$）即使对于一个值 $t=t_0$ 彼此重合，即 $x_1(t_0)=x_2(t_0)$，则

$$x_1(t)=x_2(t),\ t\in I_1\cap I_2$$

这个定理的几何含义是：整个区域 D 被方程（2）的彼此不相交的积分曲线所覆盖．即使对函数 $f(t,x)$ 所做的假设更弱一些，解的唯一性也能保证（[6]）．

关系式（3）称为初始条件（initial condition）．数 t_0 和 x_0 称为方程（2）的解的初始值（initial values），而点（t_0,x_0）称为相应积分曲线的初始点（initial point）．求方程(2)满足初始条件(3)(或者说，具有初始值 t_0,x_0)的解的问题，称为 **Cauchy 问题**（Cauchy problem）或初值问题（initial value problem）．上述定理给出了 Cauchy 问题（2），（3）具有唯一解的充分条件．

一些实际问题往往导出常微分方程组（system of ordinary differential equations），其中包含着同一自变量的几个未知函数以及它们的导数．作为方程（2）的自然推广，可以考虑 n 阶微分方程组的正规形式（normal form）

$$x^{i\prime}=f^i(t,x^1,x^2,\cdots,x^n),\ i=1,2,\cdots,n, \tag{4}$$

其中 $x^1,x^2,\cdots,x^n$ 是自变量 t 的未知函数，而 $f^i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $n+1$ 个变量的已知函数．记

$$\mathbf{x}=(x^1,\cdots,x^n),$$

$$\mathbf{f}(t,\mathbf{x})=(f^1(t,\mathbf{x}),\cdots,f^n(t,\mathbf{x})),$$

则方程组(4)可以写成向量形式

$$\mathbf{x}'=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \tag{5}$$

方程组(4)或向量方程（vector equation）（5）的解是向量函数

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)=(x^1(t),\cdots,x^n(t)),\ t\in I. \tag{6}$$

每个解可以表示为（$n+1$）维空间（$t,x^1,\cdots,x^n$）中的一条积分曲线——向量函数（6）的图形．

方程（5）的 Cauchy 问题是：求它的满足初始条件

$$x^1(t_0)=x_0^1,\ \cdots,x^n(t_0)=x_0^n,$$

即

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_0 \tag{7}$$

的解，为方便起见，可以把 Cauchy 问题（5），(7)的解写成下列形式

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,t_0,\cdots,x_0),\ t\in I \tag{8}$$

关于方程（5）的存在和唯一性定理，其表达方式与关于方程（2）的完全相同．

最一般的（已解出所有未知函数的最高阶导数的）常微分方程组可以化为标准方程组．方程组（5）的一个重要的特殊类型是 n 个一阶线性常微分方程的方程组

$$\mathbf{x}'=A(t)\mathbf{x}+\mathbf{F}(t),$$

其中 $A(t)$ 是（$n\times n$）维矩阵．

在常微分方程的应用和理论中具有重要意义的情况是自治常微分方程组（见**自治系统**（autonomous system））

$$\mathbf{x}'=\mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{9}$$

即右端不明显依赖自变量 t 的正规方程组．在这种情况下，把方程（6）看成一条曲线的参数表示式，而把方程组的解看成 n 维相空间（$x^1,x^2,\cdots,x^n$）中的相轨

线，是很方便的．如果 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ 是方程组 (9) 的解，则函数 $\mathbf{x}=x(t+c)$ 也满足这个方程组，其中 c 是任意常数．

方程 (2) 的另一个重要推广是已解出最高阶导数的 n 阶常微分方程

$$y^{(n)}=f(t,y,y,\quad ,y^{(n-1)}) \tag{10}$$

这种方程的一个重要的特殊类型是线性常微分方程

$$y^{(n)}+a_1(t)\,y^{(n-1)}+\quad +a_{n-1}(t)\,y+a_n(t)\,y=F(t)$$

如果由公式

$$x^1=y,\quad x^2=y,\quad ,\ x^n=y^{(n-1)}$$

引入自变量 t 的一些新的未知函数，则方程 (10) 可以化为 n 个一阶方程的方程组．

例如，如果方程 (10) 描述某个对象的动态性质，这个对象从对应于一定的初始状态的某一确定时刻 $t=t_0$ 开始运动，则应给方程 (10) 增添下列附加条件

$$y(t_0)=y_0,\ y(t_0)=y_0,\quad ,\ y^{(n-1)}(t_0)=y_0^{(n-1)} \tag{11}$$

求 n 次可微函数 $y=y(t)$ $(t\in I)$，使得方程 (10) 关于这些函数对一切 $t\in I$ 成为恒等式，且满足初始条件 (11)，这个问题称为 Cauchy 问题

存在和唯一性定理　如果

$$f(t,u_1,\quad ,u_n)\in C(D),$$

且对 $u_1,u_2,\quad ,u_n$ 满足 Lipschitz 条件，而

$$(t_0,y_0,y_0,\quad ,y_0^{(n-1)})\in D,$$

则 Caychy 问题 (10)，(11) 存在唯一的解

Cauchy 问题并未包括对于高阶方程 (10)（以及方程组 (5)）需要研究的一切问题　当对自变量的某些不同的值给出所求的未知函数 $y(t)$ 及其导数（或导数之间的关系式）的值时，具体的物理问题和技术问题所涉及的往往不是初始条件，而是另一类附加条件即所谓边界条件（boundary conditions）．例如，在**捷线**（brachistochrone）问题中，需要把微分方程

$$2yy+y^2+1=0$$

在边界条件 $y(a)=A$，$y(b)=B$ 下进行积分．求 **Duffing 方程**（Duffing equation）的周期为 2π 的解，归结为求这个方程满足周期性条件 $y(0)=y(2\pi)$，$y(0)=y(2\pi)$ 的解　当研究平板的层流绕流时，遇到这样的问题

$$y+yy=0,\ y(0)=y(0)=0,$$

$$当\ t\to\infty\ 时，\ y\to 2$$

对于高阶常微分方程和常微分方程组，求满足不同于初始条件 (11) 的附加条件的解的问题，称为**边值问题**（boundary value problem）　一个边值问题的解的存在和唯一性的理论分析，对于涉及这个边值问题的实际问题具有重要意义，因为它可以说明在对实际问题进行数学描述时所做的假设，同数学描述的相应完善程度是否一致　**Sturm-Liouville 问题**（Sturm-Liouville problem）是一个重要的边值问题　线性方程和方程组的边值问题，同常微分算子的**本征值**（eigen value）和**本征函数**（eigen function）问题，以及**谱分析**（spectral analysis）有着密切的联系

常微分方程论的主要任务是研究这种方程的解　但是，研究常微分方程的解意味着什么呢？对于这个问题，在不同时代有不同的理解．最初，力图用求积法来实现方程的积分，即求得一个封闭公式，通过初等函数及其积分给出某个特定的解对 t 的依赖关系的（显式、隐式或参数形式的）表达式．如果能够求出这样的公式，那么对于数值计算和研究解的性质是会大有帮助的．描述给定方程的全体解的集合具有特殊的意义　在十分一般的假设下，存在满足方程 (5) 的一个依赖于 n 个任意独立参数的向量函数族．如果这个函数族的形式是

$$\mathbf{x}=\varphi(t,c_1,\quad ,c_n),$$

则函数 φ 称为微分方程 (5) 的通解 (general solution)

但是，在 19 世纪中叶，出现了一些不能用求积法积分的常微分方程的例子　人们发现，只有少数几类方程才能求出封闭形式的解　(例如，见 **Bernoulli 方程**（Bernoulli equation)，**全微分方程**（differential equation with total differential)，**常系数线性常微分方程**（linear ordinary differential equation with constant coefficients)　于是，对于一些最重要的、经常遇到的、不能用积分法求解的方程（例如，**Bessel 方程**（Bessel equation))，开始进行详细的研究，对于这些方程的解，引入了特殊的符号，研究了它们的性质，还编制了数值表．这样，就出现了许多**特殊函数**（special function).

由于实际需要，还发展了常微分方程的近似积分法，例如**逐次逼近法**（sequential approximation, method of)、**Adams 法** (Adams method) 等等．此外，还提出了这些方程的图解积分法和机械积分法．对于许多可供选择的常微分方程问题的数值解法进行了数学分析（见**常微分方程的近似解法**（differential equations, ordinary, approximate methods of solution of))．这些方法都是方便适用的算法，并可以有效地估计其精确度，采用现代计算技术已有可能经济而迅速地求得每个问题的数值解．

但是，对于一个具体的方程，应用数值方法只能在自变量变化的有限区间上给出有限个特解　它们不

能回答这样的问题 解的渐近性如何，给定的方程是否存在周期解或**振动解**(oscillatıng solutıon)．可是，在许多实际问题中，重要的是要确定在自变量变化的无限区间上解的特性，研究积分曲线的全局状态．因此，常微分方程论的研究重点已转向考察方程的解的性状中的一般特点，探索根据微分方程本身而不必对它进行积分就能揭示解的全局性质的研究方法

这一切构成了在19世纪末叶建立的、正在蓬勃发展的**微分方程定性理论**(qualıtatıve theory of dıfferentıal equatıons)的主题．

说明常微分方程 Chauchy 问题是否适定，具有重要的意义．因为，在具体问题中，初始值总是不能完全确定地给出，所以找到保证初始值的微小变化只能引起解的微小变化的条件，就很重要了．下述关于解对初始值的连续依赖性(contınuous dependence of the solutıons on ınıtıal values)的定理成立 设(8)是方程(5)的解，其中 $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})\in C(D)$，且对 $\mathbf{x}$ 满足 Lıpschıtz 条件，这时，对于任何 $\varepsilon>0$ 和任何紧区间 $J\subset I$，$t_0\in J$，可以找到这样的 $\delta>0$，使得对于一切满足 $|\mathbf{x}_0^*-\mathbf{x}_0|<\delta$ 的 $\mathbf{x}_0^*$，这个方程的解 $x(t,t_0,\mathbf{x}_0^*)$ 在 J 上有定义，且对一切 $t\in J$，有

$$|\mathbf{x}(t,t_0,\mathbf{x}_0^*)-\mathbf{x}(t,t_0,\mathbf{x}_0)|<\varepsilon \qquad (12)$$

换句话说，如果自变量在一个确定的紧区间上变化，那么当初始值的变化足够小时，在整个这个区间上解的变化也足够小．这个结果可以推广，从而得到保证常微分方程的解对初始值的可微性的条件(见**解的可微性(微分方程的)**(dıfferentıabılıty of solutıons (of dıfferentıal equatıons)))

但是，上述定理并不能完全解决一切实际应用问题，因为其中所说的只是在自变量变化的紧区间上的情况．然而，在很多场合(例如，在受控运动理论中)，需要讨论 Cauchy 问题(5)，(7)对于一切 $t\geqslant t_0$ 定义的解，即说明这个解在无限区间 $t\geqslant t_0$ 上关于初始值的微小扰动的稳定性，也就是说，需要得到保证不等式(12)对于一切 $t\geqslant t_0$ 成立的条件 当研究具体系统的平衡位置或定常状态的稳定性时，就会产生这样的问题．当初始值的偏离足够微小时，在无限区间 $[t_0,\infty)$ 上只能产生微小变化的解，称为 Ляпунов 稳定的(Lyapunov stable)(见 **Ляпунов 稳定性**(Lyapunov stabılıty))

当推导描述真实过程的常微分方程时，总是要忽略某些因素，进行某种程度的理想化 换句话说，常微分方程只能近似地描述实际过程 例如，当研究电子管振荡器的工作状态时，在某些假设之下得到 **van der Pol 方程**(van der Pol equatıon)，所做的这些假设并不完全符合实际情况．并且，在实际过程中，常常会受到干扰因素的影响，而在建立方程时实际上不可能考虑到这些因素，仅仅知道它们的影响是“微小的”．所以，重要的是说明当微分方程本身发生微小变化时，即当由方程(5)转变为考虑到微小修正项的扰动方程(perturbed equatıon)

$$\mathbf{x}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x})+\mathbf{R}(t,\mathbf{x})$$

时，解是如何变化的．可以证明，如果干扰项 $\mathbf{R}(t,\mathbf{x})$ 足够微小，那么在某一自变量变化的紧区间上(在与解对初始值的连续依赖性定理同样的假设下)解的变化是微小的 如果在无限区间 $t\geqslant t_0$ 上仍然有这个性质，则称解是在经常作用的干扰下稳定的(stable under constantly actıng perturbatıons)．

研究 Ляпунов 稳定性、在经常作用的干扰下的稳定性、以及如何进行修正，构成定性理论的一个极其重要的分支——**稳定性理论**(stabılıty theory)．在实用中最使人感兴趣的是这样的常微分方程组．当方程本身发生微小变化时，它们的解只发生微小变化，这种系统称为**粗系统**(rough system)

定性理论的另一重要课题是揭示在方程的整个定义域内其解族的性状 在自治系统(9)的情况下，这个问题就是绘制它的相图(phase pıcture)，即从整体上定性地描绘相空间中的一切相轨线 这种几何图形全面地表示出在所研究的系统中可能发生的一切运动的特性 因此，首要的任务是阐明平衡位置的邻域内轨线的性状，找出**分界线**(separatrıx)和**极限环**(lımıt cycle)．特别是，首先要找出稳定的极限环，因为它们对应于真实系统中的**自振动**(auto - oscıllatıon)．

任何真实系统都是由一些不同的参数来表征的，而这些参数往往以某些量 $(\varepsilon^1,\varepsilon^2,\ \ ,\varepsilon^k)=\varepsilon$ 的形式包含在描述系统性状的常微分方程组的右端

$$\mathbf{x}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x},\varepsilon) \qquad (13)$$

因为不能绝对准确地知道这些参数的值，所以重要的是说明保证方程(13)的解当参数 ε 发生微小扰动时的稳定性的条件 如果自变量在一个给定的闭区间上变化，那么在某些关于方程(13)的右端的自然的假设下，存在解对参数的连续的(甚至可微的)依赖性

阐明解对参数的依赖性，直接关系到当推导实际系统的数学模型——常微分方程组时所采取的理想化适用到何等程度的问题 理想化的一个典型例子是忽略小参数，如果当考虑小参数 ε 时得到方程组(13)，那么由于解对参数的连续依赖性，当研究系统在有限的一段时间内的性状时，不妨略去这个小参数，即作为一次近似，考虑比较简单的方程组

$$\mathbf{x}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x},0)$$

这个结果就是应用很广的**小参数法**(small parameter, method of the), **Крылов-Боголюбов 平均法** (Krylov-Bogolyubov method of averaging) 以及其他的微分方程渐近解法的基本原理 但是，当研究许多现象时，都会导出在导数项前**带小参数的微分方程** (differential equations with small parameter)

$$\varepsilon x=f(t,x,y),\ y=g(t,x,y).$$

一般地说，这里不可能假设 $\varepsilon=0$ 即使是想要粗略地表示在一段有限的区间内发生的现象，也是如此．

在常微分方程论中，还讨论上面列举的这些问题的一些富有成果的重要推广 首先，可以扩大 Cauchy 问题(2), (3)的解所在的函数类，规定解属于绝对连续函数类，证明存在这样的解 对实际应用特别有意义的一个问题是．在函数 $f(t,x)$ 关于 x 间断或多值的情况下求方程(2)的解，在这方面，最一般的问题是解**微分包含** (differential inclusion)

此外，还讨论比(10)更一般的未解出最高阶导数的 n 阶常微分方程

$$F(t,y,y,\quad,y^{(n-1)},y^{(n)})=0,$$

这个方程的研究同隐函数理论有着密切的联系

方程(2)联系着解在点 t 的导数同解在点 t 的值 $x(t)=f(t,x(t))$ 但是，在某些应用问题（例如，要求考虑执行机构的延迟效应的问题）中，得到**延迟常微分方程** (differential equations, ordinary, retarded)

$$x=f(t,x(t-\tau)),$$

这里，把解在点 t 的导数同解在点 $t-\tau$ 的值联系起来．研究这种方程以及更一般的**具有分布自变量的常微分方程** (differential equations, ordinary, with distributed arguments)，构成常微分方程论的一个专门分支．

自治系统(9)的相空间的研究，导致常微分方程的另一推广．把这个系统的通过点 x_0 的轨线写成 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)$ 的形式．如果使点 x_0 对应于点 $x(t,x_0)$，则得到相空间中的一个依赖于参数 t 的变换，它定义相空间中的一个运动 动力系统理论研究这种运动的性质 不仅可以在 Euclid 空间中而且可以在流形上来研究．例如，研究**环面上的微分方程** (differential equations on a torus)．

上面考虑的是实数域上的常微分方程（例如，求满足方程(2)的实变量 t 的实函数 $x(t)$）但是，对于一些常微分方程理论问题，采用复变量来研究是比较方便的．因此，进一步的自然推广是研究复数域上的常微分方程．例如，可以考虑方程

$$\frac{dw}{dz}=f(z,w),$$

其中 $f(z,w)$ 是 z 和 w 的解析函数，并提出下述问题求满足这个方程的复变量 z 的解析函数 $w(z)$．研究这样的方程、高阶方程和方程组，就是**微分方程解析理论** (analytic theory of differential equations) 的课题；特别是，其中包含对于数学物理十分重要的、涉及**二阶线性常微分方程** (linear ordinary differential equation of the second order) 的一些结果．

还可以考虑方程

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}), \tag{14}$$

这里假设 $\mathbf{x}$ 属于无限维 **Banach 空间** (Banach space) B，t 是实的或复的自变量，$\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ 是把积 $(-\infty,\infty)\times B$ 映射到 B 的算子．例如，可以把方程(14)解释为**无限阶微分方程组** (differential equations, infinite-order system of)，**抽象微分方程** (differential equation, abstract) 理论研究形如(14)的方程，这是常微分方程和**泛函分析** (functional analysis) 的交叉领域．特别是，包含有界或无界算子的线性微分方程

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=A(t)\mathbf{x}+\mathbf{F}(t)$$

具有重要意义，某些类型的**偏微分方程** (differential equation, partial) 能够写成这种方程的形式．

参考文献

[1] Kamke, E, Differentialgleichungen Losungsmethoden und Losungen, 1 Gewohnliche Differentialgleichungen, Chelsea, reprint, 1947 (中译本 E 卡姆克，常微分方程手册，科学出版社，1980).

[2] Coddington, E A and Levinson, N, Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955

[3] Lefschetz, S, Differential equations, geometric theory, Interscience, 1957

[4] Петровский, И Г, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Наука, 1970 (中译本 И Г 彼得罗夫斯基，常微分方程论讲义，人民教育出版社，1959)

[5] Понтрягин, Л С, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Наука, 1970 (中译本 Л С 庞特利雅金，常微分方程，上海科学技术出版社，1962)

[6] Sansone, G, Ordinary differential equations, 1-2, Zanichelli, 1948-1949

[7] Hartman, P, Ordinary differential equations, Birkhauser, 1982

Е Ф. Мищенко 撰

【补注】 一切轨道的集合 $\{x(t)\}\subset D$ 通常称为微分方程 $x=f(x)$ 的相图 (phase portrait)．对于在各种扰动下的稳定性来说，相图的某些特点的持久性，例如平衡的持久性 (persistence of equilibria) 和闭轨道的持久性 (persistence of closed orbits)，都是很重要的，一些结果，例如见[A4]，第 16 章．特别良好的粗系统是结构稳定系统 D 上的结构稳定微分方程 (structurally sta-

ble differential equation) $x=f(x)$ 是指这样的方程 如果 $x=g(x)$ 是足够接近的方程，也就是说，在适当的意义下 f 接近于 g，则存在 D 到其自身的同胚（即一一连续映射 $D \to D$，其逆映射也是连续的），使得 $x=g(x)$ 的相图对应于 $x=f(g)$ 的相图 更详细的情况，见 [A4] 和粗系统（rough system）

对具有不连续右端的微分方程的全面考虑见 [A5]

参考文献

[A1] Arnol'd, V I, Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations, Springer, 1983（译自俄文）

[A2] Arnol'd, V I, Ordinary differential equation, Mir, 1973（译自俄文，中译本 B И 阿诺尔德，常微分方程，科学出版社，1985）

[A3] Hale, J K, Ordinary differential equations, Wiley, 1969（中译本 J K Hale，常微分方程，人民教育出版社，1980）.

[A4] Hirsch, M W and Smale, S, Differential equations, dynamical systems and linear algebra, Acad Press, 1974

[A5] Filippov, A F, Differential equations with discontinuous right-hand sides, Kluwer, 1988（译自俄文）

张鸿林 译

偏微分方程 [differential equation, partial, дифференциальное уравнение с частными производными]

形如

$$F(x, \quad, p_{i_1 \quad i_n}, \quad)=0 \tag{1}$$

的方程，其中 F 是 Euclid 空间 $E_n\,(n\geqslant 2)$ 中区域 D 的点 $x=(x_1, \quad, x_n)$ 和实变量

$$p_{i_1 \quad i_n} \equiv \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \quad \partial x_n^{i_n}}$$

的已知实值函数，这里 u 是未知函数，$i_1, \cdot, i_n$ 是非负整数指标，$\sum_{j=1}^n i_j=k$，$k=0, \quad, m, m\geqslant 1$，在 F 的导数

$$\frac{\partial F}{\partial p_{i_1 \quad i_n}}, \quad \sum_{j=1}^n i_j=m$$

中至少有一个不等于零，自然数 m 称作方程 (1) 的阶 (order).

定义在区域 D（在那里给出方程 (1)）中的函数 u，如果它和它的出现于方程 (1) 中的偏导数都连续，且把 (1) 变为恒等式，那就称它为正则解 (regular solution). 在偏微分方程理论中，不仅正则解是重要的，而且在孤立点附近或在特殊类型流形的邻近不再是正则的解，特别地，如基本解 (elementary (fundamental) solutions)，也是重要的. 它们允许构造很大一类正则解（所谓的位势），并建立它们的结构的和定性的性质

在 F 关于变量

$$p_{i_1 \quad i_n}, \quad \sum_{j=1}^n i_j=m$$

的一阶偏导数的连续性假定下，关于实参数 $\lambda_1, \quad, \lambda_n$ 的 m 次型

$$k(\lambda_1, \cdot, \lambda_n)=\sum \frac{\partial F}{\partial p_{i_1 \quad i_n}} \lambda_1^{i_1} \quad \lambda_n^{i_n}, \quad \sum_{j=1}^n i_j=m \tag{2}$$

在形如 (1) 的方程理论中起着重大作用，它称作方程 (1) 的特征形式 (characteristic form).

如果 F 是诸变量 $p_{i_1 \quad i_n}$ 的线性函数，那么称方程 (1) 为线性的 (linear). 二阶线性偏微分方程可以写成

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + Cu=f, \tag{3}$$

其中 A_{ij}, B_j, C 和 f 都是在区域 D 上给定的点 x 的实值函数. 如果对所有 $x\in D$ 有 $f(x)=0$，那么称方程 (3) 为齐次的 (homogeneous) 在方程 (3) 的情形下，形式 (2) 是二次型

$$Q(\lambda_1, \quad, \lambda_n)=\sum_{i,j=1}^n A_{ij}\lambda_i\lambda_j,$$

它的系数 A_{ij} 仅依赖于点 $x\in D$ 在每个点 $x\in D$ 处，借助于变量的非奇异仿射变换 $\lambda_i=\lambda_i(\xi_1, \quad, \xi_n)(i=1, \cdot, n)$ 可将二次型 Q 化为标准形

$$Q=\sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i^2,$$

其中系数 $\alpha_i(i=1, \quad, n)$ 取值 $1, -1, 0$，且负系数的个数（惯性指标 (index of inertia) 和零系数的个数（特征形式的亏量 (defect of a characteristic form)）都是仿射不变量. 如果所有的 $\alpha_i=1$ 或者所有的 $\alpha_i=-1$，即如果型 Q 相应地是正定的或者负定的，那么方程 (3) 在点 $x\in D$ 处称作椭圆型的 (elliptic). 如果系数 α_i 之一是负的，所有其他的都是正的（或相反），那么方程 (3) 在点 x 处称作双曲型的 (hyperbolic). 如果诸系数 α_i 中有 $l(1<l<n-1)$ 个是正的，其余 $n-l$ 个是负的，那么方程 (3) 在点 x 处称作超双曲型的 (ultrahyperbolic) 如果这些系数中至少有一个（但不是全部）为零，那么方程 (3) 称作在 x 点处是抛物型的 (parabolic). 如果方程 (3) 在其定义域 D 的每一点处是椭圆型的、双曲型的或抛物型的，那么就称方程 (3) 在这个区域 D 中分别是椭圆型的、双曲型的或抛物型的. 区域 D 中的椭圆型方程 (3) 称作是一致椭圆型的 (uniformly elliptic)，如果存在同号实数 k_0 和 k_1，使得

$$k_0\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leqslant Q(\lambda_1, \cdot, \lambda_n) \leqslant k_1\sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

对所有 $x\in D$ 成立．如果方程 (3) 在区域 D 的不同部分属于不同类型，那么就称它在这个区域中是混合型方程 (equation of mixed type)．

Laplace 方程 (Laplace equation)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0,$$

热传导方程 (thermal-conductance equation)

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\frac{\partial u}{\partial x_n}=0,$$

和**波动方程** (wave equation)

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0$$

分别是二阶线性椭圆型方程、抛物型方程和双曲型方程的典型例子 (详见**线性双曲型偏微分方程和方程组** (linear hyperbolic partial differential equation and system)，**线性抛物型偏微分方程和方程组** (linear parabolic partial differential equation and system)，**线性椭圆型偏微分方程和方程组** (linear elliptic partial differential equation and system))

Tricomi 方程 (Tricomi equation)

$$x_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=0$$

在 (x_1,x_2) 平面上任何与轴 $x_2=0$ 有非空交集的区域中是混合型方程 (详见**混合型微分方程** (mixed type differential equation))．

在 m 阶线性偏微分方程

$$\sum\alpha_{i_1\cdots i_n}(x)\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}+L_1u=f,\ \sum_{j=1}^{n}i_j=m \tag{4}$$

的情形下，其中 L_1 是低于 m 阶的线性偏微分算子，形式 (2) 有如下形式

$$k(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\sum\alpha_{i_1\cdots i_n}(x)\lambda_1^{i_1}\cdots\lambda_n^{i_n}. \tag{5}$$

如果对一已给的值 $x\in D$，可以找到这样的仿射变换 $\lambda_i=\lambda_i(\mu_1,\cdots,\mu_n)(i=1,\cdots,n)$，经变换后由 (5) 所得到的形式只包含 $l\,(0<l<n)$ 个 μ 变量，那么就称方程 (4) 在点 x 处是抛物退化的 (parabolically degenerate)．如果抛物退化不存在，且如果锥流形

$$k(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=0 \tag{6}$$

除 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$ 外没有实根，那么方程 (4) 在点 x 处称作椭圆型的 (elliptic)．方程 (4) 称作在点 x 处是双曲型的，如果在变量 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的空间中存在一直线 δ，它在由 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的仿射变换所得的新变量 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 中被取作坐标轴，那么方程 (6) 关于沿 δ 变化的坐标 (在其余的 μ 坐标的任意选择下) 将正好有 m 个 (单的或重的) 实根．

类似地，在非线性情形下方程 (1) 的类型也按形式 (2) 的特性来进行分类．由于在此情形下形式 (2) 的系数除依赖于 x 外还依赖于所求的解及其导数，因此型的分类只对这个解有意义．亦见**非线性偏微分方程** (non-linear partial differential equation)．

如果 F 是具有分量

$$F_i(x,\cdots,p_{i_1\cdots i_n},\cdots),\ i=1,2,\cdots,N$$

的 N 维向量 $F=(F_1,\cdots,F_N)$，它依赖于 $x\in D$ 和 M 维向量

$$p_{i_1\cdots i_n}=(p^1_{i_1\cdots i_n},\cdots,p^M_{i_1\cdots i_n})=\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}},$$

那么向量方程 (1) 称作对未知函数 $u_1,\cdots,u_M$ 或对未知向量 $u=(u_1,\cdots,u_M)$ 的偏微分方程组 (system of partial differential equations)．方程组的方程中出现的未知函数导数的最高阶称作这个方程组 (方程) 的阶 (order)．如果 $M=N$，且方程组 (1) 的每个方程的阶都是 m，那么行列式

$$k(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\det\sum_{i_1,\cdots,i_n}\left\|\frac{\partial F_i}{\partial p^j_{i_1\cdots i_n}}\right\|\lambda_1^{i_1}\cdots\lambda_n^{i_n} \tag{7}$$

(其中

$$\left\|\frac{\partial F_i}{\partial p^j_{i_1\cdots i_n}}\right\|,\ i,j=1,\cdots,N,\ \sum_{k=1}^{n}i_k=m$$

是方阵) 是关于实标量参数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的 Nm 次型，被称作方程组 (1) 的特征行列式 (characteristic determinant)．方程组 (1) 的型的分类正如对单个 m 阶方程那样按 (7) 的特性来进行．出现在方程 (1) 左端的量可以是复的．复的偏微分方程显然可用实的偏微分方程组来代替．

偏微分方程并不总有解．但是，在实际应用中所碰到的方程常常有整族解．当这样的方程由控制自然现象的一般规律导出时，附加在所求解上的条件自然出现．寻求满足这些条件的正则解正是偏微分方程理论的主要任务．所求解应该满足的问题的条件本质地依赖于所考虑方程的型．

对椭圆型方程通常考虑所谓的边值问题，原则上它可简洁陈述如下 (见**边值问题，椭圆型方程** (boundary value problem, elliptic equations))．在区域 D 中求方程 (1) 的正则解 $u(x)$，它满足条件

$$f\left(x,u,\cdots,\frac{\partial^l u}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}},\cdots\right)+$$

$$+\int_S H\left(x,t,u(t),\cdots,\frac{\partial^l u(t)}{\partial t_1^{i_1}\cdots\partial t_n^{i_n}},\cdots\right)ds_t=0, \tag{8}$$

其中 S 是区域 D 的边界，f 和 H 是已给的实值函数，ds_t 是曲面 S 的面积元素，而当 $x \in S$ 时，

$$\frac{\partial^l u}{\partial x_1^{l_1} \cdots \partial x_n^{l_n}}, \quad \sum_{j=1}^n l_j = l, \quad l < m$$

理解为函数 $u(x)$ 的相应的导数当点 x 从区域 D 的内部趋于 S 时所得到的极限

在此一般形式的提法中，问题 (8) 仍旧并非是完全可解的 已经研究得相当详细的是这个问题的这样的特殊情形，就是对满足一致椭圆性条件的线性方程的所谓的第一和第二边值问题 (见 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem) 和 **Neumann 问题** (Neumann problem)).

对椭圆型方程的边值问题，数据的支集是求解域的整个边界．与此不同，在广泛一类双曲型和抛物型方程的情形下，空间 E^n 的非闭有向曲面可作为补充数据的支集，而且未知解的定义域本质地依赖于这样的曲面 例如，这里包括具有初始数据的 **Cauchy 问题** (Cauchy problem) 和特征 Cauchy 问题 (见 **Cauchy 特征问题** (Cauchy characteristic problem))．对混合型方程的边值问题是用特殊方式给出的 在偏微分方程理论中广泛一类混合问题引起很大兴趣 见**双曲型方程和方程组的混合和边值问题** (mixed and boundary value problems for hyperbolic equations and systems)，**抛物型方程和方程组的混合和边值问题** (mixed and boundary value problems for parabolic equations and systems)

一个问题被认为在古典意义下适定的，如果它有唯一解，且解连续地依赖于问题的数据 不满足这样要求的问题，直到不久前还被认为是无意义的 从 20 世纪 40 年代开始，广阔范围的物理、力学和技术中的数学问题使得有必要不仅要拓广偏微分方程问题的适定性的概念，而且要拓广解本身的概念．引进了所谓的广义解．除偏微分方程问题精确解的存在性和唯一性问题外，近似解的概念和实际计算方法在应用中变得相当重要了

在历史上，与积分变换方法 (见 **Fourier 积分** (Fourier integral)) 紧密相关的分离变量法 (method of separation of variables)，或 **Fourier 法** (Fourier method)，是允许建立一类重要的偏微分方程问题的级数解的首批方法之一．这个方法的应用导致了**微分算子的谱理论** (spectral theory of differential operators) 的发展

稍迟些发展了**拟基本解方法** (parametrix method)，在它基础上建立了**位势法** (potentials, method of)．这方法应用积分方程的工具来研究椭圆型方程的边值问题．复变函数论方法成功地用于两个独立变量的椭圆型方程的研究，它也可以看作是拟基本解法的重要发展 见**偏微分方程，复变方法** (differential equation, partial, complex-variable methods)

如果所考虑的偏微分方程是某个多维变分学问题的 **Euler 方程** (Euler equation)，那么通常应用变分法．如果 Euler 方程是椭圆型的，那么这样的方法是十分方便的．亦见**偏微分方程，变分解法** (differential equation, partial, variational methods)．

从 20 世纪 30 年代开始，偏微分方程就广泛运用泛函分析方法来研究，其中最常用的是 **Schauder 法** (Schauder method) 及其进一步的发展——先验估计方法．应用这些方法可以对线性的和某些类的非线性偏微分方程比较容易地建立弱解和强解的存在性．见**偏微分方程，泛函解法** (differential equation, partial, functional methods)，**强解** (strong solution)，**弱解** (weak solution)

对偏微分方程近似解的计算最常用的方法是**有限差分演算** (finite-difference calculus)．亦见**双曲型偏微分方程，数值解法** (hyperbolic partial differential equation, numerical methods)，**抛物型偏微分方程，数值解法** (parabolic partial differential equation, numerical methods)，**椭圆型偏微分方程，数值解法** (elliptic partial differential equation, numerical methods)．

参考文献

[1] Bers, L , John, F and Schechter, M , Partial differential equations, Interscience, 1964

[2] Бицадзе, А В , Уравнения математической физики, М , 1976 (英译本 Bitsadze, A V , The equations of mathematical physics, Mir, 1980)

[3] Владимиров, В С , Уравнения математической физики, 2 изд , М , 1971 (英译本 Vladimirov, V S , Equations of mathematical physics, Mir, 1984)

[4] Courant, R and Hilbert, D , Methods of mathematical physics, Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (译自德文) (中译本 R 柯朗, D 希尔伯特, 数学物理方法, II , 科学出版社, 1977)

[5] Тихонов, А Н , Самарский, А А , Уравнения математической физики, 4 изд , М , 1972 (中译本 А Н 吉洪诺夫, А А 萨马尔斯基, 数学物理方程, 上、下册, 高等教育出版社, 1956)

А В Бицадзе 撰

【补注】 近些年来在偏微分方程理论中经历了一场革命，引进了许多重要的技巧，例如运用伪微分算子或 Fourier 积分算子来解，见 [A8]

参考文献

[A1] Garabedian, P R , Partial differential equations, Wiley, 1967

[A2] Bitsadze, A V , Equations of mixed type, Pergamon, 1964

[A3] Bitsadze, A V , Boundary value problems for second-order elliptic equations, North-Holland, 1968 (译自俄文)

[A4] John, F , Partial differential equations, Springer, 1971 (中译本 F 约翰, 偏微分方程, 第 4 版, 科学出版

社、1986)

[A5] Mikhailov, V P, Partial differential equations, Mir, 1978(译自俄文)

[A6] Friedman, A, Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, 1964(中译本 A 弗里德曼，抛物型偏微分方程，科学出版社，1984)

[A7] Петровский, И Г, Лекции об уравнениях с частными производными M, 1970(中译本 И Г 彼得罗夫斯基,偏微分方程讲义，人民教育出版社，第2版，1965).

[A8] Hormander, L, The analysis of linear partial differential operators, 1－4, Springer, 1983－1985.

[A9] Gilbarg, D and Trudinger, N S, Elliptic partial differential equations of second order, Springer, 1977, 2nd ed 1983(中译本 D 吉耳巴格，N S 塔丁格，二阶椭圆型偏微分方程，上海科学技术出版社，1981)

孙和生 译 陆柱家 校

偏微分方程，复变方法[differential equation, partial, complex-variable methods, дифференциальное уравнение с частными производными, методы комплексного переменного]

解椭圆型偏微分方程的方法，其中解是用一个复变量的解析函数来表达的

复变量 $z=x+iy$ 的解析函数

$$w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

的理论是满足 Cauchy-Riemann 方程组 $u_x-v_y=0$, $u_y+v_x=0$ 的两个实值函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的理论，实际上这方程组等价于 Laplace 方程

$$\Delta u\equiv u_{xx}+u_{yy}=0$$

从20世纪30年代起，解析函数方法就强烈地渗透在椭圆型方程的一般理论中．这导致建立新的分析分支．主要是本质地扩充了解析函数经典理论的范围及其应用．在此领域中起主要作用的是十分广泛的一类椭圆型方程的所有解用单复变量解析函数来表达的各种公式 对于线性方程，这个表达式是利用由方程系数表达的某些线性算子来实现的 这些方式使得将解析函数的性质推广到椭圆型方程的解上成为可能，而且常常逐字逐句地保持了这样一些重要性质，如唯一性定理、辐角定理、Liouville 定理等等．Taylor 和 Laurent 级数，Cauchy 积分公式，紧性原理，解析延拓原理等等，也以自然的方式推广了

复的表达公式可用来构作各种不同族的具有这样或那样给定性质的方程的特解 例如，可以构作不同类的具有点奇性的所谓基本解，它们被用来得到不同的积分公式，也可以构作所谓的特解的完全系，后者具有这样的性质 利用它的线性组合可以逼近任何解．复的表达公式还可用来将广泛的一类边值问题化为等价的解析函数的边值问题，同时还可建立等价的(Fredholm 型或奇异的）积分方程问题 这方法容许研究非 Fredholm 型边值问题，并得到正则可解性的条件和指标的明显公式．见**边值问题，复变方法** (boundary value problem, complex-variable methods).

解析系数的椭圆型方程．设已给二阶椭圆型方程

$$\Delta u+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=0,\quad(1)$$

其中 a, b 和 c 是 $z=x+iy$ 平面的某个区域中的实变量 x,y 的解析函数 将系数解析延拓到独立复变量 $z=x+iy$, $\zeta=x-iy$ 的区域中，方程 (1) 就化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\zeta}+A(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial z}+B(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial\zeta}+C(z,\zeta)u=0\quad(2)$$

单连通域 D_0 称作方程 (1) 的基本域 (fundamental domain), 如果 A, B 和 C 是柱形域 $(D_0,\overline{D_0})$ 中两个独立变量的解析函数，其中 $\overline{D_0}$ 是 D_0 关于实轴镜面反射的象域．

如果 $D\subset D_0$ 是单连通域，那么方程 (1) 的所有在区域 D 中正则的解用公式表为

$$u(x,y)=\mathrm{Re}\left\{G(z,z_0,z,\bar z)\Phi(z)-\right.$$
$$\left.-\int_{z_1}^{z}\Phi(t)\frac{\partial}{\partial t}G(t,\overline{z_0},z,\bar z)dt\right\},\quad(3)$$

其中 $\Phi(z)$ 是区域 D 中任意的全纯函数，z_1, $z_0\in D$ 是任意固定的点，在柱形域 $(D_0,\overline{D_0},D_0,\overline{D_0})$ 中四个独立复变量的解析函数 $G(z,\zeta,t,\tau)$ 称作方程 (1) 的 Riemann 函数 (Riemann function)．它是下面 Volterra 型积分方程的解

$$G(z,\zeta,t,\tau)-\int_{\tau}^{\zeta}A(z,\eta)G(z,\eta,t,\tau)d\eta-$$
$$-\int_{t}^{z}B(\xi,\zeta)G(\xi,\zeta,t,\tau)d\xi+\quad(4)$$
$$+\int_{t}^{z}d\xi\int_{\tau}^{\zeta}C(\xi,\eta)G(\xi,\eta,t,\tau)d\eta=1.$$

由公式(3)所实现的方程 (1) 的解族 $\{u\}$ 和全纯函数族 $\{\Phi\}$ 之间的对应关系是互为单值的，只要 Φ 的虚部值在区域 D 的给定点 z_1 上固定．当 $z_1=z_0=0$ 时有反演公式

$$\Phi(z)=2u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)-u(0,0)G(0,0,z,0).$$

方程 (4) 可以用逐次逼近法来解 用这个方法可以求出 Riemann 函数的近似表达式．

若区域 D 是多连通的，公式 (3) 一般说来给出多值解．为了在此情形下得到方程 (1) 的所有单值解，(3) 中的 Φ 应该取确定形式的多值函数

设 D 是二连通域 $(D\subset D_0)$, D' 是将 D 扩充为单连

通域的有界连续统．于是方程（1）的所有在区域D单值的解由下面的公式给出

$$u(x,y)=\mathrm{Re}\{G(z,\overline{z_0},z,\overline{z})\Phi(z)-$$
$$-\int_{z_1}^{\overline{z}}\Phi(t)H(t,\overline{z_0},z,\overline{z})\,dt\},\tag{5}$$

其中$z_1\in D$, $z_0\in D'$是定点，$\Phi(z)$是下面形式的多值解析函数

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+[\alpha G(z_0,\overline{z_0},z,\overline{z})-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L\overline{\Phi_0(t)}\,H^*(z_0,t,z,\overline{z_0})\,dt]\ln(z-z_0)\ .$$

这里α是任意的实常数，$\Phi_0(z)$是区域D中任意的全纯函数，L是任意逐段光滑的简单闭曲线，位于D中且围绕着D'．函数H和H^*由下面的公式表达

$$H(t,\tau,z,\zeta)=\frac{\partial}{\partial t}G(t,\tau,z,\zeta)-B(t,\tau)G(t,\tau,z,\zeta),$$

$$H^*(t,\tau,z,\zeta)=\frac{\partial}{\partial\tau}G(t,\tau,z,\zeta)-A(t,\tau)G(t,\tau,z,\zeta)\ .$$

形如（3）的复表达式亦可推广到写成向量形式（1）的方程组，其中u是具有分量$u_1,\ \ ,u_n$的向量，a,b,c是n阶方阵，它的元是变量x,y的解析函数

在那样的域中，方程（1）至少有一个正解$u_0>0$，利用替代$u=u_0v$可将方程（1）化为下面的形式

$$\Delta v+av_x+bv_y=0$$

(这样的解在任一定点的小邻域中总存在，而且还在这样的任意域中存在，在那里有$c\leqslant0$）在此情形下，方程（1）等价于方程组

$$\begin{cases}u_x-v_y+au+bv=0,\\ u_y+v_x+cu+dv=0,\end{cases}\tag{6}$$

它是广义Cauchy-Riemann组的特别情形．引进复函数$w=u+iv$，这方程组可写为

$$\partial_{\overline{z}}w+A(z)w+B(z)\overline{w}=0,\ \ 2\partial_{\overline{z}}=\partial_x+i\partial_y\ .\tag{7}$$

如果系数A和B是某个柱形域（$D_0,\overline{D_0}$）（D_0是单连通域）中复变量z和ζ ($z=x+iy$, $\zeta=x-iy$)的解析函数，那么方程（6）的解在单连通域$D\subset D_0$中可用下面的公式表达

$$w(z)=\exp\left\{\int_{z_0}^{\overline{z}}A(z,\tau)d\tau\right\}\times$$
$$\times\left\{\Phi(z)+\int_{z_0}^{z}\widetilde{\Gamma}_1(z,\overline{z},t)\Phi(t)dt+\right.$$
$$\left.+\int_{\overline{z_0}}^{\overline{z}}\widetilde{\Gamma}_2(z,\overline{z},t)\,\Phi(t)dt\right\},\tag{8}$$

其中$\widetilde{\Gamma}_1$和$\widetilde{\Gamma}_2$是由A和B来表达的、它们各自变量的解析函数，它们可用逐次逼近法来构造，Φ是变量z的任意解析函数

在A和B是变量x和y的整函数的情形下，不论系数A和B在邻近无穷远处的性状如何，表达式（8）对z平面上任意的单连通域成立．

假设已给椭圆型方程

$$\Delta^n u+\sum_{k=1}^{n}\sum_{0\leqslant p+q\leqslant k}a_{pq}^{(k)}\frac{\partial^{p+q}\Delta^{n-k}u}{\partial x^p\partial y^q}=0,\tag{9}$$

其中$a_{pq}^{(k)}$是x，y的解析函数．如果D_0是方程（9）的基本域，那么这个方程在单连通域$D\subset D_0$中的任一正则解可用下面的公式来表达．

$$u(x,y)=\mathrm{Re}\{G(z,\overline{z_0},z,\overline{z})\Phi_0(z)-$$
$$-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{z_1}^{z}\Phi_k(t)\frac{\partial}{\partial t}G_k(t,\overline{z_0},z,\overline{z})dt\},\tag{10}$$

其中$\Phi_0,\ \ ,\Phi_{n-1}$是区域D中任意的全纯函数，

$$G_k(t,\tau;z,\zeta)=\frac{\partial^{2(n-k-1)}G(t,\tau,z,\zeta)}{\partial t^{n-k-1}\partial\tau^{n-k-1}},\ k=0,1,\ \ ,n-1\ .$$

这里G是方程（9）的复Riemann函数，它在柱形域（$D_0,\overline{D_0},D_0,\overline{D_0}$）中解析地依赖于复变量（$t,\tau,z,\zeta$）．当满足条件

$$\Phi_k(z_1)=\overline{\Phi_k(z_1)},\ \ k=0,1,\cdot,n-1$$

时，公式（10）实现了方程（9）的解族$\{u\}$和全纯函数族$\{(\Phi_0,\ \ ,\Phi_{n-1})\}$之间的互为单值的对应．如果$D$是多连通域，那么一般说来，公式（10）给出的是多值解　但是，正如二阶方程那样，可以改变这个公式形式，使得就在多连通域中也给出方程（9）的所有单值解　公式（10）亦推广到形如（9）的方程组，这时u是向量，而系数是矩阵．

对于某些数学物理方程，Riemann函数可借助于初等函数或特殊函数明显地表达出来．

对于膜振动方程，

$$\Delta u+\lambda^2u=0,\ \ \lambda=常数,$$
$$G(z,\zeta,t,\tau)=J_0(\lambda\sqrt{(z-t)(\zeta-\tau)}\ ),$$

其中J_0是零阶Bessel函数，作为基本域可以取整个复平面．$\lambda=0$的情形就得到Laplace方程$\Delta u=0$；于是$G=1$,且公式（3）取为

$$u=\mathrm{Re}[\Phi(z)]\ .$$

对于球面函数方程，

$$\Delta u+n(n+1)(1+x^2+y^2)^{-2}u=0,\ \ n=常数,$$

$$G(z,\zeta,\ t,\ \tau)=P_n\left(\frac{(1-z\zeta)(1-t\tau)+2z\tau+2\zeta t}{(1+z\zeta)(1+t\tau)}\right),$$

其中P_n是第一类Legendre函数，作为基本域可以取任意单连通域D_0，它满足下列条件．如果$z\in D_0$，$\zeta\in D_0$，那么$z\zeta\neq 1$（例如，圆盘$|z|<1$） 对于Euler-Darboux方程，

$$\Delta u+y^{-1}(\alpha u_x+\alpha' u_y)=0,\quad \alpha,\alpha'=\text{常数},$$

$$G(z,\zeta;t,\tau)=$$

$$=(\tau-z)^{-\beta'}(\zeta-t)^{-\beta}(\zeta-z)^{\beta+\beta'}F\left(\beta',\beta,1,\frac{(z-t)(\zeta-\tau)}{(z-\tau)(\zeta-t)}\right),$$

其中$2\beta=\alpha'+\iota\alpha$，$2\beta'=\alpha'-\iota\alpha$，$F$是超几何级数，作为基本域可以取半平面$y>0$或$y<0$

对于方程

$$\Delta^n u=0,\quad n=1,2,\quad ,$$

$$G(z,\zeta;t,\tau)=\frac{(z-\tau)^{n-1}(\zeta-t)^{n-1}}{(n-1)!(n-1)!}\quad ,$$

Goursat公式（Goursat formula）

$$u=\operatorname{Re}\left[(z\bar{z})^{n-1}\Phi_{n-1}+(z\bar{z})^{n-2}\Phi_{n-2}+\quad +\Phi_0\right]$$

成立．

解的复表示方法还应用于某一类非线性方程．例如，设已给微分几何中熟知的Gauss方程（Gauss equation）

$$\Delta u=-2ke^u,$$

其中$k(x,y)$是已给函数．如果$v_0(x)$是这个方程的任一特解，那么下面形式的函数

$$u(z)=v_0[\Phi(z)]|\Phi'(z)|^2$$

也是它的解，其中$\Phi(z)$是任意的解析函数 如果$k=$常数，那么$v_0=4(1-kz\bar{z})^{-2}$，且Gauss方程的所有解表为

$$u(x,y)=4|\Phi'(z)|^2(1+k|\Phi(z)|^2)^{-2}$$

如果$k<0$，那么应该假定$|\Phi(z)|<-k^{-1}$

非解析系数的椭圆型方程 设已给广义Cauchy-Riemann方程组（7），它的系数A和B定义在复变量z的整个平面E上且属于$L_{p,2}(E)$类，即

$$A(z),\ B(z)\in L_p,\ |z|^{-2}A\left(\frac{1}{z}\right),\ |z|^{-2}B\left(\frac{1}{z}\right)\in L_p,$$
$$p>2,\ |z|\leqslant 1$$

如果系数给在有界域S上且属于$L_p(S)$类，$p>2$，那么当将它们用零延拓到S外面时，它们将满足上面的条件 在这些假定下，方程（7）一般说来没有古典意义下的解 因此，考虑所谓的广义解 函数$w(z)\in L_1(S)$称作方程（7）在区域S中的解，如果它具有 С Л Соболев意义下的导数$\partial_{\bar{z}}w\in L_1(S)$，且在$S$中几乎处处满足方程

满足方程（7）的函数的理论是解析函数（$A\equiv B\equiv 0$）经典理论的意义深远的推广，且保持了后者的主要特征 因此，形如（7）的方程的解称作**广义解析函数**（generalized analytic function）．

方程（7）（在S中）的任一解满足积分方程

$$w(z)-\frac{1}{\pi}\iint_S \frac{A(\zeta)w(\zeta)+B(\zeta)\overline{w(\zeta)}}{\zeta-z}\,d\xi d\eta=\Phi(z),\quad (11)$$

其中$\zeta=\xi+\iota\eta$，$\Phi(z)$是S中的全纯函数．如果$\Phi\in L_q(\bar{S})$，$q\geqslant\frac{p}{p-1}$，$p>2$，那么方程（11）有唯一解，它用公式表为

$$w(z)=\Phi(z)+\iint_S\Gamma_1(z,\zeta)\Phi(\zeta)d\xi d\eta+$$
$$+\iint_S\Gamma_2(z,\zeta)\overline{\Phi(\zeta)}\,d\xi d\eta\qquad(12)$$

预解式Γ_1和Γ_2依赖于方程(7)的系数，且利用逐次逼近法来构造它们

公式（12）给出了方程（7）的解用解析函数$\Phi(z)$表示的一般（线性）表达式 特别地，它容许构造所谓的基本核

$$\Omega_1(z,t)=X_1(z,t)+\iota X_2(z,t),$$
$$\Omega_2(z,t)=X_1(z,t)-\iota X_2(z,t),$$

其中t是某个定点，X_1和X_2是积分方程（11）的对应于函数

$$2\Phi_1=(t-z)^{-1},\quad 2\iota\Phi_2=(t-z)^{-1}$$

的解．这些核容许写出广义Cauchy公式（generalized Cauchy formula）

$$\frac{1}{2\pi\iota}\int_{\partial S}\Omega_1(z,\zeta)w(\zeta)d\zeta-\Omega_2(z,\zeta)\overline{w(\zeta)}\,d\bar{\zeta}=$$
$$=\begin{cases} w(z)\quad, & z\in S,\\ \frac{1}{2}w(z), & z\in\partial S,\\ 0\quad, & z\notin\bar{S}\end{cases}\qquad(13)$$

当$A\equiv B\equiv 0$时，它转化为经典的Cauchy公式．借助于公式（13），那些通常利用Cauchy公式来证明的解析函数的性质都可以推广到广义解析函数．特别地，可以推广关于解析延拓的经典定理，可以建立广义Cauchy型积分理论，可以得到广义解析函数的具有实密度的周线积分的表达式等等．

伴随方程

$$\partial_{\bar{z}}w_*-Aw_*-\overline{Bw_*}=0\qquad(14)$$

的基本核是函数

$$\Omega_1^*(z,t)=-\Omega_1(t,z),\ \Omega_2^*(z,t)=-\overline{\Omega_2(t,z)}.$$

如果w和w_*分别在S中满足方程(7)和(14)，且在$\overline{S}$中连续，那么有恒等式(类似于经典的Cauchy定理)

$$\operatorname{Re}\left[\imath\int_{\partial S}w(z)w_*(z)dz\right]=0$$

如果$w(z)$是方程(7)在区域S中的解，那么在S中存在这样的解析函数$\Phi(z)$，使得等式

$$w(z)=\Phi(z)e^{\omega(z)} \tag{15}$$

成立，其中

$$\omega(z)=\frac{1}{\pi}\iint_S\frac{A(\zeta)+B(\zeta)(\overline{w(\zeta)}/w(\zeta))}{\zeta-z}d\xi d\eta, \tag{16}$$

且属于$C_\alpha(E)$类，$\alpha=p/(p-2)$，而且当$z\to\infty$时$\omega(z)\to 0$

特别地，这个公式可将经典解析函数论的基本定理，如唯一性定理、Liouville定理、幅角原理、紧性原理等等，推广到形如(7)的方程的解．公式(15)容许逆转 已给解析函数Φ，可以找到满足非线性积分方程(15)的函数$w(z)$．

设$\Phi(z)$是区域S中的解析函数，它可以有任意的奇性，且令t是一定点．于是存在方程(7)的这样的解$w(z)$，使得函数$w_0=w/\Phi$可连续延拓到整个平面E上，它属于$C_\alpha(E)$类，$\alpha=(p-2)/p$，在平面E上处处不为零，且$w_0(t)=1$．函数w_0满足积分方程

$$w_0(z)-\frac{z-t}{\pi}\iint_S\frac{A(\zeta)w_0(\zeta)+B_0(\zeta)\overline{w_0(\zeta)}}{(\zeta-z)(\zeta-t)}d\xi d\eta=1, \tag{17}$$

$$B_0=B\overline{\Phi}/\Phi,$$

它有唯一解，而函数$w=\Phi(z)w_0$满足非线性积分方程

$$w(z)=\Phi(z)\exp\left\{\frac{z-t}{\pi}\iint_S\frac{A(\zeta)w(\zeta)+B(\zeta)\overline{w(\zeta)}}{(\zeta-z)(\zeta-t)w}d\xi d\eta\right\} \tag{18}$$

由此，当$t\to\infty$时就得表达式(15)

将一般形式的二阶椭圆型方程

$$a\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu=0 \tag{19}$$

化为形式(1)的问题，等价于将正的二次型

$$adx^2+2bdxdy+cdy^2,\ a>0,\ \Delta=ac-b^2>0$$

化为标准型 后面的问题等价于求由Beltrami方程

$$\partial_{\bar z}w-q(z)\partial_zw=0,\ w=u+\imath v \tag{20}$$

的解所定义的同胚，其中

$$q(z)=(a-\sqrt{\Delta}-\imath b)(a+\sqrt{\Delta}+\imath b)^{-1},\ |q(z)|<1.$$

如果(19)是一致椭圆型方程($\Delta\geqslant\Delta_0=$常数>0)，那么$|q(z)|\leqslant q_0=$常数<1

在研究Beltrami方程时，基本的问题是要构造对给定区域S的某个同胚，如果$\omega(z)$是Beltrami方程的解，是一个将区域S拓扑映射到区域$\omega(S)$的同胚，那么Beltrami方程在S上所有其他的解有形式

$$w(z)=\Phi[\omega(z)], \tag{21}$$

其中Φ是在区域$\omega(S)$中的任意的解析函数．

如果$q(z)$是可测的，在S外$q(z)\equiv 0$，且$|q(z)|\leqslant q_0<1$，那么Beltrami方程(20)有解

$$w(z)=z-\frac{1}{\pi}\iint_E\frac{\rho(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta-z}, \tag{22}$$

其中ρ满足奇异积分方程(积分在Cauchy主值意义下理解)

$$\rho(z)-\frac{q(z)}{\pi}\iint_E\frac{\rho(\zeta)d\xi d\eta}{(\zeta-z)^2}=q(z). \tag{23}$$

这个方程在某一类$L_p(E)(p>2)$中有唯一解，它可以用逐次逼近法得到 函数(22)属于$C_\alpha(E)$类，$\alpha=p/(p-2)$，它将平面拓扑映射到自身，而且$w(\infty)=\infty$，当$z\to\infty$时，$z^{-1}w(z)\to 1$．如果$q\in C_\alpha^m(E)$，$0<\alpha<1$，$m\geqslant 0$，那么$w(z)\in C_\alpha^{m+1}(E)$．

一般形式的一阶一致椭圆组用复的写法有形式

$$\partial_{\bar z}w-q_1(z)\partial_zw-q_2(z)\partial_{\bar z}\overline{w}+Aw+B\overline{w}=0, \tag{24}$$

$$|q_1|+|q_2|\leqslant q_0=\text{常数}<1.$$

利用某个形如(20)的方程的解定义的同胚，可以将它化为(7)的形式

在条件A，$B\in L_p(S)(p>2)$下，方程(24)在某个有界域S中的任意解，可表为

$$w(z)=\Phi[\omega(z)]e^{\varphi(z)}, \tag{25}$$

其中$\omega(z)$是系数为

$$q(z)=q_1(z)+q_2(z)\frac{\partial_{\bar z}\overline{w}}{\partial_zw}$$

的Beltrami方程(20)的某个解所定义的同胚，$\Phi(\omega)$是区域$\omega(S)$中的解析函数，函数$\varphi(z)\in C_\alpha(E)$，$\alpha=(p-2)/p$，它在$S$外全纯，且在无穷远处等于零 表达式(25)也在那种情形下成立，即当方程(24)的

左端系数依赖于 w 和它的任意阶导数，只要所考虑的解满足上面所指出的条件．正如公式 (15) 那样，公式 (25) 也可以逆转．

公式 (25) 容许经典解析函数理论的一系列性质移到方程 (24)的解上，例如唯一性定理、辐角原理、极大值原理等等

一般拟共形映射 Q 是形如 (24) (当 $A \equiv B \equiv 0$) 的某个一致椭圆组的解 反过来说也是对的．因此，上述结果容许用纯分析的方法解**拟共形映射**(quasi-conformal mapping)理论的基本问题

两个自变量的 $2n(n>1)$ 个未知函数的一阶椭圆型方程组，在某些自然限制下，可化为标准型

$$\partial_{\bar{z}} w - Q(z)\partial_{z} w + Aw + B\overline{w} = 0, \tag{26}$$

其中 w 是具有 n 个复值分量的未知向量，Q，A，B 是 n 阶方阵．(26) 形方程的理论和 $n=1$ 的情形有许多相似之处，但它亦有自己的特点

参考文献

[1] Векуа, И Н , Новые методы решения эллиптических уравнений, М - Л , 1948 (中译本 И Н 维库阿，椭圆型方程新解法，上海科学技术出版社，1963)

[2] Векуа, И Н ,Обобщенные аналитические функции, М , 1959 (中译本 И Н 维库阿，广义解析函数，上、下册，人民教育出版社，1960)

[3] Векуа, И Н ,《Матем сб 》, **31** (1952), 2, 217 - 314 (中译本 И Н 维库阿，一阶椭圆型微分方程组与边值问题及其在薄壳理论上的应用，高等教育出版社，1960)

[4] Bergman, S , Integral operators in the theory of linear partial differential equations, Springer, 1961

[5] Bers, L , Theory of pseudo-analytic functions, New York Univ Inst Math and Mech , 1953 .

[6] Боярский, Б В ,《Докл. АН СССР》, **122** (1958), 4, 543 - 546

[7] Боярский, Б В ,《Докл. АН СССР》, **124** (1959), 1, 15 - 18 .

[8] Carleman, T , Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier order à deux variables, C R Acad Sci, **197** (1933), 471 - 474

[9] Бицадзе, А В , Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М , 1966 (英译本 Bitsadze A V , Boundary value problems for second-order elliptic equations, North-Holland, 1968)

[10] Халилов, З И ,《Изв АН СССР, Сер матем 》, **11** (1947), 345 - 362

[11] Courant, R , Hilbert, D , Methods of mathematical physics, Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (中译本 R 柯朗，D 希尔伯特，数学物理方法，II，科学出版社，1977)

И Н Векуа 撰

【补注】

参考文献

[A1] Tutschke, W , Partielle komplexe Differentialgleichungen in einer und mehreren komplexen Variablen, Deutsch, Verlag Wissenschaft , 1977

[A2] Carrier, G F and Pearson, C E , Partial differential equations, Acad Press, 1976.

[A3] Bers, L , An outline of the theory of pseudoanalytic functions, *Bull Amer Math Soc* , **62** (1956), 291 - 331

孙和生 译 陆柱家 校

偏微分方程，在特征上给数据的问题 [differential equation, partial, data on characteristics , дифференцальное уравнение с частными производными, задача с данными на характеристиках]

求在**特征流形** (characteristic manifold) 上给出条件的偏微分方程或偏微分方程组的解的问题．此类主要的问题是特征 Cauchy 问题(见 **Cauchy 特征问题** (Cauchy characteristic problem))和 **Goursat 问题** (Goursat problem)

对于前者，当初始流形处处是特征的时，初始数据不能任意给 它们必须满足由所考虑的微分方程所确定的某些条件 因而，如果对于所求解的类以及对于所给的函数不提出补充的条件 (特别地，沿与初始流形不相切的流形)，那么特征 Cauchy 问题通常是不适定的．例如，对于**热传导方程** (thermal - conductance equation)

$$u_t = u_{xx},$$

特征 Cauchy 问题

$$u|_{t=0} = \varphi(x)$$

在无穷远处的增长不快于 $\exp(cx^2)$ 的函数类中是适定的，然而，如果 x 的方次 2 被 $2+\varepsilon$ 所代替，那么唯一性不再被保证 存在一大类方程，它们的特征 Cauchy 问题是适定的

如果初始流形 S 同时是方程的型或阶的退化流形，那么特征问题可以成为适定的 例如，对于在特征 $y=0$ 的任何区间 S 上有充分光滑的初始数据的方程

$$u_{xx} - y^m u_{yy} = 0,\ y > 0,\ 0 < m = \text{常数} < 1,$$

其特征问题是可解的，并且解是唯一的．

数据给在特征上的问题中包含着在退化双曲型和抛物型方程及方程组理论中出现的具有不完全数据和变态初始数据的那些问题．对于形如

$$u_{xx} - y^m u_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0,\ y > 0,\ m > 0$$

的方程，用下述方式提出这些问题．要求此方程的解 $u(x, y)$ 满足变态初始条件

$$\lim \varphi(x, y)u = \tau(x),\ \lim \psi(x, y)u_y = v(x),$$

其中 $\alpha < x < \beta$，φ，τ，ψ 和 v 是给定的函数，或者满足不完全初始条件，即此两条件中之一．

参考文献

[1] Бицадзе A B, Уравнения смешанного типа, M, 1959 (英译本 Bitsadze, A V, Equations of mixed type, Pergamon, 1964)

[2] Courant, R and Hilbert, D, Methods of mathematical physics Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (中译本 R 柯朗，D 希尔伯特，数学物理方法，卷Ⅱ，科学出版社，1977)

[3] Тихонов, A H, 《Матем сб》, **42** (1935), 199－216

[4] Hormander, L, Linear partial differential operators, Springer, 1976 (中译本 L 霍曼德尔，线性偏微分算子，科学出版社，1980)

[5] Hormander, L, Hypoelliptic second order differential equations, *Acta Math*, **119** (1967), 147－171

A M Нахушев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Garabedian, P R, Partial differential equations, Wiley, 1964

[A2] Hormander, L, The analysis of linear partial differential operators, 2, Springer, 1983, Par 12 8

陆柱家 译

偏微分方程，具有间断系数的问题 [differential equation, partial, discontinuous coefficients, дифференциальное уравнение с частными производными, задача с разрывными коэффициентами]

偏微分方程的问题，其中微分算子的系数在通过某些曲面时有第一类间断（或跳跃），在这些曲面上给出共轭条件．

在二阶椭圆型算子的情形下，具有间断系数的问题（透射 (transmission) 或衍射问题 (diffraction problem)）表述如下 在一任意具有边界 Γ 的 N 维有界开域 g 中已给出 $N-1$ 维曲面 Γ_1，它把区域 g 分为两个子域 g_1 和 g_2，在区域 $(g+\Gamma)$ 中提出以下问题

$$\begin{cases} L_l u = f_l(x), \text{ 在 } g_l \text{ 中}, \ l=1,2, \\ [u]|_{\Gamma_1} = \varphi(x), \ \left[\dfrac{\partial u}{\partial v}\right]\Big|_{\Gamma_1} = \psi(x), \\ u|_{\Gamma} = \chi(x), \end{cases} \qquad (*)$$

其中

$$L_l u = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}^{(l)}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i^{(l)}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c^{(l)}(x)u$$

是定义在区域 g_l 中的线性椭圆型微分算子，

$$[u]|_{\Gamma_1} \equiv u|_{x\to\Gamma_1-0} - u|_{x\to\Gamma_1+0},$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial v}\right]\Big|_{\Gamma_1} \equiv \frac{\partial u}{\partial v_1}\Big|_{x\to\Gamma_1-0} - \frac{\partial u}{\partial v_2}\Big|_{x\to\Gamma_1+0},$$

其中 $\partial/\partial v_l$ 是关于余法线的微商，它等于

$$\sum_{i,j} a_{ij}^{(l)} \cos(n, x_j)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

$\mathbf{n}$ 是 Γ_1 的外法线，而符号 Γ_1-0 和 Γ_1+0 分别表示从曲面 Γ_1 相对于区域 g_1 的内部和外部趋极限所取的值，f_l，φ，ψ 和 χ 是已给函数．

为了简单起见，在这里假定系数只有一个间断面曲面 Γ_1

问题 (*) 是发生在由不同介质组成的区域中的定常物理过程的数学描述，例如，在某个已给的障碍物上电磁波的散射或在分层介质中的热传导．

问题 (*) 在这样的条件下存在古典解，这些条件在不存在系数的间断且 $\varphi=\psi\equiv 0$ 的情形下转化为 Dirichlet 问题可解性的 **Giraud 条件** (Giraud conditions) (见 [3]，[4]，[5]) 对问题 (*) 研究了下列问题 W_2^p 的广义解（见 [1]，[2]），自伴算子 L_l 的本征值问题和本征函数的估计（见 [6]，[8]），与 Марков 过程相联系的退化情形（见 [9]，[10]），以及拟线性算子 L_l 的情形（见 [13]） 对问题 (*) 可以建立 Schauder 估计 (见 [6]，[7])，且发展了求解它的数值方法 (见 [11]，[12]) 对 $2m$ 阶椭圆型方程和椭圆组已建立了具有间断系数的问题的可解性理论（见 [18]，[19]，[20]）．

对二阶抛物算子和双曲算子的具有间断系数的问题也已详细地研究了（见 [2]，[9]，[14]，[15]，[16]，[17]）．

参考文献

[1] Ладыженская, O A, 《Докл АН СССР》, **96** (1954), 3, 433－436

[2] Олейник, O A, 《Изв АН СССР, Сер матем》, **25** (1961), 1, 3－20.

[3] Ильин, B A, Шишмарев, И A, 《Сиб матем ж》, **2** (1961), 1, 46－58

[4] Ильин, B A, 《Докл АН СССР》, **137** (1961), 1, 28－30

[5] Ладыженская, O A, Уральцева, H И, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, M, 1964 (中译本 O A 拉迪任斯卡娅，H И 乌拉利采娃，线性和拟线性椭圆型方程，科学出版社，1978)．

[6] Шишмарев, И A, 《Докл АН СССР》, **137** (1961), 1, 45－47

[7] Ван Тун, 《Ж вычисл матем и матем физ》, **4** (1964), 3, 577－580

[8] Ильин, B A, 《Докл АН СССР》, **137** (1961), 2, 272－275.

[9] Гирсанов, И B, 《Докл АН СССР》, **135** (1960), 6, 1311－1313

[10] Фрейдлин, М И ,《Докл АН СССР》, **144** (1962), 3, 501 – 504

[11] Самарский, А А , в кн Тр 4-го Всесоюзного матем съезда Ленинград, 1961, т 2, Л , 1964.

[12] Самарский, А А ,《Ж вычисл матем и матем физ》, **1** (1961), 3, 441 – 460

[13] Борсук, М В ,《Докл АН СССР》, **177** (1967), 5, 991 – 994.

[14] Камынин, Л И , в кн Материалы к совместному советско-мериканскому симпозиуму по уравнениям с частными производными, Новосиб , 1963, 3 – 6.

[15] Камынин, Л И , Масленникова, В Н ,《Сиб матем ж》, **2** (1961), 3 , 384 – 399.

[16] Ильин, В А ,《Докл АН СССР》, **142** (1962), 1, 21 – 24

[17] Егоров, Ю В ,《Докл АН СССР》, **134** (1960), 3, 514 – 517.

[18] Schechter, M , A generalization of the problem of transmission, *Ann Scuola Norm Sup Pisa Sci Fiz Mat* , **14** (1960), 207 – 236 .

[19] Ройтберг, Я А , Шертель, З Г ,《Докл АН СССР》, **148** (1963), 5, 1034 – 1037

[20] Ройтберг, Я А , Шертель, З Г ,《Успехи матем наук》, **22** (1967), 5, 181 – 182 .

И А Шишмарев 撰

【补注】 如果在一非线性方程中一系数或自由项对未知函数的某个给定值是间断的（或奇异的），那么对应的边值问题可以化为自由边界问题 (free boundary problem)(见**偏微分方程，自由边界问题** (differential equation, partial, free boundaries))

例 方程

$$u_t - u_{xx} + H(u) = 0, \qquad \text{(A1)}$$

其中当 $u \neq 0$ 时，$H(u)=1$，否则 $H(u)=0$，通常称为氧气扩散-消耗方程 (oxygen diffusion-consumption equation)（见 [A1]）．对 (A1) 的初边值问题亦可提成这样的问题 求一曲线 $x=s(t)$ 和一个对于 $0<x<s(t)$ $(t\neq 0)$ 满足 $u_t-u_{xx}+1=0$，在自由边界 $x=s(t)$ 上满足条件 $u=u_x=0$ 的函数 $u(x,t)$

参考文献

[A1] Crank, J and Gupta, R S , A moving boundary problem arising from the diffusion of oxygen in absorbing tissue, *J Inst Math Appl* , **10** (1972), 19 – 33

[A2] Eskin, G I , The conjugacy problem for equations of principal type with two independent variables, *Trans Moscow Math Soc* , **21** (1970), 263 – 316 (*Tr Moskov Mat Obshch* , **21** (1970), 245 – 292)

[A3] Ladyzhenskaya, O A , Solonnikov, V A and Ural'tseva, N N , Linear and quasilinear equations of parabolic type, Amer Math Soc , 1968 (译自俄文)

孙和生 译 陆柱家 校

偏微分方程，具有间断初始（边界）条件的问题 [differential equation, partial, discontinuous initial (boundary) conditions , дифференциальное уравнение с частными производными, задача с разрывными начальными (краевыми) условиями]

偏微分方程的一个问题，其中出现在初始（边界）条件中的函数不是连续的．

例如，考虑二阶双曲型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \ 0<x<1, \ t>t_0,$$

对它提出混合问题，初始条件为

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = \varphi_1, \ u|_{t=t_0} = \varphi_0,$$

边界条件为

$$u|_{x=0} = \psi_1, \ u|_{x=1} = \psi_2$$

在此情形下，初始函数 φ_0 和 φ_1 的间断性导致 u 和 $\partial u/\partial t$ 沿着特征射线 $x-at=$ 常数和 $x+at=$ 常数的间断性，并且，间断性的度量

$$\chi = u(c \pm at + 0, \ t) - u(c \pm at - 0, \ t),$$

或者

$$\chi = u_t(c \pm at + 0, \ t) - u_t(c \pm at - 0, \ t)$$

（其中 $c \in [0, 1]$ 是函数 φ_0 或 φ_1 的一个间断点）沿着特征射线满足方程

$$\frac{d\chi}{dt} + 0 \cdot \chi = 0,$$

即 $\chi=$ 常数．对于变系数二阶双曲型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u + f,$$

$$u|_{t=t_0} = \varphi_0(x), \ u_t|_{t=t_0} = \varphi_1(x), \ u|_{\partial D} = \psi,$$

类似的结果也成立 在此情形下，初始函数和边界条件的间断性亦导致 u 和 $\partial u/\partial t$ 沿着特征射线的间断性，特征射线由方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\psi_j, \ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\psi_i\psi_j = 1$$

确定；间断性度量 χ 满足方程

$$2\frac{d\chi}{dt} + A\chi = 0, \ A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

其中函数 $\varphi(x)$ 以方程 $\varphi(x)=C$ 的形式定义了特征曲面

在椭圆型方程的情形下，边界条件的间断性不传

播进 D 中，因为此时特征射线是复的 对于椭圆型方程，研究了解的存在性和唯一性的问题，以及解满足边界条件的问题．这样，对于任意区域中的二阶椭圆型方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f,$$

$$u|_{\partial D}=\psi \quad 或者 \quad \frac{\partial u}{\partial n}+k(x)u|_{\partial D}=\psi,$$

已证明了· 对于第一边值问题，如果边界函数 $\psi\in W_2^{1/2}(\partial D)$，以及对于第二边值问题，如果 $\psi\in L_2(\partial D)$，那么在 $W_2^1(D)$ 中存在广义解，它在平均的意义下满足边界条件，即 $\|u-\psi\|_{L_2(\partial D_n)}\to 0$，其中曲面序列 ∂D_n 趋向于曲面 ∂D．在抛物型（也对椭圆型）方程的情形下，当初始数据或者边界条件间断时，间断性并不传播进 D 中 对于这些问题研究了满足边界条件的广义解的存在性和唯一性问题

参考文献

[1] Тихонов, А Н, Самарский, А А, Уравнения математической физики, 4 изд, М, 1972 (中译本 А Н 吉洪诺夫，А А 萨马尔斯基，数学物理方程，上、下册，高等教育出版社，1956)

[2] Владимиров, В С, Уравнения математической физики, М, 1976 (英译本 Vladimirov, V S, Equations of mathematical physics, Mir, 1984)

[3] Бицадзе, А В, Уравнения математической физики, М, 1976

[4] Courant, R and Hilbert, D, Methods of mathematical physics Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (中译本 R 柯朗，D 希尔伯特，数学物理方法，卷Ⅱ，科学出版社，1977)

[5] Bers, L, John, F and Schechter, M, Partial differential equations, Interscience, 1964

[6] Ладыженская, О А, Уральцева, Н Н, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, 2 изд, М, 1973 (中译本 О А 拉迪任斯卡娅，О Н 乌拉利采娃，线性和拟线性椭圆型方程，科学出版社，1987)

[7] Ладыженская, О А, Солонников, В А, Уральцева, Н Н, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М, 1967 (英译本 Ladyzhenskaya, O A, Solonnikov, V A and Ural-tseva, N N, Linear and quasilinear parabolic equations, Amer Math Soc, 1968)

[8] Friedman, A, Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, 1964

[9] Miranda, C, Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970 (译自意大利文)

[10] Agmon, S, Douglis, A and Nirenberg, L, Estimates near the boundary for solutions of elliptic equations, *Comm Pure Appl Math* **12** (1959), 623－727

Е И Моисеев 撰

【补注】 近年来关于奇性的调和分析和奇性的传播得到了一些远为深刻的结果，见[A1]

参考文献

[A1] Hörmander, L, The analysis of linear partial differential operators, 3, Springer, 1985

陆柱家 译

偏微分方程，Fischer-Riesz (Picone) 法 [differential equation, partial, Fischer-Riesz (Picone) method, дифференциальное уравнение с частными производными, метод уравнений Фишера-Рисса, метод Пиконе]

解偏微分方程边值问题的一种方法，它基于应用 Green 公式以及化为一个对某个适当选取的未知向量的 (Fischer-Riesz) 积分方程组．此方法可以用来求数值解，并且还可以用来证明存在性定理

设 L^* 和 L 是 $\mathbf{R}^n$ 中伴随的二阶线性椭圆型算子，具有实系数

$$a_{ik}\in C^{(2)}(D)\cap C^{(1)}(D\cup S),$$

$$b_i\in C^{(1)}(D\cup S),\quad c,f\in C^{(0)}(D\cup S),$$

其中 D 是由闭曲面 S 所围的有界域．假设在使得根据 Green 公式而得到的积分表达式有效的函数类中求 Dirichlet 问题

$$Lu(x)=f(x),\ x\in D,\quad \lim_{x\to y\in S}u(x)=\varphi(y)$$

的解 $u(x)$ 又设 $v(x)$ 是同一类中的任意函数．对 $u(x)$ 和 $v(x)$ 应用 Green 公式得到关系式

$$-\int_D u(x)L^*v(x)dx=$$

$$=\int_S\left[\varphi(y)\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}-Av\right)-v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]dy-$$

$$-\int_D f(x)v(x)dx, \tag{1}$$

其中

$$A=\sum_i \cos(n,x_i)\left(b_i-\sum_k\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}\right),$$

ν 是内部余法线，n 是 S 上的法线．设 $U=(u_1,u_2)$ 是有两个分量的向量，它的分量是平方可积的实函数，第一分量定义在 D 中，而第二分量定义在 S 上．设 $L_2(D,S)$ 是这些向量的集合，通过 $L_2(D,S)$ 中 U 和 V 的标量积

$$(U,V)=\int_D u_1v_1dx+\int_S u_2v_2dy$$

引进范数．选择集合 $\{v_k\}$，使得具有两个分量的向量

$$V_k=(-L^*v_k(x),\ v_k(y)),\quad x\in D,\ y\in S$$

的全体在 Hilbert 空间 $L_2(D,S)$ 中是稠密的．这时令 $U=$

(u_1, u_2)是这样的向量，它的第一分量 $u_1(x)$ 等于 $u(x)$，第二分量 $u_2(y)$ 和 $\partial u/\partial v$ 一致，于是可将 (1) 写成 Fischer-Riesz 积分方程组 (Fischer-Riesz system of integral equations).

$$(U, V_k) = \int_S \varphi(y)\left(\frac{\partial v_k}{\partial v} - Av_k\right)dy - \int_D fv_k dx. \qquad (2)$$

如果集合 $\{V_k\}$ 是规范正交的，且满足 **Riesz-Fischer 定理** (Riesz-Fischer theorem) 的条件，那么方程组 (2) 在 $L_2(D, S)$ 中定义了向量 $U=(u_1, u_2)$ 关于基向量 $\{V_k\}$ 的完全系的 Fourier 系数 c_k. 如果已知所考虑问题的解存在且唯一，那么 Fourier 级数 $\sum_k c_k V_k$ 平均收敛且只收敛于未知解. 在相反的情形下，函数 $\{v_k\}$ 的选择必须另外研究 例如，如果容许本征解 $u_0(x)$ (唯一性不成立)，那么集合 $\{V_k\}$ 应该满足等式

$$(U_0, V_k) = 0,$$

其中 $U_0=(u_0(x), \partial u_0/\partial v)$

如果把具有非负整数指数 $\alpha_1, \alpha_2, \quad, \alpha_m$ 的单项式序列 $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \quad x_m^{\alpha_m}$ 取为 $\{v_k\}$，那么由(2)求得的 $u(x)$ 和 $\partial u/\partial v$ 的值，以及在 S 上给出的 $u(x)$ 的值满足 Green 泛函关系式

$$\delta(x)k_m u(x) = \int_S \left[u(y)\left(\frac{\partial w(y,x)}{\partial v} - A(y)w(y,x)\right) - w(y,x)\frac{\partial u}{\partial v}\right]dy - \int_D f w(y,x)dy,$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, x \in D, \\ 0, x \notin D \cup S, \end{cases}$$

其中 k_m 是依赖于 m 的非零常数，$w(y,x)$ 是方程 $L^* v=0$ 的基本解. 在此情形下，Fischer-Riesz 方程组 (2) 的所有解且只有它们才是所考虑的边值问题的解. 这个方法的要点是通过适当方式选取函数集合 $\{v_n\}$，它们满足条件 $L^* v_n=0$ 或者某个完全性条件 ([4]).

这个方法不要求给出基本解的明显表达式，但是如果后者已知，那么由于集合 $\{w(y, x^{(k)})\}$(其中 $x^{(k)}$ 是任意不属于 $D \cup S$ 的可列无穷点序列) 是线性无关的，且在 $L_2(S)$ 中是完全的 ([4])，因而可以大大地简化计算；这个定理还容许将 Fischer-Riesz 方程的方法推广到具有斜导数的问题 (见**偏微分方程，斜导数问题** (differential equation, partial, oblique derivatives)) 和其他类型的方程

参考文献

[1] Picone, M, Nuovi metodi resolutivi per i problemi d'integrazzione delle equazioni lineari a derivative parziali e nuova applicazione delle trasformata multipla di Laplace nel caso delle equazioni a coefficienti constanti, *Atti Acc ad Sci Torino Cl Sci Fis Mat Natur*, **75** (1940), 413 – 426

[2] Amerio, L, Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari de secondo ordine di tipo ellittico, *Amer J Math*, **69** (1947), 3, 447 – 489

[3] Fichera, G, Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico, *Ann Scuola Norm Super Pisa Sci Fis Mat*, **4** (1950), 1 – 2, 35 – 99

[4] Купрадзе, В Д, 《Успехи матем наук》, **22** (1967), 2, 59 – 107

[5] Miranda, C, Patial differential equations of elliptic type, Springer, 1970 (译自意大利文).

В Д Купрадзе 撰 孙和生 译 陆柱家 校

偏微分方程，自由边界问题 [differential equation, partial, free boundaries, дифференциальное уравнение с частными производными, задача со свободными границами]

在适当的初始条件和边界条件下，在某个区域中求一偏微分方程组的解的问题，这个区域的边界是完全地或部分地未知的，是待定的 这类问题发生在渗流、扩散、热传导和连续介质力学的其他分支的许多问题中. 例如，在理想流体的无限流动中绕一具有顶角 $2\alpha\pi$ 的等边楔的对称喷流的 Helmholtz-Kirchhoff 问题 (Helmholtz-Kirchhoff problem)，是求速度分量 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$，它们是 Cauchy-Riemann 方程组

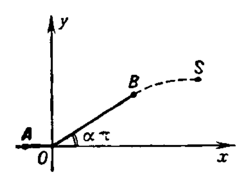
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

的解，且在已知的边界上满足条件 (见图)

$$v|_{AO} = 0, \quad v|_{OB} = \tan\alpha\pi\, u|_{OB}.$$

未知边界 BS 是一流线，在它上面提了补充条件

$$u^2+v^2=v_\infty^2, \quad \lim_{r\to\infty} u = v_\infty, \quad r=\sqrt{x^2+y^2}.$$



图上表示的是流动的上半部分，$y \geqslant 0$，对于 $y \leqslant 0$，流动是对称的

在解平面上的自由边界问题时，复变函数论方法起了很大作用

亦见 **Stefan 问题** (Stefan problem).

参考文献

[1] Монахов, В Н, Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем, Новосиб, 1977 (英译本 Monakhov, V N, Boundary-value problems with free boundaries for elliptic systems of equations, Amer Math Soc, 1983)

[2] Fasano, A and Primicerio, M (eds), Free boundary problems theory and application, 1 – 2, Pitman, 1983

[3] Данилюк, И И, 《Успехи Матем Наук》, 40 (1985), 5(245), 133 – 185

Ф П Васильев 撰

【补注】 偏微分方程的自由边界问题在许多应用中都会遇到．除了在流体力学（例如，射流和空腔）、渗流理论（例如，不相溶混的流体在多孔介质中的流动，亦称为 Muskat 问题（Muskat problem）或 Verigin 问题（Verigin problem））、相变（**Stefan 问题**（Stefan problem））、晶体生长和线性弹性（例如，障碍问题）中的经典自由边界问题外，还可以列出许多其他有趣的自由边界问题 例如，自由边界可以发生在非牛顿流体的流动中（A.E.Bingham），在具有退化的非线性扩散（即由所谓的多孔介质方程所控制的扩散）中，在反应扩散方程组中，等等 自由边界问题的一个共同性质是必须在自由边界上附加一些条件 这样的条件包含有偏微分方程中的未知函数 u 和（或）它的直到某阶的导数，这个阶甚至可以超过微分方程的阶．它们可以包含或不包含自由边界的速度的法向分量．有时它们具有作用在 u 上和作用在自由边界本身上的泛函表达的非局部性质．从数学的观点看，自由边界的出现常常与微分方程的某些系数的对应于 u 的某个给定值 u_0 的间断甚至奇性有关 在后一类型的自由边界问题的研究中，人们可以遵循经典的途径，试着去确定自由边界和偏微分方程的正则解 u，或者可以考虑广义的（或弱的）提法，在其中自由边界隐式地定义为集合 $\{u=u_0\}$，这需要 u 属于某个 **Соболев 空间**（Sobolev space）．但是，在这样的情形下，一般很难找到关于自由边界的正则性的任何信息

亦见**偏微分方程，具有间断系数的问题**（differential equation, partial, discontinuous coefficients），**奇异系数的偏微分方程**（differential equation, partial, with singular coefficients）

参考文献

[A1] Tarzia, D A, A bibliography on moving-free boundary problems for the heat diffusion equation, Firenze, 1988

[A2] Crank, J, Free and moving boundary problems, Clarendon Press, 1984.

[A3] Elliot, C M and Ockendon, J R, Weak and variational methods for moving boundary problems, Pitman, 1982

[A4] Meirmanov, A M, Stefan problem, Novosibirsk, 1986 (俄文)

[A5] Rubinstein, L I, The Stefan problem, Amer Math Soc, 1971 (译自俄文)

[A6] Diaz, J I, Nonlinear partial differential equations and free boundaries, 1, Elliptic equations, Pitman, 1985

[A7] Friedman, A, Variational principles and free-boundary problems, Wiley, 1982.

[A8] Rodrigues, J F, Obstacle problems in mathematical physics, North-Holland, 1987

[A9] Fasano, A and Primicerio, M (eds), Nonlinear diffusion problems, Springer, 1986

[A10] Bossavit, A, Damlamian, A and Fremond, M (eds), Free boundary problems Applications and theory, 3 – 4, Pitman, 1985

[A11] Albrecht, J, Collatz, L and Hofmann, K H (eds), Numerical treatment of free boundary value problems, Birkhauser, 1982

孙和生 译 陆柱家 校

偏微分方程，泛函解法 [**differential equation, partial, functional methods**, **дифференциальное уравнение с частными производными, функциональные методы решения**]

基于把方程的左边看作是作用在一适当定义的函数空间上的算子的一种方法．泛函方法在对于线性偏微分方程的应用中得到了很大的发展 在这样的情形下，泛函方法可以分为两类 a) 关于微分算子的谱理论的，和 b) 利用来弄清方程的可解性、边值问题和解的性质的一般特性的．在第二类 b) 中也可适当地再分为· 一方面是仅依赖于泛函分析（算子理论）一般定理的，另一方面是主要利用 Fourier 变换技巧的．前者涉及直接研究变系数一般方程的边值问题，后者出发点是研究常系数的微分算子，通常不考虑边值条件，而过渡到变系数（当这可能时）是利用适当的“扰动理论”来实现的 在两个方向上所得到的结果是相互补充的．

泛函方法最早发生在下列两问题之间的联系的运用时，即泛函

$$J(u)=\int_V\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2fu\right\}dV \qquad (1)$$

在区域 V (为了简单起见是二维的) 的边界 S 上满足条件

$$u|_S=0 \qquad (2)$$

的实函数 $u(x,y)$ 的类中极小化的问题和 Poisson 方程

$$-\Delta u=f \qquad (3)$$

(它是 (1) 的 Euler 方程) 在同样的边值条件 (2) 之下在 V 中求解的问题 如果 f 不是光滑的 (例如，$f\in H(V)$，这里 $H(V)$ 是 V 中平方可积函数的 Hilbert 空

间)，那么对 (1) 的极小，一般说来，在没有二阶导数 (这是在方程 (3) 中出现的) 的函数上达到，亦即这些函数仅给出了问题 (3)，(2) 的广义解 为了详尽地描述所发生的情形 (见[1], [2]) 引进 Hilbert 空间 $\mathring{W}^1$，这是通过满足 (2) 的光滑函数的线性流形在由标量积

$$\{u,v\}=\int_V\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{\partial v}{\partial y}\right\}dV$$

所诱导的范数中完全化而得到的．于是，问题 (3)，(2) 的解可以理解为这样的元素 $u\in\mathring{W}^1$，使得对任意的 $v\in\mathring{W}^1$满足等式

$$\{u,v\}=(f,v), \tag{4}$$

其中圆括号表示 $H(V)$ 中的标量积 对任意的 $f\in H$，(1) 的极小值亦在 $\mathring{W}^1$ 中达到，且此极小给出了问题 (3)，(2)在 (4) 的意义下的唯一解．问题 (3)，(2) 的任一 (有二阶导数的) 古典解对任一可容许的函数 v 满足方程 (4)，这意味着它是广义解 由此特别导出古典算子 $-\Delta$ 的借助广义解的某种扩充的定义，而算子 $-\Delta$ 原先是定义在满足条件 (2) 的光滑函数集合上的．"在 f 和边界 S 满足怎样的条件下广义解才是古典的?" 这个问题是相当复杂的 (这是关于所谓的广义解的微分性质的问题)．

在上面所考虑的方案中，广义解的存在性是由在 $\mathring{W}^1$ 中实现泛函 (1) 的极小的元素的存在性导出．以后注意到，存在定理可以借助于关于一般形式的线性有界泛函的所谓的 Riesz 定理直接由定义 (4) 得到 (见[1])．理论的进一步发展是在几个方向上进行的．所介绍的框架可立即推广到将 $-\Delta$ 换为一般的 $2m$ 阶变系数自伴正椭圆算子的情形，此时在标量积中自然将包含有 m 阶导数．逆算子的完全连续性使得有可能去建立对应问题的谱的特性，以及建立 **Fredholm 抉择定理** (Fredholm alternative) 对它们的适用性 如果方程包含有低阶项 (即除 $-\Delta$ 外还有这样的项 $a(x,y)\{\partial u/\partial x\}+b(x,y)\{\partial u/\partial y\}$)，亦即不与变分问题有任何联系，那么在此情形下也可得到解的存在性定理 (见[3])．

当 f 是 $\mathring{W}^1$ 上一个任意的有界线性泛函时，由问题 (3)，(2) 的广义解的存在性和唯一性定理可导出别的性质的推广．所有这样的泛函的空间可以由 H 按新的范数

$$|f|_{W^{-1}}=\sup_{w\in\mathring{W}^1}\frac{|(f,w)|}{|w|_{\mathring{W}^1}} \tag{5}$$

完全化而得到.所得到的空间 W^{-1} 要比 H 宽广得多.例如，在一维情形 (V 是区间 $(-1,1)$) 下，函数序列

$$\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}\ , & |x|\leqslant\varepsilon,\\ 0, & |x|>\varepsilon,\ \varepsilon=1,2^{-1},2^{-2},\cdots\end{cases}$$

在 W^{-1} 中收敛，但在 H 中发散．这个序列的极限不是通常意义下的函数，即空间 W^{-1} 包含广义函数 同时，不等式

$$|\langle f,w\rangle|\leqslant|f|_{W^{-1}}|w|_{\mathring{W}^1}$$

(括号 $\langle\ ,\ \rangle$ 表示泛函 f 作用在元素 $w\in\mathring{W}^1$ 上) 保证了存在性和唯一性定理在 $f\in W^{-1}$ 的情形的正确性．这结果也是饶有兴趣的，因为现在算子 $-\Delta$ 建立了空间 W^{-1} 和 $\mathring{W}^{-1}$ 之间的同构 当 $f\in H$ 且 S 光滑时，问题 (3)，(2) 的广义解不仅属于 $\mathring{W}^1$，而且还有二阶广义导数 ($u\in W^2$)，且

$$|u|_{W^2}\leqslant C|f|_H.$$

当 $n=2$ (n 是 V 的维数) 时，(W^2上的泛函) 空间 W^{-2} 包含 δ 函数，即由方程 $\langle\delta_{x_0},u\rangle=u(x_0)$ 所定义的泛函．在空间 H 中存在一个方程

$$-\Delta v_{x_0}=\delta_{x_0}$$

的广义解，使得对问题 (3)，(2) 的广义解 u，公式

$$(-\Delta u,\ v_{x_0})=\langle u,-\Delta v_{x_0}\rangle=\langle u,\delta_{x_0}\rangle=u(x_0)$$

或

$$u(x_0)=(f,\ v_{x_0})$$

成立．这是问题 (3)，(2) 的 Green 函数的抽象存在性定理．相应的结构对任意维空间中的一般椭圆算子也是可实现的 (见[4])．

继椭圆算子之后，应用一般泛函方法成功的下一个对象是具有一个特殊的 "时间" 变量的方程，这一类方程直接推广了经典的数学物理的抛物型和双曲型方程．在此情形下，基本结果可以划分为三类：关于对时间具有一阶和二阶导数的算子方程([5])，关于一阶偏微分方程的正对称组 ([3], [6])，和关于任意阶双曲型方程的 Cauchy 问题 第一类结果通常或者在 Banach 空间的常微分方程部分中和半群算子理论部分中叙述，或者和第二、第三类结果一起在所谓的能量不等式技巧的框架中叙述．这个技巧可以概括如下．对于包含有时间导数、写成算子形式

$$Lu=f \tag{6}$$

的方程的光滑解，在适当的初边值条件下，可以建立下面形式的不等式

$$|u|_{H_1}\leqslant c\,|Lu|_{H_2}, \tag{7}$$

其中 H_1，H_2 是适当定义的函数空间．为了简单起见，可以认为它们是 Hilbert 空间．例如，当函数 $u\in C^2$ 在单位正方形 V 中满足方程

$$Lu\equiv\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=f$$

和条件

$$u|_{t=0}=u_t'|_{t=0}=u|_{x=0}=u|_{x=1}=0$$

时，对方程乘以 $\partial u/\partial t$，并在 V 上积分，经过初等变换后可以得到不等式

$$\int_{t=T}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dx\leqslant 4\int_V f^2 dxdt, 0\leqslant T\leqslant 1 \quad (8)$$

(它是某个守恒律的数学表达，由此而得名“能量不等式”)，在 H_1, H_2 中适当定义范数后，它对应于不等式 (7)．如果定义方程 (6) 的广义解为元素 $u\in H_1$，对它存在一个光滑函数 u_i 的序列，满足上面所描述的边界条件，使得在 H_1 中 $u_i\to u$ 且在 H_2 中 $Lu_i\to f$，那么同时就得到算子 L: $H_1\to H_2$ 的定义，此算子有一个有界逆算子　这等价于广义解的唯一性定义，并且再一次导致 L 的经典定义的一个推广　研究方程 (6) 的下一步骤是对任意可容许的右端项 $f\in H_2$ 证明这样一个解的存在．因为算子 L 的值域 R_L 是 H_2 的闭子空间，因此证明存在性等价于证明 R_L 的正交补是空的　由等式

$$(Lu, v)_2=0, \text{对任意的 } u\in \mathfrak{U}_L \quad (9)$$

($\mathfrak{U}$ 是 H_1 中 L 的定义域，$(\cdot,\cdot)_2$ 是 H_2 中的标量积)导出 $v=0$．从算子理论的观点，方程 (9) 意味着 $v\in\mathfrak{U}_L$ 和 $L^*v=0$，即由方程 $L^*v=g$ 的解的唯一性立即导出所要的结果　但是，证明这样的结果将需要特别的构造，通常是十分复杂的，因为对于 L^* (它是从古典分析的观点利用某个积分恒等式来定义的) 存在类似于 (7) 的不等式 (以及存在一收敛于 v 的并满足所需边界条件的光滑函数序列) 这一事实绝对不是显然的．所产生的困难反映了带有“时间”的问题不是自伴的　在研究二阶和高阶双曲型方程时，利用方程 (9) 来证明等式 $v=0$ 通常是以如下方式来进行的　选取算子 P^*，使得 $P^*v\in\mathfrak{U}_L$，且

$$(LP^*v, v)_2\geqslant C|v|_{H_2}^2 \quad (10)$$

如果还注意到，(7) 通常是从像 $(Lu, Qu)_2$ 那样的表达式导出的，这里 Q 是这样的算子，它的选择使得

$$(Lu, Qu)_2\geqslant C|u|_{H_1}^2,$$

此时将 (10) 写成

$$(L^*v, P^*v)_2\geqslant C|v|_{H_2}^2,$$

那么可以认为 (6) 的研究基于这一对不等式 (有时称作对偶的 (dual))　上面所述主要应用于双曲型方程　处理抛物型方程则更接近于椭圆型方程

对具有常系数的方程的 Cauchy 问题，可以利用 Fourier 变换进行透彻的研究．此外，Fourier 变换连同所谓的“冻结系数”(即局部地将一具有变系数的算子用等于对应系数在某个给定点的值的常系数算子来代替)，常常用在上面所提到的框架中得到能量不等式，并且在研究椭圆型方程边值问题时在算子和边界条件的局部描述中也起到重要作用 ([10])．这些观念后来的发展导致**伪微分算子** (pseudo-differential operator)) 的引进和研究　此外，利用 Fourier 变换还建立了下列事实　对定义在 Euclid 空间一紧致域 V 中且作用在函数 $u\in C_0^\infty(V)$ (即它本身及其所有导数在边界上皆为零的函数) 上的常系数微分算子 L，不等式

$$|u|_{H(V)}\leqslant c|Lu|_{H(V)} \quad (11)$$

成立．在 $H(V)$ 中将 L 的闭包 $\mathring{L}$ ($C_0^\infty(V)$ 取作 L 的定义域)，且定义 $\widetilde{L}$ 为 $\mathring{L}$ 的伴随算子 (在 $H(V)$ 中)，就得到 $R_{\widetilde{L}}=H(V)$．对于方程 (6) 的解，不等式 (11) 的成立保证了解的唯一性，这自然引出包含有伴随算子的方程 $L^*v=g$ 对任意右端项的可解性．利用 Banach 定理可以得出结论　存在一个算子 $\hat{L}$，$\mathring{L}\subset\hat{L}\subset\widetilde{L}$ (即 $\hat{L}$ 是极小算子 $\mathring{L}$ 的扩张，且是极大算子 $\widetilde{L}$ 的限制)，使得 $R_{\hat{L}}=H(V)$，且存在一个 (在 H 上) 有界的逆算子 $\hat{L}^{-1}$ (见 [10])．可以认为，$\hat{L}$ 对应于某个边值问题 (用一组在边界上“集中”的条件来定义，这组条件“介于”恒等于零的条件和完全不存在条件之间)．关于在一般情形下决定算子 $\hat{L}$ 的条件的特性知道得甚少

应用 Fourier 变换还可作为研究广泛一类与研究基本解的结构以及方程解的所谓的局部性质 (有别于边值问题解的性质研究) 有联系的微分算子理论问题的基础．这包括一般常系数算子的基本解的存在性定理，具有右端项的方程的局部 (在一个给定点的邻域中) 可解性定理，以及这个解的光滑性性质 (见 [9], [11])．由于在 (复的) 变系数情形下非齐次方程 (6) 并非总是局部可解的 (对方程

$$-i\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}-2(x_1+ix_2)\frac{\partial u}{\partial x_3}=f,$$

有这样的 $f\in C^\infty$，使得在 $\mathbf{R}^3$ 的任何非空开子集中不存在解，甚至是广义的，见 [9])，因此有必要研究保证局部可解性的条件

使用泛函方法对研究非线性偏微分方程同样很有效果　这首先是关于变分方法 (如果代替泛函 (1) 考虑更一般的泛函，那么和它相联系的 Euler 方程将是非线性的) (见 [12])，关于各种不动点方法 (见 **Schauder 法** (Schauder method))，关于参数延拓方法 (见 [3], [13]) 以及一些主要应用于椭圆和抛物型方程的其他方法．能量不等式方法成功地用于研究拟线性双曲型方程．

参考文献

[1] Соболев, С Л, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962 (中译本 С Л 索伯列夫, 泛函分析在数学物理中的应用, 科学出版社, 1959)

[2] Courant, R and Hilbert, D, Methods of mathematical physics, partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (译自德文) (中译本 R 柯朗, D 希尔伯特, 数学物理方法, Ⅱ, 科学出版社, 1977)

[3] Bers, L, John, F and Schechter, M, Partial differential equations, Interscience, 1964

[4] Lions, J L and Magenes, E, Non-homogeneous boundary value problems and applications, 1－2, Springer, 1972 (译自法文) (中译本 J L Lions, E Magenes, 非齐次边值问题及其应用, 第一卷, 高等教育出版社, 1987).

[5] Hille, E and Phillips, R, Functional analysis and semigroups, Amer Math Soc, 1957

[6] Nagumo, M, Lectures on the modern theory of partial differential equations, Kyōritsu Shuppan, 1957(日文)

[7] Gårding, L, Cauchy's problem for hyperbolic equations, in 3-th congress of Scandinavian mathematicians, Helsinki, Mercators Trycken, 1958, 104－109.

[8] Гельфанд, И М, Шилов, Г Е, Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, М, 1958.

[9] Hormander, L, Linear partial differential operators, Springer, 1969 (中译本 L 霍曼德尔, 线性偏微分算子, 科学出版社, 1980)

[10] Hormander, L, On the theory of general partial differential operators, *Acta Math*, **94** (1955), 161－248.

[11] Trèves, J Linear partial differential equations with constant coefficients, Gordon & Breach, 1966.

[12] Ладыженская, О А, Уральцева, Н Н, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М, 1964 (中译本 О А 拉迪任斯卡娅, Н Н 乌拉利采娃, 线性和拟线性椭圆型方程, 科学出版社, 1978)

[13] Miranda, C, Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970 (译自意大利文).

A A Дезин 撰

【补注】 线性偏微分算子的泛函分析方法的当前发展水平很好地记载在[A3]中. 常系数情形的结果在第2卷中给出 能量积分方法在第3卷中接触到. 伪微分算子对可带有非椭圆边界条件的椭圆算子证明是富有成效的, 见第3卷. 后来的发展, Fourier 积分算子 (Fourier integral operators), 可以用于更一般的问题, 见第4卷.

参考文献

[A1] Yosida, K, Functional analysis, Springer, 1980 (中译本 吉田耕作, 泛函分析, 人民教育出版社, 1980).

[A2] Riesz, F and Nagy, B Sz, Leçons d'analyse fonctionnelle, Gauthier-Villars, 1968 (中译本 F 黎茨, B 塞克佛尔维-纳吉, 泛函分析讲义, 科学出版社, 第一卷, 1963, 第二卷, 1980)

[A3] Hörmander, L, The analysis of linear partial differential operators, Ⅰ－Ⅳ, Springer, 1983－1985.

孙和生 译 陆柱家 校

偏微分方程, 斜导数问题 [differential equation, partial, oblique derivatives; дифференциальное уравнение с частными производными, задача с косой (наклонной) производной]

二阶椭圆型方程的一个线性边界值问题. 令 D 是具有 Descartes 坐标 $x_1, \cdots, x_n$ 的实 Euclid 空间中的一个区域, 它的边界 ∂D 是一个 $n-1$ 维 **Ляпунов** 超曲面 (见 **Ляпунов 曲面和曲线** (Lyapunov surfaces and curves)). 在 D 中给出一个二阶线性微分方程

$$L(u)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n} b_iu_{x_i}+cu=F(x), \quad (1)$$

其中诸实系数 a_{ij}, b_i, c 和 F 在 $D\cup\partial D$ 上满足 Holder 条件. 此外, 令方程 (1) 在 D 中是一致椭圆型的. 令 $l=(l_1, \cdots, l_n)$ 是在 ∂D 上定义的处处不为零的实连续向量. 斜导数问题的提法如下: 求方程 (1) 的在 D 正则在 $D\cup\partial D$ 中连续的解 $u(x)$, 使得在所有点 $y\in\partial D$ 处极限

$$\lim_{\substack{x\to y\\ x\in D}} [l(y)\operatorname{grad}_x u]=\lambda(u)$$

存在, 并且此极限与 ∂D 上给定的连续函数 f 一致

$$\lambda(u)=f(y),\ y\in\partial D \quad (2)$$

不失一般性, 在边界条件 (2) 中不妨假设 l 是单位向量. **Neumann 问题** (Neumann problem) 是斜导数问题的一个特殊情形, 此时边界条件 (2) 的左端与未知解关于单位余法线 ν 的导数一致:

$$\frac{du}{d\nu}=f(y),\ y\in\partial D$$

如果满足条件

$$c(x)\leqslant 0 \quad (3)$$

和

$$\inf_{y\in\partial D}(Nl)>0, \quad (4)$$

其中 N 是 ∂D 的外法线, 那么由于 Hopf 和 Zaremba-Giraud 原理 (例如, 见[1]), 相应于问题 (1), (2) 的齐次边值问题

$$L(u)=0,\ \lambda(u)=0 \quad (5)$$

不能有异于常数的解 特别地, 如果至少在一点处条件 (3) 中的严格不等式成立, 那么问题 (1), (2) 不能有多于一个的解 通常用积分方程的方法, 用先验估计方法, 或用**有限差分演算** (finite-difference calculus) 方法来研究问题 (1), (2) 的解的存在性问题

条件 (4) 的成立确保了问题 (1), (2) 是一个 Fredholm 问题 (Fredholm problem), 即 a) 齐次问题 (5) 的解空间的维数 κ_1 是有限的; 和 b) 当 $\kappa_1 = 0$ 时, 问题 (1), (2) 总是可解的, 并且解是唯一的, 当 $\kappa_1 > 0$ 时, 存在线性泛函的空间, 这些线性泛函作用于 F 和 f 上等于零是问题 (1), (2) 存在解的充要条件, 并且此空间的维数也是 κ_1 仅当使 $(Nl) = 0$ 的点 y 的集合 M 非空时, 问题 (1), (2) 的 Fredholm 性才会被破坏 . 特别地, $n = 2$ 时在假设

$$\sum_{i, j=0}^{2} a_{ij} u_{x_i x_j} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u(x)$$

(这并不妨碍它的一般性)下, 问题 (1), (2) 可化为等价的具有 Cauchy 核的奇异积分方程, 这意味着此问题是 Noether 问题 (Noetherian problem), 即 a) 齐次问题 (5) 的解空间的维数 κ_1 是有限的, b) 某些线性泛函组成的空间的维数 κ_2 也是有限的, 这些线性泛函作用于 F 和 f 上等于零是问题 (1), (2) 可解性的充要条件, 和 c) 问题 (1), (2) 的指数, 即差 $\kappa_1 - \kappa_2 = \kappa$, 由公式

$$\kappa = 2(p+1)$$

给出, 其中 $2\pi p$ 是 $\arg(l_1 - il_2)$ 按正方向沿 D 的周线 ∂D 转一周的增量 在这里所考虑的情形中, 仅当 $p = 1$ 时, 问题 (1), (2) 是一个 Fredholm 问题 . 数 p 刻划了向量场 (l_1, l_2) 的旋度 (rotation of a vector field) 当 (1) 是一致椭圆型方程组时, 即当 F 和 u 是有 m 个分量的向量, a_{ij}, b_i 和 c 是 m 阶方阵, 并且矩阵 (a_{ij}) 满足条件

$$k_0\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2\right)^m \leqslant \left|\det \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \alpha_i \alpha_j\right| \leqslant k_1\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2\right)^m$$

时, 在带有斜导数的问题的边界条件 (2) 中定义算子 $\lambda(u)$ 时, $l_1, \quad, l_n$ 应理解为 m 阶方阵, f 应理解为具有 m 个分量的向量

对于很大一类一致椭圆型组和算子 $\lambda(u)$, 带有斜导数的问题是 Noether 型的 例如, 当 $n = 2$, 并且 $a_{ij} = 0$, $i \neq j$, 及 $a_{ii} = E$ 时 (E 为单位 (对角) 矩阵), 如果条件 $\det(l_1 + il_2) \neq 0$ 在 ∂D 上处处成立, 那么问题 (1), (2) 是 Noether 型的 如果这个条件得到满足, 那么问题 (1), (2) 的指数按公式 $\kappa = 2(p+m)$ 来计算, 其中 $2\pi p$ 是 $\arg\det(l_1 - il_2)$ 按正方向沿 D 的周线 ∂D 转一周的增量

对 $n \geqslant 3$ 的斜导数问题从 20 世纪 60 年代开始就进行了深入细致的研究 ([1])

参考文献

[1] Бицадзе, А В, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М, 1966 (英译本 Bitsadze, A V, Boundary value problems for second-order elliptic equations, North-Holland, 1968)

[2] Векуа, И Н, Обобщенные аналитические функции, М, 1959 (中译本 И Н 维库阿, 广义解析函数, 上、下册, 人民教育出版社, 1960)

[3] Мусхелишвили, Н И, Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд, М, 1968 (中译本 Н И, 穆斯海里什维里, 奇异积分方程, 上海科学技术出版社, 1966)

[4] Bouligand, G, Giraud, G and Delens, P, Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel, Hermann, 1935

A B Бицадзе 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gilbarg, D and Trudinger, N S, Elliptic partial differential equations of second order, Springer, 1977 (中译本 D 吉耳巴格, N S 塔丁格, 二阶椭圆型偏微分方程, 上海科学技术出版社, 1981)

陆柱家 译

一阶偏微分方程 [differential equation, partial, of the first order, дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка]

联系未知函数 $u(x)$, 它的诸一阶导数 $D_i u = u_{x_i}$ $(i = 1, \cdot, n)$ 以及自变量 $x = (x_1, \cdot, x_n)$ 的方程 任何一个偏微分方程组都可化为一阶偏微分方程组 . 为此, 如果在所研究的方程组中某个方程包含了 $u_i(x)$ 的至少一个 l_i 阶导数, 那么只需把每个函数 $u_i(x)$ 的直到 $l_i - 1$ 阶的所有偏导数作为新的未知函数 . 然后, 通过等同某些不同的混合导数而引进新的方程来完成新的方程组 例如, 方程

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

在引进未知辅助函数 $v = u_x$, $w = u_y$ 之后化为下述一阶方程组

$$F(x, y, u, v, w, v_x, v_y, w_y) = 0,$$

$$u_x - v = 0,$$

$$u_y - w = 0,$$

$$v_y - w_x = 0,$$

其中后三个方程是独立的 .

一个未知函数的单个一阶偏微分方程由关系式

$$F(x, u, p) = 0 \qquad (1)$$

定义, 其中 $p = (p_1, \cdot, p_n) = (D_1 u, \cdot, D_n u)$. 方程 (1) 的满足某些要求的任一解 $u = u(x)$ 在变量 $(x_1, \cdot\cdot, x_n, u)$ 的空间 E_{n+1} 中确定了某个曲面 (积分曲面 (integral surface)), 诸 p_i 为此曲面的法向量的分量 . 因而, 方程 (1) 确定了积分曲面法向量的诸分量

p_i 间的一个联系，并且在每个点 (x, u) 处确定了积分曲面切平面的 $n-1$ 个参数的族（或者，对应于关于 p 的方程（1）的不同解的若干这样的族）. 这个平面族的包络称为（在给定点 (x, u) 处的）Monge 锥（Monge cone），其母线的方向称为特征方向（characteristic directions）在每个点 (x, u) 处，这些方向由方程组

$$\frac{dx_1}{F_{p_1}} = \frac{dx_2}{F_{p_2}} = \cdots = \frac{dx_n}{F_{p_n}} = \frac{du}{\sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i}} \quad (2)$$

确定，其中 $p=(p_1, \cdots, p_n)$ 是满足方程（1）的任何向量．具有连续变化切线的，并且在其每一点处具有特征方向的曲线称为 Monge 曲线（Monge curve），或称为焦曲线（focal curve）对于满足 $F(x, u, p)=0$ 的任意给定的连续可微向量 $p=p(x, u)$，焦曲线是(2)的积分曲线．由于在焦曲线的每个点处都有一个向量 p，它确定了与焦曲线在该点相切的平面的方向，这样，焦曲线就与其切平面同时给出，因而它们称为焦带（focal strip）如果 σ 是焦曲线上的参数，那么对于方程组（2），方程

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = \sum p_i F_{p_i}$$

称为带形方程（strip equation）或带形条件（strip condition）

如果焦曲线属于方程（1）的积分曲面 $u=u(x)$，并且在其各点处诸等式 $p_i = D_i u(x)$ 成立，那么它称为特征曲线（characteristic curve）（次特征曲线（bicharacteristic curve）)，相应的焦带称为特征带（characteristic strip）特征带由方程组

$$\frac{dx_i}{F_{p_i}} = \frac{du}{\sum p_j F_{p_j}} = -\frac{dp_i}{F_{x_i} + p_i F_u} \quad (3)$$

确定，(3) 称为方程（1）的特征组（characteristic system）. 函数 $F(x, u, p)$ 是方程组（3）的一个积分，因而，如果在特征曲线的某个点处满足条件 $F=0$，那么在整条特征曲线上也有 $F=0$ 方程（1）的积分曲面，在其上各点与 Monge 锥相切的，是这族 Monge 锥的包络，因而也是特征带族的包络．这意味着积分曲面由特征曲线组成，因而，求积分曲面相当于特征组（3）的积分．不能化为特征曲线（如果它们存在）的焦曲线是积分曲面 $u=u(x)$ 上特征曲线的包络．它们在空间 $(x_1, \cdots, x_n)$ 上的投影由解 $u(x)$ 的奇点组成．

方程（1）称为拟线性的（quasi-linear），如果

$$F(x, u, p) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x, u) p_i + f_{n+1}(x, u)$$

此时方程组（2）有形式

$$\frac{dx_i}{f_i(x, u)} = -\frac{du}{f_{n+1}(x, u)}, \quad (4)$$

它不含有 p，Monge 锥退化为直线（Monge 轴（Monge axis）)，并且所有的焦曲线都是特征曲线．

方程（1）的 Cauchy 问题（Cauchy problem）是．求通过给定的 $n-1$ 维（初始）流形

$$x_i = x_i^0(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}),\ u = u^0(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}) \quad (5)$$

的积分曲面．这个积分曲面由通过初始流形的点引出的特征曲线所组成 如果方程是拟线性的，那么它由在初始条件（5）之下积分特征组（4）而得到．在一般情形下，为了构作特征曲线，除了条件（5）之外，还需阐明诸初值 $p_i = p_i^0(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1})$，它们由方程组

$$\frac{\partial u^0}{\partial \lambda_j} = \sum p_i^0 \frac{\partial x_i^0}{\partial \lambda_j},\ j=1, \cdots, n-1 \quad (6)$$

确定，而（6）是通过对（5）及方程

$$F(x^0, u^0, p^0) = 0 \quad (7)$$

求导而得．由于非线性，一般而言，方程组(6)和(7)确定诸初值 $p_i^0(\lambda)$，以及相应地，确定 Cauchy 问题(1)，(5)的解都是非单值的．令

$$x_i = X_i(\sigma, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}),$$
$$u = U(\sigma, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}) \quad (8)$$

是通过初始流形的点的特征曲线的方程．如果初始流形（5）不是特征的（见**特征流形**（characteristic manifold)），那么这些方程是未知积分曲面的参数方程，并且如果这个曲面对于自变量 $(x_1, \cdots, x_n)$ 空间的投影是单值的，那么它们确定了 Cauchy 问题的解 $u=u(x)$ 在方程（8）决定的曲面不能用方程 $u=u(x)$ 表示的时候，即它在空间 $(x_1, \cdots, x_n)$ 上的投影不是单值的时候，引入 Cauchy 问题（1），(5)的广义解的概念．

本质上，非线性方程（1）的求解可归结为下述具有相同主部的拟线性方程组的求解

$$\sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + F_u p_k + F_{x_k} = 0,\ k=1, \cdots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i} = 0,$$

这个方程组是对方程（1）求导得到的．

例 $(D_1 u)^2 + (D_2 u)^2 = 1$ 特征带由方程组

$$\frac{x_1 - x_1^0}{p_1^0} = \frac{x_2 - x_2^0}{p_2^0} = u - u^0,$$

$$p_1 = p_1^0,\ p_2 = p_2^0,\ (p_1^0)^2 + (p_2^0)^2 = 1$$

确定.

$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0$. 特征组(3)有形式 $\frac{dx}{u}=\frac{du}{0}=\frac{dt}{1}$，特征曲线的方程为 $\frac{x-x_0}{t-t_0}=u_0$, $u=u_0$，具有初始条件 $u(x, 0)=u^0(x)$ 的 Cauchy 问题的解由参数方程

$$x=\lambda+tu^0(\lambda),\ u=u^0(\lambda)$$

给出.

方程(1)的完全积分(complete integral)是方程(1)的一个解

$$u=\varphi(x, a), \tag{9}$$

它本质上依赖于 n 个参数 $a_1, \quad, a_n$. 如果(在自变量的某个区域中)矩阵

$$\left\|\begin{matrix}\varphi_{a_1} & \varphi_{x_1a_1} & & \varphi_{x_na_1}\\ \varphi_{a_2} & \varphi_{x_1a_2} & & \varphi_{x_na_2}\\ \\ \varphi_{a_n} & \varphi_{x_1a_n} & & \varphi_{x_na_n}\end{matrix}\right\|$$

的秩是 n，那么形如(9)的解是完全积分. 借助于从完全积分形成包络的方法产生(1)的依赖于一些任意函数的解

如果假定参数 a 由形如 $\omega_i(a)=0$ $(i=1, \quad, k)$ 的 k 个关系式联系，从 n 参数曲面族(9)中可分出一个 $n-k$ 参数族，那么此族的包络将依赖于 $n-k$ 个变量的 k 个任意函数，相应的依赖于一些任意函数的解称为通积分(general integrals) n 参数族(9)的包络(如果它存在)没有任何任意性，并且产生一个特积分(particular integral), 它也可从关系式 $F=F_p=0$ 中消去 p 而得到

族(9)的曲面与此族的包络相切的流形是 k 维的特征流形 特别地，当 $k=1$ 时，此流形是特征曲线. 这个事实是从方程(1)的完全积分求特征组(3)的通解的基础(Jacobi 法(Jacobi method))，它常用于典型方程的求积

超定一阶偏微分方程组(overdetermined systems of first-order partial differential equations)是一些形如(1)的方程的组，它的独立方程的个数大于未知函数的个数 这样的组通常是不相容的，因而分出相容组类形成了偏微分方程相容性理论的课题.

令

$$F_i(x, p)\equiv\sum_{j=1}^{n}f_{ij}(x)p_j=0,\ i=1, \cdot, m \tag{10}$$

是未知函数 u 的超定方程组. 假设(10)的所有方程是独立的，因而 $m\leqslant n$ 这样方程组称为闭的(closed)，如果从它可得到所有形如

$$\{F_i, F_j\}\equiv\sum_{s=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial f_{is}}{\partial x_l}f_{jl}-f_{il}\frac{\partial f_{js}}{\partial x_l}\right)\right]p_s=0 \tag{11}$$

的等式成立，其中 $\{,\}$ 表示 Poisson 括号，否则，它称为非闭的(non-closed) 通过添加一些(11)型的独立方程，可以把一个非闭方程组扩充为一个闭组 当 $m=n$ 时，闭方程组仅有平凡解，当 $m<n$ 时，闭方程组的独立解的个数为 $n-m$

参考文献

[1] Goursat, E , Leçons sur l'intégration des équations aux dérivees partielles du premier ordre, Hermann, 1891
[2] Carathéodory, C , Variationsrechnung und partielle differentialgleichungen erster Ordnung, Teubner, 1956
[3] Гюнтер, Н М , Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, Л -М , 1934
[4] Courant, R and Hilbert, D , Methods of mathematical physics Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (中译本 R 柯朗, D 希尔伯特, 数学物理方法, 卷Ⅱ, 科学出版社, 1977)
[5] Петровский, И Г , Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд , М , 1970 (中译本 И Г 彼得罗夫斯基, 常微分方程论讲义, 高等教育出版社, 1959)
[6] Петровский, И Г , Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд , М , 1961 (中译本 И Г 彼得罗夫斯基, 偏微分方程讲义, 人民教育出版社, 1956)
[7] Cartan, E , Les systèmes differentiels exterieurs et leurs applications geométrique, Hermann, 1945
[8] Рашевский, П К , Геометрическая теория уравнений с частными производными, М -Л , 1947
[9] Фиников, С П , Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М -Л , 1948
[10] Яненко, Н Н , Рождественский, Б Л , Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, М , 1968 (英译本 Yanenko, N N and Rozhdestvenskiĭ, B L , Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics, Amer, Math Soc , 1983)

Н Н Кузнецов, Б Л Рождественский 撰

【补注】 亦见偏微分方程(differential equation, partial).

参考文献

[A1] John, F , Partial differential equations, Springer, 1982 (中译本 F 约翰, 偏微分方程, 科学出版社, 1986)
[A2] Garabedian, P R , Partial differential equations, Wiley, 1964

陆柱家 译

二阶偏微分方程 [differential equation, partial, of the second order, дифференциальное уравнение с част-

ными производными второго порядка]

至少包含未知函数$u(x)$的一个二阶导数而不包含更高阶导数的方程．例如，二阶线性方程具有下列形式．

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}+ \\ +c(x)u(x)+f(x)=0, \tag{1}$$

这里点$x=(x_1, \quad ,x_n)$属于某个区域$\Omega\subset\mathbf{R}^n$，在其中实值函数$a_{ij}(x)$，$b_i(x)$和$c(x)$有定义，在每一点$x\in\Omega$上，至少有一个系数$a_{ij}(x)$不等于零．对于任何点$x_0\in\Omega$，存在自变量的非奇异变换$\xi=\xi(x)$，使得方程（1）在新的坐标$\xi=(\xi_1, \quad ,\xi_n)$中具有下列形式．

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^*(\xi)\frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i^*(\xi)\frac{\partial u}{\partial \xi_i}+ \\ +c^*(\xi)u(\xi)+f^*(\xi)=0, \tag{2}$$

其中系数$a_{ij}^*(\xi)$当$i\neq j$时在点$\xi_0=\xi(x_0)$上等于零，当$i=j$时等于±1或零．方程（2）称为方程（1）在点x_0上的典范形式．

方程（2）中的系数$a_{ii}^*(\xi)$在点ξ_0上取正值的个数k和取负值的个数l仅仅取决于方程（1）的系数$a_{ij}(x)$ 因此，可将微分方程（1）分类如下．如果$k=n$或$l=n$，则方程（1）在点x_0上称为椭圆型的（elliptic）；如果$k=n-1$，$l=1$或者$k=1$，$l=n-1$，则方程（1）称为双曲型的（hyperbolic），如果$k+l=n$，$1<k<n-1$，则方程（1）称为超双曲型的（ultrahyperbolic）．方程（1）在点x_0上称为广义抛物型的（parabolic in the wide sence），如果至少有一个系数$a_{ii}^*(\xi)$在点$\xi_0=\xi(x_0)$上等于零，且$k+l<n$，方程（1）在点x_0上称为抛物型的（parabolic），如果只有一个系数$a_{ii}^*(\xi)$在点ξ_0上等于零（譬如说$a_{11}^*(\xi_0)=0$），而其余所有系数$a_{ii}^*(\xi)$具有相同的符号，且$b_1^*(\xi_0)\neq0$

在两个自变量的情况下（$n=2$），由函数

$$\Delta(x)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

来定义方程的类型比较方便 这时，如果$\Delta(x_0)>0$，则方程（1）在点x_0上是椭圆型的，如果$\Delta(x_0)<0$，则方程（1）是双曲型的，如果$\Delta(x_0)=0$，则方程（1）是广义抛物型的．

一个方程在一个区域中称为椭圆型的，双曲型的，等等，如果它在这个区域的每个点上分别是椭圆型的，双曲型的，等等 例如，Tricomi方程$yu_{xx}+u_{yy}=0$，当$y>0$时是椭圆型的，当$y<0$时是双曲型的，当$y=0$时是广义抛物型的．

在点x_0上把方程（1）化为典范形式的变量变换$\xi=\xi(x)$依赖于这一点 如果有三个或更多个自变量，那么一般地说，不存在同时在这个点的某个邻域的一切点上把方程（1）化为典范形式，即形式

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_i^2}-\sum_{i=k+1}^{k+l}\frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_i^2}+\sum_{i=1}^{n} b^*(\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_j}+ \\ +c^*(\xi)u(\xi)+f^*(\xi)=0$$

的非奇异变换．另一方面，在两个自变量的情况下（$n=2$），可以对系数$a_{ij}(x)$加上某些条件而把方程（1）化为典范形式，例如，函数$a_{ij}(x)$必须是二次连续可微的，方程（1）在点x_0的某一邻域内是同一种类型的

设

$$\Phi(x,u,u_{x_1}, \quad ,u_{x_n},u_{x_1x_1},u_{x_1x_2}, \quad ,u_{x_nx_n})=0 \tag{3}$$

是一个二阶非线性方程，其中$u_{x_i}=\partial u/\partial x_i$，$u_{x_ix_j}=\partial^2 u/\partial x_i\partial x_j$，并且设在实值函数$\Phi$的定义域内的每一点上存在导数$\partial\Phi/\partial u_{x_ix_j}$，此外，设条件

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u_{x_ix_j}}\right]\neq0$$

成立．为了对形如（3）的非线性方程进行分类，需要确定这个方程的某个解$u^*(x)$，并且考虑线性方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\partial x_j}=0, \tag{4}$$

其中系数

$$a_{ij}(x)=\frac{\partial\Phi}{\partial u_{x_ix_j}}\bigg|_{u=u^*(x)}$$

对于给定的解$u^*(x)$，方程（3）在点x_0上（或在一个区域中）称为椭圆型的，双曲型的，等等，如果方程（4）在这一点上（或在这个区域中）是椭圆型的，双曲型的，等等

很广泛的一类物理问题都归结为解二阶微分方程．例如，见**波动方程**（wave equation），**电报方程**（telegraph equation），**热传导方程**（thermal-conductance equation），**Tricomi 方程**（Tricomi equation），**Laplace 方程**（Laplace equation），**Poisson 方程**（Poisson equation），**Helmholtz 方程**（Helmholtz equation）．

А К Гущин 撰

【补注】亦见**偏微分方程**（differential equation, partial）

张鸿林 译

偏微分方程，变分解法［differential equation, partial, variational methods，дифференциальное уравнение с частными производными, вариационные методы решения］

将偏微分方程边值问题化为（当有可能时）适当

选择的变分问题（即求某个泛函极小值或极大值的问题）进行求解的方法．

首先，变分方法广泛应用于理论研究（解的存在性、唯一性和稳定性的证明，解的可微性的研究，谱理论，各种最优化问题的研究，等等），其次应用于求方程的近似解问题．变分问题的近似解可以通过解有限的代数方程组来求得，而且求变分问题近似解的算法通常比求解偏微分方程对应问题的现成算法显得更简单和更方便．

研究边值问题的变分方法以所谓的 **Dirichlet 原理** (Dirichlet principle) 的形式产生于 19 世纪中叶，即在一区域 G 中求一个在边界 ∂G 上取给定值 $\varphi(x)(x\in\partial G)$ 的调和函数，在所考虑的函数类中它给出了 **Dirichlet 积分** (Dirichlet integral) 的极小值 起先，Dirichlet 原理只用于二阶线性椭圆型方程的理论中（紧接着还用于高阶椭圆型方程中），之后它被应用于其他类型的线性的和非线性的方程的理论中．变分方法的发展始于 B Riemann，K. Weierstrass 和 D Hilbert 的工作．**嵌入定理** (imbedding theorems) 以及它们的推广在变分方法的发展中，特别是在其奠基性问题中起着重要的作用

应用变分方法的一个简单的典型例子是解二阶自伴椭圆型方程的 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem)

$$Au+cu=0, \tag{1}$$

其中 $c=c(x)\geqslant 0$，

$$u|_{\partial G}=\varphi, \tag{2}$$

$$Au=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right), x=(x_1,\cdot\ ,x_n)\in G \tag{3}$$

(G 是有限维 Euclid 空间中的区域，∂G 是它的边界，φ 是在 ∂G 上已给的函数)，且存在一个常数 $\kappa>0$，使得对所有的点 $x\in G$ 和所有的数 $\xi_1,\quad,\xi_n$ 下列不等式（椭圆性条件）成立．

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\kappa\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 .$$

在此情形下，解问题 (1)，(2) 的变分方法是求一个函数 $u(x)$，使得泛函

$$K(u)=\int_G\left[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\ \frac{\partial u}{\partial x_j}+cu^2\right]dx$$

在容许函数类中取最小值，函数 $u(x)$ 称为容许的，如果有 $K(u)<+\infty$，且它满足边界条件 (2)（方程 (1) 是泛函 $K(u)$ 的 Euler 方程）．只要容许函数类是非空的，变分方法就是可应用的．为了使容许函数类是非空的，在边界上所给的函数 φ 要满足的条件由嵌入定理给出．在容许函数类中使泛函 $K(u)$ 取最小值的函数 $u(x)$ 是问题 (1) (2) 的一个**广义解** (generalized solution)（见**偏微分方程，泛函解法** (differential equation, partial, functional methods)），且当算子 (3) 的系数 $a_{ij}(x)$ 是连续可微的经典情形时，它是问题的一个通常解．

利用变分方法的另一典型例子是应用于求算子 (3) 的本征值和本征函数

给出某个泛函的极小值的函数可以作为所谓的极小化序列的极限而得到，极小化序列是这样的函数序列，泛函在这些函数上的值趋于给定的极小值．为了构造极小化序列并确定它们的收敛速度，发展了一些特殊方法（例如 **Ritz 法** (Ritz method)）．

参考文献

[1] Courant, R and Hilbert, D, Methods of mathematical physics, partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (译自德文)（中译本 R 柯朗，D 希尔伯特，数学物理方法 II，科学出版社，1977)

[2] Courant, R, The Dirichlet principle, conformal mapping and minimal surfaces, Interscience, 1950.

[3] Соболев, С Л, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб, 1962 (中译本 С Л 索伯列夫，泛函分析在数学物理中的应用，科学出版社，1959).

[4] Смирнов, В И, Курс высшей математики, т 3－5, М, 1958－1959 (中译本 В И 斯米尔诺夫，高等数学教程，第三卷，一、二、三分册，第四卷，一、二分册，第五卷，一、二分册，高等教育出版社，1956－1959)

[5] Михлин, С Г, Вариационные матоды в математической физике, 2 изд, М, 1970

[6] Ладыженская, О А, Уральцева, Н Н, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, 2 изд, М, 1973 (中译本 О А 拉迪任斯卡娅，Н Н 乌拉利采娃，线性和拟线性椭圆型方程，科学出版社，1978)

[7] Михайлов, В П, Дифференциальные уравнения в частных производных, М, 1976

Л Д Кудрявцев 撰

【补注】 亦见 **Dirichlet 原理** (Dirichlet principle) 及该处所列的参考文献．

孙和生 译 陆柱家 校

奇异系数的偏微分方程 [differential equation, partial, with singular coefficients; дифференциальное уравнение с частными производными с особенностями в коэффициентах]

一个偏微分方程，在它的定义域的闭包中的某个流形上它的系数或自由项有第一类间断，或者变为无穷．

例如，这类中典型的方程是 Лаврентьев-Бицадзе 方程 (Lavrent'ev-Bitsadze equation)

$$\operatorname{sign}y\ \cdot\ u_{xx}+u_{yy}=0$$

和 Euler-Poisson-Darboux 方程 (Euler-Poisson-Darboux equation)

$$u_{xy}+\frac{\beta'}{y-x}u_x-\frac{\beta}{y-x}u_y=0,\ \beta,\ \beta'=\text{常数},$$

或者

$$\Delta u-u_{x_0x_0}=\frac{\lambda}{x_0}u_{x_0},\ \lambda=\text{常数},$$

其中 Δ 是关于变量 $x_1, \quad, x_n$ 的 **Laplace 算子** (Laplace operator)

许多退化偏微分方程是具有奇异系数的方程.

在具有奇异系数的微分方程理论中占据中心位置的是在经典的和广义的提法中初值、边值和混合问题的可解性的研究，以及新的适定问题的探索. 系数具有弱奇性的——它们通常是以大于它们的定义域的维数的阶可和的——二阶线性椭圆、双曲和抛物型方程的边值问题得到了比较充分的研究. 当这些方程的系数仅在定义域中某些充分光滑的曲面上有第一类间断时，建立了主要的边值问题的很完善的理论. 见**偏微分方程，具有间断系数的问题** (**differential equation, partial, discontinuous coefficients**)，亦见 [3], [5], [6]

参考文献

[1] Бицадзе, А В , Уравнения смешанного типа, М , 1959 (英译本 Bitsadze, A V , Equations of the mixed type, Pergamon, 1964)

[2] Векуа, И Н , Обобщенные аналитические функции, М , 1959 (中译本 И Н , 维库阿, 广义解析函数, 上、下册, 人民教育出版社, 1960)

[3] Ладыженская, О А , Уральцева, Н Н , Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М , 1964 (中译本 О А 拉迪任斯卡娅, Н Н 乌拉利采娃, 线性和拟线性椭圆型方程, 科学出版社, 1987)

[4] Miranda, C , Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970 (译自意大利文).

[5] Олейник, О А , 《Докл АН СССР》, **124** (1959), 6, 1219 − 1222

[6] Самарский, О А , 《Докл АН СССР》, **121** (1958), 2, 225 − 228

А М Нахушев 撰

【补注】 对于非线性方程，系数的奇性可能出现在未知函数的某些特殊值处. 在这样的情形下，奇点的集合可被描述为自由边界 (free boundary) (见**偏微分方程；自由边界问题** (differential equation, partial, free boundaries)) 一个典型的例子是

$$\frac{\partial}{\partial t}C(u)+\lambda H(u)=\Delta K(u), \qquad (\mathrm{A1})$$

其中 $C(u)=\int_0^u c(v)dv$, $K(u)=\int_0^u k(v)dv$ (c 和 k 分别表示热容量和热导率)，λ 是潜热，H 是 Heaviside 函数 方程 (A1) 描述具有相变的热传导 ($u=0$ 是熔点). 见 **Stefan 问题** (Stefan problem) 自然，(A1) 中的所有导数被理解为广义的.

对于 (A1)，其自由边界与集合 $\{u=0\}$ 一致如果它由一个光滑曲面 $\varphi(x, t)=0$ ($x\in\mathbf{R}^n$) 组成，那么可以证明，(A1)等价于当在自由边界上满足条件

$$u=0,\ [k(u)\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}\varphi]_-^+-\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

时在集合 $\{u\neq0\}$ 中求解

$$c'(u)\frac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}(k(u)\operatorname{grad}u),$$

其中 $[\ \ ]_-^+$ 表示从 u 的正值集合和负值集合处所取的极限之差.

陆柱家 译

全微分方程 [**differential equation with total differential, дифференциальное уравнение в полных дифференциалах**]

常微分方程

$$F(x,y,y', \cdot ,y^{(n)})=0, \qquad (1)$$

其左端是一个全导数

$$\frac{d}{dx}\Phi(x,y,y', \quad ,y^{(n-1)})=0.$$

换句话说，方程 (1) 是全微分方程，如果存在可微函数 $\Phi(x,u_0, \cdot ,u_{n-1})$，使得

$$F(x,u_0, \quad ,u_n)\equiv\Phi_x'+u_1\Phi_{u_0}'+ \cdot +u_n\Phi_{u_{n-1}}'$$

关于一切变元恒等成立. 解 n 阶全微分方程化为解 $(n-1)$ 阶方程

$$\Phi(x,y,y', \quad ,y^{(n-1)})=C,\ C=\text{常数}.$$

设 $F(x,u_0, \quad ,u_n)$ 是 n 次连续可微函数，$\Phi(x,u_0, \quad ,u_{n-1})$ 具有直到二阶 (包括二阶) 连续偏导数. 设

$$\Delta\Phi=\Phi_x'+u_1\Phi_{u_0}'+ \quad +u_n\Phi_{u_{n-1}}',$$

$$\Delta_0F=F_{u_n}',\ \Delta_\nu F=F_{u_{n-\nu}}'-\Delta(\Delta_{\nu-1}F),\ \nu=1, \cdot ,n$$

为使方程 (1) 是全微分方程，只需函数 $\Delta_\nu F(\nu=0, \quad ,n)$ 与 u_n 无关，并且 $\Delta_nF=0$([1]) 特别是，u_n 只能以线性方式包含在 F 中.

考虑一阶方程

$$M(x,y)+N(x,y)y'=0, \qquad (2)$$

其中函数 M, N, M_y' 和 N_x' 在 (x,y) 平面的一个开单连通区域 D 内有定义并且是连续的，在 D 内 $M^2+N^2>0$. 方程 (2) 是全微分方程，当且仅当

$$M_y'(x,y)\equiv N_x'(x,y),\ \text{在 } D \text{ 内}.$$

全微分方程 (2) 的通解具有形式 $\Phi(x,y)=0$，其中

$$\Phi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}M(x,y)dx+N(x,y)dy,$$

而积分是沿着处于 D 内并连接任意固定点 $(x_0, y_0)\in D$ 和点 (x,y) 的任何可求长的曲线来取的（[2]）. 方程（2）（一般情况下，关于 $y^{(n)}$ 为线性的方程（1））在某些条件下乘以一个**积分因子**（integrating factor）后可以化为全微分方程

参考文献

[1] Kamke, E , Differentialgleichungen Losungsmethoden und Losungen, 1, Gewohnliche Differentialgleichungen, Chelsea, reprint, 1947（中译本 E 卡姆克，常微分方程手册，科学出版社，1980）

[2] Еругин, Н П , Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, 2 изд , Минск, 1972

Н Х. Розов 撰 张鸿林 译

无穷阶微分方程组 [differential equations, infinite-order system of, дифференциальные уравнения. система бесконечного порядка]，无穷微分方程组（infinite system of differential equations）

微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,\quad),\quad i=1,2, \tag{1}$$

的一个无限集，包括未知函数 $x_k(t)(k=1,2,\quad)$ 及其导数的无限集. 这种方程组的解定义为函数集合 $\{x_k(t)\}$，对于这些函数方程组中所有的方程都恒等.

方程组（1）称为可数的（countable），区别于不可数（uncountable）方程组

$$\frac{dx_\alpha}{dt}=f_\alpha(t,\quad,x_\alpha,\cdot\quad), \tag{2}$$

其中的 α 取遍某个不可数的数集. 类型（2）的方程组包括待定函数 $\{x_\alpha(t)\}$ 及其导数的不可数集 人们还研究了含有两个或更多个自变量的未知函数的不可数集的偏微分方程.

А. Н. Тихонов（[1]）是第一个发表类型（1）的微分方程组理论的作者. 他的主要成果是类型（1）的解的存在性证明，其中假定了等式右边对任意值 $x_1,x_2,\cdot$，$0\leqslant t-t_0\leqslant a$ 有定义，对给定的 t 值关于 $x_1,x_2,\quad$，连续，并对给定的 $x_1,x_2,\quad$，在区间 $[t_0,t_0+a]$ 上关于 t 是可测的. 另外，如果推广的 Lipschitz 条件

$$|f_n(t,x_1,x_2,\quad)-f_n(t,x_1',x_2',\quad)|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}K_{n_i}|x_i'-x_i''|$$

成立，以及级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}K_{n_i}=A_i<A$$

收敛且一致有界，又如果给定的初始条件使得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n(t)|$$

收敛，则（1）的解 $x_i(t)(i=1,2,\quad)$ 是唯一的.

可数方程组理论后来的发展涉及到解的有界性条件（[2]）、对参数的解析依赖性、Ляпунов 稳定性以及解的其他性质（[2]）. 研究得最透彻的是线性和拟线性可数微分方程组.

用算子方法研究无穷阶方程组特别有效. 例如，代之以方程组（1）考虑算子方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x), \tag{3}$$

其中，$x(t)$ 是 Banach 空间 B 中的无限维向量，$f(t,x)$ 是取值在该空间中的无穷维向量函数，而导数是 Fréchet 的意义下的. 特别地，下述有关方程 (3) 的结果取自 [3]

如果 $f(t,x)$ 是有界算子，则根据局部存在性定理推得，如果 Bohl 指数在零点是负的（[3]），那么具有接近于零初值的解能在任意大的区间上有定义.

如果

$$f(t,x)\equiv Ax,$$

其中 A 是由无穷维矩阵给定的有界算子，那么当且仅当 A 相似于斜 Hermite 矩阵时，在 Hilbert 空间中所有的解对 $-\infty<t<\infty$ 是有界的 在这种情况，具有初值条件 $x(t_0)=x_0$ 的 Cauchy 问题的解的显式表达式是

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x_0,$$

其中，e^{At} 是算子指数

如果

$$f(t,x)\equiv Ax+f(t),$$

其中 A 的意义同上，而 $f(t)$ 是 T 周期的连续向量函数，那么当 A 的谱 $\sigma(A)$ 不包含虚轴上的点 $2k\pi i/T$ $(k=0,\pm1,\quad)$ 时存在唯一的周期解.

在

$$f(t,x)\equiv Ax+F(t,x)$$

的情形已证· 如果 A 的谱落在开左半空间，则在零点的 Ляпунов 稳定性条件是对充分小的 $q>0$，要求有

$$\|F(t,x)\|<q\|x\|,\ t>0,\ \|x\|<\rho\ .$$

参考文献

[1] Тихонов, А Н ,《Матем сб》, 41 (1934), 4, 551－560

[2] Валеев, К Г , Жаутыков, О А , Бесконечные системы дифференциальных уравнений, А - А , 1974

[3] Далецкий, Ю Л , Крейн, М Г , Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М , 1970（英译本 Daletskii, Yu L and Krein, M G , Stability of solutions of differential equations in Banach space, Amer Math Soc , 1974）

И П. Макаров 撰

【补注】 考虑齐次微分方程

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x,\quad 0\leqslant t<\infty, \tag{A1}$$

其中 $A(t)$ 是算子值函数，$A(t)$ 是 Banach 空间 B 上的算子，$x\in B$. 设

$$x(t)=u(t)x_0$$

是一个解，$x(0)=x_0$ 这个解的（上）Bohl 指数（(upper) Bohl exponent）$K_B(x_0)$ 是所有这样的实数 ρ 的下确界，使得存在一个 N_ρ，对所有 $0\leqslant\tau\leqslant t<\infty$ 有

$$\|x(t)\|<N_\rho\exp(\rho(t-\tau))\|x(t)\| .$$

下 Bohl 指数 (lower Bohl exponent) $K_B(x_0)$ 是数 λ 的上确界，对数 λ 存在一个 $M_\lambda>0$ 使得

$$\|x(t)\|\geqslant M_\lambda\exp(\lambda(t-\tau))\ \|x(t)\| .$$

如果 $\lambda(x_0)$ 是 (A1) 的一个 Ляпунов 指数 (Lyapunov exponent)（见 **Ляпунов特征指数** (Lyapunov characteristic exponent)），那么

$$-\infty\leqslant K_B(x_0)\leqslant\lambda(x_0)\leqslant K_B(x_0)\leqslant\infty .$$

区间 $[K_B'(x_0),K_B(x_0)]$ 称为该问题之解的 Bohl 区间 (Bohl interval).

现在，再来考虑方程 (3) 并设 $f(t,0)=0$. 这个方程称为满足性质 $\mathscr{B}(\nu,N,\rho)(-\infty<\nu<\infty,\ N>0,\ \rho>0)$，如果它的在某时刻 t_0 具有 $\|x(t_0)\|<\rho$ 的每个解对所有的 $t>\tau\geqslant t_0$（解对它有定义）满足估计

$$\|x(t)\|\leqslant N\exp(-\nu(t-\tau))\|x(t)\| .$$

推广上面的定义，在零点的（上）Bohl 指数是 $\lambda=-\nu$ 的下确界，对于这样的 ν 存在 N_ν，ρ_ν 使得方程有性质 $\mathscr{B}(\nu,N_\nu,\rho_\nu)$.

参考文献

[A1] Pazy, A, Differential equations in Banach spaces, Springer, To appear

周芝英 译

环面上的微分方程 [**differential equations on a torus**; **дифференциальные уравнения на торе**]，环面上的流 (flows on a torus)

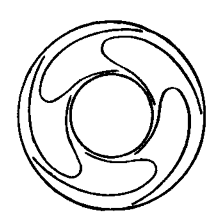
一类**动力系统** (dynamical system) 一个例子是，一个环面（看作 **Lie 群** (Lie group)）由它的某单参数子群的元素所作一切平移产生的流 依环面上模 1 的"角坐标"或"循环坐标"（它可以看成平常 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中坐标，环面 T^n 作为 $\mathbf{R}^n$ 模整数格 $\mathbf{Z}^n$ 的商群而得到），此流可描述如下 在时刻 t 点 $x=(x_1,\ \cdot\ ,x_n)$ 变换为点

$$T^tx=x+t\omega, \tag{1}$$

其中 $\omega=(\omega_1,\quad,\omega_n)$ 是所谓基本频率 (basic frequency) 集. 此流的所有轨道都是时间的**拟周期函数** (quasi-periodic function)，它们的性质由基本频率的算术性质决定. 这样，如果一切 ω_i 为某一数的整数倍，则轨道是周期的 在其他极端情形下，当 ω_i 在 $\mathbf{Z}$ 上为线性无关时（即不存在整数 k_i 使非平凡线性组合 $\sum k_i\omega_i$ 为零），每个轨道在环面中稠密（环面的无理分支 (irrational winding of the torus)），而流是遍历的（关于 T^n 上 **Haar 测度** (Haar measure)，此 Haar 测度自然地由 $\mathbf{R}^n$ 中 Lebesgue 测度被 $\mathbf{Z}^n$ 因子化得到，并且在平移 T^t 下不变），而且甚至是严格遍历的，它的谱是离散的.

这样的流常出现在各种问题中. 例如，在可积 **Hamilton** 系统 (Hamilton system) 情形，具紧支集（即保持在相空间的一有限区域内）的"典型"运动导致这种流（对应的环面为该方程组的首次积分系的水平流形 ([8])) 这种具无理分支的不变环面在充分接近于可积的 Hamilton 系统中也经常遇到（此问题与**小分母** (small denominators) 有密切联系）.

对二维环面无平衡位流的轨道的定性分类由 H Poincaré ([1])，A Denjoy ([2]) (亦见 [3]) 与 H Kneser ([4]) 完全解决（关于较新文献见 [5], [6]）（在一切闭曲面中，只有环面与 **Klein 曲面** (Klein surface) 有这样的流，而对后一曲面上流的研究原则上可化为环面上流的研究，此环面是它的两叶覆叠曲面）. 关于流的下述结果是已知的. 如果在曲面上存在一个双连通区域（"Kneser 环"），以两个闭轨道为界而在区域内部的那些轨道绕着边界中一个轨道旋离，且依反向绕边界中另一个轨道旋近（见图），则曲面上轨道的定性性态与平面上有界区域中的轨道相类



似. 特别地，一切非周期轨道依两个时间方向均趋于成为周期的. 不存在 Kneser 环情形（只在环面上才可能）更加有趣，此事等价于存在闭横截线（即无处与轨道相切的闭曲线）L，它与每条轨道相交无穷多次时间. 在 L 上 S 的 **Poincaré 返回映射** (Poincaré return map)——将点 $x\in L$ 映到过 x 的正半轨道与 L 的第一个交点的同胚——已有定义. L 上的瀑布 $\{S^n\}$ 由它的 Poincaré 旋转数 α 刻画（例如，见 [3]；它部分依赖于 L 的特殊选择，渐近圈是原来的流的完全不变特征量 [14]) 据 Denjoy 定理 (Denjoy theorem)，若 S 为 C^2 类（若环面上横截线与初始流均为适当光滑的，情况总是如此），而 α 是无理数，则 S 拓扑共轭于此圈转动角 $2\pi\alpha$ 的旋转，即可能引进 L 上的循环坐标 x，

使S能表示成$x \to x+\alpha$, mod 1 (若S为C^1类，此命题不一定成立([2]))环面分为轨道的分解依同胚意义与(1)描述的情形相同(除了沿轨道运动的速度以外)．由Denjoy定理保证的坐标变换的光滑性将依赖于(除S的光滑性外)旋转数α的算术性质 对于几乎所有的α，由$S \in \mathbf{C}^n$, $n \geqslant 3$所得坐标变换属于类C^{n-2}([9])，但即使变换S是解析的，这样的变换对于旋转数不一定是光滑的，而旋转数可以用有理数快速逼近([7])

如果T^2上原来的流有一**积分不变量**(integral invariant)，则Kneser环不存在，且S光滑共轭于此圈的一个旋转，不论α是有理数还是无理数 这样，在不出现平衡位情形下，在环面上便存在与流本身的光滑类相同的循环坐标，并且在这些坐标下流的形式成为

$$\dot{x}=f(x,y),\ \dot{y}=\alpha f(x,y),\ f(x,y)>0 \quad (2)$$

(这里α是对应于闭横截线$x=$常数的旋转数)．若f充分光滑并且α显示出适当的性质，则流(2)可借助于某一微分同胚化为(1)(对$n=2$与$\omega=(1,\alpha)$)，可是在一般情形下这并非总是可能的，且甚至流(2)的遍历性质也可能与流(1)的不同(可能有连续谱，但在光滑的情形下不可能有混合谱)．见[10]；关于其中省略的证明，见[11]，[12]，[13]，[15]

参考文献

[1] Poincare, H, Memoire sur les courbes définies par une équation différentielle, *J Math Pures Appl*, **1** (1885), 167 – 244 又见 Oeuvres, Vol 1

[2] Denjoy, A, Sur les courbes définies par les equations differentielles à la surface du tore, *J Math Pures Appl* (9), **11** (1932), 4, 333 – 375

[3] Coddington, E A and Levinson, N, Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955

[4] Kneser, H, Regulare Kurvenscharen auf Ringflachen, *Math Ann*, **91** (1924), 1 – 2, 135 – 154

[5] Reinhart, B L, Line elements on the torus, *Amer J Math*, **81** (1959), 3, 617 – 631

[6] Aepply, A and Markus, L, Integral equivalence of vector fields on manifolds and bifurcation of differential systems, *Amer J Math*, **85** (1963), 4, 633 – 654

[7] Арнольд, В И, 《Изв АН СССР Сер Матем》, **25** (1961), 1, 21 – 86

[8] Арнольд, В И, 《Сиб Матем ж》, **4** (1963), 2, 471 – 474

[9] Herman, M R, Conjugaison C^∞ des difféomorphismes du cercle pour presque tout nombre de rotation, *C R Acad Sci*, **283** (1976), 8, 579 – 582

[10] Колмогоров, А Н, 《Докл АН СССР》, **93** (1953), 5, 763 – 766

[11] Sternberg, S, On differential equations on the torus, *Amer J Math*, **79** (1957), 2, 397 – 402

[12] Шкловер, М Д, 《Изв. Вузов Математика》, 1967, **10**, 113 – 124

[13] Кочергин, А В, 《Докл АН СССР》, **205** (1972), 3, 515 – 518

[14] Schwartzman, S, Asymptotic cycles, *Ann of Math*, **66** (1957), 2, 270 – 284

[15] Аносов, Д В, 《Изв Акад Наук СССР》, **37** (1973), 6, 1259 – 1274

Д В. Аносов 撰

【补注】 代替[8](关于可积Hamilton系统不变环面的存在性)也可参见[A1]中§49 至于环面上流的性态可附加下列事实 二维流形上C^2流的每个紧极小子集或是一点，一周期轨道或整个流形，在后一情形流形与环面同胚，见[A5]

关于环面上流的经典理论的良好的导引可在[A3]中找到．代替[7]与[9](坐标变换的光滑性)可参见[A4]，关于具积分不变量的流的结果(包括[10]与[12])，见[A2]第16章

参考文献

[A1] Arnold, V I, Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978 (译自俄文)

[A2] Cornfeld, I P, Fomin, S V and Sinaǐ, Ya, G, Ergodic theory, Springer, 1982 (译自俄文).

[A3] Godbillon, C, Dynamical systems on surfaces, Springer, 1983 (译自法文)

[A4] Herman, M R, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, *Publ Math IHES*, **49** (1979), 5 – 234

[A5] Schwartz, A J, A generalization of a Poincaré-Bendixson theorem to closed two dimensional manifolds, *Amer J Math*, **85** (1963), 453 – 458

郑维行 译 沈永欢 校

常微分方程的近似解法[differential equations, ordinary, approximate methods of solution of, дифференциальное уравнение обыкновенное; приближенные методы решения]

对自变量的一个或多个值求以某种精确度近似于微分方程或方程组所要求的特解的解析表达式(公式)或数值的方法 微分方程的近似解法的重要性在于，只有少数几类微分方程的精确解的解析式是已知的．

常微分方程近似解的最古老的方法之一是展成Taylor级数 在此方法中，对方程

$$y'=f(x,y)$$

的满足初始条件

$$y(x_0)=y_0$$

的解用Taylor级数的部分和

$$y(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

近似．导数$y^{(k)}(x_0)$用$f(x,y)$和它的偏导数

$$y'=f(x,y),\ y''=f'_x(x,y)+f'_y(x,y)y',$$

$$y'''=f''_{xx}(x,y)+2f''_{xy}(x,y)y'+f''_{yy}(x,y)y'^2+f_y(x,y)y''$$

等表示．该方法的误差正好与$(x-x_0)^{n+1}$成正比．对大的$x-x_0$的值，这个误差当$n\to\infty$时很慢地趋于零，而如果$x-x_0$的值超出了Taylor级数的收敛半径，这个误差当$n\to\infty$时通常不趋于零．这一事实以及需要计算大量的偏导数，就强烈地限制了此方法的可应用范围．展成Taylor级数以及展成更一般级数的方法，通常用于寻求一个具有解析表达式的近似解．用于这个目的的方法还包括含有微分不等式的**Чаплыгин 法**（Chaplygin method）和**序列逼近法**（sequential approximation, method of）．这些方法主要用于理论研究，在实际计算中仅是偶尔用来获得微分方程的数值解．

将待解方程分离为主要项和比主要项小的项，这样一种求微分方程近似解的渐近法常用于实际工作．用于方程$y'=f(x,y,\mu)$的**小参数法**（small parameter, method of the)）可作为一个例子．渐近方法既用于获得近似解的解析表达式也用于解的定性研究．

在求微分方程数值解时最经常使用的方法中，解的形式都是未知函数y关于自变量x在区间$x_0\leqslant x\leqslant x_0+X$上若干值的近似值的表列 举例来说，考虑在区间$x_0\leqslant x\leqslant x+X$上具有初始条件$y(x_0)=y_0$的方程$y'=f(x,y)$的解，并假设要对下列自变量的值

$$x_p=x_0+ph,\ p=0,\ \cdot,N,\ h=\frac{X}{N},$$

计算出解的值．数值x_p称为结点（nodes)，而长度h称为步长（step)，用y_p表示近似解在结点x_p处的值．

最简单的数值方法之一——**Euler 法**（Euler method）——建立于在等式

$$y_{p+1}=y_p+\int_{x_p}^{x_{p+1}}f(x,y)\,dx$$

中用矩形公式

$$y_{p+1}=y_p+hf(x_p,y_p)$$

求积分项的近似计算的基础上．Euler方法的截断误差正比于h^2．使用更为精确的积分公式来近似计算

$$\int_{x_p}^{x_{p+1}}f(x,y)dx,\qquad(1)$$

可以得到更为精确的数值方法 例如，如果使用梯形公式去近似（1)，那么

$$y_{p+1}=y_p+\frac{h}{2}\left(f(x_p,y_p)+f(x_{p+1},y_{p+1})\right).$$

这个方程通常不是直接可解的，例如对y_{p+1}．可以用由Euler方法得到的y_{p+1}作为初始近似，再用**迭代法**（iteration methods）求解．一次迭代得到公式·

$$y_{p+1}=y_p+\frac{h}{2}\left(k_1(x_p,y_p)+k_2(x_p,y_p)\right),$$

其中

$$k_1(x_p,y_p)=f(x_p,y_p)$$

以及

$$k_2(x_p,y_p)=f(x_p+h,y_p+hk_1(x_p,y_p)).$$

这些公式的误差是h^3阶的．它们属于**Runge-Kutta 法**（Runge-Kutta method）一类 这一类中的一个常见的方法包含h^5阶的误差．Runge-Kutta法是单步法，只要知道y_p——前一步的近似解的值——就可以计算出y_{p+1}．这是Runge-Kutta法也可以用于不等间距结点——差$x_{p+1}-x_p$不是常数——的原因．在选择积分步长时，如果能估计出方法中的步误差将会更好．这个误差能用，例如，Richardson外插（Richardson extrapolation）来估计 将y_{p+2}计算两次，一次是以h为步长算两步，另一次则以$2h$为步长算一步，得到的值分别用$y^{(1)}_{p+2}$和$y^{(2)}_{p+2}$表示，这个步的误差是

$$r_{p+2}\approx\frac{|y^{(2)}_{p+2}-y^{(1)}_{p+2}|}{2^s-1},$$

其中$s+1$是r_{p+2}关于h的阶（对Euler方法$s=1$，对梯形公式$s=2$等等） 估计步误差的另一个方法是获得具有控制项的Runge-Kutta型公式，该控制项近似于本方法步误差的主要项准确到高阶小项．人们还提出一种所谓的隐式单步法，并已证明了对某些类型的问题十分有效，但主要是用于边值问题

除单步法外，在微分方程的数值解法中也用多步法（或有限差分法)．在这些方法中，y_{p+1}的确定不仅需要知道y_p，还需要知道在先前几个结点上的y_{p-1}．k步法的公式形如

$$\sum_{q=0}^{k}a_{-q}y_{p-q}-h\sum_{q=0}^{k}b_{-q}f(x_{p-q},y_{p-q})=0,$$

其中a_{-1}, b_{-1}为常数且$a_0\neq0$ 如果$b_0=0$，则相应的方法称为显式法（explicit method)，如果$b_0\neq0$，则称为隐式法（implicit method)．Adams型方法（见**Adams 法**（Adams method)）是多步法的特殊情形.

$$y_p-y_{p-1}=h\sum_{q=0}^{k}b_{-q}f(x_{p-q},y_{p-q}).$$

这个计算通常基于一对k步公式，其中一个是显式的，而另一个是隐式的．这一对公式称为预估校正法（predictor-corrector methods) Hamming公式（Hamming formulas）可以作为这对公式的一个例子

$$y^{*}_{p+1}=\frac{2y_{p-1}+y_{p-2}}{3}+\frac{h}{72}\{191f(x_p,y_p)$$

$$-107f(x_{p-1},y_{p-1})+109f(x_{p-2},y_{p-2})-25f(x_{p-3},y_{p-3})\};$$

$$\widetilde{y}_{p+1}=y^{*}_{p+1}-\frac{707}{750}(y^{*}_{p}-y^{**}_{p}),$$

$$y^{**}_{p+1}=\frac{2y_{p-1}+y_{p-2}}{3}+\frac{h}{72}\{25f(x_{p+1},\widetilde{y}_{p+1})$$

$$+91f(x_p,y_p)+43f(x_{p-1},y_{p-1})+9f(x_{p-2},y_{p-2})\},$$

$$y_{p+1}=y^{**}_{p+1}+\frac{43}{750}(y^{*}_{p+1}-y^{**}_{p+1}),$$

它的截断误差是 h^6 阶．根据 Hamming 公式进行计算依次包括，“预估” y^{*}_{p+1}，“修正” $\widetilde{y}_{p+1}$，“校正” y^{**}_{p+1}，及最后的近似解 y_{p+1} 等计算步骤

在天体力学中，Störmer 公式（见 **Störmer 法**（Störmer method））被广泛应用．它们特别适合于

$$y''=f(x,y)$$

类型的方程，且具有形式

$$\Delta^2 y_{p+1}=h^2 f(x_p,y_p)+\frac{h^2}{12}\sum_{q=2}^{k}b_{-q}\Delta^q f(x_{p-q},y_{p-q})$$

（显式 Störmer 公式（explicit Störmer formula））及

$$\Delta^2 y_{p-1}=h^2 f(x_p,y_p)+\frac{h^2}{2}\sum_{q=1}^{k}c_{-q-1}\Delta^{q+1}f(x_{p-q},y_{p-q})$$

（隐式 Störmer 公式（implicit Störmer formula）），在 Störmer 公式中

$$b_{-1}=1,\ b_{-3}=1,\ b_{-4}=\frac{19}{20},\quad ,$$

$$c_{-2}=1,\ c_{-3}=0,\ c_{-4}=-\frac{1}{120},\quad ,$$

而 $\Delta^q(f)$ 是 q 阶有限差分

只有知道最前面 k 个结点处解的值才能使用多步法 为了寻求这些值，通常使用有相同阶数截断误差的单步法．

常微分方程边值问题的解可以归结为解几个带初始条件的问题．这种类型的最简单的方法是**打靶法**(shooting method)，它既用于线性的也用于非线性的边值问题．例如，设要求二阶方程边值问题

$$y''=f(x,y,y'),\ y(0)=a,\ y(l)=b$$

的一个解．令 $y'(0)=c$，可以在线段 $0\leqslant x\leqslant l$ 上解带有初始条件的问题

$$y''=f(x,y,y'),\ y(0)=a,\ y'(0)=c \tag{2}$$

及计算值 $y(l,c)$ 从条件 $y(l,c_0)=b$ 求出 c_0．于是边值问题的解与具有初始条件 $y(0)=a,\ y'(0)=c_0$ 问题的解相一致．方程 $y(l,c)=b$ 的根 c_0 通常用某种近似方法求得，它的确定包含重复地解具有初值 (2) 的问题．从计算误差的角度看，打靶法常常是不稳定的．

解线性边值问题常常用**不变嵌入**（invariant imbedding）法，在该方法中，解一个二阶方程的边值问题被归结为解三个带初始条件的一阶方程的问题．设要解的边值问题是

$$y''=p(x)y+f,$$

$$y'(0)=a_0y(0)+b_0,\ y'(l)=a_1y(l)+b_1\ .$$

选择函数 $a(x)$ 和 $b(x)$，使得对所有 $0\leqslant x\leqslant l$ 有 $y'(x)=a(x)y(x)+b(x)$. 这些函数可以作为求带初始条件的问题

$$a'(x)+a^2(x)=p(x),\ a(0)=a_0,$$

和

$$b'(x)+a(x)b(x)=f(x),\ b(0)=b_0$$

的解来获得．这些问题的这种解法被称为向前搜索(forward sweep)．向前搜索为确定 $y(l)$ 和 $y'(l)$ 提供两个条件

$$y'(l)=a_1y(l)+b_1 \quad 和 \quad y'(l)=a(l)y(l)+b(l)\ .$$

利用这些条件找出 $y(l)=y_l$，然后，在线段 $0\leqslant x\leqslant l$ 上，原来的边值问题的解 $y(k)$ 作为带初始条件的问题

$$y'(x)=a(x)y(x)+b(x),\ y(l)=y_l$$

的解而获得，这就是所谓的向后搜索 (backward sweep)．这些方法适合于解微分方程组的边值问题 类似于这些方法的有限差分法广泛使用于计算实际中．

另外，在解非线性边值问题时，人们还使用线性化方法与打靶法相结合．**Newton 法**（Newton method）是最常用的这类方法．

各种各样的变分方法也用于解边值问题：**Ritz 法**(Ritz method)，**Галеркин 法**（Galerkin method)，等等．变分方法将边值问题的解化为某些泛函的极小化，近似解在预定的形式

$$y(x)=g(a_1,\quad ,a_n,\ x)$$

中寻找，参数 $a_1,\cdot,a_n$ 根据泛函极小值的条件决定．

解常微分方程的大部分数值方法已经作为计算机库程序实现．

常微分方程的近似解除解析的和数值的方法外，还有图示法．例如**等倾线**（isoclines）法，它包括构造由方程定义的方向场．人们还使用模拟计算机和其他模拟装置．

参考文献

[1] Бахвалов, Н С, Численные методы, М, 1973 (英译本 Bakhvalov, N S, Numerical methods analysis, alge-

bra, ordinary differential equations, Mir, 1977)
[2] Березин, И С, Жидков, Н П, Методы вычислений, т 2 2 изд, М, 1962(英译本 Berezin, I S and Zhidkov, N P, Computing methods, Pergamon, 1973)
[3] Михлин, С Г, Смолицкий, Х.Л, Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, М, 1965(英译本 Mikhlin, S G and Smolitskii, Kh L, Approximate method for solution of differential and integral equations, American Elsevier, 1967)
[4] Моисеев, Н Н, Численные Методы в теории оптимальных систем, М, 1971
[5] Milne, W E, Numerical solution of differential equations, Wiley, 1953.
[6] Collatz, L, Numerical treatment of differential equations, Springer, 1966(译自德文)
[7] Hamming, R W, Numerical methods for scientists and engineers, McGraw-Hill, 1962
[8] Годунов, С К, Рябенький, В С, Разностные схемы Введение в теорию, М, 1973(英译本 Godunov, S K and Ryaben'kiĭ, V S, The theory of difference schemes, North-Holland, 1964)
[9] Collatz, L, Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung, Chelsea, reprint, 1948.

С С Гайсарян 撰

【补注】 所有有解析解的微分方程的分类可追溯到 L Euler. 在[A5]中可找到超过1500个解析可解的微分方程的介绍.

在前面关于Euler法,梯形法和Runge-Kutta法的阶的讨论中,给出的阶应该理解为局部阶 (local order),即仅作为一步以后准确度的阶,在一个固定结点 x_p 上的实际(整体)阶要少1 例如,Euler法具有局部阶2,但由它得到的数值解的误差大小为 $O(h)$ ($h \to 0$)

在西方标准术语中,具有步误差估计(通常称为局部误差(local error))控制项的Runge-Kutta法称为嵌入Runge-Kutta法 (embedded Runge-Kutta methods) 这种方法的经典例子是对线性方程具有5阶误差估计的4阶Merson法(见[A7]和[A4]) 被广泛应用的嵌入法是E Fehlberg的那些方法([A2],[A3],亦见[A4]),以及J.R.Dormand和P J Prince的新近得到的方法([A1]).

预估校正法可追溯至F R Moulton([A9])和W. E Milne([A8]). 前面提到的Hamming法的例子实际上就是一种预估校正法,它配有称为Milne方法(Milne device)的一种用于估计预估校正法局部误差的技术. 在[A6]中可以找到Milne方法的详细叙述.

隐式Runge-Kutta法,特别是基于(对称)Gauss公式的那些Runge-Kutta法属于解边值问题的最有效的方法,由于这些问题在性质上是全局性的,因此在用它们于解初值问题时的缺点现在就不再是严重的问题了. 在Gauss点上的配置可看作边值问题的有限差分法.

参考文献

[A1] Dormand, J R and Prince, P J, A family of embedded Runge-Kutta formulae, *J Comp Appl Math*, **6** (1980), 19-26
[A2] Fehlberg, E, Classical fifth-, sixth-, seventh- and eight-order Runge-Kutta formulas with stepsize control, *Nasa TR*, **287** (1968) Abstract in Computing, **4** (1969), 93-106
[A3] Fehlberg, E, Low order classical Runge-Kutta formulas with stepsize control and their application to some heat transfer problems, *Nasa TR*, **315** (1969) Abstract in Computing, **6** (1969), 61-71
[A4] Hairer, E, Nørsett, S P and Wanner, G, Solving ordinary differential equations, I, Nonstiff problems, Springer, 1987
[A5] Kamke, E, Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Losungen, Chelsea, reprint, 1947
[A6] Lambert, J D, Computational methods in ordinary differential equations, Wiley, 1973
[A7] Merson, R H, An operational method for the study of integration processes, in Proc Symp Data Processing, Weapons Res Establ, Salisburg, Australia, 1957, 110-125
[A8] Milne, W E, Numerical integration of ordinary differential equations, *Amer Math Monthly*, **33** (1926), 455-460
[A9] Moulton, F R, New methods in exterior ballistics, Univ Chicago Press, 1926.
[A10] Ascher, U M, Mattheij, R M M and Russell, R D, Numerical solution for boundary value problems for ordinary differential equations, Prentice-Hall, 1988
[A11] Hall, G and Watt, J M, Modern numerical methods for ordinary differential equations, Clarendon Press, 1976

周芝英 译 叶彦谦 校

延迟常微分方程 [differential equations, ordinary, retarded, дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом]

带延迟型的偏差变元的常微分方程(见**具有分布自变量的常微分方程** (differential equations, ordinary, with distributed arguments)),即方程中所求函数的最高阶导数对任何自变量的值,由对小于或等于该自变量的值所取的这个函数本身以及低阶导数的值所决定. 如果取时间为自变量,那么这些方程和方程组描述的是带后效的过程 状态向量在任何时刻的速度不仅由那个时刻的状态(像通常的常微分方程那样)而且还由前面时刻的状态决定. 特别是在自动控制系统(见**自动控制理论** (automatic contral theory))中,当控制机制有一延迟时,就会出现这种情况.

А Д Мышкис 撰

【补注】 这种方程的另一种常用名称是延迟微分方程(differential-delay equations)

参考文献

[A1] Hale, J, Functional differential equations, Springer, 1971

[A2] Nusshaum, R D., Differential-delay equations with two time lags, Amer Math Soc, 1978

周芝英 译 叶彦谦 校

具有分布自变量的常微分方程 [differential equations, ordinary, with distributed arguments, дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом]，具有偏差变元的常微分方程 (ordinary differential equations with deviating (deviated) arguments)

联系自变量，未知函数及其导数，通常对自变量的不同值取值的常微分方程．例如

$$x'(t)=ax(t-\tau), \qquad (1)$$

$$x'(t)=ax(kt), \qquad (2)$$

其中常数 a, τ 和 k 是给定的，方程 (1) 中的 τ 和方程 (2) 中的 $t-kt$ 是自变量的偏差 (deviations)，延迟 (retardations) 或滞后 (lags)．还有带许多自变量偏差的更复杂的微分方程，这些偏差可以表成给定的函数 (特别地，如果它们是常数，则方程常常被当作微分-差分方程 (differential-difference equations)) 或者甚至依赖所求的解．还有一些零散论文研究未知函数依赖于多个自变量的带偏差变元的微分方程．带偏差变元的微分方程的首次出现与偏微分方程的形式解有关，以后由于对方程本身的研究又出现在几何问题中，后来又出现在各种应用中，主要是在**自动控制理论** (automatic control theory) 中　带偏差变元的微分方程理论的系统形成开始于 1949 年

带偏差变元的微分方程的定义允许所求的解 (形如 $x=(x(t))$) 和它的积分的任何叠加，从形式上讲，这类带偏差变元的常微分方程包含了数学分析中所有的方程　但通常理解的带偏差变元的常微分方程是指常微分方程中普通的一类，在这类方程中引进了理论上有意义的自变量的偏差．这种方程有几个性质完全类似于常微分方程，而其他性质主要是新的．

方程 (或方程组)

$$x^{(n)}(t)=f(t,x^{(m_1)}(t-\tau_1), \quad ,x^{(m_s)}(t-\tau_s)) \qquad (3)$$

(对方程组，x 和 f 是向量)，其中所有 $\tau_j\geqslant 0$, 如果 $\max_j m_j<n, =n, >n$，则分别称为延迟 (滞后) 型 (retarded (lag) type)、中立型 (neutral type) 和先导型 (leading type) 微分方程 (组)　其他形式的方程在用替换 $t\to\chi(t)$ 变成形式 (3) 的基础上，再按此方法分类，其中 $\chi(t)$ 是一个增函数，例如方程 (1)，如果 $\tau\geqslant 0$, 则是延迟型的，如果 $\tau<0$, 则是先导型的 (用替换 $t\to t+\tau$)　如果偏差 τ_j 依赖于 t, 则方程 (3) 可以变换类型，因此，具有 $k\leqslant 1$ 的方程 (2)，如果 $t\geqslant 0$, 则是延迟型的，如果 $t\leqslant 0$, 则是先导型的．如果 τ_j 依赖于所求的解，则方程 (3) 对不同的解可以是不同类型的．带延迟型偏差变元的微分方程的理论研究得最仔细，中立型的研究得较少，而先导型的还没有研究到任何有意义的程度．

下面是最简单类型的带偏差变元的微分方程中的一种

$$x'(t)=f(t,x(t),\ x(t-\tau)),\quad \tau>0 \qquad (4)$$

以下的基本初值问题 (fundamental initial value problem) 对这类问题作了表达　给定初值点 t_0, 初始函数 $\varphi(t)$, $t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0$, 和值 $x(t_0+0)$, 方程 (4) 对此问题的解理解为函数 $x(t)\,(t>t_0)$, 它使得方程 (4) 恒成立，并且如果 $t>t_0$, $t-\tau\leqslant t_0$, 则在方程的右端用 $\varphi(t-\tau)$ 代替 $x(t-\tau)$．该问题可用步进法 (method of steps) 求解　如果 $t_0<t\leqslant t_0+\tau$, 则在方程 (4) 中用 $\varphi(t-\tau)$ 代替 $x(t-\tau)$ 就解出初值问题，如果 $t_0+\tau<t\leqslant t_0+2\tau$, 则有 $t_0<t-\tau\leqslant t_0+\tau$, 即已经构造了 $x(t-\tau)$, 等等　因此，每一步实质上是对一个没有偏差变元的方程求解 **Cauchy 问题** (Cauchy problem)．如果两个函数 f 和 φ 是连续的，且 $x(t_0+0)=\varphi(t_0)$，那么问题的解在某个区间 $t_0<t\leqslant t_0+h$ 上存在且可用通常的方法延拓，并且如果函数 $f(t,x,y)$ 关于 x 满足 Lipschitz 条件，那么这个解是唯一的且连续依赖于 f, φ 和 τ．此外，如果函数 f 充分光滑，那么 $x'(t)$ 当 $t>t_0$ 时是连续的，如果 $t>t_0+\tau$, 则 $x''(t)$ 是连续的等等 (光滑性 (smoothing property))．

对形如 (4) 的方程组和高阶方程，可用完全类似的方法来表述初值问题并构造解　如果有几个滞后存在，则选其中最小的一个作为步长．如果 $\tau=\tau(t)$, 则 $\varphi(t)$ 应在由 $t-\tau(t)\leqslant t_0\,(t>t_0)$ 构成的整个初始集 (initial set) 上定义．如果 $\tau(t)$ 有零点，则步进法不能使用，但可以证明，如果使用简单的逼近或迭代法，则与上面所述相似的初值问题是可解的　原则上数值解法与 $\tau\equiv 0$ 的情形相同　如果给定的函数不连续或 $x(t_0+0)\neq\varphi(t_0)$, 则解的概念能被自然地扩展

如上所表述的初值问题的解仅在 t 的增加方向被构造出来．它的另一个特色是，对任意 $\varphi(t)$, 解的流形通常是无限维的 (无前史方程 (equations without pre-history) 是这规则的一个例外，对于这些方程如果 $t\geqslant t_0$, 则有 $t_0\leqslant t-\tau(t)\leqslant t$, 如同 $0\leqslant k\leqslant 1$, $t_0=0$ 情况下的方程 (2).) 这是带偏差变元的微分方程理论与不带偏差变元的微分方程理论之间显著的差别．

在方程 (4) 中，滞后是集中的 (concentrated)．

也有一些带偏差滞后的方程，它们的右端含有积分

$$\int_{-\tau}^{0} x(t+s)r(t,s)ds = \int_{t-\tau}^{t} x(s)r_1(t,s)ds$$

(这是 Volterra 型积分 - 微分方程)或者是复合情况

$$\int_{-\tau}^{0} x(t+s)d_s r(t,s),$$

等等．最普通类型的带延迟型偏差变元的一阶微分方程是微分泛函 Volterra 型方程

$$x'(t)=F[x(t+s),t], \quad -\tau\leqslant s\leqslant 0,$$

其中右端是关于任意 $t>t_0$ 的一个泛函．这种方程的初值问题同样是可解的．

对带中立型偏差变元的微分方程，例如

$$x'(t)=f(t,x(t),x(t-\tau_1),x'(t-\tau_2)), \quad \tau_1,\tau_2\geqslant 0,$$

初值问题的表达与性质类似于上面所说的，但没有光滑性，如果滞后变量 $\tau_2(t)$ 有零点，则问题会比较复杂．至于带先导型偏差变元的微分方程，其初值问题是不适定的

带偏差变元的线性自治系统（即方程中的系数和自变量的偏差是常数）已被详细研究．方程（无常数项）

$$x^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j x^{(m_j)}(t-\tau_j) \qquad (5)$$

（所有 $a_j\neq 0$）有特解 $x=e^{pt}$,其中 p 满足**特征方程**（characteristic equation)

$$P(p)\equiv p^n-\sum a_j p^{m_j} e^{-\tau_j p}=0 \qquad (6)$$

这里 $P(p)$ 是拟多项式，方程（5）的解 e^{pt}, ，$t^{k-1}e^{pt}$ 对应于方程（6）的 k 重根 只要有一个 $\tau_j\neq 0$, 方程（6）就有无限个根 $p_1, p_2,$ ．方程（5）是延迟（中立）型的充分必要条件是

$$\mathrm{Re}\, p_r \underset{r\to\infty}{\to} -\infty \left[-\infty < \overline{\lim_{r\to\infty}}\, \mathrm{Re}\, p_r < \infty\right].$$

在这种情况下，方程（5）的每一个解都可以展成上面给出的特殊解的级数，并且通常的运算微积方法可用于求解方程（5）及相应的非齐次方程的初值问题．带偏差滞后的方程组与方程也有类似的性质

有关解的稳定性的通常条件可被直接推广到带延迟和中立型偏差变元的微分方程．条件

$$\sup_r \mathrm{Re}\, p_r < 0$$

对方程（5）的解的渐近稳定性是充分必要的 如果这个条件满足，那么，对于以方程（5）为其线性近似的非线性自治方程，其零解也是渐近稳定的．

Н.Н.Красовский 推广 Ляпунов 函数方法到研究带偏差变元的微分方程的稳定性中去（[5]）．他提出在 $C[-\tau,0]\times[0,\infty)$ 上用泛函 $V[\psi(s),t]$；这种泛函"沿（类型（4）的给定方程的）解"的全微商可根据该方程计算出来，并且它是同一类型的泛函，即

$$\frac{d}{dt} V[x(t+s), t] = V_1[x(t+s); t].$$

与 Ляпунов 的稳定性定理类似的定理可叙述如下 如果

$$f(t,0,0)\equiv 0;$$

$$(\text{对所有 } h>0) \inf_{\substack{\|\psi\|>h \\ t>t_0}} V[\psi(s),t]>0,$$

$$V[\psi(s),t_0] \underset{\|\psi\|\to 0}{\to} 0, \quad V_1\leqslant 0,$$

那么方程（4）的平凡解是稳定的．这样表示的基本稳定性定理有一逆命题

对带偏差变元的周期微分方程已经获得一些结果 例如，如果

$$f(t+T,x,y)\equiv f(t,x,y), \quad T>0,$$

则算子

$$U_k[\varphi(s)]\equiv x(kT+s)$$

的不动点决定了方程（4）的 kT 周期解（$t_0-\tau\leqslant s\leqslant t_0$, $x(t)$ 是方程（4）对初始函数 φ 的解，k 是一自然数）．由于这个原因及一些类似的事实，应用非线性算子理论的方法寻找周期解并弄清它们的稳定性是可能的．对带延迟型偏差变元的线性齐次 T 周期微分方程的情形，已证明可用形如

$$t^k e^{q_r t}\alpha(t), \alpha(t+T)\equiv\alpha(t), \quad k=0,\cdot,k_r$$

的解的线性组合按指数尺度逼近每一个解到所要求的精确度．

对带偏差变元的微分方程其他方向的研究包括方程

$$x'(t)=\pm M(t)x(t-\tau(t)), \quad M(t)\geqslant 0,$$

以及类似的二阶方程的渐近和振动性质的详细分析，获取带小偏差变元或小非线性系统的解的渐近表示式，将渐近 Крылов - Боголюбов 方法推广到带偏差变元的微分方程（见 **Крылов - Боголюбов 平均法** (Krylov-Bogolyubov method of averaging)),最优控制的 L.S Pontryagin 方法类似的推广（见**最优控制的数学理论**（optimal control, mathematical theory of)),边值问题的研究，带时间滞后的偏微分发展方程的研究(见**发展方程** (evolution equation))，带偏差变元的随机微分方程的研究(见**随机微分方程**（stochastic differential equation)),等等

参考文献

[1] Эльсгольц, Л Э , Норкин, С Б , Введение в теорию

дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, М, 1971 (英译本 El'sgol'ts, L E and Norkin, S B, Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments, Acad Press, 1973).
[2] Pinney, E, Ordinary difference-differential equations, Univ Calif Press, 1958
[3] Bellman, R and Cooke, C L, Differential-difference equations, Acad Press, 1963
[4] Мышкис, А Д, Линейные дифференциальные уровнения с запаздывающим аргументом, 2 изд, М, 1972.
[5] Красовский, Н Н, Некоторые задачи теории устойчивости движения, М, 1959 (英译本 Krasovskii, N N, Stability of motion Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay, Stanford Univ Press, 1963).
[6] Норкин, С Б, Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом, М, 1965 (英译本 Norkin, S B, Differential equations of the second-order with retarded argument, Amer Math Soc, 1972)
[7] Рубаник, В П, Колебания квазилинейных систем с запаздыванием, М, 1969
[8] Oguztöreli, M N, Time-lag control systems, Acad Press, 1966
[9] Halanay, A, Differential equations stability, oscillations, time-lags, Acad Press, 1966
[10] Hale, J K, Functional differential equations, Springer, 1971

А Д Мышкис 撰

【补注】 带延迟的 (无常数项) 微分方程与常微分方程之间另一个更为明显的差别是前者可以有非零解 $x(t)$, 使存在某个 t_0 对所有 $t \geqslant t_0$ 有 $x(t)=0$. 例如, 当 A 是奇异非零矩阵时, 这种情况对延迟方程组 $\dot{x}(t)=Ax(t-h)-Dx(t)$ 就可能发生

参考文献

[A1] Chow, S N and Hale, J K, Methods of bifurcation theory, Springer, 1982
[A2] Peitgen, H-O and Walther, H-O (eds), Functional differential equations and approximation of fixed points, Springer, 1979

周芝英 译 叶彦谦 校

带小参数的微分方程 [differential equations with small parameter, дифференциальные уравнения с малым параметром при производных], 在导数前形如

$$\mu\frac{dz}{dt}=F(z,y,t),\quad \frac{dy}{dt}=f(z,y,t) \qquad (1)$$

的方程组, 其中 z 和 y 分别是 M 维和 m 维向量, $\mu>0$ 是小参数. 如果形式地在 (1) 中令 $\mu=0$, 则得到所谓的简化方程组 (system of reduced equations)

$$0=F(z,y,t),\quad \frac{dy}{dt}=f(z,y,t). \qquad (2)$$

设 (1) 的解 $x(t,\mu)$ (x 代表向量 (y,z)) 由某些附加条件确定. 要想证明能用方程组 (2) 来构造 $x(t,\mu)$ 的一个对小的 μ 渐近的近似式现在遇到了困难, 因为方程组 (2) 的阶数比 (1) 低, 因此它的解不可能适合所有加于 (1) 的条件. 事先并不清楚, 在确定 (2) 的解时, 被 (1) 所满足的附加条件中哪些应保留, 哪些应丢弃 此外, 方程 $F(z,y,t)=0$ 关于 z 经常有几个根, 而且事先并不清楚, 为了得到合适的近似解, 其中哪些要用于解方程组 (2). 这些特性构成了 (1) 的解的渐近性问题和正则 (regular) 情形之间的差别, 后者中 μ 不作为导数的系数出现, 但正常地出现在右端

像 (1) 这样的系统, 首先研究的是初值问题

$$z|_{t=0}=z^0,\ y|_{t=0}=y^0 \qquad (3)$$

А.Н Тихонов 给出了最完全的结果([1]), 它的主要特点如下. 设方程 $F(z,y,t)=0$ 在某个闭有界区域 D 中确定几个孤立根

$$z=\varphi_i(y,t).$$

引进所谓的相伴方程组 (associated system)

$$\frac{dz}{d\tau}=F(z,y^*,t^*), \qquad (4)$$

其中 y^* 和 t^* 作为参数考虑. 取其中的一个根 $z=\varphi_i$ 并用 $z=\varphi(y,t)$ 表示 这个根 $z=\varphi(y,t)$ 称为在 D 中是稳定的 (stable), 如果对每一个点 $(y^*,t^*)\in D$, 对应的相伴方程组 (4) 的休止点 $z=\varphi(y^*,t^*)$ 是渐近稳定的. 稳定根 $z=\varphi(y,t)$ 的影响域 (domain of influence) 是点 (z^*,y^*,t^*) 的集合, 它们使得由初始条件 $z|_{\tau=0}=z^*$ 确定的 (4) 的解当 $\tau\to\infty$ 时趋于 $\varphi(y^*,t^*)$. 因此, 如果 $z=\varphi(y,t)$ 是一个稳定根, 而初值问题 (3) 的解 $x(t,\mu)$ 的初始点 $(z^0,y^0,0)$ 属于它的影响区域时, 则当 $\mu\to 0$ 时, 这个解趋于简化方程组 (2) 的解, (2) 中第一个方程的解是 $z=\varphi(y,t)$, 而条件 (3) 是关于 y 的初始条件, 但关于 z 是被舍弃的. 换句话说,

$$\lim_{\mu\to 0} y(t,\mu)=y_0(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \qquad (5)$$

$$\lim_{\mu\to 0} z(t,\mu)=z_0(t)\equiv\varphi(y_0(t),t),\ 0<t\leqslant T, \qquad (6)$$

其中 $y_0(t)$ 是从系统

$$\frac{dy}{dt}=f(\varphi(y,t),y,t) \qquad (7)$$

在初始条件 $y_0|_{t=0}=y^0$ 下求得的, T 与 D 的维数有关. 因而, 不像正常情形, 仅仅是在特殊条件下, (1) 的解 $x(t,\mu)$ 对于小的 μ, 才趋于与 $\mu=0$ 对应的系统的

解，即系统 (2) 的解．

极限过程 (6) 是不一致的，因为一般地 $z^0 \neq \varphi(y^0, 0)$．换句话说，由于对 z 的初始条件的"丢失"，$t=0$ 的邻域也包含一个区域，在这个区域中 $z(t, \mu)$ 不接近 $z_0(t)$，即使这个区域当 $\mu \to 0$ 时无限地收缩．这一效应的名称是**边界层** (boundary layer)，借用流体动力学中的称呼．

根 $z=\varphi(y, t)$ 的稳定性概念在 (1) 的研究中起着重要作用．根据 Ляпунов 关于休止点的各种稳定性判据 (见**Ляпунов稳定性** (Lyapunov stability))，相应有根 $z=\varphi(y, t)$ 的各种稳定性判据 最有用的一个是首次近似判据 (criterion of the first approximantion)，要求矩阵

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{z=\varphi(y\ t)} \tag{8}$$

的本征值 λ 在 D 中满足不等式 $\mathrm{Re}\lambda<0$．如果 $\mathrm{Re}\lambda>0$，则对问题 (1)，(3) 获得的结果与前面叙述的相似，只不过是对 $t<0$ 如果矩阵 (8) 的本征值有相反符号的实部，即

$$\mathrm{Re}\lambda_i<0,\ i=1, \quad ,k,\ \mathrm{Re}\lambda_i>0,\ i=k+1, \quad ,M, \tag{9}$$

那么初始问题 (1)，(3) 的解当 $\mu \to 0$ 时通常没有极限．可是，如果对 (1) 规定一个边界条件而不是初始条件 对 $t=0$ 给定向量 z 的 k 个分量 (分量用下标表示)，而对 $t=T$ 给定 z 的另外 $M-k$ 个分量 (可以对 $t=0$ 和 $t=T$ 二者都规定 y 的值)．

$$\left.\begin{array}{l} z_i|_{t=0}=z_i^0,\ i=1, \quad ,k, \\ z_i|_{t=T}=z_i^0,\ i=k+1, \quad ,M, \end{array}\right\} \tag{10}$$

$$y|_{t=0}=y^0, \tag{11}$$

那么，如果满足某些条件 (类似于加在初值问题上的要求，即，初始点包含在稳定根吸引的区域内)，则极限过程 (5)，(6) 也适用于问题 (1)，(10)，(11) 的解 $x(t, \mu)$，其中 $y_0(t)$ 如前由系统 (7) 定义．极限过程 (6) 适用于 $0<t<T$，而边界层出现在 $t=0$ 和 $t=T$ 的邻域中，因为如果 $\mu=0$，则失去了对 $t=0$ 和 $t=T$ 给定的附加条件 (10) 情形 (9) 就是熟知的条件稳定的情况 (conditionally stable case) ([2])．

在建立极限过程 (5)，(6) 之后，人们又进行了为获得它的解的渐近展开式的研究．在正常情况下，初值问题的解可表示成关于 μ 的幂级数

$$x(t,\mu)=x_0(t)+\mu x_1(t)+ \quad , \tag{12}$$

如果右端充分光滑，则这是一个渐近级数．在情形 (1)，由于边界层的存在，因此解的渐近展开式可能比较复杂，因为所谓的边界层修正或边界层级数 (boundary-layer series)

$$\begin{array}{r} x(t, \mu)=x_0(t)+\mu x_1(t)+ \quad +\Pi_0 x\left[\dfrac{t}{\mu}\right] \\ +\mu\Pi_1 x\left[\dfrac{t}{\mu}\right]+ \end{array} \tag{13}$$

可能要加到形如 (12) 的幂级数上．项 $\Pi_k x(t/\mu)$ 称为边界层项 (boundary-layer terms) 它们在接近 $t=0$ 处起重要作用，然后按照指数规律 $\exp(\alpha t/\mu)$ 迅速衰减，其中 $\alpha>0$ [2] 中详细描述了问题 (1)，(3) 的渐近展开式结构的一种算法，其中证明了，假若 (1) 的右端充分光滑，则渐近展开式 (13) 的余项关于 $t\in[0, T]$ 一致地为 $O(\mu^{n+1})$ 阶 一个类似的渐近展开式也适用于问题 (1)，(10)，(11) 的解 其差别是，必须加两个边界层修正到形如 (12) 的幂级数上去，而不是加一个，因为边界层在 $t=0$ 的邻域和 $t=T$ 的邻域都出现．

渐近表示式 (13) (如果稳定根存在) 或类似的具有两个边界层的表示式 (如果条件稳定根存在)，使得有可能证明受比 (3) 或 (10)，(11) 更复杂的附加条件

$$R(x(0), x(\tau))=0 \tag{14}$$

限制的解的渐近性存在，并可能获得它 ([2])

上面描述的关于构造当 $\mu \to 0$ 时未知解所趋向的函数的所有问题都只涉及方程 $F(z, y, t)=0$ 的一个单根 $z=\varphi(y, t)$ 但是，如果这个方程不只一个根，那么常常要观察转移 (transition) 或间断 (discontinuity) 现象 在此情况下，满足某些附加 (一般是边界) 条件的方程 (1) 的解作为一条曲线 (通常是间断的) 的极限情况而获得，它由几条线段组成，在适当选择了作为方程 $F(z, y, t)=0$ 解的一个根 $z=\varphi_i(y, t)$ 时，每一个线段在有关的区间内都由 (2) 确定．从一个区间到另一个区间，根通常是变化的 这些线段的边界称为间断点 (discontinuity points)．在每一这种点的邻域产生一个边界层，称之为内边界层 (internal boundary layer) 间断性的原因是多种的 带有间断点的解的渐近性有时可用形如 (13) 的展开式来描述 ([2]) 或是更为复杂 (例如见[3]，[4])．

还有许多关于一些很不相同的问题的研究，诸如 $\mathrm{Re}\lambda$ 等于零的情形，在无限区间上研究 (1)，对初始 z 值关于 μ 为奇异的初值问题解的研究，对 (1) 的抽象形式的研究，等等，有关这方面的综述，见[4]．大量的研究是关于类型 (1) 的线性方程的．线性方程的典型问题之一是研究本征值和本征函数的渐近性 ([5])，以及构造基本解组的全局渐近 如果系统包含所谓的转向点 (亦见**小参数法** (small parameter, method of the))，则对最后提到的问题的研究就变得十分困难；这类问题的详细论述见 [4]．

对于类型 (1) 的微分方程所获得的许多结果曾用于带小参数的积分微分方程 (例如见 [2]). 也有大量研究是关于首项导数的系数为小参数的偏微分方程的 ([5], [7], [10]) 对具有自变量小偏差的微分差分方程, 完全类似的渐近关系式也被注意到 ([4])

类型 (1)的微分方程, 以及具有类似解的渐近特性的其他方程, 称为奇异摄动方程 (singularly perturbed equations) 或奇异摄动问题 (singular perturbation problems), 以区别于正常情况 有人曾用 Крылов-Боголюбов的平均法对奇异摄动系统进行了研究, 这一方法在共振现象和振动过程的研究中特别有效, 人们还提出了上升 (ascent) 法, 或正则化 (regularization) 方法 ([8]) 在物理和技术的不同领域中 非线性振动理论、流体动力学、天体力学、量子力学、动力学等等也遇到奇异摄动方程 ([11]).

参考文献

[1] Тихонов, А Н, 《Матем сб》, **31** (1952), 3, 575–586

[2] Васильева, А Б, Бутузов, В Ф, Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, М, 1973

[3] Мищенко, Е Ф, Розов, Н Х, Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М, 1975.

[4] Бутузов, В Ф, Васильева, А Б, Федорюк, М В, в кн Итоги науки Математический анализ, 1967, М, 1969, 5–75

[5A] Вишик, М И, Люстерник, Л А, 《Успехи матем наук》, **12** (1957), 5, 3–122.

[5B] Вишик, М И, Люстерник, Л А, 《Успехи матем наук》, **15** (1960), 3, 3–80

[6] Иманалиев, М И, Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем, Фр, 1972

[7] Треногин, В А, 《Успехи матем наук》, **25** (1970), 4, 123–156

[8] Ломов, С.А, Теория возмущений сингулярных краевых задач, А-А, 1976

[9] Lomov, S A, Introduction to general singular perturbations theory, Moscow, 1981 (俄文).

[10] Butuzov, V F and Vasil'eva, A B, Singularly perturbed differential equations of parabolic type, in Asymptotic Analysis II, Lecture Notes in Math Vol 985, Springer, 38–75

[11] BAIL IV Proc Fourth Internat Conf on Boundary and Interior Layers Novosibirsk, Boole Press, 1986

А Б Васильева 撰

【补注】 上面关于在各种层中用不同的展开式来处理解的技巧, 被公认为是匹配渐近展开法 (method of matched asymptotic expansions)

参考文献目录略微过时些并完全忽略了西方文献. 作为一个普遍的记录可查阅 [A1], 新近的关于内层和松弛振动的著作分别是 [A2] 和 [A3].

应该注意到 Тихонов 原先的证明含有一个小疏忽, 被 F Hoppensteadt 发现并修正 ([A4], 亦见 [A1]). 关于平均法的新近的论文是 [A5]. 这方法一般不能用于类型 (1) 的奇异摄动问题.

参考文献

[A1] Eckhaus, W, Asymptotic analysis of singular perturbations, North-Holland, 1979

[A2] Chang, K W and Howes, F A, Nonlinear singular perturbation phenomena theory and application, Springer, 1984

[A3] Grasman, J, Asymptotic methods for relaxation oscillations and applications, Springer, 1987

[A4] Hoppensteadt, F, Stability in systems with parameter, *J Math Anal Appl*, **18** (1967), 129–134

[A5] Sanders, J A and Verhulst, F, Averaging methods in nonlinear dynamical systems, Springer, 1985

[A6] Eckhaus, W, Matched asymptotic expansions and singular perturbations, North-Holland & American Elsevier, 1973

[A7] Eckhaus, W and Jager, E M de, Asymptotic solutions of singular perturbation problems for linear differential equations of elliptic type, *Arch Rational Mech Anal*, **23** (1966), 26–86

[A8] O'Malley, R E, Jr, Introduction to singular perturbations, Acad Press, 1974

[A9] Wazov, W, Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience, 1965

周芝英 译 叶彦谦 校

微分域 [**differential field, дифференциальное поле**]

构成域的**微分环** (differential ring). 微分域的常数集合是一个子域, 即所谓的常数域 (field of constants)

Л А Скорняков 撰 赵春来 译 冯绪宁 校

微分形式 [**differential form, дифференциальная форма**], 简称微分式

1) 微分流形 (differentiable manifold) M 上的 p 次微分形式 (differential form of degree p) 即 p 形式 (p-form) 是 M 上一个 p 次协变张量场. 它也可解释为 p 线性映射 (M 上光滑实函数的代数 $F(M)$ 上) $\mathscr{X}(M)^p \to F(M)$, 这里 $\mathscr{X}(M)$ 为 M 上光滑向量场的 $F(M)$ 模. 一次形式也称为 Pfaff 形式 (Pfaffian form). 一次形式的例子有 M 上光滑函数 f 的微分 df, 其定义如下 $(df)(X)$ $(X \in \mathscr{X}(M))$ 为 f 沿场 X 方向的导数 Xf

流形 M 上的 Riemann 度量可作为对称的二次微分形式的例子．然而，“微分形式”一词常用来表示斜对称或外微分形式（exterior differential form），它有极其广泛的应用．

设 $(x^1, \cdots, x^n)$ 为区域 $U \subset M$ 中的局部坐标系，则形式 $dx^1, \cdots, dx^n$ 构成余切空间 $T_x(M)^*(x \in U)$ 的基，因此（见**外代数**（exterior algebra））任何外 p 形式 α 在 U 中可写为

$$\alpha = \sum_{i_1 \cdots i_p} a_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}, \qquad (1)$$

其中 $a_{i_1 \cdots i_p}$ 为 U 上函数．特别地，$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$．令 $E^p = E^p(M)$ 为一切 C^∞ 类外 p 形式的空间，这里 $E^0(M) = F(M)$ 外积 $\alpha \wedge \beta$ 将 $E^*(M) = \sum_{p=0}^n E^p(M)$ $(n = \dim M)$ 变换为 $F(M)$ 上的一个结合分次代数，满足分次交换性条件

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha,\ \alpha \in E^p,\ \beta \in E^q \qquad (2)$$

流形间的光滑映射 $f: M \to N$ 可诱导 $\mathbf{R}$ 代数间的一个同态 $f^*: E^*(N) \to E^*(M)$

函数的微分概念可推广如下．对任何 $p \geq 0$，存在唯一的 $\mathbf{R}$ 线性映射 $d: E^p \to E^{p+1}$（外微分法（exterior differentiation）），对 $p=0$，它就是上述微分，具有下列性质：

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta,$$
$$\alpha \in E^p,\ \beta \in E^q,\ d(d\alpha) = 0$$

写为局部坐标的形式 α（见 (1)）的外微分可表示成

$$d\alpha = \sum_{i_1, \cdots i_p} da_{i_1 \cdots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

它的自然记号是

$$d\alpha(X_1, \cdots, X_{p+1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} X_i \alpha(X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_{p+1})$$
$$- \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_{p+1}),$$

其中 $X_1, \cdots, X_{p+1} \in \mathscr{X}(M)$ 微分形式上的 **Lie 导数**（Lie derivative）算子 $L_X(X \in \mathscr{X}(M))$ 与外微分算子的联系由关系式

$$L_X = d \circ l_X + l_X \circ d$$

给出，这里 $l_X: E^p \to E^{p-1}$ 为用 X 内乘（interior multiplication）的算子：

$$(l_X\alpha)(X_1, \cdots, X_{p-1}) = \alpha(X, X_1, \cdots, X_{p-1}),$$
$$\alpha \in E^p(M),\ X_1, \cdots, X_{p-1} \in \mathscr{X}(M)$$

复形 $(E^*(M), d)$ 为上链复形（de Rham 复形（de Rham complex））此复形的上闭链称为闭形式（closed form），而其上边缘称为恰当形式（exact form）．据 **de Rham 定理**（de Rham theorem），de Rham 复形的上同调代数

$$H^*(M) = \sum_{p=0}^n H^p(M)$$

同构于流形 M 的实上同调代数 $H^*(M, \mathbf{R})$ 特别地，当 $p>0$ 时，$H^p(\mathbf{R}^n)=0$（Poincaré 引理（Poincaré lemma））

de Rham 定理与微分形式的积分运算有密切联系 设 D 为 $\mathbf{R}^p$ 中有界区域，并设 s 为定义在闭包 $\bar{D}$ 的邻域上的光滑映射 $\mathbf{R}^p \to M$ 若 $\alpha \in E^p(M)$，则 $s^*\alpha = a dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p$，这里 a 是 $\bar{D}$ 中的光滑函数．外 p 形式 α 在曲面 s 上的积分由公式

$$\int_s \alpha = \int_D a(x_1, \cdots, x_p) dx^1 \cdots dx^p$$

定义 若 D 的边界是逐片光滑的，则公式

$$\int_s d\alpha = \int_{\partial s} \alpha,\ \alpha \in E^{p-1}(M) \qquad (3)$$

成立，这里 $\int_{\partial s} \alpha$ 定义为形式 α 沿光滑边界片的积分（只是利用他们的自然参数化形式）的和．经典的 Newton-Leibniz 公式，Green 公式，Gauss-**Остроградский** 公式与 Stokes 公式（亦见 **Stokes 定理**（Stokes theorem））均是此公式的特殊情形 据公式(3)每个闭形式 α 定义一个 p 维奇异上闭链，它在单形 s 上的值是 $\int_s \alpha$ 这种对应是由 de Rham 定理给出的同构的体现．

公式 (3) 为 H．Poincaré ([2]) 于 1899 年发表，他把外形式看作积分不变量中被积式的表示．同时，E Cartan ([3]) 给出外形式与外微分算子（起初是关于 Pfaff 形式）的几乎现代的定义，其中强调其自身构造与外代数之间的联系

除了上面定义的外标量形式之外，还可以研究取值于 $\mathbf{R}$ 上向量空间 V 的外微分形式．若 V 为代数，则一个自然乘积（外积的推广）在取值于 V 的形式的空间 $E(M,V)$ 上定义 若代数 V 还是结合的，则 $E(M, V)$ 也是结合的，若 V 是交换的，则 $E(M, V)$ 是分次交换的（公式 (2)），若 V 是 Lie 代数，则 $E(M,V)$ 是分次 Lie 代数 也经常考虑下面这种甚至更一般的概念 设 F 为具有基 M 的光滑向量丛．若对每点 $x \in M$，给定 $T_x(M)$ 上取值于丛 F 的纤维 F_x 中的斜对称 p 线性函数，则可得所谓 F 值 p 形式（F-valued p-form） F 值 p 形式也可以解释为由模 $\mathscr{X}(M)^p$ 到 F 的光滑截口的模中的一个 p 线性映射（$F(M)$ 上）．这样的形式的空间记为 $E^p(F)$ 若 F 是由局部常数传递函数给出，或同样地，若在 F 上指定一个平坦联络，则在此情形下可定义 de Rham 复形，且推广 de Rham

定理.

取值于切丛 $T(M)$ 的形式也称为向量微分形式（vector differential form）；这些形式可以恒同于 M 上 p 次协变 1 次反变张量场，该场关于协变指标是斜对称的．向量微分形式可用来描述外形式的代数 $E(M)$ 的微分法 [4] 向量形式（以及他们的推广——导网形式）可用于流形上复形的形变与其他微分几何结构中.

与微分形式类似的形式在单纯理论中也已构造出来．一个这样的构造，其思想属于 H Whitney（[5]），可用来计算单纯复形 K 的有理上同调．K 上分段线性形式（piecewise-linear form）（或 PL 形式（PL-form））是在复形 K 的单形上定义的微分形式的协调族，这些微分形式当用重心坐标表示时带有有理系数多项式．K 上 PL 形式构成 $\mathbf{Q}$ 上分次交换微分代数 $E^*_{PL}(K)$ 形式的积分确定此代数的上同调代数到代数 $H^*(|K|, \mathbf{Q})$ 上的一同构，这里 $|K|$ 是对应于复形 K 的多面体 代数 $E^*_{PL}(K)$ 也完全定义 $|K|$ 的有理同伦型（特别地，同伦群的秩）．类似地，微分流形 M 上的代数 $E^*(M)$ 定义了 M 的实同伦型（[9]，[11]）

复解析流形上外形式的微积分学有一系列特性（[6]） 在此情况下通常考虑复值形式的空间 $E^p(M, \mathbf{C})$ 或空间 $E^p(F)$，这里 F 为 M 上全纯向量丛．下列分解成立.

$$E^p(M, \mathbf{C}) = \sum_{r+s=p} E^{r,s}(M),$$

其中 $E^{r,s}(M)$ 为 (r, s) 型形式的空间，即可以局部表示为

$$\sum a_{i_1 \cdots i_r j_1 \cdots j_s} dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_r} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{j_s}$$

的形式 α 的空间，其中 $(z^1, \cdots, z^n)$ 为 M 上局部解析坐标系．类似地，

$$E^p(F) = \sum_{r+s=p} E^{r,s}(F)$$

此外，$d = d' + d''$，其中

$$d' \quad E^{r,s}(M) \to E^{r+1,s}(M),$$

$$d'' \quad E^{r,s}(M) \to E^{r,s+1}(M)$$

这里 $d'^2 = d''^2 = 0$，因而 d' 与 d'' 定义了上链复形．算子 d'' 的复形（Dolbeault 复形（Dolbeault complex））是最熟知的，它的上同调记为 $H^{r,s}(M)$ $(p, 0)$ 型的 d'' 上闭链是全纯 p 形式（见**全纯形式**（holomorphic form）） 下列 Grothendieck 引理（Grothendieck lemma）对 d'' 成立 若 α 在空间 $\mathbf{C}^n$ 的零的邻域中为 (r, s) 型 $(s > 0)$ 形式且 $d''\alpha = 0$，则零的一个较小邻域包含一个 $(r, s-1)$ 型形式 β，满足 $\alpha = d''\beta$ Dolbeault 复形也可以对 F 值形式定义，这里 F 是全纯向量丛．这便导致上同调空间 $H^{r,s}(F)$．Grothendieck 引理蕴涵下列同构 $H^{r,s}(F) \cong H^s(M, \Omega^r(F))$，这里 $\Omega^r(F)$ 为全纯 F 值 r 形式的芽层（Dolbeault 定理（Dolbeault theorem）） 特别地，$H^{r,s}(M) \cong H^s(M, \Omega^r(M))$，这里 $\Omega^r(M)$ 为 M 上全纯 r 形式的芽层．存在以 $\sum_{r,s} H^{r,s}(M)$ 为首项的谱序列，收敛于 $H^*(M, \mathbf{C})$ 紧复流形 M 的 Euler 示性数 $\chi(M)$ 可用 Dolbeault 上同调空间以公式

$$\chi(M) = \sum_{r,s} (-1)^{r+s} \dim H^{r,s}(M)$$

表示

微分形式是微分几何的重要工具（[7]，[8]） 它们也系统地应用于拓扑学、微分方程论、力学、复流形理论以及多复变量函数论之中 类似于广义函数的微分形式的推广是流动形．微分形式理论的代数模拟（见**导子的模**（derivations, module of））能使人们去定义代数簇与解析空间上的微分形式（见**微分学（解析空间上的）**（differential calculus (on analytic spaces)）） 亦见 **de Rham 上同调**（de Rham cohomology）；**Riemann 曲面上的微分**（differential on a Riemann surface），**调和形式**（harmonic form），**全纯形式**（holomorphic form），**Laplace 算子**（Laplace operator）

参考文献

[1] Rham, G de, Differentiable manifolds, Springer, 1984（译自法文）

[2] Poincaré, H, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 3, Gauthier-Villars, 1899

[3] Cartan, E, Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff, in Oeuvres complètes, Vol 1, Pt 2, Gauthier-Villars, 303－396

[4] Frolicher, A and Nijenhuis, A, Theory of vector-valued differential forms, I, Derivations in the graded ring of differential forms, *Proc Koninkl Ned Akad Wet Ser* A, **59** (1956), 3, 338－359

[5] Whitney, H, Geometric integration theory, Princeton Univ Press, 1957

[6] Wells, Jr, R O, Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980

[7] Sternberg, S, Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964

[8A] Cartan, H, Calcul differentiel, Hermann, 1967

[8B] Cartan, H, Formes differentielles, Hermann, 1967

[9] Deligne, P, Griffiths, P, Morgan, J and Sullivan, D, The real homotopy of Kaehler manifolds, *Invent Math*, **29** (1975), 245－274

[10] Bott, R and Tu, L W, Differential forms in algebraic topology, Springer, 1982

[11] Sullivan, D, Infinitesimal computations in topology, *Publ, Math IHES*, 47(1977), 269－331

А Л Онищик 撰

【补注】 在西方文献中，微分流形 M 上的微分 p 形式

总是指切丛 TM 的 p 次外幂的光滑截口，即 $\wedge(TM)$ 的光滑截口 （本条中称为外微分形式）

算子 L_X 在微分形式 x 上的值也称为 x 在由向量场 X 生成的无穷小变换下的拉回（pullback）

设 X 为 n 维 C^∞ 流形 X 上的流动形（current）是指定义在空间 $\Omega_C(X)$ 上的一线性泛函，这里 $\Omega_C(X)$ 是 X 上具紧支集的光滑（反对称）微分形式的空间．流动形 T 称为 p 维齐次的，如果 $T(\varphi)=0$ 对一切 $\varphi\in\Omega_c^q(X)$ $(q\neq p)$ 都成立．

流动形 T 的次数（degree of a current）是 $n-p$，如果 p 是它的维数（假定 T 是齐次的）．

X 中的一（p 维）链元定义为 p 维标准方体到 X 中的一光滑映射 s $\Delta_p\to X$ 若 ω 为 X 上的 p 形式，则 $\int_s\omega$ 定义为 $\int_{\Delta_p}f$，如果 $s^*(\omega)=fdx_1\wedge\ \ \wedge dx_p$（参看上文内容）．若 s 为光滑的且保向的，则积分 $\int_s\omega$ 只依赖于象 $s(\Delta_p)\subset X$（以及依赖于 $s(\Delta_p)$ 上的 ω） 更一般地，流形 X 上的 p 链（p-chain on a manifold）为链元的形式线性组合 $c=\sum a_is_i$ 相应的积分定义为 $\int_c\omega=\sum a_i\int_{s_i}\omega$ 于是每个 p 链定义 X 上一个 p 维与 $n-p$ 次的流动形．若 α 为 q 形式，则据公式 $T_\alpha(\omega)=\int_V\alpha\wedge\omega$，它定义一个齐次 $n-q$ 次流动形．设 b 为具有局部坐标 $b^{i_1\ \ i_p}$ 的反变 p 向量．设 p 形式 ω 的局部坐标为 $\omega_{i_1\ \ i_p}$，则

$$T_b(\omega)=\sum_{i_1<\ \ <i_p}\omega_{i_1\ \ i_p}b^{i_1\ \ i_p}$$

定义一个 p 维流动形 这样，流动形推广了形式（即共变向量）与反变向量两者 流动形也是广义函数概念的整体推广（正如广义函数是函数的推广） 测试函数空间的作用由具紧支集的光滑形式的空间承担．“流动形”这个名称来自下述事实 在 $\mathbf{R}^3$ 中 1 维流动形可解释为电流．

在多复变量理论中，区域 D 上（p, q）型流动形定义为具有紧支集的（$n-p$, $n-q$）（复值）形式的空间 $\Omega_c^{n-p\ n-q}(D)$ 上的（复值）线性泛函 在这方面，流动形及其应用目前是很活跃的研究领域（[A2]）

参考文献

[A1] Chirka, E M , Complex analytic sets, Kluwer, 1989

[A2] Lelong, P and Gruman, L , Entire functions of several complex variables, Springer, 1986

2）代数簇上的微分形式（differential form on an algebraic variety）是类似于微分流形上微分形式的概念．设 X 为一代数闭域 k 上的 d 维不可约代数簇（见**不可约簇**（irreducible variety）），并设 K 为它的有理函数域 X 上 r 次微分形式（differential form of degree r）为 K 空间的

$$\Omega^r(X)=\overset{r}{\wedge}\Omega^1_{K/k}$$

一个元素其中 $\Omega_{K/k}$ 为 k 上域 K 的**导子的模**（derivations, module of）．若 x_1, $\ \ ,x_d$ 为扩域 K/k 的可分超越基，则任何微分形式 $\omega\in\Omega_r(X)$ 可写成

$$\omega=\sum a_{i_1\ \ i_r}dx_{i_1}\wedge\ \ \wedge dx_{i_r},$$

其中 $a_{i_1,\ \ ,i_r}\in K$ 微分形式 ω 称为在开集 $U\subset X$ 上正则的（regular），若 ω 属于 $\Omega^r(X)$ 的子模 $\Omega^r_{k[U]/k}$，这里 $\Omega^r_{k[U]/k}$ 看成子集 U 上正则函数的环 $k[U]$ 上的模．微分形式 ω 称为正则的（regular），如果任何点 $x\in X$ 有一邻域 U，使 ω 在 U 上为正则的 X 上正则微分形式构成 $k[X]$ 上的一个模，记为 $\Omega^r[X]$．它的元素恒同于簇 X 上的层 $\Omega^r_{X/k}$ 的截口．在每点 $x\in X$ 的一邻域中，正则微分形式 $\omega\in\Omega^r[X]$ 可写为

$$\omega=\sum\alpha_{i_1\ \ ,i_r}df_{i_1}\wedge\ \ \wedge df_{i_r},$$

其中函数 $\alpha_{i_1\ \ ,i_r}$, f_{i_1}, $\ \ ,f_{i_r}$ 在点 x 为正则的．若 X 为**完全代数簇**（complete algebraic variety），则空间 $\Omega^r[X]$ 是有限维的，若 X 为非奇异的，则维数 $p_g(X)=\dim_k\Omega^d[X]$ 就称为簇 X 的几何亏格（geometric genus） 若 X 是复数域上的完全簇，则空间 $\Omega^r[X]$ 恒同于相应**解析空间**（analytic space）X^{an} 上 r 阶全纯微分形式的空间．

设 X 为正规簇，并设 $\omega\in\Omega^d[X]$，对余维数为 1 的任何点 $x\in X^{(1)}$，微分形式 ω 可写成

$$\omega=adt\wedge dt_1\wedge\ \ \wedge dt_{d-1},\qquad(*)$$

其中 a 属于局部环 $\mathscr{O}_{X\ x}$ 的分式域 K_x，t 为它的极大理想的生成元，且 t_1, $\ \ ,t_{d-1}$ 为环 $\mathscr{O}_{X\ x}$ 的剩余域 k 上的可分超越基．元素 a 的赋值，记为 $v_x(\omega)$，是由环 $\mathscr{O}_{X\ x}$ 定义的，不依赖于形式（$*$）中 ω 的表示的选择 定义除子

$$D=\sum_{x\in X^{(1)}}v_x(\omega)\{\overline{x}\},$$

并称为微分形式 ω 的除子（divisor of the differential form） 微分形式 ω 为正则的，当且仅当它的除子 $D\geq 0$，即对一切 $x\in X^{(1)}$, $v_x(\omega)\geq 0$ 任何两个微分形式的除子是等价的，此外，在一给定的代数簇上一切微分形式的除子构成关于线性等价的除子类．此类称为簇 X 的典范类（canonical class）并记为 K_X 对于非奇异簇 X，类 K_X 恒同于可逆层 $\Omega^d_{X/k}$ 的第一陈（省身）类．特别地，对任何 $D\in K_X$，

$$\Omega^d_{X/k}\simeq\mathscr{O}_X(D)$$

代数簇之间的任何控制有理映射 f $X'\to X$ 诱导一个典则同态 f^* $\Omega^r(X)\to\Omega^r(X')$ 若 X 与 X' 为非奇异的且 X 是完全的，则 f^* 映正则微分形式到正则微分形式 特别地，若两个非奇异完全簇 X 与 X' 是双有理同构的，则向量空间 $\Omega^r[X]$ 与 $\Omega^r[X']$ 在域 k 上是同构的

对任何 $i>1$, K 空间 $\Omega^r(X)$ 的 i 次对称幂 $S^i(\Omega^r(X))$ 的元素称为 X 上 r 次 i 元微分形式（i-tuple differential form of degree r） 每个这样的微分形式可以看成层

$S^r(\Omega^r_{X/k})$的有理截口．正则截口 $\omega\in\Gamma(X, S^r(\Omega^r_{X/k}))$ 称为X上r次正则ι元微分形式(regular ι-tuple differential form of degree r) 对于非奇异完全簇X, 维数

$$P_\iota(X)=\dim_k\Gamma(X, S^r(\Omega^d_{X/k}))$$

称为代数簇X的ι亏格(genus of the algebraic variety) 双有理同构簇的ι亏格是相互等同的

参考文献

[1] Шафаревич, И Р , Основы алгебраической геометрии, М , 1972 (英译本 Shafarevich, I R , Basic algebraic geometry, Springer, 1977)

[2] Baldassarri, M , Algebraic varieties, Springer, 1956

[3] Hartshorne, R , Algebraic geometry, Springer, 1977

И В Долгачев 撰

【补注】 利用局部函数(Cartier)除子(divisor)的语言，关于n次微分形式ω的除子(这里$n=\dim X$, X为光滑的)可描述如下 对每个$x\in X$, 存在一个开仿射U, 使ω在U中可表示为$\omega=gdu_1\wedge \quad \wedge du_n$ 现用开仿射U_i覆盖X 设ω在U_i中的表示为$\omega=g^{(i)}du_1^{(i)}\wedge \quad \wedge du_n^{(i)}$, 那么在$U_i\cap U_j$上$g^{(j)}$等于$g^{(i)}$乘以$u_1^{(i)}, \quad ,u_n^{(i)}$关于$u_1^{(j)}, \quad ,u_n^{(j)}$的Jacobi行列式．这样$U_i$上局部函数$g^{(i)}$定义了$X$上的一个除子 记为$(\omega)$ 对一切$f\in k(X)$, 有$(f\omega)=(f)+(\omega)$, 从而由于$\Omega^n(X)$在$k(X)$上是一维的，故一切非零的$\omega\in\Omega^n(X)$定义同一除子类，即X的典范类(canonical class)(典范除子类(canonical divisor class))

郑维行 译 沈永欢 校

微分函数方程 [differential-functional equation, дифференциально-функциональное уравнение]

联系自变量、未知函数及其导数(一般对函数变换的自变量取值)的方程．由于函数变换的表达式中可含有未知函数，因此方程中可有类似于$y'(y(x))$等的组合．微分函数方程的概念通常理解为具有偏离或分布自变量的常微分方程的同义词(见**具有分布自变量的常微分方程**(differential equations, ordinary, with distributed arguments))

参考文献

[1] Kamke, E , Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen, I Gewöhnliche Differentialgleichungen, Chelsea, reprint, 1947

А Д Мышкис 撰

【补注】 一般使用术语函数微分方程(functional-differential equation)而不是微分函数方程

参考文献

[A1] Hale, J K , Functional differential equations, 1971, Springer

周芝英 译 叶彦谦 校

微分对策 [differential games, дифференциальные игры]

控制数学理论(见**自动控制理论**(automatic control theory))的一个分支，它的主题是在冲突局势中的控制．微分对策理论也涉及对策的一般理论(见**对策论**(games, theory of)) 此理论的研究，最早出现于20世纪50年代中期

微分对策理论中问题的表述 我们要区别由两个和由几个局中人所进行的对策．对于前一情形的基本结果已得到 这种问题可以下面的模式来描述．有一个**动力系统**(dynamical system)，在此系统中控制的一部分从属于局中人Ⅰ，而第二部分从属于局中人Ⅱ．在表述局中人Ⅰ或局中人Ⅱ面临的任务中，假设此局中人面对预先未知他对手作出的任何控制，而只能基于有关此系统当前状态的一定数量的信息的情况下，来选择使得他能达到一定目标的控制．微分对策理论也研究不确定条件下的控制问题，此时把作用于系统的扰动考虑为对手的控制 例如，局中人Ⅰ的问题可表述如下 通常假设受控系统的运动由微分方程

$$\dot{x}=f(t,x,u,v) \tag{1}$$

确定，这里x为系统的相位向量(状态)，并且u和v分别为局中人Ⅰ和Ⅱ的控制向量 我们定义局中人Ⅰ的策略(strategies)类$\mathscr{U}$，并且对每个策略$U\in\mathscr{U}$，面对对手的所有可能的控制移步，还定义由此策略生成的并从系统(1)的初态出发的轨道丛$X(U)$ 这些概念都是相应于关于两局中人的控制的特定限制和关于面对局中人Ⅰ的系统的当前状态的信息性质的限制而选取的．系统(1)的轨道$x(t)$, $t\geqslant t_0$决定了泛函$\gamma(x(\cdot))$(对策的费用(cost of the game)或对策的支付(pay-off of the game))的值 局中人Ⅰ力图取此泛函的极小值(γ也可依赖于局中人的控制$u(t), v(t)$, $t\geqslant t_0$的实现)．考虑运动最不利的实现$x(\cdot)\in X(U)$，在此问题中它的选择是听任对手去做，策略$U\in\mathscr{U}$的品质由量

$$\kappa_1(U)=\sup\{\gamma(x(\cdot)) \quad x(\cdot)\in X(U)\}$$

来评定．局中人Ⅰ的问题是去寻求使得泛函κ_1达到极小值的策略$U_0\in\mathscr{U}$(此问题称为程度问题(problem of degrees))．偶而也考虑所谓品质问题(problem of quality)，这里的目标是去确定相应于不等式$\kappa_1(U_c)\leqslant c$的策略$U_c\in\mathscr{U}$的存在条件，其中c为某个给定的数．

局中人Ⅱ使对策的代价极大的问题可以类似的方式表述．局中人Ⅱ的策略$V\in\mathscr{V}$是由量

$$\kappa_2(V)=\inf\{\gamma(x(\cdot)) \quad x(\cdot)\in X(V)\}$$

来评价．此处的程度问题是选择使泛函κ_2的值极大的策略$V_0\in\mathscr{V}$，而品质问题是对某个策略$V_c\in\mathscr{V}$，寻求$\kappa_2(V_c)\geqslant c$成立的条件

如果问题中局中人Ⅰ和Ⅱ的策略类$\mathscr{U}$和$\mathscr{V}$，对于任一对$(U,V)\in\mathscr{U}\times\mathscr{V}$有可能确定至少一条由此对生

成的轨道 $x(\cdot)\in X(U)\cap X(V)$，那么我们就说这两个问题构成了一个定义在策略类 $\mathscr{U}\times\mathscr{V}$ 上的微分对策（differential game）. 如果在微分对策中，等式

$$\inf_{U\in\mathscr{U}}\ \sup_{x(\cdot)\in X(U)}\gamma(x(\cdot))=\sup_{V\in\mathscr{V}}\ \inf_{x(\cdot)\in X(V)}\gamma(x(\cdot))=c_0$$

成立，则 c_0 称为此微分对策的值（value of the differential game）.

微分对策的一个典型例子是追逃对策（pursuit game）和规避对策（evasion game） 在这种对策中，$x=(x_1,\cdots,x_{k+l})=(y_1,\ \ ,y_k,z_1,\ \ ,z_l)$，这里 y 和 z 分别为追逐者和被追逐者的相位向量，他们的运动由方程

$$\dot{y}=g(t,y,u),\quad \dot{z}=h(t,z,v)$$

来描述. 在最经常考虑的情形中，控制的选择是制约于类型

$$u\in P,\quad v\in Q \tag{2}$$

的限制，这里 P 和 Q 均为某个紧集 在这种对策中，代价是接触前的时间，即

$$\gamma(x(\cdot))=T(x(\cdot))=\inf\{t-t_0\ \ \|\{y(t)\}_m-\{z(t)\}_m\|\leqslant\varepsilon\},$$

这里 $\{y\}_m$ 和 $\{z\}_m$ 为由 y 和 z 的前 m 个分量组成的向量. 于是，当 $\{y(t)\}_m$ 和 $\{z(t)\}_m$ 间的距离达到给定值 ε 时，就可认为它们已建立了接触 如果局中人有可利用的有关现在对策位置（position of the game）$(t,x(t))$ 的信息，即处于追逐和规避的**位置对策**（positional game）中，那么对策的代价存在

微分对策的形式体系化 为了微分对策的数学形式体系化，上面所讨论的概念必须严格地定义. 微分对策理论中研究的主要问题是那些对于局中人来说对策的位置是已知的，而移步受如同（2）中的限制的问题. 于是我们自然要将局中人的策略分别定义为取值于紧集 P 和 Q 中的函数 $u=u(t,x)$, $v=v(t,x)$ 但我们发现，如果采用这种方法，那么常常必须考虑不连续策略，而它们的移步就不能用微分对策理论中已知的概念来定义. 下面讨论不用位置策略的形式体系化 它们在移步的特别定义的基础上给出包含不连续位置策略的位置微分对策的形式体系化

在微分对策理论的众多趋势中，首先要提到的是以 W. Fleming 的文章[1]开始且终于[4]的一组研究（例如，见[2],[3]）. 他们涉及微分对策的多步对策逼近，这里局中人在给定的时限 $[t_i,t_{i+1})$ $(i=0,1,\ \ N)$ 内（按步）逐次选择他们的移步 注意力是集中于每次第一个选择他的移步，并将他的选择通知他的对手. 根据此局中人是极小化还是极大化对策的代价 我们区分强和弱多步对策（majorant and minorant multi-step games）. 这种方法的采用归结为微分对策值存在性的证明，此微分对策值，这里是定义为当子分割 $[t_i,t_{i+1})$ $(i=0,\ \ ,N)$ 变细（当步数增加）时，强和弱对策值的公共收敛值. 然而在这种方法中，似乎与离散时间无关的位置策略构造通常被忽略

Л С Понтрягин 提出了对策中控制问题的一种表述（例如，见[5],[6],[7],[8]），这种表述考虑了对手的信息判别（informational discrimination），即在表述局中人Ⅰ（或局中人Ⅱ）的问题中，假设此局中人不仅知道正在实现的对策位置 $(t,x(t))$，而且还知道他对手将在区间 $[t,t+\delta]$ 期间所选择的控制 $v(\tau)$（或 $u(\tau)$），这里 δ 为一小正数 按这种方式可方便地描述此对策过程，此描述本身又使得对大量在冲突条件下涉及控制的问题有可能建立一个严格的数学理论 然而，信息判别的引进不仅给予局中人Ⅰ的信息得益超过了他的对手，而且还对后者的行为施加限制；特别地，此对手不可能根据反向联系的原则

$$v[t]=v(t,x(t))$$

（或 $u[t]=u(t,x(t))$）来表述他的运动. 通过对在鉴别对手条件下所得到的结果有意义的处理，有可能利用对手在区间 $[t-\delta,t)$ 内所实现的控制信息，以替代对手在区间 $[t,t+\delta)$ 内选择的控制信息. 这种替代对于

$$f(t,x,u,v)=f_1(t,x,u)+f_2(t,x,v)$$

的系统很容易论证 涉及鉴别对手条件的基本理论结果，都是作为适当处理的位置微分对策的结果而得到实际的应用（见下面给出的具有导向控制过程的描述）

位置微分对策（positional differential games）的形式体系化是由 Н Н Красовский 等建立的（[9]） 这里研究的主题是位置策略 U 和 V，即分别取值于紧集 P 和 Q 的函数 $u=u(t,x)$ 和 $v=v(t,x)$ 关于这些函数不作连续性条件的假设 由局中人Ⅰ的策略 $U-u(t,x)$ 生成的移步 $x(t,t_0,x_0,U)(t\geqslant t_0,\ x(t_0)=x_0)$，是定义为近似移步序列 $x_k(t)(k=1,2,\ \ )$ 在任一区间 $[t_0,T]$ 上的一致极限. 这些近似移步 $x_k(t)$ 是满足方程

$$\dot{x}_k(t)=f(t,x_k(t),\ u_k[t],\ v_k[t]) \tag{3}$$

的绝对连续函数，其中 $v_k[t]\in Q\ (t\geqslant t_0)$ 为任一可测函数，

$$u_k[t]=u(t_i^{(k)},\ x_k(t_i^{(k)})),\ t_i^{(k)}\leqslant t<t_{i+1}^{(k)},\ i=0,1,\ \ ,$$

并且

$$\sup_i(t_{i+1}^{(k)}-t_i^{(k)})\to 0\quad \text{当 } k\to\infty \text{ 时}$$

移步 $x(t,t_0,x_0,V)$ $(t\geqslant t_0,\ x(t_0)=x_0)$ 以类似的方式引进. 如果策略和移步如此被定义，那么下面的局势保持

二择一性 1（alternative 1）. 设等式

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} s'f(t,x,u,v) = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} s'f(t,x,u,v), \quad (4)$$

对任意向量 $(t,x) \in \mathbf{R}^{n+1}$ 和 $s \in \mathbf{R}^n$ 成立，其中 $s'f$ 为向量 s 与 f 的标量积，则对任一闭集 $M_c \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 和 $N_c \subset \mathbf{R}^{n+1}$，任一初始位置 (t_0, x_0) 和任一时刻 $\theta \geq t_0$，下面两种陈述之一总是正确的．或者存在一个策略 U_*，使得对任一移步 $x(t)=x(t,t_0,x_0,U_*)$，在时刻 $t=\theta$，直到触及 M_c 的时刻前停留在 N_c 中的点 $(t,x(t))$ 落入 M_c，或者存在另一个策略 V_*，它对任一移步 $x(t)=x(t,t_0,x_0,V_*)$，保证点 $(t,x(t))$ 当 $t_0 \leq t \leq \theta$ 时不落入 M_c，或在点 $(t,x(t))$ 落入 M_c 之前就违反了相位限制 $(t,x(t)) \in N_c$

对于由二择一性 1 推得其对策值存在的许多微分对策类型的研究就归结为解这种近似规避对策．在表述位置微分对策时，也可能有策略和移步的其他定义．例如，在研究不连续策略时，可以方便地或者以多值右端来替代微分方程的不连续右端，并使用带未定因素的微分方程的理论机制，或者以连续策略去逼近不连续策略（[10]） 然而，这种尝试可能不成功．已知的例子是在上述形式体系化的框架中得到的微分对策的最优解在基于带未定因素的方程或基于连续策略的另一种形式体系化的框架中不能得到，甚至不能近似地得到．

如果条件 (4) 不成立，那么我们区分两种情况 一种是在一个局中人的策略类和另一个局中人的对抗策略类中来表述微分对策，这种表述对应微分对策的一个确定性解，另一种是在两个局中人的混合策略类中来表述微分对策，这种表述的内容揭示了以相应的随机控制过程来逼近此混合策略 对抗策略 (counter-strategies) U_v, V_u 被认为是与函数 $u=u(t,x,v) \in P$，$v=v(t,x,u) \in Q$ 相同的，它们分别为 v 和 u 的 Borel 函数 移步 $x(t,t_0,x_0,U_v)(t \geq t_0, x(t_0)=x_0)$ 定义为近似移步 $x_k(t)$ (3) 的极限，那里

$$u_k[t]=u(t_i^{(k)}, x_k(t_i^{(k)}), v_k[t]), \quad t_i^{(k)} \leq t \leq t_{i+1}^{(k)}, \quad i=0,1,\cdots,$$

移步 $x(t,t_0,x_0,V_u)$ 以类似的方式定义 混合策略 (mixed strategies) $\widetilde{U}, \widetilde{V}$ 被认为是与函数 $\mu=\mu(t,x)$，$v=v(t,x)$ 相同的，它们的值分别为定义在紧集 P 和 Q 上的概率测度．移步 $x(t,t_0,x_0,\widetilde{U})$ $(t \geq t_0, x(t_0)=x_0)$ 定义为满足方程

$$\dot{x}_k(t)=\iint_{PQ} f(t,x_k(t),u,v)\,d\mu_k[t]\,dv_k[t],$$

的近似移步 $x_k(t)$ $(t \geq t_0)$ 的极限，这里

$$\mu_k[t]=\mu(t_i^{(k)}, x_k(t_i^{(k)})), \quad t_i^{(k)} \leq t < t_{i+1}^{(k)}, \quad i=0,1,\cdots,$$

并且 $v_k[t]$ 为某个弱可测函数 移步 $x(t,t_0,x_0,\widetilde{V})$ 可以类似方式引进．

二择一性 2 (alternative 2) (二择一性 3 (alternative 3)) 对于近似规避类型的微分对策总是正确的．它是在二择一性 1 中，通过以相应的对抗策略替换局中人之一的策略（通过以混合策略 $\widetilde{U}_*$ 和 $\widetilde{V}_*$ 分别替代策略 U_* 和 V_*）来表述的 对于可归结为近似规避对策，并在一个局中人的位置策略和他对手的对抗策略类中（在混合策略 $\{\widetilde{U}\}$ 与 $\{\widetilde{V}\}$ 的类中）考虑的微分对策，无需假设条件 (4) 就可证明微分对策值的存在 可证明在这些策略类中的微分对策解关于信息干扰是不稳定的 为了稳定这些解引进了具有导向的控制程序 (procedure of control with a guide)（[9]）．这里，除实际系统外我们还考虑一个标准系统（导向），它的移步是用计算机模拟的且在任意所需要的精度下为已知的 局中人在实际系统中的控制与导向的移步是由初始运动和模拟系统的运动彼此相互追随而构成的，导向在初始位置与目标集之间保持着某种桥梁联系．这种控制程序对于实验误差和作用于此系统的扰动，证明是稳定的，在导向运动的模拟中，可以利用容许针对对手的鉴别结构．

微分对策理论的方法 一种解微分对策的方法是由 R Isaacs ([11]) 提出的 这种方法涉及**动态规划** (dynamic programming) 方法，并且基于一个特殊偏微分方程的积分，此方程的解确定对策的值 $c_0(t,x)$ 为对策初始位置的函数 局中人Ⅰ（或Ⅱ）的最优策略是选择使得沿着他们生成的系统运动，保证一个非增（非降）的对策值 然而，对策值通常是对策位置的不连续函数，因此，采用这种方法就涉及在函数 $c_0(t,x)$ 或它的偏导数的不连续曲面近傍解的特别研究．这种方法的奇异性和它的合理性的完整研究是非常困难的，并且仅在少数个别情况下是可能的

线性微分对策 (linear differential games)，即情形

$$f(t,x,u,v)=A(t)x+B(t)u+C(t)v,$$

这里 A, B 和 C 为相应维数的连续矩阵，已得到最彻底的研究．对于线性追逐与规避问题，Красовский 论述了极值瞄准法则 (rule of extremal aiming)（[12]） 这一法则被使用于解决服从正规性条件，特别在单型目标情形中的问题（除了那些涉及对手鉴别的外） 这种解法的原理可描述如下 设 $W(t_*,\theta,G)$ 为程序吸收 (programmed absorption) 集，即对任意控制 $v(t) \in Q$，对应控制 $u(t) \in P$，$t_* \leq t \leq \theta$，使得这些控制对，在时刻 $t=\theta$ 使此系统从状态 $x(t_*)=x_*$ 转换到 $G \subset R^n$ 的点 x_* 的全体．引进函数

$$\varepsilon_0(t,x,\theta)=\inf\{\varepsilon \quad x \in W(t,\theta,M_\varepsilon)\},$$

这里 M_ε 为目标集 M 的一个 Euclid ε 邻域，在区域 $\Gamma_\theta=\{(t,x) \quad \varepsilon_0(t,x,\theta)>0\}$ 中，量 $\varepsilon_0(t,x,\theta)$ 由关系式

$$\varepsilon_0(t,x,\theta)=\max_l \kappa(l,t,x,\theta),\ l\in\mathbf{R}^n,\ \|l\|\leqslant 1, \quad (5)$$

给定，这里函数κ可简单地通过集P,Q和凸集M的支撑函数来表示（[12]）．如果κ关于变量l在域Γ_θ中是凸的（强正规性条件），那么（5）中的极大值在唯一向量$l_0(t,x,\theta)$上达到，后者在决定极值控制u_0的选择的最大值原理中，被选择为边值条件．按这种方式建立起来的策略$U_0 - u_0(t,x)$，保证在时刻$t=\theta$，从任一位置(t_0,x_0)击中M，那里$\varepsilon_0(t_0,x_0,\theta)=0$　这些构造仅仅是基于对策位置的信息，并且可有效地在计算机中实现　近似问题也可在弱正规性条件下借助规划的结构来解决

在不同正规性假设下的线性追逐问题，已由Е Ф Мищенко, Л С Понтрягин 和 Б Н Пшеничный([13], [14])研究过，特别地，对于在所谓局部凸性条件下线性追逐问题的解法，在[13]中有所论述，对它可应用上述的强正规性条件

解对策中控制问题的一种最方便的方法就是**直接法**(direct method)　在可应用这种方法的问题中，局中人的控制选择使得对于由对手作出的任何对抗移步，导致对策的一个成功终结的某个辅助过程发生损坏　如果目标是单型的（$C=-B, Q=\lambda P, 0\leqslant\lambda\leqslant 1$），并且处于鉴别对手的条件下，那么解追逐问题的直接法，决定了局中人Ⅰ的作为两项之和的控制的选择，其中一项模仿对手的控制，而另一项恒同于系统

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)w,\ w\in(1-\lambda)P$$

进入目标集M的快速转换规划问题的解　Понтрягин ([5])　首先描述了线性追逐问题的直接法．接着，得到了直接法给出最优结果的条件（[15]）．其后发展了解非线性问题和具有积分限制问题的直接法（[16], [17]）　在所有这些研究中，直接法都是在鉴别对手的条件下采用的，直接法也是为解位置对策而发展的（[9]）．

规避问题(evasion problem)　此问题的目的是确定这样的条件，在此条件下，对于所有$t\geqslant t_0$，被追逐的目标可以逃避与追逐者接触　这种问题的研究起始于 Понтрягин 和 Мищенко 的工作（[7], [8]）．他们找到了线性规避问题的可解性条件以及追逐点与被追逐点之间最小距离的估计．这种方法后来被推广到了其他类型的规避问题

由 Понтрягин 提出的**交错积分**(alternating integral)概念（[6]），使得有可能去描述这样的初始位置集的结构，即由这些初始位置出发，有可能在给定的时刻$t=\theta$终止原来的追逐对策　交错积分定义为一个递推程序的极限，在此程序中初始集A_0与目标集$M\subset\mathbf{R}^n$重合，而每个后继集A_{i+1}由前一个集通过规划吸收运算确定，即$A_{i+1}=W(\tau_{i+1},\tau_i,A_i)$，这里$\tau_{i+1}=\tau_i-\Delta$，$\tau_0=\theta$，并且$\Delta>0$为此递推程序的步长．Б Н. Пшеничный ([18])也利用规划吸收作为微分追逐对策结构研究中的一种基本运算，与前面情况不同，这里只要求从点$x\in A_{i+1}$转移到A_i的持续时间不超过数Δ，但一般可以不同于此数　这种递推程序使我们能在一般非线性系统情形下描述位置集的结构，由这些位置发出，追逐对策可以在给定的时刻终止

位置微分对策解的**极值构造**(extremal construction)也已被提出（例如，见[9]）．这种方法已用于解某种具体问题与证明一般陈述，特别是上述的择一性1－3　例如，在受条件（4）约束的策略$U\div u(t,x)$的类中，解具有$M_c\subset\mathbf{R}^{n+1}$的近似问题时，根据极值构造，在位置空间中选择集$W_u\subset\mathbf{R}^{n+1}$，此集构成连系初始位置与目标集$M_c$的一座桥，并且它全包含于集合$N_c$中，此桥有所谓$u$**稳定性质**，即对任意$(t_*,x_*)\subset W_u$，$v_*\in Q$，且$t^*\geqslant t_*$，存在带未定因素的方程

$$\dot{x}(t)\in\omega\{f(t,x(t),u,v_*)\ \ u\in P\},$$
$$x(t_*)=x_*$$

的一个解，对于它或者$(t^*,x(t^*))\in W_u$或者对于某个$\tau\in[t_*,t^*]$，有$(\tau,x(\tau))\in M_c$　引进对于**桥**W_u的**极值策略**$U^{(e)} - u^{(e)}(t,x)$，它由下列关系式定义

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q}(x-w)'f(t,x,u,v)=\max_{v\in Q}(x-w)'f(t,x,u^{(e)}(t,x),v),$$

其中w是使得(t,w)为W_u中最接近位置(t,x)的点的向量　此极值策略保持桥W_u上的移步，因此提供了此近似问题的解

在此构造中的关键是确定合适的稳定桥，其后极值策略的构造不会出现任何特殊困难．为了确定这种桥，研究熟悉的递推程序主要是被计算上的困难所局限，因此，重要的是研究构造稳定桥的有效方法　直接法是其中的一种　另一种是以正规的规划吸收集的形式来构造稳定桥　在非线性情形下，规划吸收是借助特殊的控制测度来定义的（例如，见[9]）．如果规划吸收是正规的，那么解冲突控制问题可归结为计算机可实现的算法．

微分对策中的主要研究趋势．上面所揭示的结果主要是有关控制可用常微分方程（1）描述，控制向量受（2）约束的微分对策　对于移步由具有偏差自变量的常微分方程（**见具有分布自变量的常微分方程**(differential equations, ordinary with distributed arguments)）描述的有控制的对策问题，以及对局中人的控制涉及积分限制条件的问题，均已得到类似结果（[17]）．

在微分对策结构的研究中，移步由广义动态系统决定的冲突控制问题是饶有兴趣的（例如，见[19], [20]）在拟策略类中的微分对策也已作了研究，此类策略产

生了局中人对其对手的控制作出反映的控制，决定函数值和稳定桥的迭代程序也已提出（[21]）

除了两个局中人的微分对策的研究外，也研究了N人微分对策（N-person differential games）．在N人微分对策的表述中，通常都假设每个人在他的控制选择中，都试图使定义在受控系统轨道上的某个泛函值极小．局中人只可以利用有关对策当前位置的信息．例如，一个典型的问题是在所给局中人的策略类中，去确定这种对策有Nash平衡点的条件

不完全信息控制的对策问题（game problems of control with incomplete information），是微分对策理论中的一个重要部分．在这种问题中，假设缺少完全信息是在于忽略了相位向量 $x(t)$ 的某些分量，或者是在于测量对策的当前位置时具有一定的滞后，或者是在于相位点 $x(t)$ 位置测定的不精确，一种可能情形是可容许范围仅表示测量误差，还有一种情形就是这种误差的某种统计描述是给定的．

参考文献

[1] Flemming, W H, A note on differential games of prescribed duration, in *Contributions to the theory of games*, Vol 3, Princeton Univ Press, 1957, 407－412

[2] Varaiya, P and Jiguan, G Lin, Existence of saddle points in differential games, *SIAM J Contr*, 7 (1969), 1, 141－157

[3] Петров, Н Н, 《Докл АН СССР》, **190** (1970), 6, 1289－1291

[4] Friedman, A., Existence of value and of saddle points for differential games of survival, *J Differential Equations*, 7 (1970), 1, 111－125

[5] Понтрягин, Л С, 《Докл АН СССР》, **174** (1967), 6, 1278－1280

[6] Понтрягин, Л С, 《Докл АН СССР》, **175** (1967), 4, 764－766

[7] Понтрягин, Л С, 《Тр Матем ин-та АН СССР》, **112** (1971), 30－63

[8] Понтрягин, Л С, Мищенко, Е Ф, 《Дифференц уравнения》, 7 (1971), 3, 436－445

[9] Красовский, Н Н, Субботин, А И, Позиционные Дифференциальные игры, М, 1974 (英译本 Krasovskiĭ, N N and Subbotin, A I, Game-theoretical contorl problems, Springer, 1988)

[10] Кротов, В Ф, Гурман, В И, Методы и задачи оптимального управления, М, 1973

[11] Isaacs, R, Differential games, Wiley, 1965

[12] Красовский, Н Н, Игровые задачи о встрече движений, М, 1970

[13] Мищенко, Е Ф, Понтрягин, Л С, 《Докл АН СССР》, **174** (1967), 1, 27－29

[14] Пшеничный, Б Н, 《Кибернетика》, 1967, 6, 54－64

[15] Гусятников, П Б, Никольский, М С, 《Докл АН СССР》, **184** (1969), 3, 518－521

[16] Чикрий, А А, сб 《Теория оптимальных решений Тр семинара》, К, 1969, 3, 17－25

[17] Никольский, М С, 《Дифференц уравнения》, **8** (1972), 6, 964－971

[18] Пшеничный, Б Н, 《Докл АН СССР》, **184** (1969), 2, 285－287

[19] Ryll-Nardzewski, C, The theory of pursuit and evasion, in M Dresher, et al (ed) Adv in game theory, Ann of Math Studies, Princeton Univ Press, 1964, 113－126

[20] Roxin, E, Axiomatic approach in differential games, *J Optimiz Theory Appl*, **3** (1969), 3, 153－163

[21] Ченцов, А Г, 《Матем сб》, **99** (1976), 3, 394－420

М С Никольский, А И Субботин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Basar, T and Olsder, G J, Dynamic noncooperative game theory, Acad Press, 1982

【译注】 “带未定因素的微分方程”是 differential equations in contingencies 的翻译．这一术语目前已很少用，代替它的新术语是“微分包含”（differential inclusions）．见[B1]

参考文献

[B1] Aubin, J P and Cellina, A, Differential Inclusions, Springer-Verlag, 1984

胡宣达 译 钟瑚绵 校

微分-几何结构［differential-geometric structure；дифференциально-геометрическая структура］

现代微分几何学的基本概念之一，包括经典微分几何学中所研究的特殊结构．对于已给的微分流形 M^n，它定义为以 M^n 为底空间并伴随某一主丛 (X, p, M^n) 的**纤维空间**（fibre space）(X_F, p_F, M^n) 的一个可微分截面，或按另一种说法，定义为 M^n 上几何对象的一个可微分场．这里 F 是某个可微分的 $\mathfrak{G}$ 空间，其中 $\mathfrak{G}$ 是主丛 (X, p, M^n) 的结构 Lie 群，或用另一术语，F 是 Lie 群 $\mathfrak{G}$ 的表示空间．

若 (X, p, M^n) 是 M^n 的切空间标架的主丛，G 是 $\mathfrak{G}=\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ 的某个闭子群，F 是**齐性空间**（homogeneous space）$\mathfrak{G}/G$，则 M^n 上对应的微分几何结构称为 G 结构（G-structure）或一阶无穷小结构（infinitesimal structure of the first order）．例如，若 G 由保持 $\mathbf{R}^n$ 中一个 m 维空间不变的那些线性变换（$\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ 的元素）所组成，则对应的 G 结构定义了 M^n 上的一个 m 维子空间分布．若 G 是正交群 $O(n, \mathbf{R})$——由保持 $\mathbf{R}^n$ 的数积不变的 $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ 的元素作成的子群，则 G 结构是 M^n 上的 Riemann 度量，即一个正定对称的张量场 g_{ij}．按同法，殆复结构和复结构是 M^n 上 G 结构的特例．G 结构概念的推广是 r 阶无穷小结构（infinitesimal structure of order r）$(r>1)$（或高阶 G 结构），这里 (X, p, M^n) 是 M^n 上 r 阶标架的主丛，而 G

是它的结构群 D_n^r 的闭子群．

各类**联络**（connection）是微分几何结构的重要特殊情况　例如，若用某个主丛（P, p, B）的空间 P 替代 M^n 的地位，则可得主丛上的联络，而 P 上的 G 结构是与纤维切空间互馀的 $m(=\dim P-\dim B)$ 维子空间的分布，这里纤维关于丛结构群在 P 上的作用是不变的．流形 M^n 上的联络是 M^n 上微分几何结构的特殊情况，但比 M^n 上的 G 结构更一般　例如，由联络对象场 $\Gamma_{ij}^k(x)$ 定义的 M^n 上的**仿射联络**（affine connection）可作为 M^n 上的微分几何结构来得到，这时（X, p, M^n）是二阶标架的主丛，$\mathfrak{G}$ 是它的结构群 D_n^2，D_n^2 的表示空间 F 是坐标为 Γ_{ij}^k 的空间 $\mathbf{R}^{3n}$，其中表示由下列公式定义

$$\overline{\Gamma}_{st}^r=(A_s^i A_t^j \overline{\Gamma}_{ij}^k+A_{st}^k)A_k^r,$$

这里

$$A_k^r=\left[\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k}\right]_0, \quad A_{st}^k=\left[\frac{\partial^2 x^k}{\partial \overline{x}^s \partial \overline{x}^t}\right]_0$$

是群 D_n^2 的元素的坐标，且 $A_k^r \overline{A}_t^k=\delta_t^r$．对于 M^n 上的射影联络（projective connection），要涉及 $\mathbf{R}^{3(n+1)}$ 中 D_n^3 的某种表示，而对于更高阶的联络，要涉及 D_n^r 的表示　依此法，微分几何结构的理论变得与**几何对象理论**（geometric objects，theory of）密切相关．

参考文献

[1] Veblen, O and Whitehead, J, Foundations of differential geometry, M, 1949（在俄译本中，由 B B Вагнер 写附录，135－223）

[2] Лаптев, Г Ф,《Тр Моск матем об-ва》, 2 (1953), 275－382

[3] Husemoller, D, Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966

[4] Sternberg, S, Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964

Ю Г Лумисте 撰

【补注】

参考文献

[A1] Spivak, M, A comprehensive introduction to differential geometry, 1－5, Publish or Perish, 1972－1975

沈一兵 译

微分几何学[**differential geometry**，**дифференциальная геометрия**]，简称微分几何，曲线和曲面的

运用数学分析方法讨论几何形体（主要是曲线和曲面）的一个几何学分支　在微分几何学中，曲线和曲面的性质通常是在小范围内考察的，即研究它们的充分小一段（片）的性质　也研究曲线族和曲面族的性质（例如，见**线汇**（congruence of lines），**罗**（web））

微分几何学的产生和发展与数学分析紧密相关，后者脱离开几何问题而发展到颇具规模．许多几何概念比分析中的类似概念定义得更早．例如，切线的概念比导数概念更古老，面积和体积的概念比分析中积分的概念更古老．

微分几何学最早出现于 18 世纪，并且与 L Euler 和 G Monge 的名字联在一起　第一部曲面理论的概述是由 G Monge 写的（Une application d'analyse à la géométrie, 1795）　1827 年 C F Gauss 出版了题为“关于弯曲曲面的一般研究”（A general study on curved surfaces）的论著，它奠定了现代曲面论的基础．从那时起，微分几何学不再只是分析的一种应用，而成为数学的一个独立分支学科．

1826 年 Н И Лобачевский 关于非 Euclid 几何的发现对整个几何学（包括微分几何学在内）起了重大的作用　Н И Лобачевский 否定了主宰当时数学和哲学的先验的空间概念，他发现了存在着不同于 Euclid 空间的空间　Н И Лобачевский 的这个思想在许多数学研究中得到反响　于是，在 1854 年，B Riemann 发表了他的讲演“关于几何学基础的假设”（Über die Hypothesen, welche der Geometrie zuGrunde liegen），从而奠定了 **Riemann 几何学**（Riemannian geometry）的基础，它在高维流形上的应用与 n 维空间的几何学有关，就像曲面的**内蕴几何学**（interior geometry）与平面 Euclid 几何学之间的关系那样

1872 年 F Klein 在他的**埃尔兰根纲领**（Erlangen program）中提出的群论观点——即几何学是研究变换群下的不变量——被 E Cartan 发展到微分几何学上　E Cartan 建立了射影联络空间和仿射联络空间的理论（见**仿射联络**（affine connection），**射影联络**（projective connection））

在俄国，Ф Миндинг 和 К М Петерсон 创建了一个微分几何学派，他们的研究大都关注曲面的等距形变问题（见**等距形变**（deformation, isometric）），即保持内部几何不变的曲面的连续变形．许多俄国的几何学家继续着这种研究

曲线论（theory of curves）　曲线论的主要论题是所谓可微曲线（differentiable curve）　这种曲线局部地可由下列类型的方程来描述

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \tag{1}$$

其中 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 是参数 t 的充分正则的函数　曲线的可微次数由 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 的可微次数给定　对于同一条曲线，有无数多种（1）型的参数表示法．其中特别重要的是所谓自然参数化（natural parametrization），这时从某个给定点起算的曲线弧长被用作参数　曲线上一点称为正则的（regular），如果适当选择直角坐标系 x, y, z，使得在该点的一个邻域内曲线可用下列形状的方程来定义

$$y=y(x), \quad z=z(x),$$

其中 $y(x)$ 和 $z(x)$ 是可微函数，否则就称为奇异的（sin-

gular)（见**奇点**（singular point)） 微分几何学中曲线的研究主要涉及正则点的一个邻域．由一般方程（1）定义的曲线上一点为正则的充要条件是在该点成立不等式

$$x'^2+y'^2+z'^2\neq 0$$

曲线论中许多基本的概念都基于集合的切触（contact）概念，它可被阐明如下．设 M 和 m 是具有公共点 0 的两个集合．如果当 M 的点 $X\to 0$ 时，

$$\frac{\delta(X)}{|X0|^{\alpha}}\to 0,$$

其中 $\delta(X)$ 是集合 M 的点 X 与集合 m 的距离，则就说集合 M 和 m 在点 0 有 $\alpha(\geqslant 1)$ 阶切触（contact of order α） 若 M 是一条曲线而 m 是过曲线上一点 0 的直线，则当 $\alpha\geqslant 1$ 时，切触条件就决定 m 是曲线在 0 的**切线**(tangent)（图 1)

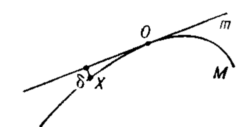


图 1

一条光滑（可微）曲线在每点都有确定的切线 由 (1) 描述的曲线上一点 t_0 的切线方向重合于向量的导数 $[x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)]$．在微分几何学中，对于曲线解析表示的各种方式，均导出其切线方程．特别当曲线由方程（1）定义时，在对应于参数值 t_0 的点，切线的方程是

$$(X, Y, Z)=(x_0+ux_0', y_0+uy_0', z_0+uz_0'),\quad u\in\mathbf{R},$$

其中下标"0"表示函数 x, y, z 及其导数在点 t_0 取值．如果 m 是过曲线 M 的点 0 的平面，则 $\alpha\geqslant 2$ 的切触条件决定了曲线的**密切平面**（osculating plane)（图 2)

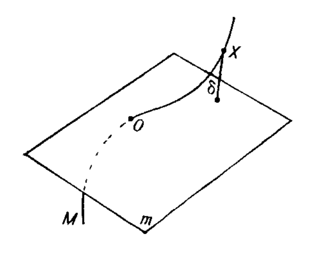


图 2

一条二次可微的曲线在每点都有密切平面．或者它是唯一的，或者过曲线的切线的每张平面都是密切平面．

当沿曲线运动时，曲线的切线将会转动 当沿曲线的运动达到单位速度时，这个转动的速度称为曲线的**曲率**（curvature） 若曲线参数化为（1）型，则它的曲率由下列公式给出

$$k_1=\frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^{3/2}},$$

其中 $\mathbf{r}(t)$ 是坐标为 $x(t), y(t), z(t)$ 的向量函数．直线且仅有直线，其曲率处处等于零．一条二次可微曲线在曲率非零的点有唯一的密切平面．在这种点的邻域内，当沿曲线运动时，密切平面要转动，且曲线的切线是这个转动的瞬时轴 当以单位速度沿曲线匀速运动时，密切平面的转动速度称为曲线的**挠率**(torsion)．挠率的符号依赖于转动的方向 一条三次可微曲线在曲率非零的每点都有确定的挠率 若曲线参数化为（1）型，则它的挠率由下列公式给出

$$k_2=\frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|^2}$$

平面曲线的挠率处处为零 反之，挠率恒为零的曲线是平面曲线．

过切触点垂直于切线的直线称为曲线的**法线**（normal)．位于密切平面内的法线称为**主法线**（principal normal)，而垂直于密切平面的法线就称为**副法线**（binormal)．由切线、主法线和副法线构成的图形，也即由包含这三直线中各对直线的三平面所给定的图形，称为 Frénet 标架（Frénet frame)（自然标架（natural frame)，也称为 Frénet 三棱形（Frénet trihedron）和自然三棱形（natural trihedron)）．若在给定点取这标架的棱边作为直角坐标轴，则在该点的邻域内曲线在自然参数下的方程将有如下形状

$$x=s+\cdots,\quad y=\frac{k_1}{2}s^2+\cdots,\quad z=-\frac{k_1k_2}{6}s^3+\cdots,$$

其中 k_1 和 k_2 是曲线在该点的曲率和挠率 图 3 表示在曲率和挠率均非零的点附近，曲线在自然标架的三个面上的投影．

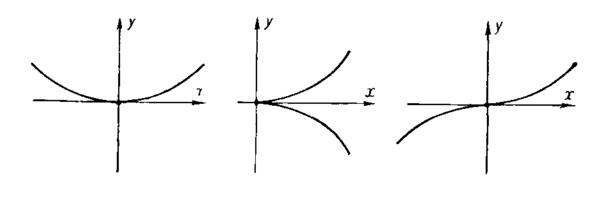


图 3

曲线的切线，主法线和副法线的单位向量 τ, ν, β 随着曲线上点的运动而变化着．根据曲率和挠率的定义，适当选择这些向量的方向可使它们满足公式

$$\tau'=k_1\nu,\ \beta'=k_2\nu,\ \nu'=-k_1\tau-k_2\beta, \tag{2}$$

其中一撇表示关于曲线弧长的微分．公式（2）称为

Frénet 公式 (Frénet formulas). 一条曲率非零的曲线被它的曲率和挠率（作为曲线弧长 s 的函数）确定到只差空间的位置不同．这就是方程组

$$k_1=k_1(s), \quad k_2=k_2(s)$$

被称为曲线的自然方程组的原因（见**自然方程** (natural equation)）．

平面曲线 (planar curves)，即位于一平面上的曲线，是一类重要的曲线．对于平面曲线，能区分切线沿曲线运动时的旋转方向，从而可赋予曲率一个与这旋转方向有关的符号．由方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 定义的平面曲线的曲率可由下列公式给出

$$k=\pm\frac{y''x'-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$$

正负号根据约定选取，但沿曲线必须都一样．**密切圆** (osculating circle) 的重要概念是对平面曲线引入的．这是一个与曲线有 $\alpha(\geqslant 2)$ 阶切触的圆（图 4）．

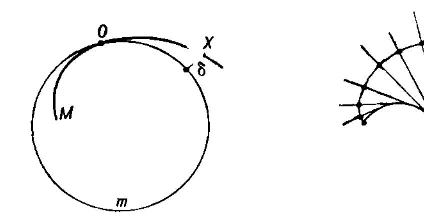


图 4　　图 5

它在曲率非零的二次可微曲线的每个点都存在．密切圆的中心称为曲率中心 (centre of curvature)，而它的半径称为曲率半径 (radius of curvature)．曲率半径等于曲率的倒数．一条曲线的曲率中心的轨迹称为**渐屈线** (evolute)．曲线切线的正交轨线称为渐伸线（见**渐伸线（平面曲线的）** (evolvent (of a plane curve))）（图 5）．曲线的渐伸线的渐屈线就是曲线自身．

对于依赖于一参数 α 的一族曲线 γ_α，若曲线 γ 在每点至少与这族曲线中的一条相切，并且 γ 的任一段均与曲线族中的无限多条相切，则称 γ 为单参数曲线族 γ_α 的**包络** (envelop)．

曲面论 (theory of surfaces) 及其推广．曲面论通常讨论可微曲面 (differentiable surface)．这种曲面局部地可由下列类型的方程来定义：

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v), \tag{3}$$

其中 $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ 是参数 u 和 v 的可微函数．曲面的可微次数由这些函数的对应可微次数给定．一张曲面有无数多种方式能用像 (3) 那样的参数方程来定义．曲面上一点称为正则的 (regular)（寻常的 (ordinary)），如果适当选择坐标 x, y, z，使得在该点的一个邻域内曲面可表示或如下形式：

$$z=z(x,y), \tag{4}$$

其中 $z(x,y)$ 是光滑函数，否则，曲面上的点称为奇异的 (singular)．微分几何学中曲面的研究主要在正则（寻常）点的一个邻域内进行．由方程 (3) 给出的曲面上一点 (u_0, v_0) 为正则的充要条件是矩阵

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

在该点的秩等于 2．若曲面由 (3) 型的方程给出，则通常不加说明而总假定这个条件是满足的．若固定参数 u 或 v，则方程 (3) 定义了曲面上的曲线．这些曲线称为曲面上的坐标线 (coordinate lines)．参数 u 和 v 称为曲面坐标或曲线 Gauss 坐标．

曲面的**切平面** (tangent plane) 概念是用切触概念来定义的．它是过曲面上一点且在该点与曲面有阶 $\alpha\geqslant 1$ 的切触的平面．一张光滑（可微）曲面在每个（正则）点有唯一的切平面．由方程 (3) 定义的曲面，当在点 (u_0, v_0) 成立条件 (4) 时，曲面在该点的切平面由下列方程确定

$$\begin{vmatrix} X-x^0 & Y-y^0 & Z-z^0 \\ x_u^0 & y_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix}=0,$$

其中上标 “0” 表示函数 $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ 及其导数在点 (u_0, v_0) 取值．过曲面上一点垂直于曲面在该点的切平面的直线称为曲面的**法线** (normal)．若 $\mathbf{r}(u,v)$ 是坐标为 $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ 的向量，则

$$\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$$

具有曲面法线的方向．

密切抛物面 (osculating paraboloid) 的重要概念是对曲面引入的．这是一个以曲面在给定点的法线为轴且与曲面在该点有阶 $\alpha\geqslant 2$ 的切触的抛物面．二次可微曲面在每点都有唯一的密切抛物面，它可能蜕化成抛物柱面或平面．若曲面用直角坐标来描述，使得给定点取作坐标原点，该点的切平面取作 xy 平面，则在这点的邻域内曲面的方程将是

$$z=f(x,y),$$

而在该点的密切抛物面的方程是

$$z=\frac{1}{2}\left(f_{xx}x^2+2f_{xy}xy+f_{yy}y^2\right)$$

（函数 f 的导数在切触点取值）．根据密切抛物面的类型，曲面上的点被分为**椭圆点** (elliptic point)，**平坦点** (flat point)，**双曲点** (hyperbolic point) 和**抛物点** (parabolic point)．密切抛物面的重要性在于它在二阶无穷小范围内模拟了曲面的形状（切平面是在一阶无穷小范围内模拟曲面的形状）．

密切抛物面可用来引出曲面上**共轭方向**（conjugate directions）的概念．若在曲面给定点的两个方向所生成的两直线关于该点密切抛物面是共轭的，则称此两方向是共轭的（conjugate）．正交共轭方向称为主方向（principal direction）．在曲面上给定的点，一般有两个主方向．例外的情况是平坦点和特殊椭圆点（见**脐点**（umbilical point）），在这些点处，所有方向都是主方向．曲面上其切方向处处是主方向的曲线称为**曲率线**（curvature line）．在曲面的非椭圆点存在自共轭方向．它们就是所谓的**渐近方向**（asymptotic direction）．曲面上其切方向处处是渐近方向的曲线就是所谓的**渐近线**（asymptotic line）．

类似于平面上曲线族包络的概念，同样可引入曲面族包络的概念．然而，曲面族可以是单参数族，也可以是双参数族．曲面论中单参数平面族的包络具有特殊的意义．

在曲面论中，两个二次微分形式，即**曲面的基本形式**（fundamental forms of a surface），起着重要的作用．设 $\mathbf{r}(u, v)$ 表示曲面上点的位置向量．$\mathbf{n}(u, v)$ 表示曲面的单位法向量，则基本形式可写为

$$\mathrm{I} = d\mathbf{r}^2, \quad \mathrm{II} = -d\mathbf{r}\,d\mathbf{n}\ .$$

第一和第二基本形式的系数通常分别用 E, F, G 和 L, M, N 表示．第一基本形式给出了曲面上一点（u, v）与无限邻近点（$u+du,\ v+dv$）之间的距离：

$$ds = \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

曲面上由方程 $u=u(t)$，$v=v(t)$ 定义的曲线的长度可借助第一基本形式来计算．

$$L = \int_{t_0}^{t} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\ dt\ .$$

曲面的第一基本形式决定了曲面上曲线之间的角度．特别是，坐标曲线 $u=\text{const}$ 和 $v=\text{const}$ 在其交点处的夹角 θ 满足公式

$$\cos\theta = F/\sqrt{EG}$$

由此可见，若 $F=0$，则曲面上坐标网是正交的．一片曲面的面积也由第一基本形式给定，对于曲面的一块区域 Ω，其计算公式为

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{EG-F^2}\ du\,dv\ .$$

第二基本形式刻画了曲面在空间中的扭曲．事实上，第二基本形式与第一基本形式之比

$$k = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

表示曲面沿方向 $du : dv$ 作出的法截线的曲率（见曲面的**法曲率**（normal curvature））．位于曲面上的曲线的曲率和曲面上过曲线切线所作的法截线的曲率之间有一个简单关系（**Meusnier 定理**（Meusnier theorem））．曲面在给定点的法曲率的极值称为**主曲率**（principal curvature），并且它在主方向上达到．曲面沿任一方向的法曲率可用主曲率及该方向与主方向之间的夹角来表示（**Euler 公式**（Euler formula））．主曲率 k_1 和 k_2 由下列方程确定

$$\begin{vmatrix} Ek-L & Fk-M \\ Fk-M & Gk-N \end{vmatrix} = 0\ .$$

它们的平均值称为曲面的**平均曲率**（mean curvature）．一类重要曲面是由平均曲率为零的曲面所组成，即所谓**极小曲面**（minimal surface）．它们由如下事实判别：一片充分小的这种曲面在具有相同边界的所有曲面中具有最小的面积．主曲率之积 $K=k_1k_2$ 称为曲面的 **Gauss 曲率**（Gaussian curvature）

$$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

由此式可见，曲面的 Gauss 曲率可用第一和第二基本形式的系数来表示．然而，Gauss 曲率可以只用第一基本形式的系数及其导数来表示（**Gauss 定理**（Gauss theorem））．

能建立保持曲线长度不变的同胚的两曲面称为**等距曲面**（isometric surfaces）．

第一和第二基本形式的系数不是独立的．这些系数之间的一个关系由 Gauss 定理给出．其他两个关系被 K.M Петерсон 和 D Codazzi 所发现（见 **Петерсон-Codazzi 方程**（Peterson-Codazzi equations））．这三个关系构成了曲面第一和第二基本形式系数之间独立关系的完全系．根据 **Bonnet 定理**（Bonnet theorem），若两个基本微分形式满足 Gauss 方程和 Петерсон-Codazzi 方程，且其中第一个形式是正定的，则存在一张曲面，它以这些形式作为第一和第二基本形式，且被唯一确定到只差空间的位置不同．

通常所称的曲面的**内蕴几何学**（interior geometry）是曲面论的一个分支，它讨论曲面上图形的仅与曲线弧长的测度有关的性质．因为曲线的弧长取决于第一基本形式，故所考虑的性质也只与这个形式有关．特别，曲面内蕴几何学的对象是曲线的长度，曲线之间的角度，区域的面积，以及 Gauss 曲率．曲面内蕴几何的一个重要概念是**测地线**（geodesic line）的概念．这个名称赋予这样一种曲线，它在充分小一片曲面上连接其端点的所有曲线段中是最短的．曲面内蕴几何的第二个重要概念是曲线的**测地曲率**（geodesic curvature）概念．**Gauss-Bonnet 定理**（Gauss-Bonnet theorem）便涉及曲面 Gauss 曲率在区域上的积分，测地曲率在区域边界上的积分和区域的 Euler 示性数．

曲面的内蕴几何学可设想为二维度量流形的几何学，在这样的流形上相互无限接近的两点 (u, v) 和 $(u+du, v+dv)$ 之间的距离是借助一给定的微分形式 ds^2 来确定的．若以此方式研究曲面的内蕴几何学，则这种几何学自然可加以推广．给定的流形具有任意维数 n，而度量可由关于 n 个变量的正定二次微分形式 $ds^2 = g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$ 来描述．当进一步推广时，形式 ds^2 可不必是正定的．这就导致在广义相对论中感兴趣的空间理论，特别是 **Minkowski 空间** (Minkowski space)．最后，若二次形式 ds^2 用关于 du^α 为一次齐次的一般正齐次形式来代替，则可得 **Finsler 空间** (Finsler space)．曲面内蕴几何学的再进一步推广便是关于给定群的联络空间的几何学，特别是**仿射联络** (affine connection) 空间，**射影联络** (projective connection) 空间和**共形联络** (conformal connection) 空间的几何学．

参考文献

[1] Bianchi, L., Lezioni di geometria differenziale, 1－2, Zanichelli, Bologna, 1923－1927

[2] Darboux, G., Leçons sur la théorie générale des surfaces et ses applications géométriques de calcul infinitesimal, 1, Gauthier-Villars, 1887

[3] Struik, D. J., A concise history of mathematics, 1－2, Dover, reprint, 1948

[4] Рашевский, П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956

[5] Погорелов, А. В., Дифференциальная геометрия, 5 изд., М., 1969 (英译本 Pogorelov, A. V., Differential geometry, Noordhoff, 1959)．

[6] Blaschke, W., Einführung in die Differentialgeometrie, Springer, 1950

[7] Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie Elementare Differentialgeometrie, 1, Springer, 1921

[8] Sternberg, S., Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964

[9] Каган, В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1-2, М.-Л., 1947－1948

[10] Шуликовский, В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963

[11] Schouten, J. A. and Struik, D. J., Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, 2, Noordhoff, 1935．

[12] Фиников, С. П., Проективно-дифференциальная геометрия, М.-Л., 1937

[13] Фиников, С. П., Теория конгруэнций, М.-Л., 1950

[14] Широков, П. А., Широков, А. П., Аффинная дифференциальная геометрия, М., 1959．

[15] Норден, А. П., Пространства аффинной связности, М.-Л., 1950．

А. В. Погорелов 撰

【补注】 上述主要内容只涉及二维或三维 **Euclid 空间** (Euclidean space) 中曲线和曲面的微分几何学 (亦见**曲线** (curve)，**曲面** (surface))．在当今的西方文献中"微分几何学"一词也包含对微分流形的研究 (见**微分流形** (differentiable manifold)，**流形的微分几何学** (differential geometry of manifolds)) 和对赋予流形的各种结构 (Riemann 结构，Lorentz 结构，复结构，射影结构，仿射结构，等等) 的研究 (例如，见 **Riemann 流形** (Riemannian manifold)；**Riemann 几何学** (Riemannian geometry)，**复流形** (complex manifold)，**射影微分几何学** (projective differential geometry)，**Finsler 几何学** (Finsler geometry)，**仿射微分几何学** (affine differential geometry))．

Петерсон-Codazzi 方程 (Peterson-Codazzi equations) 的更常用的名称是 Mainardi-Codazzi 方程 (Mainardi-Codazzi equations)

曲面的内蕴几何学的英文名称 "interior geometry" 常用 "intrinsic geometry" 来代替．

Riemann 的讲演可在 [A12] 中找到．

考虑平面上一条可微的简单正则闭曲线．若曲率 k 处处 >0，则称之为 (广义) 卵形线 (oval)．这种平面曲线上使 k 取到相对极大或极小的点称为它的顶点 (vertex)．四顶点定理 (four-vertex theorem, Vierscheitelsatz) 说，一条卵形线至少有四个顶点．

参考文献

[A1] Spivak, M., A comprehensive introduction to differential geometry, 1－5, Publish or Perish, 1979．

[A2] Chern, S. S. (ed.), Studies in global geometry and analysis, Prentice-Hall, 1967

[A3] Struik, D. J., Lectures on classical differential geometry, Addison-Wesley, 1961．

[A4] Hicks, N. J., Notes on differential geometry, v. Nostrand, 1965

[A5] Hsiung, C. C., A first course in differential geometry, Wiley (Int.), 1981

[A6] O'Neill, B., Elementary differential geometry, Acad. Press, 1966

[A7] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry manifolds, curves and surfaces, Springer, 1988．

[A8] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, Wiley (Int.), 1969．

[A9] DoCarmo, M., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, 1976 (中译本 M. P. 多卡模，曲线和曲面的微分几何学，上海科学技术出版社，1988)

[A10] Thorpe, J. A., Elementary topics in differential geometry, Springer, 1979

[A11] Blaschke, W. and Leichtweiss, K., Elementare Differentialgeometrie, Springer, 1973．

[A12] Riemann, B., Ueber die Hypothessen, welche der Geometrie zuGrunde liegen, in Das Kontinuum und 3 Monographien, Chelsea, reprint, 1973．

【译注】 关于 Frénet 公式 (2)，一般取如下形状

$$\tau'=k_1\nu,\ \nu'=-k_1\tau+k_2\beta,\ \beta'=-k_2\nu.$$

这时τ,ν,β满足 $(\tau,\nu,\beta)=1$，即它们构成右手系．

曲面上的特殊椭圆点也简称为圆点 (circular point)

有关曲线和曲面的整体微分几何性质，可参考[A7]和[A9]　　沈一兵 译　陈维桓 校

流形的微分几何学[differential geometry of manifolds, дифференциальная геометрия многообразий]

微分几何学的一个分支，它讨论流形上的各种**无穷小结构** (infinitesimal structure) 及其与流形的结构和拓扑的联系

19世纪中叶，随着非 Euclid 的 Лобачевский 几何学和高维 Grassmann 几何学的发现，随着射影几何学和复数域上几何学的发展，人们清楚地感到传统的 Euclid 几何学不再是仅有的一种可能，而数学上要优先发展其他的非 Euclid 几何学，不管它们与现实空间的几何学的关系如何

1854年 B Riemann 在他的讲演“关于几何学基础的假设”(Über die Hypothesen, welche der Geometrie zuGrunde liegen) 中提出了“流形”这个新的非常有用的概念 (见 **Riemann 空间** (Riemannian space)) 这篇文章是 **Riemann 几何学** (Riemannian geometry) 的发端，后者是流形几何学中最重要和最精深的部分 Riemann 的概念不仅仅表达了一大类几何学 (包括 Euclid 几何学和 Лобачевский 的非 Euclid 几何学) 的统一描述，而且也为数学物理和分析中与微分方程有关的各种问题的几何处理提供了数学构造 这就使得在解这些问题时能应用各种几何和拓扑的概念，并且已为几何学在分析中的应用展现了新的可能性．正是 Riemann 几何学被 Einstein 用来实现物质空间作为连续统的思想，它的性质由物质的分布所确定 Riemann 空间是指这样的**微分流形** (differentiable manifold) M, 使得在每点 $p\in M$ 的切空间 T_pM 上给定了一个光滑依赖于 p 的 Euclid 度量 g_p(即正定的数积)．Riemann 空间 M 的切空间 T_pM 上数积的存在使得有可能根据 Euclid 几何学来确定无穷小曲线 (即 T_pM 中的向量) 之间的角度，无穷小曲线的长度，以及 T_pM 中 k 维平行多面体的体积，进而利用积分，可确定 M 上光滑曲线的长度和 M 中 k 维子流形的体积．从而使人们能在 Riemann 几何学的框架下考虑各类变分问题，特别是，可把 Riemann 空间中测地线 (或**测地直线** (geodesic line)) 定义为最小长度的曲线，**极小曲面** (minimal surface) 定义为最小体积的子流形．

Riemann 空间的测地线的研究是现代 (整体) Riemann 几何学的主要问题之一．它在应用上的重要性在于物理中各种动力系统可解释为沿某个伪 Riemann 空间的测地线的匀速运动．这样的系统包括 (例如) 广义相对论中试验物体的运动 (见**测地线假设** (geodesic hypothesis))，在几何光学的近似下光线在非均匀媒质中的传播，以及古典力学的各种系统 已经注意到，某些重要的偏微分方程 (理想流体的运动方程和广义相对论的 Einstein 方程) 可解释为某些无限维 Riemann 空间的测地线方程，这种空间也称为 Hilbert 流形 ([5], [12])．这些发现刺激了无限维流形几何学——整体分析——的发展

测地线方程的完全积分只在少数特殊情况下是可能的．就此而论，对于测地线性态的定性研究，几何和拓扑方法起着重要作用．这其中最重要的一种是 M Morse 的测地线变分理论 (见 **Morse 理论** (Morse theory), [20])

Morse 理论在伪 Riemann 空间上的推广归结为奇异性定理的证明，它是说，在广义相对论中物理时空通常会有奇异性 (不完全的测地线)．例如，“黑洞”([7]) 是奇异性的物理解释

Riemann 空间的测地线的性态在很大程度上取决于它的**曲率张量** (curvature tensor) (Riemann 张量 (Riemann tensor)) —— 刻画 Riemann 空间与 Euclid 空间的差别的几何对象 类似于曲面的 **Gauss 曲率** (Gaussian curvature)，Riemann 空间 M 在一点 x 的曲率张量决定了空间 M 在点 x 邻近的性质，是 Gauss 曲率的推广 而且，曲率张量含有关于 Riemann 空间整体性质的丰富信息，例如，关于**基本群** (fundamental group)，**Betti 数** (Betti number) 和**示性类** (characteristic class) 研究曲率张量的局部性质与 Riemann 空间的整体性质之间的关系是现代整体 Riemann 几何学的主要问题之一 ([21])

Riemann 空间 M 的任何子流形 N 都从 M 继承了 Riemann 空间结构 Riemann 空间的子流形研究，以及已知的 Riemann 空间 N 在给定 Riemann 空间 M 中作为子流形的实现问题的澄清，是子流形几何学的主要课题 (也见**等距浸入** (isometric immersion))．

研究 Riemann 空间的一个重要方向是研究它们的等距群 (即保持曲线长度不变的变换群)，这种研究是从 S Lie 和 W Killing 的工作开始的，等距群常常是 Lie 群．许多重要 Riemann 空间具有相当充分的等距群，而这个群的存在对研究大多数几何问题都是非常有帮助的．可迁等距群的存在使它有可能把空间 M 的几何和拓扑的研究化为 Lie 群的问题 (见**齐性空间** (homogeneous space))．

Riemann 空间 (M, G) 的 (连通) 等距群 G 的描述可化为无限小运动 (或 **Killing 向量** (Killing vector)，定义为 G 的单参数子群的速度场) 的 Lie 代数的描述 起重要作用的是研究 Killing 场的定性几何方法和阐明

这些场与空间几何性质的关系，主要是与空间曲率张量的性质的关系．例如，可以证明，在负 Ricci 曲率的紧致 Riemann 空间中不存在 Killing 场，Killing 场的通过其长度极值点的积分曲线是测地线（[16]）；Killing 场 X 在其逗留点（即在该点 $X=0$）邻域内的性态决定了 Riemann 空间的一个重要拓扑不变量——即它的 **Понтрягин 数**（Pontryagin number）（[16]）．

特别重要的 Riemann 空间是具有充分大等距群的空间．正如 H Helmholtz 早在 1868 年注意到并且被 Lie 严格证明的，对于给定的 n，具有最大（关于其维数）等距群的 n 维 Riemann 空间 M 是常曲率空间（例如，Euclid 空间 E^n，Лобачевский 空间 Λ_n 或 Riemann 球空间 S^n，见**常曲率空间**（constant curvature，space of））．与常曲率空间最接近的空间是**对称空间**（symmetric space），即关于任一点的测地对称是等距的 Riemann 空间．这些空间恒有可迁的等距群，并且可利用半单 Lie 代数理论来分类（[8]）．

在微分几何学中起重要作用的一个概念是 M 上张量场 T 沿向量 $X\in T_pM$ 方向的共变导数 $\nabla_X T$．这个概念由 G Ricci 引入，他用它作为发展"绝对微分学"的出发点（见**张量分析**（tensor analysis））．为要得到几何对象的不变量，共变微分这个结构被证明是适宜的．于是，由 E Christoffel 和 R. Lipschitz 找到的 Riemann 度量的不变量的完全系由曲率张量及其逐次共变导数组成．

共变导数的概念使它能以规范方式在 Riemann 空间上定义若干微分算子，这些算子的性质与空间的几何密切相关．最重要的一个是 Laplace-Beltrami 算子 Δ，它由 E Beltrami 引入，且对 Euclid 空间而言与 **Laplace 算子**（Laplace operator）相一致．广泛的一类二阶线性偏微分方程都可在伪 Riemann 空间的框架下解释为对应于 Laplace-Beltrami 算子的方程．这就允许人们在研究这些方程时应用 Riemann 几何学．Riemann（[1]）给出了首例这种技巧（对热方程）．已经得到了不少结果来建立 Riemann 空间 Laplace-Beltrami 算子的性质（尤其是它的谱）与空间的几何（空间的曲率，闭测地线的个数，等等）之间的联系（[19]）

T Levi-Civita 给出了共变导数概念的一种几何解释．他证明，在 Riemann 空间中能用规范方式定义切向量（张量）沿曲线的平行移动，而共变微分的 Ricci 算子就是无穷小平行移动算子（见 **Levi-Civita 联络**（Levi-Civita connection））

1926 年 E Cartan 引入了**和乐群**（holonomy group）的概念，它定义为由算子 τ_γ 生成的 Riemann 空间 M 的切空间 T_pM 的线性变换群 Γ_p，这里 τ_γ 是沿过 p 的一切可能的回路 γ 的平行移动算子．和乐群与空间的曲率张量紧密相关，对于单连通的解析空间，它被一点处的曲率张量及其共变导数完全决定；另一方面，它还包含了关于空间几何和拓扑的某些信息．因此，若和乐群知道了，则就能找到所有的平行场，从而也能解决关于 Riemann 空间分解成两个其他 Riemann 空间的直积的可能性问题．利用对称空间的和乐群．就能构造空间本身，并且也能确定它的等距群．

1919 年，在发展 Levi-Civita 的平行移动想法和推广 Riemann 的空间概念时，H Weyl 考虑了具有 **线性联络**（linear connection）的空间——切向量沿曲线平行移动具有特定规律的流形．测地线、曲率张量和和乐群都可在具有线性联络的空间中定义．Riemann 空间是具有线性联络的空间的特例，对于这种空间，其和乐群包含在正交群内 若和乐群包含在线性相似群 $\mathbf{R}^{*}\cdot \mathrm{SO}(n)$ 中，则联络称为共形的（conformal）；在这种情况下，流形上就产生一个**共形结构**（conformal structure）．

Weyl 想法的发展导致创立**流形上的联络**（connections on a manifold）的现代理论，它的论题是已知的纤维丛上的联络（即纤维沿底空间中曲线平行移动的规律）．特别是，这个理论导致示性类理论（[11]，[16]）．在现代物理学中，联络概念起了重要作用．各种物理场（特别是电磁场和引力场）都可在杨 -Mills 理论的框架下解释为给定纤维丛上联络的曲率场．任何物理纤维丛，即以物理场作为截面的纤维丛，其上联络的存在性可由这样的物理事实得出，即在时空的不同点，场特征可以（沿曲线）相比较

Riemann 空间的另一推广是 **Finsler 空间**（Finsler space），它定义为具有 Finsler 度量的流形 一个力学系统的 Lagrange 算子便是这种度量的例子．Finsler 流形也以自然方式出现在光学中

1872 年 F Klein 提出了处理几何学基础的新的群论途径——即所谓"埃尔兰根纲领"．他指出，G 空间——流形 M 连同 M 上给定的变换群 G——是几何研究的主要对象．

按 Klein 的观点，几何学的主要任务是研究变换群的不变量（见**埃尔兰根纲领**（Erlangen program））．尽管事实证明这种看法是太狭窄了——许多重要的 Riemann 空间只有平凡的等距群——然而，在流形微分几何的发展中它还是起了重要作用．它使重要的齐性空间类（即具有可迁群 G 的 G 空间）引起人们的注意．按埃尔兰根纲领，这些空间的几何研究被化为 Lie 群论的问题，并且鼓励了 Riemann 概念的进一步推广 这种推广在于研究流形上其他（非 Riemann）无穷小结构的几何，后者是由特殊几何量的场给定的．许多这样的结构首先是作为某种齐性空间的等距群的不变量而得到的．

非 Riemann 无穷小几何结构的例子包括这样一些

结构，如绝对平行性（标架场），**共形联络**（conformal connection），**射影联络**（projective connection），**线性联络**（linear connection），分布（或更一般地，**旗结构**（flag structure）），**殆复结构**（almost-complex structure），**殆辛结构**（almost-symplectic structure），仿射量场（见**仿射量**（affinor）），等等 类似于 Riemann 几何学，这些结构的几何学已经得到发展 其主要问题是 1）从已知几何结构，尤其是不变量，导出其他结构的方法——换言之，从已知的某种类型几何结构的范畴到其他范畴的函子的构造 2）几何结构的自同构群的研究，具有充分大自同构群的几何结构的研究，具有最大自同构群的给定类型几何结构的描述，以及齐性空间上给定类型结构的分类 3）等价性问题，即寻找两个几何结构等价的充要条件 4）一方面是光滑流形上的拓扑和结构，另一方面是定义在流形上的几何结构的性质，研究这两方面的关系 5）研究具有几何结构的流形间的映射，特别是纤维丛的映射和子流形的映射．

最重要的一类几何结构是可迁结构，或 G 结构（[10]）．上述所有的结构例子（除仿射量场外）都是 G 结构．G 结构的一般理论基于 Cartan 的两个基本想法 延拓概念和结构函数概念 特别，在 Riemann 度量的情况下，这些概念便导致 Levi-Civita 平行移动和曲率张量 有限型 G 结构理论在许多方面类似于 Riemann 几何那样正在发展着 在有限型 G 结构几何中研究最充分的问题包括局部平坦（可积的）结构，其中最重要的是复结构（见**解析流形**（analytic manifold）），**辛结构**（symplectic structure）（它是 Hamilton 力学的基础）以及**切触结构**（contact structure）．

Cartan 发展了解偏微分方程组（Pfaff 方程组）的几何方法，创造了外微分形式理论，它被证明是微分几何学发展的主要因素（[22]）．在表达偏微分方程组的可积性条件时，外微分算子 d 被证明是有用的．例如，Pfaff 方程组 $\omega_1=\ \ =\omega_k=0$ 完全可积的充要条件是由线性微分形式 $\omega_1,\ \ ,\omega_k$ 生成的理想 J 关于 d 是闭的 $dJ\subset J$（**Frobenius 定理**（Frobenius theorem））．微分形式理论被 Cartan 通过**活动标架法**（moving-frame method）成功地用来解决微分几何和 Lie 群论中的各种问题．形式的积分理论建立了微分形式算法与流形的同调之间的联系（见 **de Rham 上同调**（de Rham cohomology），**微分形式**（differential form））

在 Riemann 空间中外微分算子 d 可用共变微分算子 ∇ 来表示．并且，Hodge 理论建立了算子 d 与作用在微分形式空间上的 Laplace-Beltrami 算子 Δ 之间的密切联系，后者 Δ 也可用算子 ∇ 来表示．Hodge 定理说，紧致流形的上同调空间同构于调和（即作用算子 Δ 后为零）微分形式（见**调和形式**（harmonic form））的空间．由 Hodge 定理以及 Hodge 理论中的若干其他论断，给出了关于具有非平凡平行微分形式（见**平行场**（parallel field））的 Riemann 空间 M 的上同调环 H^*M 之结构的信息，因而有非标准的和乐群 $\Gamma\neq SO(n)$，$O(n)$．Kahler 流形和对称空间便是这种空间的例子（见 **Kahler 流形**（Kähler manifold），**对称空间**（symmetric space））

现代微分几何学研究中的一个重要趋势是研究任意流形上的自然向量丛（k 阶切丛和余切丛，张量丛，k 阶标架丛，射流丛，等）和发现它们的自然（即关于流形 M 的微分同胚为不变的）几何结构（[23]） 这种结构的例子包括余切丛 T^*M 上的规范辛结构和 M 上函数的 1 射流丛 $J^1(M,\mathbf{R})$ 中的规范切触结构（它们在一阶偏微分方程理论和 Hamilton 力学中起着重要作用）以及 M 上外微分形式丛 $\Lambda^*(M)$ 上的外微分算子．

微分几何的代数方法正在成功地发展着．这里的原始概念不是流形，而是交换环 F（流形上函数的环），流形本身借助于 F 被定义为最大理想的空间（见**概形**（scheme）） M 上向量场被定义为这个环 F 的导数（见**环中的导子**（derivation in a ring）和**模上的微分算子**（differential operator on a module）） 这种方法有可能推广微分几何学的各种结果（例如，推广到超流形上），并简化它们的证明，也有可能把微分几何学的思想应用到其他数学理论（例如，环论和模论）上，并且反过来，把各种代数结果应用于微分几何中（[17]）

参考文献

[1] Riemann, B , Collected works, Dover, reprint, 1953

[2] Cartan, E , Leçons sur la geometrie des espaces de Riemann, Gauthier-Villars, 1928

[3] Каган, В Ф , Очерки по геометрии, М , 1963

[4] Рашевский, П К , Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд , М , 1967（中译本 П К 洛薛夫斯基，黎曼几何与张量解析，高等教育出版社，1955，上、下册）

[5] Арнольд, В И , Математические методы классической механики, М , 1974（英译本 Arnol'd, V I , Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978）

[6] Eisenhart, L P , Riemannian geometry, Princeton Univ Press, 1949

[7] Hawkins, S and Ellis, J , The large-scale structure of space-time, Cambridge Univ Press, 1973 .

[8] Helgason, S , Differential geometry and symmetric spaces, Acad Press, 1962

[9] Bishop, R L and Crittenden, R J , Geometry of manifolds, Acad Press, 1964

[10] Sternberg, S , Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964

[11] Schwartz, J , Differential geometry and topology, Gor-

don & Breach, 1968
[12] Lang, S , Introduction to differentiable manifolds, Interscience, 1967
[13] Sulanke, R and Wintgen, P , Differentialgeometrie und Faserbündel, Deutsch Verlag Wissenschaft , 1972 .
[14] Wells, jr , R O , Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980 .
[15] Lichnerowicz, A , Géométrie des groupes de transformations, Dunod, 1958
[16] Kobayashi, S and Nomizu, K , Foundations of differential geometry, 1－2, Wiley, 1963－1969 .
[17] Виноградов, А М , Красильщик, И С , Лычагин, В В , Применения нелинейных дифференциальных уравнений, М , 1977 (英译本 Krasil'shchik, I S , Lychagin, V V and Vinogradov, A M , Geometry of jet spaces and nonlinear partial differential equations, Gordon & Breach, 1986) .
[18] Chern, S S , Geometry of characteristic classes, Proc 13 th Biennial Sem Candian Math Congress, 1972, 1－40
[19] Молчанов, С А ,《Успехи матем наук》, **30** (1975), 3－59
[20] Cheeger, J and Ebin, D G , Comparison theorems in Riemannian geometry, North-Holland, 1975
[21] Greub, W , Halperin, S and Vanstone, R , Connections, curvature and cohomology, 1－3, Acad Press, 1972－1976 .
[22] Flaschel, P and Klingenberg, W , Riemannsche Hilbertmannigfaltigkeiten Periodische Geodaten, Lecture Notes in Math , 282, Springer, 1972
[23] Griffiths, Ph A , Exterior differential systems and the calculus of variations, Birkhäuser, 1983 .
[24] Kobayashi, S , Transformation groups in differential geometry, Springer, 1972
[25] Besse, A L , Einstein manifolds, Springer, 1987 .
[26] Besse, A L , Géometrie Riemannienne en dimension 4, F Nathan, 1981 .

Д В Алексеевский 撰

【补注】 Morse 理论的现代描述见 [A1] . Riemann 的讲演也见 [A2] . 参考文献 [A10]－[A13] 都是关于微分流形及其应用的一般性参考书

参考文献

[A1] Klingenberg, W , Lectures on closed geodesics, Springer, 1968
[A2] Riemann, B , Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zuGrunde liegen, in Das Kontinuum und 3 Monographien, Chelsea, reprint, 1973 .
[A3] Rund, H , The differential geometry of Finsler spaces, Springer, 1959
[A4] Cartan, E , Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Hermann, 1971
[A5] Griffith, P A and Jensen, G R , Differential systems and isometric embeddings, Princeton Univ Press, 1987
[A6] Flanders, H , Differential forms with applications to the physical sciences, Acad Press, 1963
[A7] Kahler, E , Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, Chelsea, reprint, 1949 .
[A8] Cartan, E , La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile, Gauthier-Villars, 1937
[A9] Milnor, J W and Stasheff, J D , Characteristic classes, Princeton Univ Press, 1974
[A10] Rham, G de, Differentiable manifolds, Springer, 1984
[A11] Boothby, W M , An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry, Acad Press, 1975
[A12] Choquet-Bruhat, Y , De Witt-Murette, C and Dillard-Bleick, M , Analysis, manifolds and physics, North-Holland, 1982
[A13] Dieudonne, J , Treatise on analysis, 4, Acad Press, 1974

沈一兵 译 陈维桓 校

微分群 [differential group, дифференциальная группа]

一个 Abel 群 C, 它具有给定自同态 $d \cdot C \to C$ 满足 $d^2=0$. 该自同态称为微分 (differential) . 微分群的元素通常称为链 (chain), 核 $\operatorname{Ker} d$ 的元素称为闭链 (cycle), 象 $\operatorname{Im} d$ 的元素称为边缘 (boundary) .

А В Михалев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Spanier, E H , Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966, p 156

石生明 译 许以超 校

微分包含 [differential inclusion, дифференциальное включение], 多值微分方程 (multi-valued differential equation), 具有多值右端的微分方程 (differential equation with multi-valued right-hand side)

关系式

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x), \tag{1}$$

其中, $x=x(t)$ 是在某一区间上的未知向量函数, $F(t,x)$ 是依赖于数 t 及向量 $x=(x_1, \cdot, x_n)$ 的 n 维空间中的一个集合 微分包含 (1) 的解通常理解为一个绝对连续的向量函数 $x(t)$, 它在所考虑的 t 的变化区间上几乎处处满足关系

$$\frac{dx(t)}{dt} \in F(t, x(t))$$

特别地, 如果集合 $F(t, x)$ 是由单个点组成的, 则微分包含就变成常微分方程 $dx/dt=F(t,x)$. 若 $Dx(t) \in F(t, x(t))$, 其中 $Dx(t)$ 是一个**切锥** (contingent) ([1]), 则这类方程在很多情况下等价于微分包含 .

微分包含的产生, 例如, 来自涉及在所需的精度

$$\left| \frac{dx(t)}{dt} - f(t, x(t)) \right| \leqslant \varepsilon$$

内满足微分方程的函数的问题, 来自微分不等式

$$f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \geqslant 0,$$

来自具有不连续右端的微分方程（[1]，第2章），以及来自最优控制理论（[3],[2]）等．在控制问题中最常考虑的是方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \tag{2}$$

其中 $x=x(t)$ 是要求的向量函数，而 $u=u(t)$ 是控制，即可在所有容许控制（permissible controls）之中任意选择的向量函数（即对每个 t，使得 $u(t) \in U$，其中 U 可以是依赖于 t 和 $x=x(t)$ 的一个给定的集合）．对所有容许控制 $u=u(t)$，方程（2）的解集满足微分包含（1），其中，$F(t,x)$ 是当 u 遍历集合 U 时，函数 $f(t,x,u)$ 的所有值的集合

在微分包含理论中，通常假定，对所考虑的区域 G 中的任意 t, x，$F(t, x)$ 是 n 维空间中的非空有界闭集．如果集合 $F(t,x)$ 是处处凸的，且对任意 t，是 x 的上半连续函数（upper semi-continuous function）（即对任何 t, x 和任何 $\varepsilon>0$，对所有充分小的 $|x'-x|$，集合 $F(t,x')$ 包含在集合 $F(t,x)$ 的 ε 邻域中），而对任意 x，它是 t 的可测函数（即对 n 维空间中的任意点 x 和任意球 B，使 $F(t,x) \cap B$ 是非空的 t 的值集，是 Lebesgue 可测的），并且，如果 $F(t,x)$ 总是包含在一个球 $|x| \leqslant m(t)$ 中，而函数 $m(t)$ 是 Lebesgue 可积的，那么对任意的初始条件 $x(t_0)=x_0((t_0, x_0) \in G)$，微分包含的解存在（[4]），且由这些解构成的**积分管子**（integral funnel）显示出通常的性质（[4]）．如果 $F(t, x)$ 关于 x 是连续的，则对集合 $F(t,x)$ 是凸的要求可以去掉　解的存在性被保持（[5]），但积分管的性质未被保持．

介绍微分包含以及有关这类包含与控制问题之间的联系的著作见 [6],[7]　关于微分包含的稳定性概念见 [8],[1]，关于有界与周期解的存在性以及其他性质见 [1],[6],[7]．

参考文献

[1] Filippov, A F, Differential equations with discontinuous right-hand sides, Reidel, 1988

[2] Wazewski, A, Systèmes de commande et équations au contingent, *Bull Acad Polon Sci Ser Math*, **9**(1961), 3, 151－155

[3] Филиппов, А Ф,《Вестн МГУ Сер матем》, **2** (1959), 25－32

[4] Davy, J L, Properties of the solution set of a generalized differential equation, *Bull Austr Math Soc*, **6**(1972), 3, 379－398

[5] Olech, C, Existence of solutions of non-convex orientor fields, *Boll Un Mat Ital*, **11**(1975), 3, 189－197

[6] Blagodatskikh, V I and Filippov, A F, Differential inclusions and optimal control, *Proc Steklov Inst Math*, **169** (To appear). (*Trudy Mat Inst Steklov*, **169** (To appear))

[7] Aubin, J-P and Cellina, A, Differential inclusions, Univ Paris IX, 1983

[8] Roxin, E, Stability in general control systems, *J Diff Equations*, **1**(1965), 2, 115－150

А Ф Филиппов 撰　周芝英 译　叶彦谦 校

微分不等式 [**differential inequality**, **дифференциальное неравенство**]

联系自变量、未知函数及其导数的不等式，例如

$$y'(x) > f(x, y(x)), \tag{1}$$

其中 y 是自变量 x 的未知函数．微分不等式理论中的主要问题是，从一个已知的微分不等式和附加（初始或边界）条件出发去描述它的所有解．

在微分方程中用不等号代替等号而获得的微分不等式——它等价于在方程的一边加上某一有确定符号的非指定函数——组成了一大类　将这种不等式的解和相应微分方程的解比较是很有意义的．例如，下面的估计（[1]）对(1)的任意解是成立的

$$y(x) < z(x),\ x_1 \leqslant x < x_0, \tag{2}$$
$$y(x) > z(x),\ x_0 < x \leqslant x_2,$$

其中，在两个解存在的任何区间 $[x_1, x_2]$ 上有

$$z' = f(x, z),\quad z(x_0) = y(x_0).$$

这一简单的论点被广泛用于估计微分方程的解（转到相应的具有已经找出的一个特解的微分不等式）、解的可扩展区域、两解之间的差别以及导出解的唯一性条件等等　类似的定理（[2]）对形如

$$y^{(m)} + a_1(x) y^{(m-1)} + \quad + a_m(x) y > f(x)$$

的微分不等式（Чаплыгин 不等式（Chaplygin inequality））也成立　这里，对于在 $x=x_0$ 满足相同初始条件的解，类型(2)的估计只在由系数 $a_1,\quad, a_m$ 确定的区间上成立　例如，对于 $y''+y>f$，区间为 $[x_0-\pi, x_0+\pi]$

对于微分不等式组

$$y_i'(x) > f_i(x, y_1,\quad, y_n),\quad i=1,\quad, n,$$

文献 [3] 指出，如果每个函数 f_i 对于自变量 y_j（对所有 $j \neq i$）是非下降的，则类似于（2），估计式

$$y_i(x) > z_i(x),\ x_0 < x \leqslant x_2,\ i=1,\quad, n$$

成立　这种考虑的进一步发展就产生了锥面空间的微分不等式理论．

微分不等式的另一种不同形式是要求给定函数的全微商不变号

$$\frac{d}{dx} F(x, y_1,\quad, y_n) \equiv \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1' + \quad + \frac{\partial F}{\partial y_n} y_n' \leqslant 0$$

这一要求在稳定性理论中用到

另一类的表示式是微分不等式

$$\max_{i=1,\cdots,n}|y_i'-f_i(x,y_1,\cdots,y_n)|\leqslant\varepsilon \qquad (3)$$

($\varepsilon>0$是给定的)，它是在用微分方程近似描述实际问题这个一般想法时首次被研究的([4])．这里对积分管(integral funnel)的，即对满足给定初始条件的所有解的点的集合的描述，特别是当$x\to\infty$时，管的状态的描述是有意义的　微分不等式(3)的一般推广是关于列联的一个微分方程，它是由推广方向场概念的锥体场所规定．

对微分不等式也研究了边值问题理论　不等式$\Delta u\geqslant 0$定义了下调和函数(subharmonic functions)，其中Δ是**Laplace 算子**(Laplace operator)，微分不等式$\partial u/\partial t-\Delta u\leqslant 0$定义了下抛物函数(subparabolic functions)人们还对各种类型的微分算子研究了具有偏导数的、更为一般类型的(包括以上两种类型)微分不等式．

参考文献

[1] Petrovitsch, M , Sur une manière d'étendre le theorème de la moyence aux équations différentielles du premier ordre, *Math Ann* , **54**(1901), 3, 417－436

[2] Чаплыгин, С А , Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, М , 1919

[3] Wazewski, T , Systèmes des équations et des inégualités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications, *Ann Soc Polon Math* , **23**(1950), 112－166

[4] Bohl, P , Ueber Differentialungleichungen, *J Reine Angew Math* , **144**(1914), 284－313

[5] Haar, A , Ueber Eindeutigkeit und analyzitat der Lösungen partieller Differentialgleichungen, in Atti congresso internaz mathematici Bologna, 1928, Vol 3, Zanichelli, 1930, 5－10

[6] Walter, W , Differential-und Intergralgleichungen und ihre Anwendung bei Abschätzungs-und Eindeutigkeitsproblemen, Springer, 1964

[7] Szarski, J , Differential inequalities, PWN, 1965

[8] Lakshmikantham, V and Leela, S , Differential and integral inequalities, 1-2, Acad Press, 1969

А.Д.Мышкис 撰

【补注】 更为一般地，考虑形如

$$f(t)\leqslant T(f)(t)$$

的函数不等式(functional inequalities)和积分不等式(integral inequalities)，其中T是某个定义在一区间上的函数的空间X到自身的映射　在此情况下有两个有用的唯一性定理如下　设$C^+[0,a]$是$[0,a]$上的非负连续函数空间．设$K(t)\in L(0,a)$是连续和非负的．如果对$0\leqslant t\leqslant a$，

$$f(t)\leqslant\int_0^t K(s)f(s)ds,$$

则f恒等于0　设$f\in C^+[0,a]$使得$f(0)=0$和$\lim_{h\downarrow 0}h^{-1}f(h)=0$　如果

$$f(t)\leqslant\int_0^t f(s)\frac{ds}{s},$$

则也有$f(t)\equiv 0$(南云引理(Nagumo lemma))．设$K\in C^+[a,b]\cap L(a,b)$，设$f,g\in C^+[a,b]$并假设

$$f(t)\leqslant g(t)+\int_a^t K(s)f(s)ds.$$

那么

$$f(t)\leqslant g(t)+\int_a^t K(s)\exp\left[\int_s^t K(u)du\right]g(s)ds$$

最后的结果被称为Gronwall引理(Gronwall lemma)(Gronwall不等式(Gronwall inequality))．K等于常数的情形是很重要的．Gronwall引理的另一个变形如下　设f, $K\in C^+[a,b]$且对某常数c,

$$f(t)\leqslant c+\int_a^t K(s)f(s)ds,$$

则

$$f(t)\leqslant c\exp\left[\int_a^t K(s)ds\right].$$

这最后一个结果，在例如利用$\dot{x}=Ax$(A为常数)的稳定性讨论(恒定作用的)扰动$\dot{x}=Ax+B(t)x$的稳定性时是很有用的

参考文献

[A1] Jordan, D W and Smith, P , Nonlinear ordinary differential equations, Clarendon Press, 1977

[A2] Hille, E , Ordinary differential equations in the complex plane, Wiley-Interscience, 1976.

周芝英 译　叶彦谦 校

微分不变式[**differential invariant**, **дифференциальный инвариант**]

由一个或多个函数和它们关于自变量的各阶偏导数所组成的表达式，有时也包含这些自变量的微分，它关于某些变换是不变的．

设在元素是点$(u^1,\cdots,u^n)$的微分流形X_n上给出几何对象Ω(见**几何对象理论**(geometric objects, theory of))．该流形的一个几何对象ω被称为关于对象Ω的r阶微分不变式，如果它的坐标$\omega_A(A=1,\cdot,N)$是Ω的坐标$\Omega_\alpha(\alpha=1,\cdots,M)$及其关于坐标$u^i(i=1,\cdots,n)$直到$r$阶的偏导数的函数

$$\omega_A=f_A(\Omega_\alpha,\partial_i\Omega_\alpha,\cdots,\partial^r_{i_1\cdots i_r}\Omega_\alpha),$$

并且它关于坐标变换具有下述的不变性质．实际上，在坐标变换

$$u^i=u^i(u^{1'},\cdot,u^{n'})$$

下，ω 的新坐标 ω'_A 可用 Ω 的新坐标 Ω'_α 及其关于新坐标的偏导数按同样函数关系 f_A 来表达

$$\omega'_A = f_A(\Omega'_A, \partial_i \Omega'_\alpha, \cdots, \partial^r_{i_1 \cdots i_r} \Omega'_\alpha).$$

例如，设 Ω 是线性仿射（无挠）联络的对象．那么对象 ω（曲率张量）

$$R^l_{ijk} = \partial_i \Gamma^l_{jk} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{is}\Gamma^s_{jk} - \Gamma^l_{js}\Gamma^s_{ik}$$

是关于 **Christoffel 符号**（Christoffel symbol）Γ^k_{ij} 的一阶的张量微分不变式

设在 X_n 上给定一个点变换群 G（伪群）

$$u^i = f^i(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n) \tag{1}$$

并设 M_h 是 X_n 的 h 维子流形

$$u^i = \varphi(t^1, \cdots, t^n), \tag{2}$$

它的参数服从无限群 G_∞ 的变换

$$t^\alpha = \psi^\alpha(\bar{t}^{1'}, \cdots, \bar{t}^{n'})$$

流形 M_h 关于群（伪群）G 的 r 阶几何微分不变式（geometric differential invariant）是 M_h 的点坐标 u^i 及其关于参数 t^α 直到 r 阶的偏导数的函数

$$F\left[u^i, \frac{\partial u^i}{\partial t^\alpha}, \cdots, \frac{\partial^r u^i}{\partial t^{\alpha_1} \cdots \partial t^{\alpha_r}}\right], \tag{3}$$

它关于变换 (1) 和 (2) 是不变的．实际上，若 u^i 按公式 (1) 代入 (3) 中，同时 u^i 关于 t^α 的偏导数用 $\bar{u}^i$ 关于 $\bar{t}^{\alpha^*}$ 的导数的相应表达式代替，则可得包含 $\bar{u}^i$ 及其关于 $\bar{t}^{\alpha^*}$ 之导数的相同函数 F

$$F\left[\bar{u}^i, \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial \bar{t}^{\alpha_1^*}}, \cdots, \frac{\partial^r \bar{u}^i}{\partial \bar{t}^{\alpha_1^*} \cdots \partial \bar{t}^{\alpha_r^*}}\right]$$

若坐标 u^i 是齐次的，则 F 关于变换

$$u^{*i} = \lambda(t^1, \cdots, t^n) u^i, \quad \lambda \neq 0$$

也必是不变的．在几何微分不变式的定义中，F 可用几何对象来代替．若这个对象是共变（反变）向量，则它就称为共变的（covariant）（反变的（contravariant））．

若某个对象为零是不变的，则这对象就命名为相对微分不变式（relative differential invariant）．

参考文献

[1] Thomas, T Y, The differential invariants of generalized spaces, Cambridge Univ Press, 1934

[2] Weitzenbock, R, Invariantentheorie, Noordhoff, 1923

В И Шуликовский 撰 沈一兵 译

微分邻域 [**differential neighbourhood, дифференциальная окрестность**]，$C_p(p \geqslant k+1)$ 类的流形 M 的 $2k$ 阶的 k 重**切丛**（tangent bundle）$T^k(M)$ 的一个局部**坐标卡**（chart）．

А Б Иванов 撰

【补注】 对于曲线上一个点的 $2k$ 阶的微分邻域的概念见**局部微分几何学**（local differential geometry）．

对于 k 重切丛（也称第 k 个切丛），见**切丛**（tangent bundle）．

薛春华 译 徐森林 校

Riemann 曲面上的微分 [**differential on a Riemann surface; дифференциал на Римановой поверхности**]

Riemann 曲面 S 上关于**局部单值化参数**（local uniformizing parameter）$z = x + iy$ 的共形变换为不变的**微分形式**（differential form）．最常遇到的是一阶微分（differential of the first order），它们是形如

$$\omega = p\,dx + q\,dy \equiv p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy,$$
$$\pi = r\,dx + s\,dy$$

的一维微分形式，此式关于变量 (x,y) 的每一个的微分是线性的，并且对于充分光滑的系数 $p, q, \cdots$ 作参数变换时是不变的．零阶微分（differential of order zero）是关于参数替换为不变的充分光滑的复函数 $f = f(x,y)$，$g = g(x,y)$，即为点 $p \in S$ 的函数，二阶微分（differential of the second order）具有形式

$$\Omega = A\,dx\,dy \equiv A(x,y)\,dx\,dy, \quad \Pi = B\,dx\,dy.$$

Riemann 曲面上所有阶数大于 2 的微分均恒等于零．

Riemann 曲面上同阶微分的加法按通常规则进行

$$f+g, \quad \omega + \pi = (p+r)\,dx + (q+s)\,dy,$$
$$\Omega + \Pi = (A+B)\,dx\,dy,$$

它满足交换律和结合律．Riemann 曲面上微分的外乘法（exterior multiplication）关于加法满足分配律，以记号 $\wedge$ 表示并由下列规则定义

$$f \wedge g = fg, \quad f \wedge \omega \doteq (fp)\,dx + (fq)\,dy,$$

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0, \quad dy \wedge dx = -dx \wedge dy = -dx\,dy.$$

因此

$$\omega \wedge \pi = (ps - qr)\,dx\,dy, \quad \pi \wedge \omega = -\omega \wedge \pi,$$

$$f \wedge \Omega = (fA)\,dx\,dy$$

一般地，k 阶微分外乘 l 阶微分的结果当 $k+l \leqslant 2$ 时为一 $k+l$ 阶微分，当 $k+l > 2$ 时为零．线性微分算子 $d = (\partial/\partial x)\,dx + (\partial/\partial y)\,dy$ 把一个 k 阶微分变换为一个 $k+1$ 阶微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy,$$

$$d\omega = (dp)\,dx + (dq)\,dy = \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)dx\,dy, \quad d\Omega = 0$$

此外，

$$d(fg) = f\,dg + g\,df,$$

$$d(f\omega) = (df) \wedge \omega + f(d\omega) = -\omega \wedge (df) + f(d\omega),$$

并且 $dd = 0$．对于 Riemann 曲面上的微分具有重要意义的还有线性星共轭算子（star conjugation operator）

$$*\omega=-q dx+p dy$$

这里

$$*(f\wedge\omega)=f\wedge(*\omega),$$
$$\omega\wedge(*\pi)=\pi\wedge(*\omega)=(pr+qs)dxdy,$$
$$\omega\wedge(*\omega)=(p^2+q^2)dxdy,\ *d=-\frac{\partial}{\partial y}dx+\frac{\partial}{\partial x}dy,$$
$$*(df)=(*d)f,\ (*d)\omega=*d\omega=-d*\omega$$

星共轭算子并不恒等于复共轭算子 复共轭算子以上方加横线表示 如果 $f=g+ih$，则 $\bar{f}=g-ih$，$\overline{\omega}=\bar{p}dx+\bar{q}dy$，$\overline{\Omega}=\bar{A}dxdy$，还有 $d\overline{\omega}=\overline{d\omega}$，$\overline{*\omega}=*\overline{\omega}$．**Laplace 算子** (Laplace operator) $\Delta=d*d$ 定义于零阶微分上．

$$\Delta f=d*df=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy.$$

ω 称为恰当微分（exact differential），如果存在 S 上的函数 f，使得 $\omega=df$ 处处成立，如果 $\omega=*df$，则称 ω 为上恰当微分（co-exact differential），如果在 S 上 $d\omega=0$，则称 ω 为闭微分（closed differential），而如果 $d*\omega=0$，则称 ω 为上闭微分（co-closed differential） 恰当性蕴涵闭性，但反之不然．设 c_1, c_2，为 S 上的闭链，则积分 $\int_{c_1}\omega$，$\int_{c_2}\omega$， 可借助局部单值化参数以通常方式定义，称为微分 ω 的周期（period of the differential ω）．如果 c_1 与 c_2 在 S 上是同调的且 ω 是闭微分，则 $\int_{c_1}\omega=\int_{c_2}\omega$，即闭微分的周期只依赖于同调类．恰当微分的所有周期均为零 反之，闭微分是恰当微分，当且仅当它的周期都等于零

函数 $f\in C^2$ 称为在 S 上是调和的（harmonic），如果 $\Delta f=0$．微分 $\omega\in C^1$ 称为 S 上的调和微分（harmonic differential），如果 ω 是闭的和上闭的 $d\omega=d*\omega=0$．调和微分 ω 在 S 的每个点的一个邻域中是一个调和函数的全微分 如果 S 上的两个实值函数 u，$v\in C^1$ 由关系式 $dv=*du$ 相联系，则它们是满足 Cauchy-Riemann 方程的**共轭调和函数**（conjugafe harmonic functions） 因而，如果函数 $f=u+iv\in C^1$ 满足 $*df=-idf$，则它在 S 上是正则解析的（regular analytic）或全纯的（holomorphic）．微分 $\omega\in C^1$ 称为 S 上的正则解析微分（regular analytic differential）或全纯微分（holomorphic differential），如果 $d\omega=0$，且 $*\omega=-i\omega$ 全纯微分 ω 在 S 的每个点的邻域中是一个全纯函数的全微分．全纯微分 ω 可局部地表示为 $\omega=fdz$，其中 $dz=dx+idy$，且 f 是 z 的全纯函数．

Riemann 曲面上使得积分 $\iint_S\omega\wedge(*\overline{\omega})$ 为有限的可测复微分的等价类按通常的加法、乘以复标量的乘法与标量积 $(\omega,\pi)=\iint_S\omega\wedge(*\overline{\pi})$ 构成一个 Hilbert 空间 $L_2(S)$．类 $L_2(S)\cap C^3(S)$ 中的每个微分 ω 可唯一地表示为和 $\omega=\omega_h+df+*dg$，其中 $f,g\in C^2(S)$，ω_h 是 Riemann 曲面上的调和微分．

上述 S 上的 C^1 类调和函数、全纯函数或调和微分、全纯微分称为在 S 上是正则的（regular）．设微分 θ 定义在点 $P_0\in S$ 的一个去心邻域 U 中且在 U 中调和，则当差 $\omega-\theta$ 为正则调和微分时，称调和微分 ω 在 P_0 处具有奇异性（singularity）θ

类似的定义也适用于调和函数、解析函数、解析微分等等．特别是，在解析微分（analytic differential）$\omega=fdz$ 的情形下，通常假定函数 f 或者在每个点 $P_0\in S$ 的邻域内正则解析，或者在 S 上只有单值特征的孤立奇点．S 上只有极点类型奇异性

$$\theta=(a_{-n}z^{-n}+a_{-n+1}z^{-n+1}+\quad+a_{-1}z^{-1})dz$$

的解析微分 ω 称为亚纯微分(meromorphic differential)，这里 $a_{-n}\neq0$，因而 n 是极点的阶，如果 $n=1$，则此极点称为单极点，a_{-1} 称为微分 ω 在极点 P_0 处的残数．紧 Riemann 曲面上的亚纯微分也称为 **Abel 微分**（Abelian differential） 在 S 上或在某个区域 $D\subset S$ 上具有给定奇异性的调和函数也称为 Abel 位势（Abelian potential）．

Abel 微分的积分导出 **Abel 积分**（Abelian integral），实际上它穷尽了所有代数函数的积分．在研究任意的(通常是非紧的) Riemann 曲面上的解析微分时，自然要求保持紧 Riemann 曲面上的微分的经典理论的基本特征，这就需要对所研究的正则微分设置附加的共形不变限制．最常用的这类限制是可积性条件，例如，解析微分 $\omega=fdz$ 平方可积，即 Dirichlet 积分

$$\iint_S|f|^2dxdy$$

必须有限．

Riemann 曲面上微分理论中具有基本重要性的问题，是在任意 Riemann 曲面 S 上具有给定奇异性的调和微分和解析微分的存在性问题．这个问题与 Riemann 曲面的整体单值化问题有直接关系，因为构造整体单值化参数要求能够构造具有给定奇异性的微分

下面给出有关存在性问题的主要结果．

如果在 S 上存在不同调于零的闭链 c，则在 S 上也存在处处正则且其周期 $\int_c\omega\neq0$ 的调和微分 ω，并存在处处正则的微分 $\omega+i*\omega$．这些微分不是恰当的，因而它们的积分并不导出 S 上的单值调和函数或单值解析函数．在紧 Riemann 曲面上， 所有调和恰当微分都恒等于零 反之，在非紧 Riemann 曲面上，存在不恒等于零的处处正则的恰当调和与恰当全纯微分

设 P_0 是任意的 Riemann 曲面 S 上的一个固定点，n 是任一自然数，则存在在 P_0 处具有奇异性 $d(1/z^n)$ 的恰当调和微分，在 P_0 处具有奇异性 $\mathrm{Re}\,d(1/z^n)$(或 $\mathrm{Im}\,d(1/z^n)$) 的恰当实调和微分，在 P_0 处具有奇异性 $1/z^n$ 的调和函数，以及在 P_0 处具有奇异性 $d(1/z^n)$ 且其实部是

恰当微分的解析微分

设 P_0，P_1 是 S 上不同的点，则在 S 上存在在 P_0 处具有奇异性 $-dz/z$ 并在 P_1 处具有奇异性 dz/z 的调和或解析微分，还存在在 P_0 处具有奇异性 $-\ln|z|$ 并在 P_1 处具有奇异性 $\ln|z|$ 的实调和函数

设 $P_0, \cdot, P_n$ 是 S 上两两不同的任意的点，c_0，，c_n 是满足 $c_0+\cdot+c_n=0$ 的任意非零复数，则在 S 上存在除 P_0，，P_n 外处处正则的调和或解析微分，而在点 P_j 处它具有相应残数为 c_j 的单极点，$j=0$，，n

对于 Jordan 域（Jordan domain）$D \subset S$，即其边界 ∂D 由 n 条互不相交的 Jordan 曲线组成的区域，也能解出 **Dirichlet 问题**（Dirichlet problem）

对于紧 Riemann 曲面 S, 微分理论最为深入．设 S 的亏格（见**曲面的亏格**（genus of a surface)）为 g．复数域上的正则调和微分构成的向量空间 $\mathfrak{H}$ 是 $2g$ 维的．如果 $a_1 b_1$ $a_g b_g$ 是 S 的同调典范基的闭链，则能在 $\mathfrak{H}$ 中选取微分典范基如下 微分 ω_i $(i=1$，，$g)$ 沿 a_i 周期为 1, 而沿 a_j $(j\neq i)$ 及所有 b_i 周期为零，还有 ω_{g+i} $(i=1$，，$g)$ 沿 b_i 周期为 1, 而沿 b_j $(j\neq i)$ 及所有 a_i 周期为零．任一调和微分 ω 可表示为线性组合形式

$$\omega=\sum_{i=1}^{g} A_i \omega_i+\sum_{i=1}^{g} B_i \omega_{g+i}\ ,$$

此处 A_i 是 ω 沿闭链 a_i 的所谓 A 周期，而 B_i 是 ω 沿闭链 b_i 的 B 周期

紧 Riemann 曲面上的全纯微分称为第一类 Abel 微分（Abelian differential of the first kind） 全纯微分的向量空间的维数为 g．上面讨论的 Riemann 曲面上的一切微分都可用变量 z 和 $\bar{z}$ 表示，例如

$$f=f(z,\bar{z}),\ \omega=pdz+q\overline{dz}=p(z,\bar{z})dz+q(z,\bar{z})\overline{dz}\ ,$$
$$\Omega=Adz\wedge\overline{dz}=A(z,\bar{z})dz\wedge\overline{dz}\ ,$$

等等．与高维复流形不同，在 Riemann 曲面上，只有分别具有形式 f, pdz, $q\overline{dz}$, $Adz\wedge\overline{dz}$ 的 (0,0)，(1,0)，(0,1) 和 (1,1) 型外微分形式是非零的 解析微分只依赖于 z

$$f=f(z),\ \omega=p(z)dz$$

也要用到 $p(z,\bar{z})dz^m\overline{dz}^n$ 型的非线性微分形式，其中 m, n 是整数．它们也称为 (m,n) 型微分（differential of type (m,n)）或 (m,n) 维微分（differential of dimension (m,n)） (0,0) 型微分即为函数（functions)，(1,0) 型称为线性微分（linear differential)，(−1,0) 型称为逆微分（inverse differential)，(2,0) 型即为二次微分（quadratic differential） 最常用的是二次微分．亦见**轨道的整体结构**（global structure of trajectories)，**轨道的局部结构**（local structure of trajectories)，**二次微分**（quadratic differential)，**Riemann 曲面**（Riemann surface)，**单值化**（uniformization)．

参考文献

[1] Springer, G , Introduction to Riemann surfaces, Chelsea, 1981

[2] Nevanlinna, R , Uniformisierung, Springer, 1953 (中译本 R 尼凡林那，单值化，科学出版社，1960)

[3] Schiffer, M , Spencer, D C , Functionals of finite Riemann surfaces, Princeton Univ Press, 1954

[4] Behnke, H , Sommer, F , Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veranderlichen, Springer, 1955

Е Д Соломенцев 撰

【补注】 Riemann 曲面上的微分是其底 2 维流形上的单复值微分形式（亦见**微分形式**（differential form)）．然而，它们通过局部坐标的局部表示式（通常）只是对于局部坐标 x, y 写出的，这里 x, y 使得 $z=x+iy$ 是局部单值化参数（即 z 是所给复流形上的局部坐标）．这就是本条中“关于局部单值化参数的共形变换为不变”这一提法以及其他涉及“不变”的提法的含意 * 算子只对使得 $x+iy=z$ 是局部单值化参数的微分形式 ω 的局部表示式 $pdx+qdy$ 有意义（因为共形坐标替换满足 Cauchy-Riemann 方程）．微分 $*\omega$ 也称为 ω 的共轭微分（conjugate differential)．

纯微分（pure differential）是满足 $*\omega=-i\omega$ 的微分 这意味着它能（对于某个（不必全纯的）函数 f）写成 $\omega=fdz$

参考文献

[A1] Farkas, H M , Kra, I , Riemann surfaces, Springer, 1980

[A2] Ahlfors, L V , Sario, L , Riemann surfaces, Princeton Univ Press, 1960, Chept V

沈永欢 译

微分算子 [**differential operator**，**дифференциальный оператор**]

微分法算子概念的一种推广 一个微分算子（一般而言，它在它的定义域上是不连续的、无界的且非线性的)，是由某个微分表达式所定义的算子，且作用于微分流形上的一个通常为向量值的函数空间上（或作用于一个可微向量丛的截口上)，要不然便是作用在这种类型空间的对偶空间上 一个微分表达式（differential expression)，是由具有基 M 的向量丛 ξ 的截口空间中的某个集合 Ω 到具有相同基的向量丛 η 的截口空间中的一个映射 λ, 使得对任何一点 $p\in M$ 以及任何截口 $f, g\in\Omega$，它们的 k 阶节（jet）在 p 点重合导至 λf 及 λg 在同一点重合 对所有的 $p\in M$ 均符合这个条件的最小数 k，称为该微分表达式的阶（order of the differential expression）与由此表示式定义的微分算子的阶（order of the differential operator)．

在一个没有边界的流形 M 上的微分算子往往是某个算子的扩张，该算子是由某个集合上一个固定的微分式以一种自然的方式来定义的，这个集合按照某

个适当的拓扑是开的，且由给定的具有基 M 的向量丛 ξ 的无穷次（或足够高次）可微截口组成，因此允许一个自然扩张，它是到可微向量丛的截口的芽构成的层这一情形的．具有边界 ∂M 的流形 M 上的微分算子 L 常常定义为一个类似算子的扩张，该算子是由可微函数（或一个向量丛的截口）集合上的微分表达式自然定义的，它在 ∂M 上的限制位于 ∂M 上的某个微分算子 l 的核中（或者满足某些其他的条件，这些条件可由某些要求来定义，如不等式，而这些要求在算子 l 的值域中满足，l 则为 L 的定义域中函数的限制上的算子），微分算子 l 称为定义了微分算子 L 的边界条件（boundary conditions） 函数（或者截口）空间的对偶空间上的线性微分算子，定义为这些空间上以上类型的微分算子的对偶算子

例 1）设 F 为 $k+2$ 个变量 $x, y_0,\ \ , y_k$ 的实值函数，定义在矩形 $\Delta = I \times J_0 \times\ \ \times J_k$ 上，微分表达式

$$Du = F\left[x, u, \frac{du}{dx},\ \ , \frac{d^k u}{dx^k}\right]$$

（其中 F 通常满足一些正则性条件，如可测性、连续性、可微性，等等）在流形 I 上定义了一个微分算子 D，它的定义域 Ω 由满足条件 $u^{(i)} \in J_i (i = 1, 2, \cdot\ )$ 的所有函数 $u \in C^k(I)$ 组成 如果 F 连续，D 可以认为是 $C(I)$ 上的一个算子，具有定义域 Ω，微分算子 D 称为一般常微分算子（general ordinary differentail operator） 如果 F 依赖于 y_k，那么 D 的阶为 k．D 称为拟线性的（quasi-linear），如果 F 线性地依赖于 y_k，D 称为线性的（linear），如果 F 线性地依赖于 $y_0,\ \ , y_k$，D 称为线性常系数的（linear with constant coefficients），如果 F 不依赖于 x，且 D 是线性微分算子．其余的微分算子称为非线性的（non-linear）．如果关于 F 正则性的某些条件得以满足，那么一个拟线性算子可以扩张为由一个 **Соболев 空间**（Sobolev space）到另一个 Соболев 空间中的微分算子．

2）设 $x = (x^1,\ \ , x^N)$ 的取遍 $\mathbf{R}^N$ 中的一个区域 $\mathcal{O}$，$F = F(x, u, D^{(n)}(u))$ 是由 $\mathcal{O}$ 与某个开长方形 ω 的乘积上的实值函数 F 所定义的微分表达式，其中 $D^{(n)}(u)$ 是型如 $D^\alpha u = \partial^{\alpha_1 +\ \ +\alpha_N} u / (\partial x^1)^{\alpha_1} \cdot\cdot (\partial x^N)^{\alpha_N}$ 的偏导数的一个集合，$\alpha_1 +\ \ \cdot + \alpha_n \leqslant n$，且如同例 1）一样，设函数 F 满足一定的正则性条件．由这个表达式在 $\mathcal{O}$ 上足够多次可微函数空间中定义的微分算子称为一般偏微分算子（general partial differential operator） 如同例 1）一样，我们可以定义非线性、拟线性以及线性偏微分算子与偏微分算子的阶，一个微分算子称为椭圆型的（elliptic）、双曲型的（hyperbolic）、或者抛物型的（parabolic），如果它由相应类型的微分表示式定义．人们有时考虑依赖于所有阶导数的函数 F（例如，作为它们的形式线性组合），这样的微分表达式虽然在通常的意义下不定义一个微分算子，但无论如何可以使之对应于某一个算子（例如，在解析函数芽的空间上），且称为无穷阶微分算子（differential operators of infinite order）

3）以上的例子可以扩大到包含复数值的情形或取值于一个局部紧的、全不连通域中的函数的情形，且（至少对线性微分算子）甚至可扩大到更一般的情形（见**微分代数**（differential algebra））

4）由微分表达式组在向量函数空间上定义的微分算子．例如，由表示式 $\{\partial u/\partial x - \partial v/\partial y, \partial u/\partial y + \partial v/\partial x\}$ 定义的 Cauchy-Riemann 微分算子，将平面上的调和函数对组成的空间变换为它自己

在微分算子以及它的推广的定义中，我们常常使用（除使用通常的导数外）广义导数，当考虑定义在可微函数上的微分算子的扩张时，广义导数以一种自然的方式出现，也要使用导数，它与过渡到共轭算子有关 进而，分数阶与负阶导数将会出现，如果微分法利用 Fourier 变换（或其他积分变换）来定义的话，而后者是可以应用于广义微分算子的定义域与值域的（见**伪微分算子**（pseudo-differential operator））这样做是为了得到函数 F 对应的微分算子可能的最简单的表示，以及在问题的提示过程中得到合理的推广，并在所考虑的对象中得到满意的性质．用这种方法，一个函数演算或算子演算便得到了，它推广了微分法算子与乘以自变量的乘法算子之间的对应，正如 Fourier 变换中所实现的那样．

微分方程理论中的问题——如解的存在性、唯一性、正则性，解对原始数据或者对方程右端的连续依赖性，以及由一个给定的微分表达式定义的微分方程的解的显式等问题——容易地解释为算子理论中定义在适当的函数空间上对应的微分算子问题，也就是说，解释为一个给定的微分算子 L 或它的扩张的核、象、定义域的构造、该给定的微分算子的逆的连续性以及这个逆算子的显式构造．微分方程解的逼近问题以及近似解的构造问题，也容易推广且提高为关于对应的微分算子的问题，也就是说，在定义域与值域中选择自然的拓扑，使得算子 L（如果解是唯一的）按照这些拓扑在定义域与值域之间实现一个同胚（这个理论与函数空间的内插理论以及标度（级配）理论相关，特别是关于线性及拟线性微分算子，情形更是这样）．另一个例子是在某种确定的意义下选择微分算子接近于某个给定的算子（这使得有可能利用微分算子的空间上适当的拓扑，去论证方程的近似方法的正确性，如正则化与补偿法，以及迭代正则化法）．微分算子理论使有可能在关于微分方程的种种存性与唯一性定理中，以及在解的分歧理论与非线性本征值问题中，应用算子理论的经典方法，如紧算子理论，以及

压缩映射方法．其他应用则使用了出现在函数空间中的一种自然的序结构，在这些空间上微分算子有定义（特别地，单调算子理论），或者使用线性分析的方法（对偶理论、凸集理论、对偶算子理论或耗散算子理论） 再者，变分方法以及极值问题的理论或某些补充结构的出现（如复形、辛结构，等等），可用来阐明微分算子的核与值域的结构，即获得相应方程解空间的信息．与微分表示式有关的很多问题，使得研究微分不等式成为必要，这与多值微分算子有紧密联系．

这样，微分算子的理论能克服微分方程的经典理论中出现的很多困难 运用经典微分算子的各种扩张导出了对应的微分方程的广义解概念（对某几种情形，例如与椭圆型问题有关的情形，需要证明它们是经典的），而线性结构的运用导致微分方程弱解的概念的引进．在选择由某个微分表示式定义的微分算子适当的扩张中，与此表示有关的解的先验估计是重要的，因为这使我们能够判别一些函数空间，使得扩张算子在其上连续或有界

进而，微分算子的理论，使得阐述并解决很多新问题成为可能，而这些问题与微分方程理论中的经典问题有性质上的差别 这样，在非线性算子的研究中，研究它的驻点集合的结构 在这些驻点的邻域内，算子的行为、这些奇点的分类，以及当相应微分算子被扰动时奇点的类型的稳定性，就是饶有趣味的．在线性微分算子的理论中，其他有趣的课题是微分算子的谱的描述与研究，它的指标的计算，微分算子不变子空间的结构，一个给定的微分算子的调和分析（特别地、微分算子的分解，它要求对本征函数及相关函数系的完全性作预先研究） 此外，还有对给定的微分算子线性与非线性扰动的研究．这些结果对于 Hilbert 空间上自共轭算子理论中由对称微分表示式生成的椭圆型微分算子有着特殊意义（特别地，在这些算子的谱理论中以及在对称算子的扩张理论中）．各种双曲型及抛物型(不必是线性的)微分算子的理论与局部凸空间上算子群及算子半群的理论是相关联的．

或许除了线性微分算子以外，研究得最充分的一类微分算子（同样有广泛应用）是这样的一类，当组成一个群（或半群）的某些变换作用于它们的定义域中，因而也作用于微分表示式上时，这些微分算子不变或按照一个特殊的法则变化．它们包括，例如说，与群 G 的表示相关的不变微分算子，协变导数，或更一般地，可微张量域空间上的微分算子，其中 G 是所有微分同胚（所谓的 automization）构成的群，理论物理中算子的许多例子等等 这样的泛函 - 几何方法在研究具有所谓隐芷对称性的微分算子中也是有用的．(例如，见 **Korteweg - de Vries 方程** （Korteweg - de Vries equation))

作为一般的算子理论一部分的微分算子理论，近来不仅在微分方程的理论中，而且一般地在现代分析中，已显示出不断增长的重要性．它不但产生了无界算子的一些重要的具体的例子（特别在线性微分算子的理论中），而且产生了表示工具以及其他各种性质的对象的研究方法．例如，任何广义函数（甚至超函数），是由某个广义的微分算子作用于一个连续函数上而局部地获得 最后，微分算子在其他数学分枝中的作用与影响正在不断增长 例如，所谓指标问题的一个解（见**指标公式**（index formulas)），便将一个流形的拓扑特征与其上的一类特殊微分算子的出现联系在一起，由此有可能导出这个流形上椭圆复形的性质

参考文献

[1] Couraut, R and Hilbert, D , Methods of mathematical physics Partial differential equations, 2, Interscience 1965 (译自德文)

[2] Наймарк, М А , Линейные дифференциальные операторы 2 изд , М , 1969 (中译本 М А 纳依玛克，线性微分算子，科学出版社，1964)

[3] Hormander, L , The analysis of linear partial differential operators, 1－4, Springer, 1983－1985

[4] Bourbaki, N , Elements of mathematics Differentiable and analytic manifolds, Addison－Wesley, 1966

[5] Канторович, Л В Акилов, Г П , Функциональный анализ, 2 изд , М , 1977 (中译本 泛函分析，上、下册，高等教育出版社，1984)

[6] Palais, R , Seminar on the Atiyah - Singer index theorem, Princeton Univ Press, 1965

[7] Reissig, R , Sansone, G and Conti, R , Qualitative theorie nichtlinearer Differentialgleichungen, Cremonese, 1963

[8] Фиников, С П , Метод внешних форм Картана в диффренциальной геометрии, М - Л , 1948

[9] Скрыпник, И В , Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка, К , 1973

[10] Гельфанд, И М , Минлос, Р А , Шапиро, З Я, Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения, М , 1958

[11] Schouten, J A , Tensor analysis for physicists, Cambridge Univ Press, 1951

[12] Lions, J - P , Quelques méthodes de resolution des problèmes aux limites nonlinéaires, Dunod, 1969

[13] Рождественский, Б Л , Яненко, Н Н , Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, М , 1968

М И Войцеховский, А И. Штерн 撰

王声望 译 郑维行 校

模上的微分算子 [**differential operator on a module**; **дифференциальный оператор модуля**]

交换环上的模映射，它是微分算子概念的一种

模拟．设 R 是一个交换环，S 是 R 的一个子环，并设 N 及 M 是两个 R 模，m 是一非负整数．S 模同态 $D\ N\to M$ 称为阶 $\leq m$ 的微分算子（differential operator），如果对任何 $x\in R$，由公式

$$D_x(n)=D(xn)-xD(n)$$

定义的映射 $D_x\cdot N\to M$ 是一个阶 $\leq m-1$ 的微分算子．零阶微分算子（differential operator of order zero）是一个 R 模同态 $N\to M$．所有阶 $\leq m$ 的微分算子的集合构成 R 模 $\mathrm{Hom}_S(N,M)$ 的一个子模 $\mathrm{Diff}_S^m(N,M)$，而 $\mathrm{Hom}_S(N,M)$ 是所有 S 模同态组成的 R 模 特别地，

$$\mathrm{Diff}_S^0(N,M)\simeq \mathrm{Hom}_R(N,M),$$

且商模

$$\mathrm{Diff}_S^1(R,M)/\mathrm{Diff}_S^0(R,M)$$

同构于环 R 的在 M 中取值的 S 导映射 $\mathrm{Der}_S(R,M)$ 组成的模 子模的递增族

$$\mathrm{Diff}_S^0(M,M)\subset \mathrm{Diff}_S^1(M,M)\subset$$

的并 $\mathrm{Diff}_S(M)$，是一个关于映射的复合运算的滤过结合环．这个环称为子环 S 上的 R 模 M 的微分算子环（ring of differential operators），而对应的分次环

$$\mathrm{Symb}_S(M)=\bigoplus_{i\geq 0}\mathrm{Symb}_S^i(M)$$

则称为象征模（module of symbols），其中

$$\mathrm{Symb}_S^i(M)=\mathrm{Diff}_S^i(M,M)/\mathrm{Diff}_S^{i-1}(M,M).$$

一个微分算子 $D\in\mathrm{Diff}_S^i(M,M)$ 在环 $\mathrm{Symb}_S^i(M)$ 中的象称为该微分算子的象征（symbol of the differential operator）

如果 R 是有理数域上的一个代数，且微分模 $\Omega^1_{R/S}$ 是投影的，那么在 S 代数 $\mathrm{Diff}_S(R)$ 与 S 导映射 $\mathrm{Der}_S(R,R)$ 的 Lie 代数的包络代数之间存在着一个同构．这样，环 $\mathrm{Symb}_S(R)$ 同构于 R 模 $\mathrm{Der}_S(R,R)$ 的对称代数．

例如，设 $R=k[T]$ 为域 k 上的多项式环，由公式

$$\frac{\partial}{\partial T^i}(T^r)=\begin{bmatrix} r \\ i \end{bmatrix} T^{r-i}$$

定义的映射 $\partial/\partial T^i\ R\to R$ 是域 k 上的环 R 的 i 阶微分算子．由微分算子 $\mathrm{Diff}_K(R)$ 构成的环是 R 上具有基 $\partial/\partial T^0,\ \cdot,\partial/\partial T^i,$ 的一个自由模．乘法由公式

$$\frac{\partial}{\partial T^i}\circ\frac{\partial}{\partial T^j}=\begin{bmatrix} i+j \\ i \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial T^{i+j}}$$

给出．特别地，

$$\left[\frac{\partial}{\partial T^1}\right]^n=n!\,\frac{\partial}{\partial T^n}$$

（Taylor 公式（Taylor formula）），如果 k 的特征等于零，它给出

$$\mathrm{Diff}_k(R)\cong R\left[\frac{\partial}{\partial T^1}\right].$$

如果 $\mathrm{Spec}(R)$ 是一个仿射群 S 概形，那么 R 的不变微分算子也可予以考虑（[2]）

参考文献

[1] Виноградов, А М, Красильщиков, И С, 《Успехи матем наук》, **30**(1975), 1, 173 − 198

[2] Grothendieck, A, Eléments de géometrie algébrique, IV Etude locale des schémas et des morphisms des schémas I, *Publ Math IHES*, **20**(1960)

[3] Demazure, M and Gabriel, P, Groupes algébriques, 1, Masson, 1970

[4] Bjork, J E, The global homological dimension of some algebras of differential operators, *Invent Math*, **17**(1972), 1, 67 − 78

И. В. Долгачев 撰 王声望 译 郑维行 校

微分参数 [**differential parameter**; **дифференциальный параметр**]，微分算子（differentiator）

一个或多个函数和 Riemann 几何度量张量 g_{ij} 结合的**微分不变式**（differential invariant）．

函数 V 的一阶微分参数（first-order differential parameter）（或简称微分参数（differential parameter））是它的梯度的平方

$$\Delta_1 V=g^{ij}V_i V_j\ .$$

两个函数 V 和 W 的一阶混合微分参数（mixed differential parameter）是它们梯度的标量积

$$\Delta_1(V,W)=g^{ij}V_i W_j\ .$$

三维 Euclid 空间中关于 Descartes 直角坐标系这些微分参数由下列公式给出

$$\Delta_1(V)=\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial V}{\partial y}\right]^2+\left[\frac{\partial V}{\partial z}\right]^2,$$

$$\Delta_1(V,W)=\frac{\partial V}{\partial x}\ \frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\ \frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\ \frac{\partial W}{\partial z}$$

一个函数的二阶微分参数（second-order differential parameter）（或第二微分参数（second differential parameter））是它的梯度的散度

$$\Delta_2(V)=g^{ij}\nabla_i V_j=\frac{1}{\sqrt{g}}\ \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}\ g^{ij}V_j),$$

其中 g 是矩阵 $\|g_{ij}\|$ 的行列式．三维 Euclid 空间中关于 Descartes 直角坐标系，第二微分参数由下列公式给出

$$\Delta_2(V)=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

微分参数首先是由 G Lamé ([1]) 在 Euclid 几何中引入的．这个概念的推广应归功于 E Beltrami ([2])．所以，微分参数也称为 Lamé 微分参数 (Lamé differential parameters) 或 Beltrami 微分参数 (Beltrami differential parameters)

参考文献

[1] Lamé, G , Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications, Paris, 1958

[2] Beltrami, E , Ricerche di analisi applicate alla geometria, *G Mat Battaglini*, **2－3** (1864－1865)

[3] Каган, В Ф , Основы теории поверхностей в тензорном изложении, 1－2, М -Л , 1947－1948

[4] Шуликовский, В. И , Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М , 1963

В. И Шуликовский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Stoker, J J , Differential geometry, Wiley(Interscience), 1969．

沈一兵 译

微分环 [differential ring , дифференциальное кольцо]

具有一个或多个不同导子的环 (见**环中的导子** (derivation in a ring)．如果对于所有的导子 d, 都有 $d(a)=0$, 则称 a 为常数 (constant)．

Л А Скорняков 撰　赵春来 译　冯绪宁 校

微分拓扑学 [differential topology, дифференциальная топология]

拓扑学的一个分支，它涉及到微分流形和微形映射, 尤其是微分同胚, 嵌入和丛的理论的拓扑问题　在流形、映射和微分形式的基础上，对拓扑的一次次构造的尝试要追溯到 19 世纪末 (H Poincaré)，但是，在那时这个过程的完全实现是不可能的．在 20 世纪 30 年代才实现了微分拓扑学的系统的构造，那是由于杰出数学家们共同努力的结果．

一些重要的普通数学概念在微分拓扑学中得到发展．其中包括空间上的纤维和丛，以及与之相关的微分几何和拓扑的概念．联络，G 结构，示性类，还有标架流形．在微分拓扑学的发展中较重要的是下配边 (配边) 理论及其在代数几何学和解析几何学中几个应用 (**Riemann-Roch 定理** (Riemann-Roch theorem))，椭圆算子理论 (指数定理)，还有在拓扑自身中的发展　20 世纪 50 年代发现了球面上的各种不同的光滑结构，这是由具有球面同伦型的流形的分类和推广的 Poincaré 猜想的证明所导致的　为寻找所有单连通流形 (维数不低于 5) 的微分同胚不变量的完全系的问题，这解答被找到了　在 20 世纪 60 年代，应用微分拓扑的方法解决了基本的拓扑问题　发现了实流形的示性类是拓扑不变的；澄清了微分、分片线性和拓扑流形范畴之间的关系，光滑流形的分类的方法被推广到包托非单连通流形上 (虽然公认不很有效)；并且产生了代数 K 理论和 Hermite K 理论．对非单连通流形，发现了示性类和流形的基本群及同调群上的 Hermite 型之间的基本关系．随后，用泛函分析的方法和代数方法得到了基本的结果，它涉及类的同伦不变性和在具有对合的上链的 Hermite 形式的理论．其中最重要的是涉及到一个流形到另一个流形中的嵌入的分类问题的方法和它的各种推广．

与变分学相联系的微分拓扑的一个独立的分支是在测地线流形上的各种泛函的极值曲线的整体理论．它通过作出向量丛的可能的分类，后来又通过产生由 K 理论提供的研究拓扑不变量的方法强烈地影响拓扑学本身的发展　在流形上的变分学的多维整体问题更是困难；主要研究的问题是作为 Dirichlet 型泛函的极值曲线的极小曲面问题　20 世纪 70 年代，基本粒子的理论在多维变分学中引出了几个本质的新问题

与微分几何和动力系统的理论相联系的微分拓扑的另一个特别趋势是叶状结构理论 (局部完全可积的 Pfaff 系统)　那就是，在许多三维流形上的任何二维光滑的叶状结构里造出了一个闭叶子 (例如球面)．在叶状结构的定性理论中的几个结果被用来阐明流形上的双曲动力系统的重要类的存在问题　随后，微分几何——叶状问题理论的发展，纤维丛的示性类的理论的特殊类似物基于向量场的 Lie 代数的同调论被确定了

微分拓扑的方法的主要成就是映射和函数的"一般"奇点的理论　微分拓扑的方法在代数几何的分类问题中找到了应用，从前在这领域中所得到的结果 (特别是，关于代数曲线的卵形线的定理) 是孤立的，并且还与拓扑和几何的主要发展保持着距离　微分拓扑的发展引出了代数中的几个新问题和方法，例如，所谓的稳定代数，形式群的方法，等等，并且在偏微分方程理论和动力系统、泛函分析和几何中也有．

在 20 世纪 70 年代，微分拓扑的方法在现代物理部分的影响大大地增强了，这是由于所谓规范场 (以空间 - 时间作为底的纤维丛中的联络) 在基本粒子的理论，在液晶理论的解的困难的拓扑和相变理论 (特别是在低温状态下的液氦) 中增强的重要性．

参考文献

[1] Понтрягин, Л С , Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд , М , 1976．

[2] Whitney, H , Differentiable manifolds, *Ann of Math*., **37** (1936), 645－680．

[3] Том, Р , В сб , Расслоенные пространства и их приложения, М , 1958, 293－351

[4] Новиков, С П , 《Изв АН СССР Сер матем》, **28** (1964), 2, 365－474

[5] Milnor, J, Differential topology, in Lectures on modern mathematics, Vol 2, Wiley, 1964, 165－183
[6] Smale, S, A survey of some recent developments in differential topology, *Bull Amer Math Soc*, **69** (1963), 131－145
[7] Милнор, Дж, Уоллес, А, Дифференциальная топология, Начальный курс, пер с англ, М, 1972 (英译本 Milnor, J and Wallace, A, Differential topology, Moscow, 1972)
[8] Munkres, J, Elementary differential topology Princeton Univ Press, 1963 (中译本 J R 曼克勒斯，初等微分拓扑学，上海科学技术出版社，1966)
[9] Milnor, J, Lectures on the h-cobordism theorem, Princeton Univ. Press, 1965
[10] Рохлин, В А, Фукс, Д В, Начальный курс топологии Геометрические главы, М, 1977 (英译本 Rokhlin, V A and Fuks, D B, Beginnners course in topology Geometric chapters, Springer, 1984).
[11] Rourke, K and Sanderson, B, Introduction to piece-wise-linear topology, Springer, 1972
[12] Wall, C, Surgery on compact manifolds, Acad Press, 1970
[13] Browder, F, Surgery on simply connected manifolds, Springer, 1972.
[14] Conner, P E and Floyd, E E, Differentiable periodic maps, Springer, 1964
[15] Stong, R E, Notes on cobordism theory, Princeton Univ Press, 1968
[16] Новиков, С П, 《Тр Моск матем об-ва》, **14** (1965), 248－278
[17] Целочисленные потоки и минимальные поверхности, пер. с англ и итал, М., 1973 (英译本 Integer flows and minimal surfaces, Moscow, 1973)
[18] Мищенко, А С., 《Успехи матем наук》, **31** (1976), 2, 69－134.
[19] Гладкие динамические системы, пер с англ, М., 1977 (英译本 Smooth dynamical systems, Moscow, 1977).

С.П Новиков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hirsch, M, Differential topology, Springer, 1976.
[A2] Milnor, J, Morse theory, Princeton Univ. Press, 1963 (中译本 J W 米尔诺，莫尔斯理论，科学出版社，1988)

薛春华 译 徐森林 校

微分法 [differentiation; дифференцирование]

由函数求其**导数** (derivative) 或**微分** (differential) 的运算 这里所说的导数或微分，既可以是定义在一个点上或某一集合上的，也可以是偏导数、方向导数、偏微分和全微分，而函数本身既可以是数值函数，也可以是具有更一般性质的函数

Г П Толстов 撰 张鸿林 译

沿动力系统的流的微分法 [differentiation along the flow of a dynamical system, дифференцирование в силу системы]

一个算子，定义如下，设

$$x=f(x) \qquad (*)$$

是一个**自治系统** (antonomous system)，$x\in\mathbf{R}^n$, $f=(f_1, \cdot, f_n)$，并且令 f_j $G\to\mathbf{R}$ 是光滑映射，其中 G 是 $\mathbf{R}^n$ 中的区域．设光滑映射 φ $G\to\mathbf{R}$ 是给定的．φ 在点 $x^0\in G$ 处的沿系统 (*) 的流的导数 (derivative along the flow of the dynamical system) $\theta_f\varphi$ 定义为

$$(\theta_f\varphi)x^0=\sum_{j=1}^n \frac{\partial\varphi(x^0)}{\partial x_j} f_j(x^0)$$

$$=\frac{d}{dt}(\varphi(x(t,x^0)))\Big|_{t=t^0},$$

其中 $x(t,x^0)$ 是系统(*)满足 $x(t^0,x^0)=x^0$ 的解 算子 θ_f 有下面的性质: 1) 关于 φ 的线性性，2) $\theta_f(\varphi_1\varphi_2)=\varphi_1\theta_f\varphi_2+\varphi_2\theta_f\varphi_1$．函数 $(\theta_f\varphi)(x)$ 与 φ 关于向量场 f 的导数一致．

参考文献

[1] Понтрягин, Л С, Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд, М, 1970 (中译本 Л С 庞特利雅金，常微分方程，上海科学技术出版社，1962)

M.B.Федорюк 撰

【补注】 根据点 x 处的切空间 $T_x\mathbf{R}^n$ 的典范基 $(\partial/\partial x_1, ,\partial/\partial x_n)$，向量场 f 写作

$$\sum f_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

这个一阶微分算子定义了光滑函数族 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 到自身中的环的导子(见**环中的导子** (dervation in a ring))．而且，这就在 $\mathbf{R}^n$ 上的向量场和 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 上的导子之间建立了双射对应．利用局部坐标这可推广到光滑微分流形的情形．确实，在流形 M 上定义向量场为 $C^\infty(M)$ 的导子并随后注意该概念相应于切丛的截面，这是十分平常的．在这样的背景中，点 $x\in M$ 处的切向量可以定义为在 $x\in M$ 处的光滑函数的芽的局部代数上的导子．因此，沿由向量场 f 给出的动力系统的流的导子简单地意味着运用由 f 给出的 $C^\infty(M)$ 上的导子．

参考文献

[A1] Choquet-Bruhat, Y, DeWitt-Morette, C and Dillard-Bleick, M, Analysis, manifolds and physics, North-Holland, 1977, Sect Ⅲ B.

徐森林 译 薛春华 校

数值微分法 [differentiation, numerical, дифференцирование численное]

用数值方法求函数的导数．当**微分学** (differential calculus) 方法不适用 (函数是由表格得到的) 或者相

当困难（函数的解析表达式是复杂的）时采用这种微分法．

设在区间 $[a, b]$ 上定义了函数 u，并给定结点 x_i，$a=x_1<x_2<\quad<x_n=b$．点 $(x_i, u_i=u(x_i))$ $(i=1, \quad, n)$ 的全体形成一个表 该表的数值微分结果是函数 $u_n^k(x)$，在某种意义上，它在点 x 的某些集合 X_n^k 上近似函数 u 的 k 阶导数 $d^k u(x)/dx^k$．仅当对于每个 $x\in X_n^k$ 得到函数 $u_n^k(x)$ 所需的计算量不大时，使用数值微分法才是合适的．一般采用线性数值微分法，这样得到的结果写成如下形式

$$u_n^k(x)=\sum_{i=1}^{n} u_i a_i^k(x), \tag{1}$$

其中 $a_i^k(x)$ 是定义在 X_n^k 上的函数 得到公式 (1) 的最普通的方法如下 构造 $u(x)$ 的插值函数

$$u_n(x)=\sum_{i=1}^{n} u_i a_i(x),$$

并假定

$$u_n^k(x)\equiv \frac{d^k u_n(x)}{dx^k}=\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{d^k a_i(x)}{dx^k}$$

基于 Lagrange, Newton 和其他插值公式算法的精度强烈依赖于插值方式的选择 甚至当函数 u 足够光滑而且结点数目很大时，在某些情况下算法的精度也可能相当低（[1]） 包含样条插值的数值微分算法常可以避免这个缺点（[2]）．如果全部所需计算的仅仅是在结点 x_i 处的导数近似值，那么公式 (1) 有如下形式

$$u_n^k(x_j)=\sum_{i=1}^{n} u_i a_{ij}^k, \tag{2}$$

并且对于给定的 k，$u_n^k(x_j)$ 完全由给定系数矩阵 a_{ij}^k 决定．像 (2) 的这种公式称为数值微分的差分公式 这种公式的系数 a_{ij}^k 由下述条件确定 差

$$\frac{d^k u(x_j)}{dx^k}-\sum_{i=1}^{n} u_i a_{ij}^k=\xi_j^n$$

对于 $h_n=\max_i|x_{i+1}-x_i|$ 有最高阶小量 通常，公式 (2) 是很简单的并很容易处理．如果 $h=h_n=(x_2-x_1)==(x_n-x_{n-1})$，它们呈现为

$$\frac{du(x_j)}{dx}=\frac{u_{j+1}-u_j}{h}+O(h_n)=\frac{u_j-u_{j-1}}{h}+O(h_n),$$

$$\frac{du(x_j)}{dx}=\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2h}+O(h^2),$$

$$\frac{d^2u(x_j)}{dx^2}=\frac{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}{h^2}+O(h^2)$$

数值微分算法所用到函数表中的函数值 $u(x_i)$ 常常不是精确给出（或得到）的，在这种情况下必须采用事先光顺的办法，因为直接应用这些公式可能在结果中造成很大的误差（[3]）．

参考文献

[1] Березин, И С, Жидков, Н П, Методы вычислений, 3 изд, т 1, М, 1966 (英译本 Berezin, I S and Zhidkov, N P, Computing methods, Pergamon, 1973)

[2] Ahlberg, J, Nilson, E and Walsh, J, The theory of splines and their applications, Acad Press, 1967

[3] Морозов, В А, в кн Вычислительные методы и программирование, 14, М, 1970, 46 – 62

B A Морозов 撰

【补注】 在[A1]，[A2]等书中给出了显式微分公式．

参考文献

[A1] Segun, A and Abramowitz, M, Handbook of mathematical functions, Appl Math Ser, 55, Nat But Stand, 1970

[A2] Hildebrand, F B, Introduction to numerical analysis, McGraw-Hill, 1974

蔡大用 译

映射的微分法 [differentiation of a mapping, дифференцирование отображения]

寻求映射的微分，或换句话说，寻求映射增量的线性主部．求微分，即映射在一点邻域内用线性映射的逼近，在微分学中是极重要的运算 微分学的很一般框架可以对拓扑向量空间情形来叙述

设 X 与 Y 为拓扑向量空间．设映射 f 定义在 X 的一开子集 V 上并取值于 Y 如果差 $f(x_0+h)-f(x_0)$（这里 $x_0, x_0+h\in V$）可以用关于增量 h 为线性的函数 $l_{x_0}\quad X\to Y$ 来近似，则 f 称为在点 x_0 上的**可微映射**（differentiable mapping）．这样的近似线性函数 l_{x_0} 称为此映射在 x_0 上的**导数**（derivative）或**微分**（differential）并记成 $f'(x_0)$ 或 $df(x_0)$ 在一给定点具有相同导数的两个映射，称为在该点的**相切的映射**（mutuall tangent mappings） 近似函数在元素 $h\in X$ 上的值记成 $f'(x_0)h$, $df(x_0)h$ 或 $d_hf(x_0)$，并称为**映射 f 在点 x_0 上关于增量 h 的微分**．

增量 $f(x_0+h)-f(x_0)$ 用 h 的线性表示的这种近似有各种不同含意，这便引起了可微性与导数各种概念，关于现有的最重要定义，见 [1], [2].

设 F 为 X 到 Y 的所有映射的集合并设 τ 为 F 中某一拓扑或伪拓扑．映射 $r\in F$ 称为**在零点是小的**（small at zero），如果曲线

$$r_t\quad r(tx)/t$$

在看成直线 $-\infty<t<\infty$ 到 F 中的映射

$$t\to[x\to r(tx)/t]$$

时在零点关于（伪）拓扑 τ 是连续的．于是，映射 $f\in F$ 在点 x_0 是**可微的**，如果存在连续线性映射 l_{x_0} 使映射 $r\quad h\to f(x_0+h)-f(x_0)-l_{x_0}(h)$ 在零点是小的．依赖 τ 在 F 中的种种选择便得到导数的各种定义．这样，若 τ 选为点态收敛拓扑，便得到 Gâteaux **可微性**（differentia-

bility according to Gâteaux)（见 **Gâteaux 导数** (Gâteaux derivative)．若 X 与 Y 为 Banach 空间且 F 中拓扑为 X 中有界集上一致收敛拓扑，便得到 Fréchet 可微性 (differentiability according to Fréchet)（见 **Fréchet 导数** (Fréchet derivative))

若 $X=\mathbf{R}^n$ 与 $Y=\mathbf{R}^m$，可微映射 $f(x)=(f_1(x), \ldots, f_m(x))$ $(x=(x_1, \ldots, x_n))$ 的导数 $f'(x_0)$ 由 **Jacobi 矩阵** (Jacobi matrix) $\|\partial f_i(x_0)/\partial x_j\|$ 定义并且是 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 中的连续线性映射．

映射的导数显示出一元函数的导数的许多性质．例如，在很一般的假定下，它们有线性性质 (property of linearity)．

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0),$$
$$(\alpha f)'(x_0)=\alpha f'(x_0),$$

以及在很多情形下有复合函数微分公式

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\circ g'(x_0),$$

广义 Lagrange 中值定理对值域为局部凸空间的映射是正确的．

微分映射概念可推广到这一情形 X 与 Y 为光滑可微流形，两者可为有限维的，也可为无限维的（[4],[5],[6]）在两个无限维空间中可微映射与它们的导数最先为 V Volterra (1887), M Fréchet (1911) 与 R Gâteaux (1913) 定义．关于高维空间中导数概念进展的较详历史，见[2]．

参考文献

[1] Frohlicher, A and Bucher, W, Calculus in vector spaces without norm, Springer, 1966

[2A] Авербух, В И и Смолянов, О Г, Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах, 《Успехи матем наук》, 22 (1967), 6, 201－260

[2B] Авербух, В И и Смолянов, О Г, Различные определения производной в линейных топологических пространствах, 《Успехи матем наук》, 23 (1968), 4, 67－116

[3] Dieudonné, J A, Foundations of modern analysis, Acad Press, 1961（中译本 J 迪厄多内，现代分析基础，第一、二卷，科学出版社，1982，1986）

[4] Lang, S, Introduction to differentiable manifolds, Interscience, 1967

[5] Bourbaki, N, Elements of mathematics Differentiable and analytic manifolds, Addison-Wesley, 1966（译自法文）

[6] Spivak, M, Calculus on manifolds, Benjamin, 1965（中译本 M 斯皮瓦克，流形上的微积分，科学出版社，1980）

О Г Смолянов, В И Соболев, В М. Тихомиров 撰
郑维行 译

绕射的数学理论 [diffraction, mathematical theory of, дифракции математическая теория]

研究波动现象数学描述问题的数学物理分支．这个定义也包含几何光学，但传统上认为几何光学是数学物理的一个独立分支．描述波动过程的基本偏微分方程是 **Maxwell 方程组** (Maxwell equations)，**弹性理论的动力学问题** (dynamic problems of elasticity theory) 的方程，**波动方程** (wave equation)（在两个空间变量的情况下，它描述薄膜振动，在三个空间变量的情况下，它描述声音的传播)，流体动力学方程和其他一些方程

绕射数学理论中问题的提法．这些问题可用波动方程为例予以讨论，对于其他描述波动过程的方程，问题的提法是类似的

绕射的瞬态问题 (transient problems of diffraction) 实质上是**混合问题** (mixed problem)，也就是涉及到下列波动方程的初值和边值条件的问题

$$\frac{1}{c^2(M)}U_{tt}-\Delta U=F(M,t), \qquad (1)$$

在区域 $(0<t<+\infty)\times\Omega$ 中，这里 Ω 是平面上或三维空间中的一个区域，且

$$U\Big|_{t=0}=U_0(M); \quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}=U_1(M), \qquad (2)$$

在最简单的情况下，在区域 Ω 的边界 S 上，有

$$U\Big|_S=\Phi(M,t) \text{ 或 } \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=\Psi(M,t), \qquad (3)$$
$$M\in S,\ t>0,$$

其中 F, U_0, U_1, Φ, Ψ 是已知函数．在某些曲面（三维情况）或曲线（平面情况）上，系数 $c(M)$ 可能有跳跃，在这种情况下还必须另外规定对于 U 的“共轭条件”，它将 $c(M)$ 有跳跃的曲面两侧的函数 U 及其导数的值彼此联系起来 这类问题的这种提法的正确性，可用紧性概念对不同范数的未知解进行先验估计而获得证明．一些细节问题，例如解的奇异性描述，当 $t\to\infty$ 时解的特性，发展实际有用的数值解算法等，还远远没有最后解决

绕射的驻值问题 (stationary problems of diffraction) 在绕射数学理论中起重要作用的，是方程 (1) 的调和地依赖于时间的解，即具有下列形式的解

$$U(M,t)=e^{i\omega t}u(M), \quad \omega=\text{常数}. \qquad (4)$$

参数 ω 是圆频率 函数 $F(M,t)$, $\Phi(M,t)$ 和 $\Psi(M,t)$（见公式 (1) 和 (3)）也应当调和地依赖于时间

$$F(M,t)=f(M)e^{-i\omega t},$$
$$\Phi(M,t)=\varphi(M)e^{-i\omega t},$$
$$\Psi(M,t)=\psi(M)e^{-i\omega t}$$

方程 (1) 和边界条件 (3) 给出

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2(M)} u = -f(M), M \in \Omega, \quad (5)$$

$$u\Big|_S = \varphi(M) \text{ 或 } \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \psi(M) \quad (6)$$

在齐次边界条件 $\varphi(M)=0$ 或 $\psi(M)=0$ 的情况下，对于 $f=0$，在有界区域 Ω 中求方程 (5) 的非平凡解的问题具有重要的意义 这就是所谓的求特征函数的问题．然而，绕射数学理论中的基本问题则是对无界区域 Ω，求方程 (5) 的满足边界条件 (6) 的解 为了确定函数 u，仅有条件 (5) 和 (6) 是不够的，还必须指定"无穷远处的条件"

绕射问题的最常见的物理提法如下所述 设方程 (5) 的解 u 为两个函数之和 u_i+u_s，其中 u_i 是已知函数 ("入射波")，而 u_s 是"散射"或绕射生成波 波 u_s 不得包含无穷远处发出的波，用这个物理条件就可导出上面提到的无穷远处的条件 而与下述情况相应的条件就称作**辐射条件** (radiation conditions) Ω 是一个有界区域的外部，$\omega>0$，$c(M)$ 是定义在一个半径足够大的球的外部的常数，而 $f(M)$ 是一个有限函数．如果辐射条件得以满足，则问题 (5), (6) 就是适定的，将问题化为积分方程或进行先验估计都可证实这一点 求问题 (5), (6) 的唯一解的其他一些方法是基于**极限辐值原理** (limiting-amplitude principle) 和**极限吸收原理** (limit-absorption principle) 如果 Ω 是一个有界区域的外部则这两个原理能够得到与辐射条件相同的解．在无界区域的情况下，关于 Helmholtz 方程问题的一般理论尚未得到发展．在所有实际重要的情况下，极限吸收原理都能得到具有物理意义的解

如果 $c(M)=$ 常数，则 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem) ($u|_S=\varphi(M)$) 和 **Neumann 问题** (Neumann problem) ($\partial u/\partial n|_S=\psi$) 的解可分别以双层位势和单层位势的形式得到

$$\iint_S \mu(N) \frac{\partial}{\partial n_N} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} dS,$$

$$\iint_S \mu(N) \frac{e^{ikr}}{4\pi r} dS$$

对于未知密度 $\mu(N)$，可得到一个第二类 Fredholm 积分方程 在证明 Dirichlet 问题和 Neumann 问题可解性的过程中，所遇到的困难完全类似于位势理论的方法解 Laplace 方程的外部 Dirichlet 问题时所遇到的经典性困难．

绕射数学理论中求解问题的方法 在所研究的波动过程发生的区域附近，波长与物体的特征尺寸之比在绕射数学理论问题中具有头等重要的意义．如果波长与物体的特征尺寸相比很大 (很小)，则称为长 (短) 波绕射 (diffraction of long (short) waves) 在前一种情况下，方程 (5) 中的量 ω 可被看作一个小参数，因此能够应用摄动理论的各种不同方法．可以把 Laplace 方程的解取作第一次近似．在这种情况下，也可应用数学物理的普通数值方法，例如变分法和位势理论的积分方程的数值解法．对特殊类型的区域，数学绕射理论问题可用显式求解，即解用级数或含有特殊函数的积分的形式给出 解决这个问题最重要的工具是分离变量法，或 **Fourier 法** (Fourier method)，以及 **Wiener-Hopf 法** (Wiener-Hopf method)

原先，在绕射数学理论中，求问题显式解的数值结果仅在长波的情况下取得过成功 (波长越短，级数和积分的收敛性越差) 随着计算技术的发展，在波长与特征尺寸之间不成线性关系的区域中，许多问题也得到了解决 达到这一目标的最有效方法在于把绕射问题化为积分方程和积分-微分方程，以及各种形式的**投影法** (projection methods)

绕射数学理论的渐近法．如果波长很小，则求绕射问题的数值解就很困难，即使应用计算机也是如此 对这类问题最重要的方法是渐近法，它的特殊优点是允许对所研究的问题作出某些一般性结论 渐近法 (asymptotic methods) 是获得未知函数近似值的一些方法．它们建立在物理概念和形式变换的基础上，几乎没有严格的理论基础 以某种求积形式寻找短波问题近似解的首要方法之一是 **Kirchhoff 法** (Kirchhoff method)，至今它仍被广泛地应用于解决实际问题 **射线法** (ray method) 具有同等的重要性，它产生了求许多绕射问题渐近解的若干方法 通常，只要有关的射线域是正则的，其构造过程是很容易实现的．另一方面，如果射线域具有某种奇异性，则产生**边界层理论** (boundary-layer theory) 中的典型情况 除射线域中非正则点的非常小邻域之外，其他各处解的渐近值都是已知的．因此，只需在这个小区域即边界层内寻找它的解 边界层方法中与此相应的方法称为**抛物型方程法** (parabolic-equation method)，它经常用于求绕射数学理论问题的数值解，以及推导渐近公式．

当已经知道解的显表达式时，也可得到用于解决绕射数学理论问题的一些重要的渐近公式 应用一个很成熟的方法 (所谓的 Watson 变换 (Watson transformation))，这个显式解就能够化为围道积分，其渐近解可借助于**鞍点法** (saddle point method) 或者留数定理求得．令人感兴趣的是，由此得到的渐近表达式可用作指南或"范例"去"猜测"绕射问题中显式解未知的情况下渐近展开式的形式 这样一个构造过程被称为"典范问题法"，它是抛物型方程法的一个发展．

参考文献

[1] Бабич, В М, Булдырев, В С, Асимптотические

методы в задачах дифракции коротких волн, М, 1972 (英译本 Babich, V M and Buldyrev, V S, Asymptotic methods in the diffraction of short waves, Springer, 即将出版)
[2] Вайнштейн, Л А, Теория дифракции и метод факторизации, М, 1966
[3] Никольский, В В Вариационные методы для решения внутренних задач электродинамики, М, 1967
[4] Купрадзе, В Д, Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, М-Л, 1950
[5] Купрадзе, В Д, и др, Трехмерные задачи математической теории упругости, 2 изд, М, 1976 (英译本 Kupradze, V D, et al, Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity, North-Holland, 1979
[6] Friedlander, F, Sound pulses, Cambridge Univ Press, 1958
[7] Honl, H, Maue, A W and Westpfahl, K, Theorie der Beugung, in Handbuch der Physik, Vol 25 1, Springer, 1961, 218 - 573
[8] Свешников, А Г, в кн International congress of mathematicians, Vancouver, 1974, 29 - 30
[9] Babič, V M and Kirpičnikova, N Y, The boundary-layer method in diffraction problems, Springer, 1981 (译自俄文)
В М Бабич 撰

【补注】

参考文献

[A1] Felsen, L B and Marcuvitz, N, Radiation and scattering of waves, Prentice-Hall, 1973
[A2] Bowman, J J, Senior, T B A and Uslenghi, P L E, Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes, North-Holland, 1969
[A3] Wilcox, C H, Scattering theory for the d'Alembert equation in exterior domains, Springer, 1975
韩耀新、赵金平 译

扩散近似 [diffusion approximation, диффузионное приближение]

求解中子（或其他粒子、量子）的运动论输运方程的方法．方法以中子流密度（所考虑的点的坐标及速度与时间的向量分量的未知函数）的概念为基础，表达为依赖于中子速度向量角坐标的球函数的展式前两项形式 在单速定常问题中，这导致**扩散方程** (diffusion equation)

扩散近似在远离源和具有多种性质的区域边界处适用，并给出其形式与输运方程的解的渐近部分相重合的解．关于扩散近似的改进形式见**扩散方法** (diffusion methods)

参考文献

[1] Glastone, S, Edlund, M C, The elements of nuclear reactor theory, v Nostrand, 1954
[2] Марчук, Г И, Методы расчета ядерных реакторов, М, 1961
В. А. Чуянов 撰

【补注】 扩散近似还应用于波的传播和散射的问题，此时粒子所占体积与介质总体积之比为大量．方法成功地应用于光学纤维血氧定量计的分析．利用所谓 Henyey-Greenstein 公式作为相函数的近似，使得扩散近似可以用一种很精巧的方法描绘血球和细胞团的散射．

亦见**中子流理论** (neutron flow theory)，**输运方程，数值方法** (transport equations, numerical methods)

参考文献

[A1] Ishimaru, A, Wave propagation and scattering in random media, 1 - 2, Acad Press, 1978
[A2] Davison, B, Neutron transport theory, Oxford Univ Press, 1957
[A3] Case, K M, Zweifel, P F, Linear transport theory, Addison-Wesley, 1967
沈 青 译

扩散方程 [diffusion equation, диффузии уравнение]

描述扩散过程（即在非均匀分布物质的介质中浓度均化的过程）的二阶偏微分方程．扩散方程有形式

$$Lu \equiv c\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) = 0, \tag{1}$$

其中 c 是多孔性系数，D 是扩散系数，$u(x,t)$ 是在时刻 t 介质在点 x 处的物质浓度．扩散方程是利用 Nernst 扩散定律通过计算物质质量平衡导出的．这里所指的是，在所考虑的区域中不存在进入外部介质中的物质和扩散的源 这样的扩散方程称作**齐次的** (homogeneous) 扩散方程 如果在所考虑的区域中包含具有体积分布密度 $F(x,t)$ 的物质源，那么扩散过程由具有右端项 $F(x,t)$ 的**非齐次** (inhomogeneous) 扩散方程所描绘．考虑到物质以比例于现存浓度的速度分裂或增殖，应在扩散方程的右端添加一项 $\pm\lambda\partial u/\partial x$

扩散方程是抛物型方程．为了求唯一解就要提出初始和边界条件．扩散方程的**初始条件** (initial condition) 是在初始时刻给出物质的浓度 $u_0(x)$

$$u(x,0)=u_0(x)\ . \tag{2}$$

如果这时物质充满整个空间，那么就得到 **Cauchy 问题** (Cauchy problem) (1)，(2) 如果扩散物质充满由侧面 S 所围的体积 V，那么除初始条件 (2) 外还要在 S 上给出**边界条件** (boundary condition)．有下列三种基本的扩散方程的**线性边界条件** (linear boundary conditions)．

1) 在 S 上给出物质浓度 $\theta(x,t)$，于是

$$u(x,t)=\theta(x,t)$$

是一个**第一类边界条件** (boundary condition of the first

kind).

2) 给出通过 S 进入 V 中的物质流的密度 $q(x,t)$，于是

$$-D\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}=q(x,t),\quad x\in S$$

是一个第二类边界条件 (boundary condition of the second kind)，其中 n 是曲面 S 的内法线 (如果 S 是不可渗透的，那么 $q(x,t)\equiv 0$)．

3) S 是半渗透的，且以给定浓度 $\theta(x,t)$ 按线性法则通过 S 扩散到外部介质中去，于是

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}=-h(u(x,t)-\theta(x,t)),\quad x\in S$$

是一个第三类边界条件 (boundary condition of the third kind)．还有其他类型的边界条件，其中包括 S 上的非线性边界条件以及含有比出现于扩散方程中的更高阶的导数的条件等 由于扩散方程是描述物理平衡过程的微分方程的特殊情形，所以它类似于**热传导方程** (thermal-conductance equation)，不可压缩流体的层流的 **Navier-Stokes 方程** (Navier-Stokes equations)，纯导电方程等等

参考文献

[1] Тихонов, А Н, Самарский, А А, Уравнения математической физики, 3 изд, М, 1966 (中译本 А Н 吉洪诺夫, А А 萨马尔斯基, 数学物理方程, 上、下册, 高等教育出版社, 1956) Л И Камынин 撰

【补注】 扩散方程在随机过程理论中的作用见**扩散过程** (diffusion process)

扩散方程的另一种表示法是

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\nabla\cdot(D\nabla u)=0$$

(当然，其中 $\nabla u=\mathrm{grad}(u)=(\partial u/\partial x_1,\ \ ,\partial u/\partial x_n)$，$\nabla\cdot$ 是 div 的另一种符号)．

非线性方程 (一个空间变量)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(其中 D 是常数) 称为一维非线性扩散方程 (non-linear diffusion equation) 或 Burgers 方程 (Burgers equation)．文献 [A3] 是专门讨论这个方程的

参考文献

[A1] Crank, J, The mathematics of diffusion, Clarendon Press, 1956.

[A2] Carslaw, H S and Haeger, J C, Conduction of heat in solids, Clarendon Press, 1959.

[A3] Burgers, J M, The nonlinear diffusion equation, Reidel, 1974 孙和生 译 陆柱家 校

扩散方法 [diffusion methods, диффузионные методы]

通过修正**扩散近似** (diffusion approximation) 方程，对中子 (或其他粒子) 输运的运动论方程进行求解的方法．由于扩散近似给出输运方程的渐近解的正确形式 (远离源和远离不同性质的介质交界面)，它的改进就在于正确选择常数 (例如扩散系数) 及合理给出真空边界的和具有不同物理特性的区域之间的边界条件．

在单一速度问题中，改进的扩散方法对无穷介质情况利用超越方程

$$p\frac{\mathrm{Ar}\tan k}{k}=1$$

来决定扩散系数

$$D_0=\frac{(1-p)}{k^2}$$

这里 p 为散射截面与全截面之比，k 为特征方程的根．在介质界面上，在外推点上给定边界条件，这些条件是由具有常值全截面的两种介质问题的精确解得到的 (对数导数相等及渐近密度跃变)．

改善扩散近似的另一途径是利用**球面调和函数法** (spherical harmonics, method of) 的 P_2 近似．通常的扩散近似从球谐函数的 P_1 近似出发．过渡到 P_2 近似给出的扩散方程具有修正过的参数和改善的边界条件，界面上中子密度是间断的

扩散方程的解还可以用来加速运动论输运方程的逐次近似的收敛，包括在下一轮迭代中利用运动论方程的近似解来计算对扩散系数的修正量．

在一个问题的范围内，还可以将扩散解与精确解结合起来，在被吸收物质、源等占据的区域内求解精确输运方程，而在远离这些区域的地方利用扩散近似

参考文献

[1] Романов, Ю А, Исследования критических параметров реакторных систем, М, 1960, 3-26

[2] Теория и методы расчета ядерных реакторов, М, 1962

[3] Вычислительные методы в теории переноса, М, 1969 В. А Чуянов 撰

【补注】 亦见**扩散近似** (diffusion approximation) **扩散方程** (diffusion equation)

参考文献

[A1] Glasstone, A S, Edlund, M C, The elements of nuclear reactor theory, v Nostrand, 1954

[A2] Davison, B, Neutron transport theory, Oxford Univ Press, 1957

[A3] Case, K M, Zweifel, P F, Linear transport theory, Addison-Wesley, 1967 沈 青 译

扩散过程 [diffusion process, диффузионный процесс]

具有转移密度 $p(s,x,t,y)$ 并满足以下条件的连续 **Марков 过程** (Markov process) $X=X(t)$ 存在函数 $a(t,y)$ 和 $\sigma^2(t,x)$ (分别称为漂移系数 (drift coefficient) 和扩散系数 (diffusion coefficient)) 使得对

于任意 $\varepsilon>0$,

$$\left.\begin{aligned}&\int\limits_{|y-x|>\varepsilon} p(t, x, t+\Delta t, y)dy = o(\Delta t),\\ &\int\limits_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x)p(t, x, t+\Delta t, y)dy\\ &\qquad = a(t, x)\Delta t + o(\Delta t),\\ &\int\limits_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x)^2 p(t, x, t+\Delta t, y)dy\\ &\qquad = \sigma^2(t, x)\Delta t + o(\Delta t),\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

通常假定这些极限关系关于 t 在每个有限区间 $t_0\leq t\leq t_1$ 中）和 $x(-\infty<x<\infty)$ 是一致的　这类过程的一个重要代表是 **Brown 运动**（Brownian motion），它是最初研究的扩散过程的数学模型（因此命名为“扩散过程”）.

如果转移密度 $p(s, x, t, y)$ 以及它的导数 $(\partial/\partial x)p(s, x, t, y)$ 和 $(\partial^2/\partial x^2)p(s, x, t, y)$ 关于 s 和 x 是连续的，那么它是微分方程

$$\frac{\partial}{\partial s} p(s, x, t, y) = -a(s, x)\frac{\partial}{\partial x} p(s,x,t,y) + \\ -\frac{1}{2}\sigma^2(s, x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(s, x, t, y) \quad (2)$$

的基本解，这个方程称为向后 Колмогоров方程（backward Kolmogorov equation）（亦见**Колмогоров 方程**（Kolmogorov equation））

在齐次的情况下，当漂移系数 $a(t, x)=a(x)$ 和扩散系数 $\sigma^2(t, x)=\sigma^2(x)$ 与时间 t 无关时，相应于转移密度 $p(s, x, t, y)=p(t-s, x, y)$ 的向后 Колмогоров 方程具有如下形式

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, x, y) = a(x)\frac{\partial}{\partial x} p(t, x, y) \\ + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(t, x, y).$$

如果转移密度 $p(s, x, t, y)$ 的导数 $(\partial/\partial t)p(s, x, t, y)$ 关于 t 和 y 是连续的，而且 $(\partial/\partial y)\ [a(t, y)\ p(s, x, t, y)]$ 和 $(\partial^2/\partial y^2)\ [\sigma^2(t, y)p(s, x, t, y)]$ 关于 y 是连续的，那么它是以下微分方程的基本解

$$\frac{\partial}{\partial t} p(s, x, t, y) = -\frac{\partial}{\partial y}[a(t, y)p(s, x, t, y)] + \\ +\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\sigma^2(t, y)p(s, x, t, y)], \quad (3)$$

这称为 **Fokker-Planck 方程**（Fokker-Planck equation），或称为向前 Колмогоров 方程（forward Kolmogorov equation）　关于转移概率密度的微分方程(2)和(3)是扩散过程研究中的基本分析对象　也有另一种纯概率方法，它是基于将过程 $X(t)$ 表作下述伊藤随机微分方程（Itô stochastic differential equation）的解

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dY(t),$$

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, X(s))ds + \\ + \int_{t_0}^{t}\sigma(s, X(s))dY(s),$$

其中 $Y(t)$ 是标准 Brown 运动过程．粗略地说，$X(t)$ 与某个 Brown 运动以如下方式相联系．如果 $X(t)=x$，那么在下一段时间 Δt 的增量 $\Delta X(t)=X(t+\Delta t)-X(t)$ 是

$$\Delta X(t) \sim a(t, x)\Delta t + \sigma(t, x)\Delta Y(t).$$

如果渐近关系按下述意义理解

$$\mathrm{E}\{\Delta X(t) - (a(t, x)\Delta t + \\ + \sigma(t, x)\Delta Y(t))\,|X(t)=x\} = o(\Delta t),$$

$$\mathrm{E}\{(\Delta X(t))^2 - (a(t, x)\Delta t + \\ +\sigma(t, x)\Delta Y(t))^2|X(t)=x\} = o(\Delta t),$$

其中 $o(\Delta t)$ 是一个与方程(1)中同样类型的量，所考虑的 $X(t)$ 也就构成这种定义下的一个扩散过程.

多维扩散过程（multi-demensional diffusion process）是在 n 维向量空间 E^n 上的一个连续 Марков 过程 $X(t)=\{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$，其转移密度 $p(s, x, t, y)$ 满足下述条件　对任意 $\varepsilon>0$,

$$\int\limits_{|y-x|>\varepsilon} p(t, x, t+\Delta t, y)dy = o(\Delta t),$$

$$\int\limits_{|y-x|\leq\varepsilon} (y_k - x_k)p(t, x, t+\Delta t, y)dy \\ = a_k(t, x)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\int\limits_{|y-x|\leq\varepsilon} (y_k - x_k)\ (y_j - x_j)p(t, x, t+\Delta t, y)dy \\ = 2b_{kj}(t, x)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$k, j = 1, \ldots, n,\ x=(x_1, \ldots, x_n),\ y=(y_1, \ldots, y_n)$$

向量 $a=\{a_1(t, x), \ldots, a_n(t, x)\}$ 表征过程 $X(t)$ 的局部漂移，矩阵 $\sigma^2=\|2b_{kj}(t, x)\|\ (k, j=1, \cdots, n)$ 表征在 t 到 $t+\Delta t$ 之间小的时间间隔内，从初始点 x 出发的随机过程 $X(t)$ 的均方偏差.

在某些附加条件的限制下，多维扩散过程的转移概率密度 $p(s, x, t, y)$ 满足向前和向后 Колмогоров 微分方程

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\sum_{k=1}^{n} a_k(s, x)\frac{\partial p}{\partial x_k} - \sum_{k, j=1}^{n} b_{kj}(s, x)\frac{\partial^2 p}{\partial x_k\partial x_j},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_k}[a_k(t, y)\ p] + \\ + \sum_{k, j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial y_k\partial y_j}[b_{kj}(t, y)p],$$

多维扩散过程也可以借助于伊藤随机微分方程

(Itô stochastic differential equations)

$$dX_k(t) = a_k(t, X(t))dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{kj}(t, X(t))dY_j(t)$$

来描述，其中 $Y_1(t), \cdots, Y_n(t)$ 是相互独立的 Brown 运动过程，而

$$\sigma_j = \{\sigma_{1j}(t, x), \cdots, \sigma_{nj}(t, x)\}, \ j = 1, \cdots, n$$

是矩阵 $\sigma^2 = \| 2b_{kj}(t, x) \|$ 的本征向量

参考文献

[1] Гихман, И И, Скороход, А В, Введение в теорию случайных процессов, М, 1965 (英译本 Gikhman, I I and Skorokhod, A V, Introduction to the theory of random processes, Saunders, 1969)

[2] Гихман, И И, Скороход, А В, Стохастические дифференциальные уравнения, К, 1968 (英译本 Gikhman, I I and Skorokhod, A V, Stochastic differential equations, Springer, 1972)

Ю А Розанов 撰

【补注】 可找到简单的向后方程 (backward equation) 和向前方程 (forward equation) 代替向后和向前 Колмогоров 方程.

参考文献

[A1] Ikeda, N and Watanabe, S, Stochastic differential equations and diffusion processes, North-Holland & Kodansha, 1981

[A2] Stroock, D W and Varadhan, S R S, Multidimensional diffusion processes, Springer, 1979

[A3] Arnold, L, Stochastische Differentialgleichungen, Oldenbourg Verlag, 1973

刘秀芳 译

二角形 [digon, двуугольник], 球面的

由球面上两个大圆的、从同一直径两端点出发的两个半圆所形成的图形 见**球面几何学** (spherical geometry).

张鸿林 译

二面角 [dihedral angle, двугранный угол]

以同一直线为边的两个半平面和它们所界定的空间部分构成的空间图形. 两个半平面称为二面角的面，它们的公共边线称为二面角的棱 (edge) 二面角由直线角 (linear angle) 即从棱上同一点出发的分别处于两个面上的垂直于棱的两条直线之间的角来度量，也就是说，由二面角和垂直于棱的平面之交所形成的角来度量.

БСЭ

【补注】 二面角在初等几何中以及在**正多面体** (regular polyhedra) 度量理论中 (其中正多面体的不变量可以由二面角来计算，例如见 [A1], [A4])，更一般地说，在凸多胞腔理论中 (见**凸多面体** (convex polyhedron))，均起重要作用. 关于二面角和凸体上的一般赋值的关系，见 [A3] (亦见**数的几何** (geometry of numbers))

参考文献

[A1] Coxeter, H S M, Regular polytopes, Dover, 1973

[A2] McMullen, P, Non-linear angle-sum relations for polyhedral cones and polytopes, Math Proc Cambr Phil Soc, **78** (1975), 247–261

[A3] McMullen, P and Schneider, R, Valuations on convex bodies, in P Gruber and J M Wills (eds), Convexity and its applications, Birkhauser, 1983 170–247

[A4] Berger, M, Geometry, 2, Springer, 1987 (中译本 M 贝尔热，几何，第二册，科学出版社，1989)

[A5] Cheeger, J, Muller, W and Schrader, R, On the curvature of piecewise flat spaces, Comm Math Physics, **92** (1984), 405–454

[A6] Coolidge, J L, A treatise on the circle and the sphere, Clarendon Press, 1916

张鸿林 译

二面体群 [dihedron group 或 dihedral group; диэдра группа]

与二面体的旋转群同构的群，即与对褶的正**棱锥** (pyramid) 的旋转群同构的群 设该棱锥的底是 n 边形，则对应的二面体群是 $2n$ 阶的，它由阶分别为 n 和 2 的两个旋转 φ 和 ψ 生成，且有定义关系 $\varphi\psi\varphi\psi = 1$ 有时二面体群被理解为 8 阶二面体群 任何有限群中两个不同的二阶元素生成二面体群.

参考文献

[1] Hall, G G, Applied group theory, Longman, 1967

В Д Мазуров 撰 石生明 译 许以超 校

膨胀 [dilatation, дилатация]

用来表示特殊双有理变换的一个老式术语 现在用的新词是**单项变换** (monoidal transformation)

В. А. Исковских 撰

【补注】 不过这个名词还有一些并没有过时的意义，例如**拟共形映射** (quasi-conformal mapping) 的膨胀 (膨胀系数) $k(f, a)$，算子理论中的 (西) 膨胀理论等，见**收缩** (contraction) 和**收缩半群** (contraction semigroup)，亦见**谱集** (spectral set).

陈志杰 译

膨胀映射 [dilatation mapping, расширяющееся отображение]

【补注】 同膨胀 (dilatation). **扩张映射** (expanding mapping) (在流形理论中的).

级数的加稀 [dilution of a series, разбавление ряда]

在一个级数的相邻两项之间加入任何有限个零. 对于级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k, \qquad (*)$$

加稀的级数具有下列形式

$$u_0+0+\quad+0+u_1+0+\quad+0+u_2+$$

级数的加稀不影响级数的收敛性，但是可能会破坏级数的可和性（一个按某种求和法可和的、其和为 s 的级数，在加稀以后可能变成按这种求和法根本不可和的，或者虽然可和，但其和 a 不等于 s）

И И Волков 撰 张鸿林 译

维数 [dimension, размерность]，拓扑空间 X 的一个整数不变量 $\dim X$，其定义如下 当且仅当 $X=\emptyset$ 时，$\dim X=-1$ 如果非空拓扑空间 X 的任意有限开覆盖都可内接一个重数 $\leqslant n+1$ $(n=0,1,2,\ \cdot)$ 的 X 的有限开覆盖，则 X 称为至多 n 维的，记作 $\dim X\leqslant n$ 如果对于某个 $n=-1,0,1,\quad$，有 $\dim X\leqslant n$，则 X 称为有限维的 (finite-dimension)，记作 $\dim X<\infty$，并定义

$$\dim X=\min\{n\quad \dim X\leqslant n\}$$

如果 $\dim X=n$，则称空间 X 是 n 维的．拓扑空间的维数概念推广了 Euclid 空间（及多面体）坐标数的初等几何概念，因为 n 维 Euclid 空间（及任意 n 维多面体）的维数等于 n (Lebesgue-Brouwer 定理 (Lebesgue-Brouwer theorem))．

拓扑空间的维数概念的重要性见 Nöbeling-Понтрягин-Hurewicz-Куратовский定理 (Nöbeling-Pontryagin-Hurewicz-Kuratowski theorem) 具有可数基的 n 维可度量化的空间能嵌入到 $(2n+1)$ 维 Euclid 空间中．这样，与所有 n 维 Euclid 空间 $(n=1,2,\quad)$ 的子空间拓扑等价的空间类和具有可数基的有限维可度量化空间类的维数概念一致

维数 $\dim X$ 有时称为 **Lebesgue 维数** (Lebesgue dimension)，因为它的定义起源于 Lebesgue 镶嵌定理 (Lebesgue theorem on tilings) 对任意 $\varepsilon>0$，n 维立方体有一个重数 $\leqslant n+1$ 且所有成员的直径 $<\varepsilon$ 的有限闭覆盖，存在一个 $\varepsilon_0>0$，使得 n 维立方体的任意有限闭覆盖的成员的直径都 $<\varepsilon_0$ 时该覆盖的重数 $\geqslant n+1$

另一种归纳定义拓扑空间维数的方法（见**归纳维数** (inductive dimension)）是可行的，它基于用较小维数的子空间来分离该空间．这种探讨维数概念的方法始于 H Poincaré, L E J Brouwer, П С. Урысон 及 K Menger 对可度量化空间，它等价于 Lebesgue 的定义．

维数论的基础是 20 世纪 20 年代的前 5 年在 Урысон 和 Menger 的文章中奠定的 具有可数基的可度量化空间的维数理论缔造于 30 年代，而到 60 年代初，任意可度量化空间的维数理论已经完成．

下面讨论的所有拓扑空间都假定是正规的和 Hausdorff 的（见 **Hausdorff 空间** (Hausdorff space)、**正规空间** (normal space)） 在这种情况下，在维数的定义中可以把开覆盖换成内接闭覆盖，这对定义毫无影响．

Lebesgue 处理维数定义的方法（与归纳方法不同）可以将原拓扑空间与最简单的几何构形——**多面体** (polyhedron) 加以比较，使任意空间的维数概念几何化 粗略地说，一个空间是 n 维的，当且仅当它与 n 维多面体相差任意小 确切的说法见关于 ω 映射的 Александров 定理 (Aleksandrov theorem) $\dim X\leqslant n$ 当且仅当对 X 的任意有限开覆盖 ω，存在从 X 到一个至多 n 维 $(n=1,2,\quad)$ 的（紧）多面体上的 ω 映射．这个定理对于紧统格外形象 紧统 X 有 $\dim X\leqslant n$，当且仅当对任意 $\varepsilon>0$，存在从 X 到一个至多 n 维的多面体上的 ε 映射．如果 X 又含于 Euclid 空间或 Hilbert 空间内，则 ε 映射可用 ε 移位代替（关于 ε 映射和 ε 移位的 Александров 定理）

下述断言使得我们可以用比较空间与所有 n 维立方体的方式来确定该空间的维数．$\dim X\geqslant n$ 当且仅当这个空间有一个到 n 维立方体 $(n=0,1,\quad)$ 上的**本质映射** (essential mapping)（关于本质映射的 Александров 定理）

这个定理可以赋以如下形式 $\dim X\leqslant n$ 当且仅当对 X 中任意闭集 A 及到 n 维球面中的任意连续映射 $f\quad A\to S^n$，存在 f 的连续扩张 $F\quad X\to S^n$ $(n=0,1,\quad)$.

维数的下述特征表明了这个概念在方程组解的存在性问题中的作用 $\dim X\geqslant n$ $(n=1,2,\ \cdot)$ 当且仅当 X 有一组不相交的闭集对 A_i, B_i $(i=1,\quad,n)$ 使得对于在 X 上连续且满足条件 $f_i|_{A_i}>0$，$f_i|_{B_i}<0$ $(i=1,\quad,n)$ 的任意函数 f_i，存在一点 $x\in X$，使 $f_i(x)=0$ $(i=1,\quad,n)$（这是关于划分 (partition) 的 Otto-Eilenberg-Hemmingsen 定理 (Otto-Eilenberg-Hemmingsen theorem)．

维数的最重要性质之一是由 Menger-Урысон-Čech 可数闭和定理 (Menger-Urysohn-Čech countable closed sum theorem) 来表述的 如果空间 X 是维数 $\leqslant n$ 的闭子集的有限或可数和，则也有 $\dim X\leqslant n$ $(n=0,1,\quad)$ 在这个定理中，和是有限或可数的这个条件可以用局部有限性代替．对大归纳维数与小归纳维数，与这个和定理类似的陈述在 Hausdorff 紧统类中已不再成立 下述诸断言是维数论中基本的普遍的事实，并且使得有可能把对任意空间的研究简化为对 Hausdorff 紧统的研究．对任意正规空间

a) $\dim\beta X=\dim X$, $\operatorname{Ind}\beta X=\operatorname{Ind}X$，其中 βX 是 X 的 **Stone-Čech 紧化** (Stone-Čech compactification)，同时可能有不等式 $\operatorname{ind}\beta X>\operatorname{ind}X$,

b) 存在 X 的一个紧化 bX，使权（见**拓扑空间的权** (weight of a topological space)) $w(bX)$ 等于权 wX，而维数 $\dim bX$ 等于维数 $\dim X$，对大归纳维数，类似的断言也成立．可数权空间的情形特别有用，因为此时扩张 bX 是可度量化的

命题b)还可以加强 对任意$n=0,1,\cdots$以及任意无限基数τ，存在一个权为τ的Hausdorff紧统Π_τ^n，其维数$\dim\Pi_\tau^n=n$，它包含每一个权$\leqslant\tau$且维数$\dim X\leqslant n$的正规空间X的同胚象（关于给定权和维数的万有Hausdorff紧统的定理）．对大归纳维数，类似的命题也成立 这里$\Pi_{\aleph_0}^0$可取为完全Cantor集，$\Pi_{\aleph_0}^1$可取为Menger万有曲线

似乎维数应该具有单调性 若$A\subset X$，则$\dim A\leqslant\dim X$如果a)集合A为X中闭集或者是强仿紧的，或者b)空间X可度量化（甚至完全正规），这是对的 但是，对于遗传正规空间X的子集A，却可能有$\dim A>\dim X$及$\operatorname{Ind}A>\operatorname{Ind}X$ 而对$A\subset X$，$\operatorname{ind}A\leqslant\operatorname{ind}X$总是对的．

维数中主要问题之一是在连续映射之下维数的性质 在闭映射（也包括Hausdorff紧统的所有连续映射）的情况下，答案由W Hurewicz公式给出，这一公式最初是他对具有可数基的空间类得到的．

升维映射（mapping raising the dimension）的**Hurewicz公式**（Hurewicz formula）．若映射$f\ X\to Y$是连续且闭的，则

$$\operatorname{mult}f+\dim X-1\geqslant\dim Y,$$

其中$\operatorname{mult}f=\sup\{|f^{-1}y|\ y\in Y\}$是$f$的重数

降维映射（mappings lowering the dimension）的**Hurewicz公式**（Hurewicz formula） 对于到仿紧统Y上的连续闭映射$f\ X\to Y$，不等式

$$\dim X-\dim f\leqslant\dim Y \tag{1}$$

成立，其中

$$\dim f=\sup\{\dim f^{-1}y\ y\in Y\}$$

而对任意正规空间Y，这个公式一般不成立

对于有限维紧统的连续映射的情形，已经知道维数$\dim f=k$的连续映射f是k个维数为1的连续映射的叠加（这是公式(1)的精确化，类似于说k维立方体是k个区间的积）

对于开映射的情形，可以证明，零维Hausdorff紧统的象是零维的，同时，Hilbert立方体是一个1维紧统的象，即使相应的映射f的维数$\dim f$等于零．但是，在具有重数$\leqslant\aleph_0$的Hausdorff紧统X及Y的开映射$f.X\to Y$的情况下，等式$\dim X=\dim Y$成立．

在拓扑积之下，维数的性质由下列断言来表述

a)存在有限维紧统X和Y，使$\dim X\times Y<\dim X+\dim Y$，

b)如果积$X\times Y$的一个因子是Hausdorff紧统或者可度量化的，则$\dim X\times Y\leqslant\dim X+\dim Y$，

c)存在正规空间X和Y，使$\dim X\times Y>\dim X+\dim Y$.

在Hausdorff紧统X和Y的情形下，如果$\operatorname{Ind}X<\infty$，且$\operatorname{Ind}Y<\infty$，总有$\operatorname{Ind}X\times Y<\infty$，但是可能有$\operatorname{Ind}X\times Y>\operatorname{Ind}X+\operatorname{Ind}Y$ 而且，如果Hausdorff紧统X和Y是完全正规的或者是1维的，则$\operatorname{Ind}X\times Y\leqslant\operatorname{Ind}X+\operatorname{Ind}Y$

首先对于具有可数基的度量空间类，其次是对于所有度量空间类，维数论特别有意义．在具有可数基的度量空间类中有**Урысон等式**（Urysohn equalities）

$$\dim X=\operatorname{ind}X=\operatorname{Ind}X \tag{2}$$

在任意度量空间类中有**Катетов等式**（Katětov equality）

$$\dim X=\operatorname{Ind}X, \tag{3}$$

并且可能有$\operatorname{ind}X=0<\operatorname{Ind}X=1$

在度量空间的情况下，n维空间的概念可以通过下述两种方法归结为零维空间的概念．对度量空间X，$\dim X\leqslant n$，$n=0,1,\cdots$，当且仅当

a)X可以表示为至多$n+1$个零维空间的和，或

b)存在一个从零维度量空间到X上的重数$\leqslant n+1$的连续闭映射

对度量空间X的任意子集A，存在X中一个G_δ型子集$B\supset A$，使$\dim B=\dim A$

在权$\leqslant\tau$，维数$\leqslant n$的度量空间类中，存在一个万有空间（在嵌入的意义下）．**Dowker定理**（Dowker theorem）在度量（及更一般的）空间的维数论中起着重要的作用 $\dim X\leqslant n$，当且仅当X的任意一个局部有限开覆盖能够内接一个重数$\leqslant n+1$的开覆盖．

维数论中最重要的问题之一是Lebesgue维数与归纳维数间的关系问题 虽然对于任意空间X，一般说来，维数$\dim X$，$\operatorname{ind}X$，$\operatorname{Ind}X$之值两两不同，但对于在某种意义上接近于度量空间的那些空间类，例如有下述诸关系

a)若空间X容许有一个到度量空间上的维数$\dim f=0$的连续闭映射，则(3)成立，由此推知对局部紧Hausdorff群及它们的商空间，等式(2)成立，

b)若存在一个从度量空间到X上的连续闭映射，则(2)成立．

以于仿紧统X,等式(3)成立的更为一般的条件是 $\dim X=n$并且X是一个零维空间在重数$\leqslant n+1$，$n=0,1,\cdots$的闭映射之下的象．

对于任意空间X，总有不等式$\dim X\leqslant\operatorname{Ind}X$及$\operatorname{ind}X\leqslant\operatorname{Ind}X$，但等式$\dim X=0$和$\operatorname{Ind}X=0$是等价的．对于强仿紧（特别地，对Hausdorff紧或Lindelöf紧）空间X，有不等式$\dim X\leqslant\operatorname{ind}X$ 对于Hausdorff紧统，等式$\operatorname{ind}X=1$与$\operatorname{Ind}X=1$是等价的．存在满足第一可数公理的Hausdorff紧统X(如果承认连续统假设，甚至存在完全正规的Hausdorff紧统)，使得$\dim X=1$而$\operatorname{ind}X=n$，$n=2,3,\cdots$ 满足$\dim X<\operatorname{ind}X$的拓扑齐次Hausdorff紧统$X$的例子已经作出．对于完全正规Hausdorff紧统X，总有$\operatorname{ind}X=\operatorname{Ind}X$ 存在甚至满足第一可数公理的Hausdorff紧统，使得$\operatorname{ind}X<\operatorname{Ind}X$ 到1983年还不知道是否

存在 m，使得对于任意 $n>m$，都有一个 Hausdorff 紧统（度量空间）X，满足 $\operatorname{ind} X=m$，$\operatorname{Ind} X=n$

对于不可度量化空间，维数不仅没有单调性，而且还出现其他的病态性质 对于任意 $n=2,3,$ ，已经构造出这样的 Hausdorff 紧统 θ_n，其中任意闭集有维数 0 或者 $n=\dim\theta_n$ 对于归纳维数，类似的例子是不会有的．另外，对于每个 $n=1,2,$ ，已经构造出这样的 Hausdorff 紧统 Φ_n，使得其中任意分离 Φ_n 的闭集都有维数 $n=\dim\Phi_n$ 这样，对于不可度量化空间，定义维数的方法原则上不同于 Poincaré 利用坐标数较小的空间来分离空间的归纳方法 Hausdorff 紧统 Φ_n 直接与下列叙述有关· 任意 n 维 Hausdorff 紧统包含一个 n 维 **Cantor 流形**（Cantor manifold）

n 维 Euclid 空间 E^n 的子集是 n 维的，当且仅当它包含 E^n 的内点 一个紧统的维数 $\leqslant n$，当且仅当它有一个映入 E^n 的维数是零的映射，因此，n 维紧统与 E^n 中包含（E^n 的）内点的有界闭子集，在相差一个零维映射的意义下，可不加区分

亦见**维数论**（dimension theory）

参考文献

[1] Александров, П С , Пасынков, Б А , Введение в теорию размерности, М , 1973

[2] Hurewicz, W and Wallman, G , Dimension theory, Princeton Univ Press, 1948

[3] Урысон, П С , Труды по топологии и другим областям математики, т 1－2, М -Л , 1951

Б А Пасынков 撰

【补注】 设 X,Y 是拓扑空间，ω 是 X 的覆盖 连续映射 f $X\to Y$ 称为 ω 映射（ω-mapping），如果每一点 $y\in Y$ 有一个邻域 U_y，使得 $f^{-1}(U_y)$ 包含在 ω 的某个成员中．设 X 是度量空间，对 $\varepsilon\in R$，$\varepsilon>0$，f 称为 ε 映射（ε-mapping），如果每个 $f^{-1}(y)$ 的直径 $<\varepsilon$ 最后，Euclid 空间或 Hilbert 空间 E 的子集 X 到 E 的连续映射称为 ε 移位（ε-shift），如果 X 的每一点的移位至多为 ε

Lebesgue 镶嵌定理又称为 Lebesgue-Brouwer 镶嵌定理（Lebesgue-Brouwer theorem on tilings）或镶嵌定理（pflastersatz theorem）

可度量化空间维数的 Катетов 等式（3）又称 Катетов-森田等式（Katětov-Morito equality）.

Lebesgue 维数（Lebesgue dimension）又称为覆盖维数（covering dimension） 满足 $\operatorname{ind} X<\operatorname{Ind} X$ 的可度量化空间 X 是由 P Roy 作出的（[A2]）

关于维数的其他概念亦见**分形维数**（fractal dimension）及 **Hausdorff 维数**（Hausdorff dimension）.

参考文献

[A1] Engelking, R , Dimension-theory, PWN & North-Holland, 1978

[A2] Roy, P, Nonequality of dimensions for metric spaces, Trans Amer Math Soc , **134** (1968), 117－132

[A3] Nagata, J , Modern dimension theory, Heldermann, 1983

结合环的维数（dimension of associative ring） 以某种方式联系于环或模的数，使得人们可以研究它在某些经典运算，例如子对象、商对象、直和或直积、扩张、 之下的性质 可以引用维数的归纳方法给出证明的那些好方法很有用处 在代数及环论上常用到的几种维数可以这样定义 在某个模的子模格上用考察所有模（也可能限于某类模）的维数的上确界（或类似的不变量）的办法把定义整体化 依照这种方法可以定义 Goldie 维数，对偶 Goldie 维数，Krull 维数和 Gabriel 维数，以及由限制模的适当子范畴而确定的各种相关的定义 某些维数是从模的范畴中的分解原理出发定义的，这些维数包括同调维数，例如模（或环）的投射维数，模（或环）的内射维数以及模的弱的或平坦维数（亦见**同调维数**（homological dimension））．许多涉及环或模的具体问题可以通过引进适当的维数概念而得以解决 值得一谈的另一个例子是 GK 维数（Гельфанд-Кириллов），它与非可换的超越次数的概念有关，并且能够用来取得关于把自由代数嵌入所讨论的环中的知识 例如，嵌入某些微分算子环中（最简单的情形是 Weyl 代数．特征为零的域 k 上的 Weyl 代数（Weyl algebra）$A_n(k)$ 是代数 $k\langle x_1, \ ,x_n \ , \partial/\partial x_1, \ ,\partial/\partial x_n\rangle$，亦即由 $2n$ 个符号 $X_1, \ ,X_n, Y_1, \ ,Y_n$ 生成的满足关系 $Y_iX_j-X_jY_i=\delta_{ij}$ 的结合代数，其中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号）

下面给出代数中最常用到的一些维数的定义

Krull 维数（Krull dimension）．对于**偏序集**（partially ordered set）$(L,\leqslant)$ 设 $\Gamma(L)$ 是集合 $\{(a,b) \ a\leqslant b, a,b\in L\}$ 借助于超限递推法，可以在 $\Gamma(L)$ 上定义过滤·

$$\Gamma_{-1}(L)=\{(a,b)\in\Gamma(L), a=b\},$$

$$\Gamma_0(L)=\{(a,b)\in\Gamma(L) \ [a,b] \text{ 是 Artin 的}\}$$

$$\Gamma_\alpha=\{(a,b)\in(L) \ \forall b\geqslant b_1\geqslant \ \geqslant b_n\geqslant \ \geqslant a, \ \exists n\in\mathbf{N}, \forall i\geqslant n \ (b_{i+1},b_i)\in\bigcup_{\beta<\alpha}\Gamma_\beta(L)\}$$

这样就得到一条升链

$$\Gamma_{-1}(L)\subset\Gamma_0(L)\subset \ \subset\Gamma_\alpha(L)\subset\cdot \ ,$$

因为 L 是集合，于是 $\Gamma_\xi(L)=\Gamma_{\xi+1}(L)=$ 若 $\Gamma(L)=\Gamma_\alpha(L)$，则称 L 的 Krull 维数 K dim 已定义．若 R 是一个环，M 是左 R 模，则当 M 的左子模的格 $L(M)$ 有 Krull 维数时，称 M 有 Krull 维数 若左 R 模 $_RR$ 有 Krull 维数，则说环 R 有 Krull 维数

Gabriel 维数（Gabriel dimension） 对于有 0 和 1 的模上的连续格 L（见**连续格**（continuous lattice），**模格**（mo-

dular lattice))，利用超限递推法定义Gdim L Gdim$L$=0，当且仅当 $L=\{0\}$ 设 α 是一个非极限**序数**（ordinal number），并假定对 $\beta<\alpha$ 的格，Gdim $L=\beta$ 已经有定义．如果对 L 中每个 $a\neq 0$，Gdim$[0,a]$不小于 α，而 Gdim$[a,1]<\alpha$，则说 L 是 α 简单的（α-simple）．如果 Gdim$L$不小于 α，但对 L 中每个 $a\neq 1$，存在某个 $b>0$，使对某个 $\beta\leqslant\alpha$，$[a,b]$ 是 β 简单的，则说 Gdim $L=\alpha$.若 $a\in L$ 且 Gdim$[0,a]=\alpha$，则说 a 有 Gabriel 维数 α 如果 L 有 Krull 维数，则 L 也有 Gabriel 维数，并且 Kdim $L\leqslant$ Gdim $L\leqslant 1+$Kdim L.

如果 L 是 Noether 格，则 Gdim $L=1+$Kdim L

如果 L 是环，M 是左 R 模，则 Gdim M 定义为 Gdim $L(M)$

值得一提的是仿射 PI 环（见 **PI 代数**（PI-algebra））未必有 Krull 维数，但是，这些环有有限 Gabriel 维数．

投射维数（projective dimension） 左 R 模 M 上的一个投射分解（projective resolution）是一个正合序列

$$\to P_n\to \quad \to P_0\to M\to 0,$$

其中每个 P_i 是投射左 R 模（亦见**分解**（resolution）），如果 $P_k\neq 0$，但对所有 $n>k$，$P_n=0$，则称分解有无限长度（infinite length） 容易证明，每个模 M 有一个投射分解，因而可以定义 M 的投射维数 $\mathrm{pd}_R(M)$ 是使得 M 有长度 n 的投射分解最小的 n 如果这样的 n 不存在，可令 $\mathrm{pd}_R(M)=\infty$，显然，$\mathrm{pd}_R(M)=0$，当且仅当 M 是投射的（见**投射模**（projective module）） R 的（左）整体维数（global dimension） gl-dim R 定义为 $\sup\{\mathrm{pd}_R(M)$ M 是 R 模$\}$，事实上，如果用右模定义，这个整体维数是相同的

用完全对偶的方法，可以用内射分解来定义模 M 的内射维数（injective dimension），使得 inj-dim M 是 M 的极小内射分解的长度．R 的（左）整体内射维数 (global (left) injective dimension) 定义为任意（左）R 模的内射维数的上确界，但可以证明环 R 的这个维数与上面利用射影分解所定义的 gl-dim R 相同．

此外，如果 R 是左和右 **Noether 环**（Noetherian ring），则 R 的左和右整体维数相同 注意，半单 Artin 环是用它们有整体维数零这一事实来刻画的（亦见 **Artin 环**（Artinian ring）.

代替所讨论的投射分解，可以借助于平坦R模（见**平坦模**（flat module））来考察 M 的分解 由这种方法定义的维数是 M 的平坦维数（flat dimension）或**弱维数**（weak dimension），记为 fd(M) R 的左弱维数（left weak dimension) l w dim(R) 定义为 $\sup\{\mathrm{fd}(M)$ M 是左 R 模$\}$，右弱维数（right weak dimension) r w dim(R) 可类似地定义．亦见**同调维数**（homological dimension)

对于左 Noether 环 R，gl-dim R=l. wdim R，对于右 Noether 环 R，gl-dim R=r wdim R 于是对于左和右 Noether 环，射影整体维数、内射整体维数与弱维数一致，但这一事实对于任意 R 模不成立

整体维数在可换正则局部环的研究中是重要的，而这种局部环在基础代数几何中起着显著的作用．注意，局部可换环恰好在它有有限整体维数时是正则的，并且在这种情况下，其整体维数等于 Krull 维数

Гельфанд-Кириллов维数(Gel'fand-Kirillov dimension)．对于域 k 上的**代数**（algebra）A，可以讨论 k 上由包含在 A 中的 k 上的向量空间 V 生成的 A 的子代数 $k[V]$ 如果 V 在 k 上是有限维的，并且 $1\in V$，则在 $A=k[V]$时，V 称为 A 的**标架**（frame），否则称为子标架（subframe）．设 $V=kv_1+\quad +kv_d$ 是 A 的子标架，V^i 是 $v_1,\cdot\ ,v_d$ 中长度为 i 的单项式集合．记 $F_n^v(A)=k+V+\quad +V^n$，则 $\{F_n^v(A)\ n\in\mathbf{Z}\}$ 定义了 $k[V]$ 上的过滤，其中对 $m\leqslant -1$，定义 $F_m^v(A)=0$ 这个过滤的结合分环同构于 $\oplus_{i=-1}^{\infty}V^{i+1}/V^i$

定义$d_v(n)=\dim_k F_n^v(A)$及GKdim$k[V]=\limsup(\log d_v(n)\cdot\log(n)^{-1})$ 这个数是完全确定的并且它仅依赖于 $k(V)$ 而不依赖于 V 的选择

如果V是 A 的标架，则令 GKdim$A$=GKdim$k[V]$ 如果 A 是 k上的代数，则 GK dim $A=0$(亦见**代数的代数**（algebraic algebra）） 注意，GKdim$A$ 是一个实数但未必是整数，W Borho 与 H Kraft 已经证明，任意 $r\in R$，$r\geqslant 2$，都可作为某一 k 代数的 GK dim．在区间 $[0,1]$中，只有 0 和 1 可作为 k代数的 GK dim，G. Bergman 证明，(1,2) 中的数不可能成为某个 k 代数的 GK dim 这个维数有时与 Krull 维数有关，这一点不足为奇，至少在可交换的情况下是这样．

如果 M 是仿射可换 k代数上的有限和生成模，则 GK dim M=K dim M

如果 $\mathfrak{g}$ 是 k 上可解 **Lie 代数**（Lie algebra），$\dim_k\mathfrak{g}=n$，则**泛包络代数**（universal enveloping algebra）$U(\mathfrak{g})$ 的 GK dim 满足 GKdim$U(\mathfrak{g})$=Kdim$U(\mathfrak{g})=n$

如果 A 是素 PI代数，则 GKdim$A$=tdeg$_k A$，并且在仿射的情况下，这个数也等于经典 Krull 维数（classical Krull dimension） cl Kdim$A$，后者是用 A 的素理想的极大链的长度来定义的

Гельфанд-Кириллов 超越次数（Gel' fand-Kirillov transcendence degree) GK t deg (A) 定义为 $\sup_V\inf_V$GK dim$k[bV]$，其中V遍历A的子标架，b遍历 A 的正则元 如果 $D_n(k)$ 是第 n 次 Weyl 域（Weyl field)，$A_n(k)$的商可除代数，则 GKtdeg$(D_n(k))=2n$，而 GK dim $D_n(k)=\infty$，这样，超越次数在处理微分算子环时较为好用

在数学的许多分支中有大量称之为“维数”的概

念 其中主要的三种似乎是拓扑的概念（包括微分流形和解析流形的维数），上面所讨论的代数的概念，以及代数及解析几何中的维数概念，亦见**解析空间**（analytic space），**有理函数**（rational function）；**解析集**（analytic set），**上同调维数**（cohomological dimension），**环的谱**（spectrum of a ring）．后一种维数概念，即代数几何和解析几何中的维数概念，介于另外两种之间，起着桥梁的作用．

如果拓扑空间不能表为两个真闭子空间之并 $X_1\cup X_2=X$, $X_i\neq X$，则称它是不可约的（irreducible）．如果拓扑空间 X 满足闭子集的降链条件（descending chain condition） 对于任意闭子集列 $Y_1\supset Y_2\supset\cdots$，存在 r，使得 $Y_r=Y_{r+1}=\cdots$，则称之为 Noether 的（Noetherian）．现在定义 X 的（代数 - 几何地引起的）维数为满足下述所有整数 n 的上确界 存在 X 的（处处真包含）的不可约闭子集链

$$\phi\neq Z_0\subset\cdots\subset Z_n$$

为了避免混淆，这个维数概念在这里记作 $\mathrm{adim}(X)$ 对 Hausdorff 空间，这个概念意义不大（唯一的不可约 Hausdorff 空间是单点空间），但对代数簇及（具有 Zariski 拓扑的）概形，它正好适用．

事实上，如果 $X=\mathrm{Spec}(A)$，其中 A 是有单位元的可换 Noether 环，那么，这就是 A 的 Krull 维数 $\mathrm{K\,dim}(A)=\mathrm{a\,dim}(X)$

设 X 是一个不可约代数簇，则 $\mathrm{adim}(X)$ 也是 X 上有理函数域的超越次数，这是通常用来定义代数簇维数的另一概念 X 在点 x 处的局部维数（local dimension）定义为 $\dim_x X=\dim_{k(x)}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)$，其中 $\mathfrak{m}_x$ 是局部环 $\mathscr{O}_{X,x}$ 在 x 处的极大理想，$k(x)=\mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ 于是 $\mathrm{adim}(X)=\min_x \dim_x X$ 当且仅当 x 为正则点，$\mathrm{adim}(X)=\dim_x X$ 当且仅当 $\mathscr{O}_{X,x}$ 为正则局部环

如果 X 是 $\mathbf{C}$ 上代数簇，X^* 是光滑点的开子簇，则 X^* 也是 $\mathbf{C}$ 上的 $\mathbf{C}$ 维数 $\mathrm{adim}(X)$ 复流形（在局部意义上需要用 n 个复坐标来描述它），因而作为拓扑流形它是 $2n$ 维的

最后，也可以用 X 上有界实值函数的代数 $C_b(X)$ 来描述**完全正则空间**（completely-regular space）的拓扑维数．$C_b(X)$ 上的度量拓扑用范数

$$\|f\|=\sup_x|f(x)|$$

来定义，这也可由

$$\|f\|=\sup_{\mathfrak{m}}|f(x)|$$

代数地确定，其中 $\mathfrak{m}$ 遍历 $C_b(X)$ 的极大理想．$C_b(X)$ 的子环 A 称为解析子环（analytic subring），如果

i) 所有常值函数属于 A，

ii) $f^2\in A\Rightarrow f\in A$，

iii) A 在 $C_b(X)$ 的度量拓扑中是闭集．

函数集 B 称为解析子环 $A\subset C_b(X)$ 的一个解析基，如果 A 是包含 B 的最小解析子环．

对于完全正则空间 X，下列各条等价 1) $\dim X\leqslant n$，2) $C_b(X)$ 中每一可数集都含于一个具有基数 $\leqslant n$ 的解析基的解析子环，3) $C_b(X)$ 的每个有限子族都含于一个具有基数 $\leqslant n$ 的解析基的解析子环（Катетов定理（Katětov theorem））．如果 X 是紧度量空间，这三个性质也等价于 $C_b(X)$ 自身的一个基数 $\leqslant n$ 的解析基．

参考文献

[A1] Gel'fand, J M and Kirillov, A A, Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie, *Publ Math IHES*, **31** (1966), 5-19

[A2] Gordon, R and Robson, J C, Krull dimension, Amer Math Soc, 1973

[A3] Krause, G and Lenagom, T H, Growth of algebras and Gel'fand-Kirillov dimension, Pitmann, 1985

[A4] Năstăsecu, C and van Oystaeyen, F, Dimensions of ring theory, Reidel, 1987

[A5] Rentschler, R and Gabriel, P, Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnées, *C R Acad Sci Paris*, **265** (1967), 712-715

[A6] Hartshorne, R, Algebraic geometry, Springer, 1977

[A7] Shafarevich, I, R, Basic algebraic geometry, Springer, 1974（译自俄文）

[A8] Gillman, L and Jenson, M, Rings of continuous functions, v Nostrand, 1960

[A9] Bourbaki, N Algèbre Commutative, Masson, 1983, Chapt VIII, Dimension, Chapt IX Anneaux locaux noethériens complets

许依群、罗嵩龄、徐定宥 译

维数的加法性质 [dimension, additive properties of, размерности аддитивные свойства]

当拓扑空间 X 可表为子空间 X_α 的和时，表示 X 的维数与这些子空间 X_α 的维数之间关系的某些性质 维数的加法性质有多种类型．

可数闭和定理（countable closed sum theorem）．如果正规 Hausdorff 空间 X 能表成有限个或可数多个闭子集 X_i 之和，则

$$\dim X=\sup_i \dim X_i$$

如果 X 又是完全正规或遗传仿紧的，则

$$\mathrm{Ind}\,X=\sup_i \mathrm{Ind}\,X_i$$

局部有限闭和定理（locally finite closed sum theorem）．如果正规 Hausdorff 空间 X 能表成局部有限的闭子集组 X_α 之和，则

$$\dim X=\sup_\alpha \dim X_\alpha$$

如果 X 又是完全正规或遗传仿紧的，则

$$\mathrm{Ind}\,X=\sup_\alpha \mathrm{Ind}\,X_\alpha$$

加法定理 (addition theorem) 如果空间 X 是 Hausdorff的，遗传正规的，且 $X=A\cup B$，则

$$\dim X \leqslant \dim A+\dim B+1$$

(Menger-Урысон 公式 (Menger-Urysohn formula)). 如果 X 又是完全正规的，则

$$\operatorname{Ind} X \leqslant \operatorname{Ind} A+\operatorname{Ind} B+1$$

度量空间 R 有维数 $\dim R\leqslant n$，当且仅当

$$R=\bigcup_{i=1}^{n+1} R_i,\ \dim R_i \leqslant 0,\ i=1,\ \ldots,\ n+1,\ n=0,1,$$

如果 X 是遗传正规且 Hausdorff 的，则对任意闭子集 F 有

$$\dim X=\max(\dim F,\ \dim X\backslash F),$$
$$\operatorname{Ind} X=\max(\operatorname{Ind} F,\ \operatorname{Ind} X\backslash F)$$

Б А Пасынков 撰

【补注】 也见**维数** (dimension)，**维数论** (dimension theory)

参考文献

[A1] Engelking, R, Dimension theory, PWN & North-Holland, 1978

许依群、徐定宥、罗嵩龄 译

维数函数 [dimension function, размерности функция]

在一个格 L 上的一个整数值函数 d(即一个映射 d $L\to \mathbf{Z}$)，它满足条件 1) 对任意 $x, y\in L$，$d(x+y)+d(xy)=d(x)+d(y)$，2) 如果 $[x, y]$ 是 L 内一个**基本区间** (elementary interval)，那么 $d(y)=d(x)+1$. 对于一个在其中每个有界链都有限的格，维数函数的存在性等价于其模性质

在一个正交模格或在一个正交模偏序集上，有维数函数的更一般的定义，在那里，维数函数的值可以是任意实数，甚至是函数 (见[3])

参考文献

[1] Скорняков, Л А, Элементы теории структур, М, 1970 (英译本 Skornyakov, L A, Elements of lattice theory, Hindustan Publ Comp, 1977).

[2] Birkhoff, G, Lattice theory, Colloq Publ, 25, Amer Math Soc, 1973.

[3] Kalmbach, G, Orthomodular lattices, Acad Press, 1983

Т С Фофанова 撰 蓝以中 译

维数不变量 [dimension invariant, размерностный инвариант]

对于给定类 $\mathscr{K}$ 中每一个拓扑空间 X 所确定的整数 $d(X)$，它有足够多的性质类似于通常的维数概念，即类似于高维 Euclid 空间的坐标数. 这里要求类 $\mathscr{K}$ 包含有任意多个坐标的所有立方体，以及它的所有成员空间 X，同时也包含同胚于 X 的每一空间作为其成员. 作为维数不变量 $d(X)$，在任意情况下，总是假定对于同胚的空间 X 和 X' 有 $d(X)=d(X')$，并且对于 n 维立方体 I^n 有 $d(I^n)=n$ 在维数不变量中，最重要的是所谓经典维数 (classical dimension)——**Lebesgue 维数** (Lebesgue dimension) $\dim X$ 及 (大、小) **归纳维数** (inductive dimension) $\operatorname{Ind} X$, $\operatorname{ind} X$

下述命题把 $\dim X$ 与分别在所有 (度量) 紧统类、所有可度量化空间类以及所有可分可度量化空间类上定义的一切其他的维数不变量区别开来，因此对这些空间也就解决了维数的公理化定义的问题. 只有满足下列条件 1), 2), 3) 的且定义在所有 (度量) 紧统 X 的类 $\mathscr{K}$ 中的维数不变量 $d(X)$ 才有维数 $\dim X=\operatorname{Ind}X=\operatorname{ind} X$ (Александров 定理 (Aleksandrov theorem)).

条件 1) (Poincaré 公理 (Poincaré axiom)). 如果空间 X 属于类 $\mathscr{K}$，并且 $d(X)$ 等于非负整数 n，则 X 包含一个满足 $d(X_0)<n$ 的闭子空间 X_0，使得集合 $X\backslash X_0$ 是不连通的

条件 2) (有限和公理 (finite sum axiom)). 若类 $\mathscr{K}$ 中空间 X 是两个闭子空间 X_1 和 X_2 的并，其中 $d(X_1)\leqslant n$, $d(X_2)\leqslant n$，则也有 $d(X)\leqslant n$

条件 3) (度量形式的 Brouwer 公理 (Brouwer axiom)) 如果 X 是 $\mathscr{K}$ 中的空间，且 $d(X)$ 是非负整数 n，则存在一个正数 ε，使得对于 X 在某 ε 映射下的每个象空间 Y 有不等式 $d(Y)\geqslant n$ 此处从紧统 X 到紧统 Y 上的映射 f 称为 ε 映射 (ε-mapping)，如果它是连续的，并且每一点 $y\in Y$ 的完全原象 $f^{-1}(y)$ 在 X 中的直径 $<\varepsilon$.

Щепин 定理 (Shchepin theorem) ([2]). 维数 $\dim X$ 是分别在所有度量空间，或所有可分度量空间 X 的类中定义的唯一的维数不变量 $d(X)$，它满足下列条件 (Щепин 定理)

条件 1) (Poincaré 公理 (Poincaré axiom)) 见上.

条件 2) (可数和公理 (countable sum axiom)). 如果属于类 $\mathscr{K}$ 的空间 X，是可数多个闭子空间 $X_k(k=1,2,\ldots)$ 的并，每个子空间都有 $d(X_k)\leqslant n$，则也有 $d(X)\leqslant n$

条件 3) (一般形式的 Brouwer 公理 (Brouwer axiom)). 如果属于类 $\mathscr{K}$ 的空间 X 有 $d(X)\leqslant n$，则存在 X 的有限开覆盖 ω，使对 $\mathscr{K}$ 中 X 在某 ω 映射下的每个象空间 Y 有 $d(Y)\geqslant n$ 此处从有固定开覆盖 ω 的空间 X 到空间 Y 上的映射 f 称为 ω 映射，如果 Y 的每一个点 y 都有一个邻域 O_y，它的完全原象 $f^{-1}(O_y)$ 包含在 ω 的某一成员中.

参考文献

[1] Александров, П С, в кн Тр Международного симпозия по топологии и ее применениях Херцег-Нови 1968, Beograd, 1969, 38-42

[2] Щепин, Е, «Докл АН СССР», 206 (1972), 1, 31-32

[3] Александров, П С, Пасынков, Б А, Введение в теорию размерности, М, 1973

А А Мальцев 撰

【补注】 在[A1]中也可以看到关于维数不变量公理的简洁讨论.

参考文献

[A1] Engelking, R, Dimension theory, North-Holland & PWN, 1978

许依群、罗嵩龄、徐定宥 译

维数多项式 [**dimension polynomial**, **размерностный многочлен**], *微分域扩张的*

一个表示偏微分方程组的解中所含微分常数的个数的多项式，与 **Hilbert 多项式** (Hilbert polynomial) 类似.

设 G 为微分域 F 的微分扩张 (见**微分域的扩张** (extension of a differential field)), G 中在 F 上微分可分无关的最大子集称为 F 上的微分不可分基 (differential inseparability basis) F 上的扩张 G 的微分不可分基若在 F 上微分代数无关，则称为微分超越基 (differential transcendence basis).

设 G 为有限生成微分扩张, $G=F\langle\eta_1,\cdots,\eta_n\rangle$, 其中 $(\eta_1,\cdot,\eta_n)$ 为一素微分理想 $\mathfrak{p}\subset F\{Y_1, \ ,Y_n\}$ 的泛零点. G 在 F 上的微分超越次数称为 $\mathfrak{p}$ 的微分维数 (differential dimension) (表为 $d(\mathfrak{p})$), 若 $\mathfrak{q}$ 为另一素微分理想，且 $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}$, 则 $d(\mathfrak{p})\geqslant d(\mathfrak{q})$, 即使在严格包含的情况下，等号也能出现. 所以需要有一个比度量理想的更精细的度量.

微分多项式环 $F\{Y_1, \ ,Y_n\}$ 由按照实施导子 $\theta\in\Theta$ 的次数排列的滤链诱导出 F 的扩域 $G=F\langle\eta_1, \ ,\eta_n\rangle$ 上的滤链

$$F=\mathscr{C}_0\subset\mathscr{C}_1\subset$$

存在一个多项式 (见[2])，它在所有 $s\in\mathbf{Z}$, $s\geqslant N_0$ 上的值等于 F 的扩张 $\mathscr{C}_s$ 的超越次数，称为扩张 G/F 的维数多项式，它具有形式

$$\omega_{\eta/F}(x)=\sum_{0\leqslant i\leqslant m}a_i\binom{x+i}{i},$$

其中 m 为求导算子集合 Δ 中元素的个数，a_i 为整数 维数多项式是域的双有理不变量，即由 $F(\eta)=F(\zeta)$ 可推出 $\omega_{\eta/F}=\omega_{\zeta/F}$, 但它不是微分双有理不变量，即由 $F\langle\eta\rangle=F\langle\zeta\rangle$, 一般推不出 $\omega_{\eta/F}=\omega_{\zeta/F}$ 尽管如此，这个多项式仍包含一些微分双有理不变量，例如多项式的次数 $\tau=\deg\omega_{\eta/F}$ (称为 F 上扩张 $F\langle\eta\rangle$ 的微分型 (differential type of the extension)) 及首项系数 a_τ 称为型微分维数 (typical differential dimension)) 在一个微分扩张的相应于所有不同微分生成系的微分维数多项式中，存在对所有数值多项式集合上某种序关系来说是最小的一个，因而它是这个扩张的微分双有理不变量

对微分模也可以定义微分维数多项式.

下述方程组 (见[1], 文中将维数多项式称为域的方程组的刚度) 所给定扩张的维数多项式已经算出 1) 波方程，2) 真空的 Maxwell 方程，3) 位势所给出的电磁场方程，4) 真空的 Einstein 方程，其他计算维数多项式的例子可在 [3] 中找到

参考文献

[1] Einstein, A, The meaning of relativity, Princeton Univ Press, 1953

[2] Kolchin, E R, Differential algebra and algebraic groups, Acad Press, 1973

[3] Михалев, А В, Панкратьев, Е В, в кн Алгебра, М, 1980, с 57-67

Е В. Панкратьев 撰

【补注】 关于微分可分无关性，微分超越次数和微分代数无关性的概念见**微分域的扩张** (extension of a differential field)

裴定一 译 赵春来 校

维数论 [**dimension theory**; **размерности теория**]

拓扑学的一个分支，对任意紧统乃至对拓扑空间的更一般类，存在以某种自然方式定义的数值拓扑不变量，即**维数** (dimension). 若 X 是多面体 (特别是流形)，其维数与它在初等几何或微分几何意义下的坐标个数一致. L. E J Brouwer (1913) 最早给出维数的一般定义，他是对紧统甚至对更广的完全度量空间类给出的. 这个定义归纳地构造如下 规定空集的维数为 -1 假设维数 $\leqslant n$ 的空间已有定义，因而它们的子集已有定义 如果 X 中任意两个不交闭集 A 和 B 之间存在一个维数 $\leqslant n$ 的划分 Φ, 则说空间 X 有维数 $\leqslant n+1$ (这里，空间 X 中两个集合 A 与 B 之间的划分 (partition) 是 X 的一个闭子集 Φ, 使得补集 $X\backslash\Phi$ 是两个不交开集 C 与 D 的和，其中一个包含 A, 而另一个包含 B) 1921 年 П.С.Урысон 与 K Menger 各自独立于 Brouwer 给出了在紧统以至任意可分度量空间的情形下等价的定义，它不同于 Brouwer 定义之处是两个闭集 A 和 B 之一假定由单点组成 在 Brouwer 及 Урысон-Menger 的意义下，对于任意 Hausdorff 空间可以描述维数的定义 他们所确定的拓扑不变量分别称为大归纳维数 (large inductive dimension) 和小归纳维数 (small inductive dimension)，记为 $\operatorname{Ind}X$ 和 $\operatorname{ind}X$. 总有 $\operatorname{ind}X\leqslant\operatorname{Ind}X$

H Lebesgue 首创了一种完全不同的研究维数概念的方法，他建立了下述定理 在初等几何意义下，对任何正数 ε, n 维立方体 Q^n 可以用有限多个直径小于 ε 的闭集 (乃至立方体) 覆盖，依这样的方式，覆盖的重数 (或阶数) 是 $n+1$, 但对于充分小的 $\varepsilon>0$, 不存在重数小于 $n+1$ 且直径小于 ε 的闭集组成的 Q^n 的覆盖 (这里某 (有限) 集族的重数是指如下的最大整数 m 给定集族中存在 m 个具有非空交的集合). 今天，可以重新叙述 Lebesgue 定理如下 立方体 Q^n 的坐标数是这

样的最小整数 n，使得存在由闭集组成的重数为 $n+1$ 的任意细（即其成员的直径任意小）的覆盖．这个定理由 Brouwer 首先证明，并导出了如下定义．紧统 X 的（覆盖）维数（dimension of a compactum）$\dim X$ 是指如下最小数 n 使得对任意 $\varepsilon>0$，紧统 X 有由直径 $\leqslant\varepsilon$ 的闭集组成的重数为 $n+1$ 的覆盖，在这个定义的叙述中，用开集代替闭集并不改变它的内涵

在定义紧统 X 的维数时，使用了集合的直径的概念，虽然它与 X 的度量有关，但我们宁愿说它是与拓扑有关．可以证明，这样定义的数 $\dim X$ 仍然是 X 的一个拓扑不变量，即两个同胚的紧统有相同的维数．这个事实可以直接得出．但也不难由下面的事实推出 $\dim X$ 也可由仅与 X 的拓扑有关的直接的拓扑定义给出．

给定拓扑空间的覆盖（covering）是开子集的任意有限族，它们的并是整个空间　覆盖 α' 比覆盖 α 细，如果 α' 内接于 α，即 α' 的每个成员至少是 α 中一个成员的子集．于是维数 $\dim X$ 可定义如下　$\dim X$ 是使 X 的每个覆盖都有一个内接于它的重数为 $n+1$ 的覆盖的最小整数 n　显然这个定义不仅对紧统，而且对任意拓扑空间都适用，因而也能用来定义它们的维数　按这种方式对拓扑空间定义的维数 $\dim X$ 使人们能构造出一种有意义的理论，它有丰富的数学内涵，至少对正规空间类（因此，特别地对可度量化空间类）是这样

维数论的主要问题之一是确定使基本 Урысон 恒等式，即

$$\operatorname{ind} X=\operatorname{Ind} X=\dim X$$

成立的最广泛的条件．这样一来，此恒等式对所有可分的可度量化空间成立，即所有具有可数基的正规空间以及对局部紧 Hausdorff 群成立（Пасынков 定理 (Pasynkov theorem)）．不假定可分性则可以断言，对于可度量化空间仅有 Катетов 公式（Katětov formula）

$$\operatorname{ind} X\leqslant\operatorname{Ind} X=\dim X$$

成立，而对 Hausdorff 紧统仅有 Александров 公式（Aleksandrov formula）

$$\dim X\leqslant\operatorname{ind} X\leqslant\operatorname{Ind} X$$

而且，存在使 $\dim X\neq\operatorname{ind} X$ 的 Hausdorff 紧统 X（Лунц-Локуциевский 例子（Lunts-Lokutsievskiĭ example））以及使 $\operatorname{ind} X\neq\operatorname{Ind} X$ 的 Hausdorff 紧统 X（Филиппов 例子 (Filippov example)）．

下面的 Небелин-Понтрягин 定理（Nöbeling-Pontryagin theorem）是很有用的　拓扑空间 X 同胚于有限维 Euclid 空间的子空间的充要条件是，X 为具有可数基的有限维正规空间．这样就能将有限维紧统以及一般的具有可数基的有限维正规空间看作 Euclid 空间的子空间

与此有关，所谓 ε 移位定理（theorem of ε-shifts）是特别重要的　在某 Euclid 空间 $\mathbf{R}^m$ 中，紧统 X 有维数 $\dim X\leqslant n$，当且仅当对任意 $\varepsilon>0$，用空间 $\mathbf{R}^m$ 中的 ε 移位可将它变成维数 $\leqslant n$ 的多面体（这里，Euclid 空间 $\mathbf{R}^m$ 的子空间 X 的 ε 移位是 X 到包含它的 Euclid 空间 $\mathbf{R}^m$ 内的一个连续映射 f，在此映射之下，任一点 $x\in X$ 与其象 $f(x)$ 之间的距离 $\rho(x,f(x))$ 小于 ε）这个定理的直观意义在于把具有给定有限维数 n 的每个紧统看作某 Euclid 空间 $\mathbf{R}^m$ 的一个集合，能通过一个任意小的变形（由 ε 移位构成）把它变为同维数（而不是更小维数）的多面体．和紧统的维数 $\dim X$ 的定义一样，这个定理可以用纯拓扑语言描述，其中“任意小的”数 $\varepsilon>0$，可用“任意细的”覆盖来代替．这样就能描述任意正规空间的一个类似定理，并得出下述结论．在某种（更形象的）几何意义下，每个 n 维正规空间最多“相差任意小”地“相似”于 n 维多面体．

维数论中主要定理之一是所谓本质映射定理（theorem on essential mappings），它是这一理论重要部分的基础．设 f 是从（正规）空间 X 到以 S^{n-1} 为边界的 n 维球 Q^n 上的连续映射．设 $\Phi\subset X$ 是在这个映射之下球面 S^{n-1} 的原象，$\Phi=f^{-1}S^{n-1}$　映射 $f\ X\to Q^n$ 称为本质的（essatial），如果在所有点 $x\in\Phi$ 上与 f 一致的每个连续映射 $g\ X\to Q^n$ 都是到整个球 Q^n 上的映射　著名的 Александров 定理（Aleksandrov theorem）说，正规空间 X 有维数 $\dim X\geqslant n$，当且仅当 X 可被本质地映射到一个 n 维球上　由这个定理可以得出和定理（对于紧统，在维数论发展初期已由 Урысон 及 Menger 给出证明）如果维数 $\dim X=n$ 的（正规）空间 X 是有限或可数多个闭子集 Φ_k 的并，则这些 Φ_k 中至少有一个满足 $\dim\Phi_k=n$

关于本质映射的定理是所谓的同调维数论（homological dimension theory）的基础，它使我们能应用代数拓扑的方法在更为一般的假设下研究维数　**空间的同调维数**（homological dimension of a space）的概念与闭链和同调的概念有关，因此假定，与拓扑空间 X 同时还给定一个交换群 $\mathfrak{G}$，称之为系数群　于是可以谈论具有这个系数群的紧统 X 的闭链，它们的支撑 $\Phi\subset X$，特别是谈论 X 中关于系数域 $\mathfrak{G}$ 同调于零的闭链，这里，这些概念在 Александров-Čech 同调论及在 Vietoris 同调论两种意义下视为等价

在这以后，人们可将具有系数群 $\mathfrak{G}$ 的紧统 X 的同调维数定义为使 X 有在 X 中同调于零，但在它的某一支撑 Φ 上不同调于零的 $n-1$ 维闭链 Z^{n-1} 的最大整数 n　于是，如果 $\dim X<\infty$，则 $\dim X$ 是关于群 κ 的同调维数，其中群 κ 是所有实数群关于整数子群的商群，并且是所有同调维数中的最大者

若从闭链和同调变为上闭链和上同调，则得到**上同调维数**（cohomological dimension） 此外，紧统关于给定离散群 𝔄 的上同调维数就是在 Понтрягин 特征理论的意义下与 𝔄 对偶的紧 Hausdorff 群 𝔅 的同调维数．因此推得，如果 $\dim X<\infty$，则 $\dim X$ 与整数群的上同调维数一致

关于参考文献见**维数**（dimension）

П С Александров 撰

【补注】 小归纳维数与大归纳维数通常分别对正则空间类和正规空间类定义．除这些空间类之外，它们的性质不健全

Катетов 公式是由 K 森田（Morita）独立得出的

罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

量纲分析 [dimensional analysis, размерностей анализ]

一种建立所研究现象的重要物理量之间关系的方法，该方法是以讨论这些量的量纲为基础的 在量纲分析中讨论各种计量单位制的建立问题，基本量及其相应的实验计量单位的选择问题以及与基本计量单位的选择相关联，为那些通过基本量定义的量构造导出计量单位的问题

基本计量单位的量的选择有多种可能性 不同应用领域按其需要和方便选择各自特有的单位作为基本计量单位．由于这一原因及已有的习惯用法，实际上已建立了多种计量单位制，从而产生了从一个计量单位制至另一单位制的转换（换算）问题 很多计量单位制得到了广泛的应用，其中主要的有 CGS 制，其基本单位是厘米、克-质量和秒，MKS 制，其基本单位是米，公斤-力和秒，及 SI（国际单位）制，其基本单位是米，公斤-质量，秒，安培，开尔文和坎德拉．已有的和有可能被采纳的计量制中的基本计量单位的个数可以不同 可少于三个，等于三个，如在 CGS 和 MKS 制中那样，或别的数目．通过基本单位来表示的导出计量单位的表达式称为**量纲公式**（dimension formula），它能按基本计量单位的符号来写出，且为单项式形式 例如，CGS 制中，量纲公式包含三个自变量，长度单位 L，时间单位 T 和质量单位 M，在按质量和加速度定义力的基础上，力 K 的量纲公式的形式为

$$K=\frac{ML}{T^2}=MLT^{-2} \tag{1}$$

CGS 制中，任一力学的、热学的或电磁学性质的量 N 的公式形式为

$$N=L^l T^t M^m, \tag{2}$$

这里指数 l, t, m 是整数或分数，称为 N 的**量纲指数**（dimension exponents），或**维数**（dimensionality）不言而喻，基本量的维数相对于该量本身等于 1，而相对于任何其他基本量则为零．

基本计量单位改变时，量纲公式可以用于决定相应特征量换算的数值尺度因子 假如要由给定的长度单位 L，时间单位 T 和质量单位 M 转换为新的单位，长度减为 α 分之一，时间为 β 分之一，质量为 γ 分之一，则根据量纲公式（2），量 N 的新计量单位将为原来的 $\alpha^l\beta^t\gamma^m$ 分之一．

如果 $l=t=m=0$，则此量的数值与基本单位的尺度无关，这样的量是无量纲的（dimensionless）或**抽象的**（abstract） 无量纲量的例子有 Reynolds 数 $\mathrm{Re}=\rho vl/\mu$，Froude 数 $\mathrm{Fr}=v^2/\sqrt{gl}$，Mach 数 $\mathrm{M}=v/a$，和空化数 $\kappa=2\Delta P/\rho v^2 l^2$，这里对一些在某些现象中有代表性的量纲量采用下述记号 ρ —— 密度，v —— 速度，l —— 线性尺度，μ —— 动力学粘性系数，ΔP —— 特征压差，以及 g —— 重力加速度．

基本计量单位的数目可以增加，如果除已选的基本计量单位以外，同意为某些其他量选择独立计量单位 例如，可以独立地取这样一些单位 对热能取卡（=4 1868 焦耳），对机械能——公斤-米，并附加关系 I 是以卡表示的热能或以公斤-米表示的机械能，这里 I 是一个有量纲的"物理"常数，称为热功当量

含有量纲常数的物理定律可用来减少基本计量单位的数目．例如，不变的光速可认为是绝对常数，亦即一无量纲量 这样，就可以把长度的量纲和计量单位通过时间的量纲和计量单位来表示．又如，当把引力常数视为一绝对无量纲数时，则可将质量的量纲和计量单位通过长度 L 和时间 T 的量纲和计量单位来表示．

在某些问题中，存在一种引入一个统一、普适的计量单位制以进行标准化的明显趋势 然而，这种将普适计量单位制与具体的物理上已确定的尺度或与相应的物理常数相联系的做法是人为的．相反，使用任意计量单位的可能性和所观察的定律对于计量单位的选取的无关性，可以成为有价值结论的源泉

一般地讲，物理定律是独立于计算单位制的 这一情况决定了通过有量纲量表达的与单位制无关的物理定律的函数和泛函的特殊结构 泛函关系的这一特殊结构由 π 定理来确立 每一种有物理意义的有量纲的特征量间的关系实质上都是抽象无量纲组合间的关系，这些组合由被确定的或需确定的有量纲量组成，其中应包括对被考察现象有意义的有量纲物理常数

在所研究问题的关系式中，在缺少某些物理常数时的附加数据，将导至这些关系中重要自变量的减少．例如，在所考察的热学或力学现象中，如果没有从以卡计量的热能至以尔格（$=10^{-7}$ 焦耳）计量的机械能的转换，则热功当量将从描述相应规律的函数的自变量中消失

为借助量纲分析获得有益的结论，必须对问题加以概括，而首先要对被考察对象的现象与性质确定一普遍模型 在很多情况下，这种概括可以与一系列工作假设联系起来 在有些模型的框架中建立这样一些特征量的系统，这些量由物理关系来联系，根据 π 定理，它们也必定是无量纲参数之间的关系 这样，必须引入一个常量或变量的主定参数系统，该系统随不同类型问题的提法而定，并一般能完整地表征所给领域的特定问题

在确定主定参数的最少个数时，必须考虑对称条件和选择有利的坐标 独立变量（在空间和时间的点坐标）和物理参数，诸如热传导系数、粘性系数、弹性模量等，应包括在主定参数表内 当重力或以卡计量的热能向以公斤 - 米（或以尔格）计量的机械能的转换是重要的时候，重力加速度或热功当量之类的常数也应出现在主定参数表中

对于特殊类的问题，在主定参数中还必须包括被考察物体边界的和给定函数的有量纲或无量纲的特征量，它们组成初始、边界或其他条件

如果所研究的问题提为一个数学问题，则可对如下形式的关系写出自变量的全表

$$a = f(a_1, \quad, a_n), \tag{3}$$

这里 a 是未知量，$a_1,\quad, a_n$ 是主定参数 依问题提法的不同，数 n 可以是有限或无限的 通常，通过对所研究的该类问题适当加工，可将问题限制成这样的情况 n 是有限的且不大 参数 $a_1,\quad, a_n$，由在基本方程、边界条件和初始数据中出现的给定量组成 主定参数都是原始数据，它们根据数学问题的提法必须事先知道，以便通过各种途径求出未知函数，包括用专用机进行计算或通过模拟系统得到．

在所需答案是通过实验而获得的情况下，主定参数是一些能表征每一单独试验的量，是一些为重复和对比不同实验所必须且足够的量．

当模型和描述所研究现象的方程的详细性质一般为未知时，也可以写出主定参数系统 这依靠下述条件就够了，即进入或可能进入模型定义的预备数据或关于给定函数形式和常数的假设，以及能区分出问题具体解的其他条件

量纲分析的结论是在断言存在形式（3)的关系的 π 定理基础上得到的，此关系对任何计量单位制下的待求量和主定量 $a_1,\cdot\ , a_n$ 都成立

(3)中的自变量系统在量纲理论的意义上必须是完整的．这意味着，如果量 a 既非零，亦非无穷，则存在数 $\alpha_1,\quad, \alpha_n$，对于它们，a 和组合 $a_1^{\alpha_1}\quad a_n^{\alpha_n}$ 的量纲相同 应用这一结果和 π 定理，关系（3)可改写成下列形式

$$\pi = \frac{a}{a_1^{\alpha_1}\quad a_n^{\alpha_n}} = g(\pi_1,\quad, \pi_{n-k}), \tag{4}$$

这里 $\pi_1,\cdot\ ,\pi_{n-k}$ 是由 $a_1,\quad, a_n$ 组成的无量纲幂次单项式（类似于 $\pi=3\ \ 14\quad$），$k \leqslant n$，数 k 等于 a_1，$, a_n$ 中具有独立量纲的参数数

将物理定律以（4)的形式显式写出后，应用量纲分析的可能性实际上就完成了 这样得到的相应结果具有局限性 如果用任何不引入新参数的方法将运动方程加以变形，则物理定律（4)可能大大改变，但 4)所含的主要结论仍有效．

存在一系列应用量纲分析和 π 定理而获得富有成效的结论的例子和建立处理实验结果的简捷方法的例子．减少未知函数中的自变量数可得到特殊的效益 这种减少是由 π 定理保证的，而且，在许多情况下，只需应用实验数据或者应用某些关于所研究问题中重要效应的机理的假设，根据问题的提法就能达到

主要的实际用处在于建立了一种可能性，它能将一些条件下的实验结果转换成另一些条件下的结果，而在这些条件下实验尚未做过．例如，根据水在一定尺寸管道中流动的实验，就能自动给出想要的水在同一形状但不同尺寸管道中流动的结果，以及油、空气等在管道中的运动结果．然而，这类由一种实验到另一种实验的结果转换，必须保证相应情况下的无量纲参数值相等．有些量的值容易由进行实验的几何条件提供 而另一些参数值则与完成实验的物理 - 力学条件有关．

由问题的提法来建立未知解的自相似是应用量纲分析的例子 自相似（self - similarity）的性质的内涵如下．在对给定问题求数学解的第一步处理中，可以指出函数的独立自变量，它们通常是空间某区域内点的三个坐标和时间．除这些变量外，在未知函数的自变量中还可能出现若干给定的常参量，它们是在描述所研究模型的性质及挑选具体公式化的问题时产生的．每一问题均可用无量纲度量来表示，这既是对未知函数，也是对它们的独立自变量而言的．自相似事实上就表现为独立无量纲变量的个数比有量纲变量的个数减少了

在一些具有球面、柱面和平面波的一维非定常流动问题的理论中已取得自相似的有效结果，这时只有两个独立变量——具有长度量纲的坐标 r 和时间 t 假如根据出现在问题提法中的有量纲主定常数不可能形成两个组合，一个带有长度量纲，另一个带有时间量纲，那么，无量纲未知函数中唯一的无量纲自变量将是形如 $\lambda = Cr/t^{\alpha}$ 的参数，这里 α 是一个指数，C 是一个有量纲常数，它通过问题提法中给定的常数来表示．特别地，假如一个数学问题归结为求解 r 和 t

的偏微分方程组，则在存在仅只一个变参量 λ 时，r 和 t 的偏微分方程组就能转换成只有一个独立变量 λ 的常微分方程组，其结果是数学问题被大大地简化．用这一方法获得了许多实际重要问题的解，例如，大气中原子弹爆炸引起的空气受扰运动的问题．

自相似过程的量纲分析的研究，不仅能将偏微分方程组简化为常微分方程组，而且能获得未知函数间的最终关系（这些方程的积分），使得有可能找到某些自相似问题的封闭公式形式的解　这些方法已在求解大气中强爆炸问题，和爆炸波在初始态密度沿半径按指数规律变化的气体介质中传播的问题得到了展示．这些问题被提为星体爆炸的极度概括的模型

量纲分析与**相似理论**（similarity theory）中研究的物理相似概念密切相关

参考文献

[1] Bridgeman, P V , Dimensional analysis, Yale Univ Press, 1937

[2] Седов, Л И , Методы подобия и размерности в механике, 9 изд , М , 1981（中译本　谢多夫, Л И , 力学中的相似方法与量纲理论，科学出版社，1982）

Л И Седов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Birkhoff, G , Hydrodynamics, Princeton Univ Press, 1960

唐福林 译　沈青 校

Dini 准则 [Dini criterion, Дини признак]

如果周期为 2π 的函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上是可积的，且对固定的数 $S(-\infty<S<+\infty)$ 和任意的 $\delta>0$，在点 x_0 上满足条件

$$\int_0^\delta |f(x_0+x)+f(x_0-x)-2S|\,\frac{dx}{x}<\infty,$$

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x_0 上收敛于 S　这个准则是 U Dini 证明的（[1]）　在下述意义下，它是一个精确的命题　如果 $\mu(t)\geqslant 0$ 是一个连续函数，使得函数 $\mu(t)/t$ 在点 $t=0$ 的邻域内是不可积的，则可找到连续函数 (x)，其 Fourier 级数在 $t=0$ 上发散，且对小的 t，有

$$|f(t)-f(0)|\leqslant\mu(t)$$

参考文献

[1] Dini, U , Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale, Pisa, 1880

[2] Zygmund, A , Trigonometric series, 1, Cambridge Univ Press, 1979

Б И Голубов 撰　张鸿林 译

Dini 导数 [Dini derivative, производное число Дини]，导出数（derived numbers）

实变函数论中的一个概念　上右 Dini 导数（upper right-hand Dini derivative）Λ_α 定义为商 $(f(x_1)-f(x))/(x_1-x)$ 当 $x_1\to x\,(x_1>x)$ 时的上极限．下右 Dini 导数（lower right-hand derivative）λ_α、上左 Dini 导数（upper left-hand Dini derivative）Λ_g、下左 Dini 导数（lower left-hand Dini derivative）λ_g 也可类似地定义．若 $\Lambda_\alpha=\lambda_\alpha$（$\Lambda_g=\lambda_g$），则称 f 在点 x 有单边右（左）Dini 导数，如果所有四个 Dini 导数相等且有限，则通常导数存在．Dini 导数为 U Dini（[1]）引进　如 Н. Н. Лузин 所证明，若所有四个 Dini 导数在一集合上为有限，则函数在此集合上几乎处处有通常导数

参考文献

[1] Dini, U , Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veranderlichen reellen Grosse, Teubner, 1892（译自意大利文）

[2] Saks, S , Theory of the integral, Hafner, 1952（译自波兰文）

Т П Лукашенко 撰

【补注】 Dini 导数的英文名还有 Dini derivates，四个 Dini 导数也常用记号 $D^+f(x)$, $D_+f(x)$, $D^-f(x)$, $D_-f(x)$ 表示．

郑维行 译

Dini-Lipschitz 准则 [Dini-Lipschitz criterion, Дини-Липшица признак]

如果以 2π 为周期的连续函数 f 满足条件

$$\lim_{\delta\to+0}\omega(\delta,f)\ln\frac{1}{\delta}=0$$

其中 $\omega(\delta,f)$ 是函数 f 的连续模，则它的 Fourier 级数在整个实轴上一致收敛到 f　这个准则是由 U Dini 证明的（[1]），当 $\omega(\delta,f)=O(\delta^\alpha)\,(\delta\to+0)$ 时对任意 $0<\alpha\leqslant 1$ 成立的特殊情形则是由 R Lipschitz 建立的（[2]）　Dini-Lipschitz 准则在下述意义下是不可能改进的（准确）陈述　如果 $\omega(\delta)$ 是满足条件

$$\overline{\lim_{\delta\to+0}}\,\omega(\delta)\ln\frac{1}{\delta}>0$$

的任意一个连续模，则存在一个以 2π 为周期的连续函数 f_0，它的 Fourier 级数在某些点上发散，但连续模 $\omega(\delta,f_0)$ 满足条件 $\omega(\delta,f_0)=O(\omega(\delta))$

参考文献

[1] Dini, U , Sopra la serie di Fourier, Pisa, 1872

[2] Lipschitz, R , De explicatione per series trigonometricas instituenda functionum unius variabilis arbitrariarum, etc , *J Reine Angew Math* , **63**(1864), 2, 296－308

[3] Lebesgue, H , Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfiasants à une condition de Lipschitz, *Bull Soc Math France*, **38**(1910), 184－210

[4] Никольский, С М ,《Докл АН СССР》, **73**(1950), 3, 457－460

[5] Бари, Н К , Тригонометрические ряды, М , 1961（英译本　Bary, N K (N K Bari), A treatise on tri-

gonometric series, Pergamon, 1964)

Б.И.Голубов 撰 朱学贤 译 潘文杰 校

Dini 定理 [Dini theorem, Дини теорема]，关于一致收敛性的

如果函数 u_n ($n=1,2,\dots$) 在区间 $[a,b]$ 上是连续的、非负的，并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 之和是 $[a,b]$ 上的连续函数，则此级数在 $[a,b]$ 上一致收敛．Dini 定理可以推广到函数 u_n 的定义域为任意**紧统** (compactum) 的情况．　Л Д Кудрявцев 撰 张鸿林 译

Dinostratus 割圆曲线 [Dinostratus quadratrix; Динострата квадратриса]

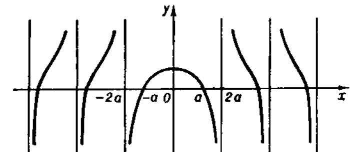
超越平面曲线，在 Descartes 直角坐标系中其方程为

$$y=x\cot\frac{\pi x}{2a},$$

在极坐标中，其方程为

$$\rho=\frac{a(\pi-2\varphi)}{\pi\cos\varphi}$$

Dinostratus 割圆曲线具有无穷多个分支（见图)，它们与 x 轴相交于点 $x=\pm a,\pm 3a,\pm 5a,\dots$，并具有渐近线 $x=\pm 2a,\pm 4a,\pm 6a,\cdots$ 它们与直线 $y=2a/\pi$ 的交点是拐点



伊利斯的 Hippias (公元前 420 年) 首先考虑了割圆曲线．Dinostratus (公元前 4 世纪后半期) 证明 可以借助于割圆曲线用作图法解决**化圆为方问题** (quadrature of the circle)．　Д Д Соколов 撰

【补注】 这一曲线也称为 Hippias 割圆曲线 (Hippias quadratrix)，见 [A1]

参考文献

[A1] Lawrence, J D, A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972

[A2] Ffadt, K, Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven, Akad Verlagsgesell, 1962

张鸿林 译

Diophantus 分析 [Diophantine analysis, Диофантов анализ]

见 **Diophantus 几何** (Diophantine geometry)

Diophantus 逼近的度量理论 [Diophantine approximation, metric theory of, Диофантовых приближений метрическая теория]

研究具有特殊逼近性质的数的度量性质的一个数论分支（见 **Diophantus 逼近** (Diophantine approximations)，**数的度量理论** (metric theory of numbers)) 这个理论最初的定理之一是 Хинчин 定理 (Khinchin theorem) ([1],[2])，按现代形式 ([3])，它可以描述如下．设 $\varphi(q)>0$ 是对整数 $q>0$ 定义的一个单调递减函数，那么对几乎所有的实数 α，不等式 $\|\alpha q\|<\varphi(q)$ 在整数 $q>0$ 中有无穷多个解，如果级数

$$\sum_{q=1}^{\infty}\varphi(q) \tag{1}$$

发散，或者只有有限多个解，如果级数 (1) 收敛（这里及以后，$\|x\|$ 表示 x 到最近整数的距离，即

$$\|x\|=\min|x-a|,$$

其中极小是取在所有整数 a 上的，“几乎所有”是指在相应空间的 Lebesque 测度意义下） 这个定理描述了几乎所有实数用有理数逼近的精度．例如，对几乎所有 α，存在无穷多个有理逼近 a/q 满足不等式

$$|\alpha-a/q|<\frac{1}{q^2\ln q},$$

反之，对任意 $\varepsilon>0$，不等式

$$|\alpha-a/q|<\frac{1}{q^2(\ln q)^{1+\varepsilon}}$$

只能对测度为零的数 α 的集合有无穷多解．

这个定理到联立逼近的推广 ([3]) 如下所述 不等式组

$$\max(\|\alpha_1 q\|,\dots,\|\alpha_n q\|)<\varphi(q) \tag{2}$$

对几乎所有 $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbf{R}^n$ 有有限个解还是无穷多个解，依赖于级数

$$\sum_{q=1}^{\infty}\varphi^n(q) \tag{3}$$

收敛还是发散

还可进一步推广到多个整数变量的不等式组的情形（见 [5])

Хинчин 定理和它的很多推广的一个突出特征在于 形式为 (1)，(3) 的级数的“收敛 - 发散”性质可以作为一个准则来区分相应的逼近阶适用于测度为零的数还是几乎所有的数的集合．它是 Diophantus 逼近的度量理论中的一种“0-1”定律．这些推广的另一特征是把所涉及的数的度量性质归之于在包含参与逼近的数的整个空间中所定义的测度，而且空间的测度被定义为坐标空间测度的乘积．例如，在组 (2) 的情形下，人们讲到 n 个“独立”数的逼近以及在 $\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}$ (n 个) 中的 Lebesque 测度 因此，这一部分理论被称为独立变量 Diophantus 逼近的度量理论 它已经有了很好的发展，但是到目前 (1988) 为止还有一些没有

解决的问题．这些问题之一是对区间 $[0,1]$ 上的可测集合序列 $A(q)$ $(q=1,2,\quad)$ 必须加上怎样的条件，才能使得级数 $\sum_q|A(q)|$ 收敛或发散，与此相应的是，对几乎所有的数 α，条件 $\alpha q\in A(q) \bmod 1$ 被有限多次还是无穷多次满足 对一组数 $(\alpha q,\quad,\alpha_n q)$ 也有类似的问题（[4]）

相关变量的 Diophantus 逼近的度量理论发展较晚，它直接产生几个基本的和独特的问题（[5]）．首先起源于超越数论（Mahler 猜想（Mahler conjecture））并与对数组 $t,\quad,t^n$ 的有理联立逼近有关，这里是对几乎所有的数 t 和固定的自然数 n，关于这个课题，最近得到一个结果如下 设 $\varphi(q)>0$ 是一个单调递减函数，并且级数

$$\sum_{q=1}^{\infty}\varphi(q)/q$$

收敛，那么对几乎所有的 t，不等式组

$$\max(\|tq\|,\quad,\|t^n q\|)<\varphi^n(q)/q^n$$

只有有限多个整数解 $q>0$（[7]）．

这个定理确信，对曲线 $\Gamma\subset\mathbf{R}^n$ 上几乎所有的点可以用有理数逼近．考虑 $\mathbf{R}^n$ 中更一般的流形，将产生类似的结果

如果流形 Γ 上（按着 Γ 上的测度）几乎所有的点 $(\alpha_1,\quad,\alpha_n)$，使得取 $\varphi(q)=q^{-1/n-\varepsilon}$ 的不等式组（2）有有限多个整数解 $q>0$，其中 $\varepsilon>0$ 是任意的，那么 Γ 称为极端的（extremal），即几乎所有的点只允许最坏的有理联立逼近 Schmidt 定理（Schmidt theorem）指出，如果 Γ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的曲线，并在它的几乎所有点上具有非零的曲率，则它是极端的（[8]）

应用三角和法（见**三角和法**（trigonometric sums, method of），亦见**Виноградов 法**（Vinogradov method））有可能发现 $\mathbf{R}^n$ 中非常一般的流形 Γ 在拓扑维数 $\dim\Gamma\geqslant\frac{n}{2}$ 的条件下的极端性 另一方面，如果 $\dim\Gamma<\frac{n}{2}$，则极端流形不可能是太一般的，它的构造将很容易确定（[9]）．

参考文献

[1] Khintchine, A Ya , Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, *Math Z*, **24** (1926), 706－714

[2] Хинчин, А Я , Цепные дроби, 4 изд , М , 1978

[3] Cassels, J W S , An introduction to diophantine approximation, Cambridge Univ Press, 1957

[4] Cassels, J W S , Some metrical theorems in diophantine approximation I, *Proc Cambridge Philos Soc*, **46** (1950), 2, 209－218

[5] Спринджук, В Г , Проблема Малера в метрической теории чисел, Минск, 1967 (英译本 Sprindzhuk, V G , Mahler's problem in metric number theory, Amer Math Soc , 1969)

[6] Sprindzhuk, V G , New applications of analytic and p-adic method in Diephantine approximations, in Axtès du congrès internat mathématiciens Nice, 1970, Gauthier-Villars, 1971, 505－509

[7] Baker, A , On a theorem of Sprindzhuk, *Proc Roy Soc Ser A*, **292** (1966), 1428, 92－104

[8] Schmidt, W , Metrische Satze uber simultane Approximation abhangiger Grossen, *Monatsh Math*, **68** (1964), 2, 154－166

[9] Спринджук, В Г , 《Тр Матем ин-та АН СССР》, **128** (1972), 2, 212－228

[10] Спринджук, В Г , в сб , Актуальные проблемы аналитической теории чисел, Минск, 1974, 178－198

В Г Спринджук 撰 徐广善 译 潘承彪 校

有效的 Diophantus 逼近问题 [Diophantine approximation, problems of effective, Диофантовых приближений проблемы эффективизации]

在 Diophentus 逼近中，求问题的有效解的方法，而这些问题通过非有效方法，即求得的结果不能用数值来表示的方法，得到的解是已知的．例如，它们包括 A Thue, C L Siegel, K Roth, W Schmidt 定理及其推广、类比和推论（见 **Thue-Siegel-Roth 定理**（Thue-Siegel-Roth theorem），**Diophantus 逼近**（Diophantine approximations））这些定理的非有效性是因为方法的逻辑构造基于假设，不能构造地确定对象的存在．这样，在有理逼近代数数的情形下，作为上述理论的一个推论所建立"好"的逼近的分母的界，依赖于这些"好的"逼近中的某一个，但它们的有效性没有被证明

问题的有效解常常包含一些主要困难．一个有效的和比较强的 Liouville 不等式（见 **Liouville 数**（Liouville number））最近才得到，证明的方法完全不同于 Thue-Siegel-Roth 方法，它还涉及超越数论有效方法的应用（见**对数线性形式**（linear form in logarithms））．最好的结果（1978）是

$$|\alpha x-y|>Cx^{-n+1+\delta},$$

其中 α 是次数 $n\geqslant3$ 的代数数，$x>0$，y 是有理整数，$c>0$ 和 $\delta>0$ 可利用 α 明确定出（[3]）．这个不等式同它的非有效类似很不同 由非有效方法对任意 $\varepsilon>0$ 得到 $-1-\varepsilon$ 代替指数 $-n+1+\delta$，但是含有一个依赖于 α 和 ε 的未知函数 c．带有一个增函数 $\varphi(n)$（例如像 n^ε）的有效不等式

$$|\alpha x-y|>Cx^{-\varphi(n)}$$

的证明是人们极感兴趣的，因为它与 Diophantus 方程 $(x,y)=0$ 的解的界有关系，其中多项式 $f(x,y)$ 定义亏格 $\geqslant1$ 的曲线（1929 年，Siegel 用非有效估计证明解数是有限的，见 **Diophantus 几何**（Diophantine geome-

ry))．

即使有效估计的阶远不如非有效方法的结果，但是可知前者依赖于问题的参数将产生一些新的结果，而这些是非有效方法不能得到的 于是，代数数对数线性型的有效估计使得 A Baker 找到许多 Diophantus 方程解的估计，特别是 Thue方程和亏格为1的特殊曲线方程，以及还给出第十判别式问题的另一解答，建立类数为2的虚二次域判别式的界，估计次数 ≥3二元型值的最大素因子的下界和一个整数多项式的无平方核的值的下界（[2]）

参考文献

[1A] Спринджук，В Г，《Изв АН СССР Сер матем》，**35**(1971)，5，991 − 1007

[1B] Спринджук，В Г，《Изв АН СССР Сер матем》，**36**(1972)，4，712 −741

[2] Спринджук，В Г，в сб Актуальные проблемы аналитической теории чисел，Минск，1974，178 −198

[3] Фельдман，Н И，в сб Актуальные проблемы аналитической теории чисел，Минск，1974，244 − 268

[4] Фельдман，Н И，《Изв АН СССР Сер матем》，**35**(1971)，5，973 − 990

[5A] Baker，A，Contributions to the theory of Diophantine equations I on the representation of integers by binary forms，*Phil Trans Rayal Soc London Ser A*，**263** (1968)，173 − 191

[5B] Baker，A，Contributions to the theory of Diophantine equations II The Diophantine equation $y^2=x^3+k$，*Phil Trans Royal Soc London Ser A*，**263** (1968)，193 − 208

[6] Baker，A，Effective methods in the theory of numbers，in Actès du Congres internat，mathématiciens Nice 1970，Vol 1，Gauthier-Villars，1971，19 − 26

В Г Спринджук 撰

【补注】 由 Baker方法得到的 δ 通常是极小的．在一些特殊情形下，可以用另外的方法改进它的值，例如，见[A1] − [A3]

第十判别问题 (problem of the 10-th discriminant)是指，除了知道的9个之外，判断类数为1的第十个虚二次域 $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$ 是否存在．结论是不存在，见**二次域**（quadratic field）

参考文献

[A1] Baker，A，Rational approximations to $2^{1/3}$ and other algebraic numbers，*Quart，J Math Oxford*，**15** (1964)，375 − 383

[A2] Bombieri，E，On the Thue-Siegel-Dyson theorem，*Acta Math*，**148**(1982)，255 − 296

[A3] Chudnovsky，G，On the method of Thue-Siegel，*Ann of Math*，**117**(1983)，325 −382

[A4] Baker，A，Transcendental number theory，Cambridge Univ Press，1975

徐广善 译 潘承彪 校

Diophantus 逼近 [**Diophantine approximations**，**Диофантовы приближения**]

研究有限个整变量的函数值逼近于零的数论分支 最初的 Diophantus 逼近问题涉及到实数的有理逼近．它的发展导致研究某些实函数在整数变量上必须取“小”值的问题 因此，Diophantus 逼近与求解整数变量的不等式——Diophantus 不等式——和求解整数变量的方程（见 **Diophantus 方程**（Diophantine equations)）有密切的联系

如果所讨论的(逼近)函数

$$F=F(x_1, \quad , x_n)$$

对整数变量 $x_1, \quad , x_n$ 是线性的，那么对函数 F 的 Diophantus逼近称为线性的 (linear)，否则称为非线性的 (non-linear) 如果 F 是关于 $x_1, \quad , x_n$ 的齐次多项式，那么对函数 F 的 Diophantus 逼近称为齐次的（homogeneous）当同时考虑至少有一个公共整数变数的几个函数 F 时，这样的 Diophantus 逼近称为联立的 (simultaneous)，按上面的定义，联立 Diophantus 逼近可以是线性的或非线性的，齐次的或非齐次的

F 的数值接近于零，不仅可以认为，对给定的 $\varepsilon>0$，

$$|F(x_1, \quad , x_n)|<\varepsilon ,$$

还可以认为

$$0\leqslant F(x_1, \quad , x_n)<\varepsilon$$

（单边逼近） 函数 F 可以依赖于在某个区域连续变化的参数，称为带参数的 Diophantus 逼近 最后，逼近函数的定义域和值域不仅可以是 Euclid 空间的子集合，也可以是完全不同的拓扑空间（见下面，p 进数域上的 Diophantus 逼近和幂级数域上的 Diophantus 逼近）

在 Diophantus 逼近中，最古老的（最简单的）问题是线性型 $\alpha x-y$ 逼近于零，其中 $\alpha>0$ 是给定的实数，x 和 y 是可变的整数（线性齐次 Diophantus 逼近)，也就是对 α 的有理逼近问题．对特殊的 $\alpha(\alpha=\sqrt{2}, 2^{1/3}, \pi)$，这个问题在很早就被研究了 (Archimedes, Diophantus, Euclid)，L Euler 和 J L Lagrange 完全弄清楚了它与**连分数**（continued fraction）的密切联系．特别地，如果 $x_1>0$，$y_1>0$，使得

$$|\alpha x_1-y_1|=\min|\alpha x-y|$$

成立，这里的最小值取在某个任意的区间 $0<x\leqslant X$ 上的所有整数 x 和所有整数 y 上，分数 y_1/x_1 是 α 展成连分数的一个渐近分数 如果 α 展成连分数的不完全部分商是有界的，那么存在一个常数 $C=C(\alpha)>0$，使得对所有整数 $x,y>0$ 有 $x|\alpha x-y|>C$．例如，对**二次无理数**（quadratic irrationality）α，这是对的，因为它展成的连分数是周期的 另一方面，对任意无理数

α，不等式 $x|\alpha x-y|<1/\sqrt{5}$ 有无穷个整数解 $x,y>0$，而且如果 $\alpha=(\sqrt{5}-1)/2$，则常数 $1/\sqrt{5}$ 不可能被更小的数代替．A A Марков 研究了不定**二元二次型**(binary quadratic form) 的最小值，使上面的命题有可能被推广 如果 α 不与 $(\sqrt{5}-1)/2$ 等价（按连分数理论的含意），那么不等式 $x|\alpha x-y|<2^{-3/2}$ 有无穷多组解，如果 α 等价于 $\sqrt{2}$，则常数 $2^{-3/2}$ 不可能被改进，如果 α 既不等价于 $(\sqrt{5}-1)/2$，也不等价于 $\sqrt{2}$，则不等式 $x|\alpha x-y|<5(221)^{-1/2}$ 有无穷多组解，等等（[1]） 常数 $5^{-1/2}$，$2^{-3/2}$，$5(221)^{-1/2}$ 是单调离散的，并有极限值 1/3.

线性非齐次 Diophantus 逼近的最简单例子是线性非齐次多项式 $\alpha x+y+\beta$ 逼近于零 其中的 α,β 是实数，x,y 是整数变量．П Л Чебышев 已经证明，对任意无理数 α 和任意 β，不等式 $x|\alpha x+y+\beta|<2$ 有穷多组整数解 $x>0$，y 这里，2不是最好的常数. H. Minkowski 已经证明，如果 $\beta\neq a\alpha+b$（这里 a,b 是整数），则常数 2 可以用最佳常数 $\frac{1}{4}$ 代替 这个命题是 H Minkowski 证明的他自己的关于非齐次线性型乘积的假设的最简单情形的一个推论 （见 **Minkowski 假设** (Minkowski hypothesis)）

Diophantus 逼近的一般理论的更复杂问题涉及到多个整数变量函数的逼近（见 **Dirichlet 定理** (Dirichlet theorem)，**Minkowski 定理** (Minkowski theorem)，**Kronecker 定理** (Kronecker theorem)） 为了方便，引进函数 $\|\alpha\|=\min|\alpha-n|$，其中最小值取在所有整数 n 上（α 和最近整数的距离）．例如，上面提到线性多项式 $\alpha x-y$ 和 $\alpha x+y+\beta$，对于整数 $x>0$，可以用 $\|\alpha x\|$ 和 $\|\alpha x+\beta\|$ 代替．从 Dirichlet 定理可以得出，对任意实数 $\alpha_1,\quad,\alpha_n$，在整数 $x>0$ 中，不等式组

$$x^{1/n}\max(\|\alpha_1 x\|,\quad,\|\alpha_n x\|)<1$$

存在无穷多组整数解．这里的 1 可以被更小的数代替（即 $n/n+1$），但是对任意 $n\geqslant 2$，最佳常数仍不清楚（1988）．但它不可能是任意的，因为以实代数数域的基底 $1,\alpha_1,\quad,\alpha_n$ 为例，已经作出了证明（[1]）．如果 $1,\alpha_1,\cdot,\alpha_n$ 在有理数域上是线性无关的，那么对任意 $\beta_1,\quad,\beta_n$ 和任意 $\varepsilon>0$，不等式组

$$\max(\|\alpha_1 x+\beta_1\|,\quad,\|\alpha_n x+\beta_n\|)<\varepsilon$$

在整数 $x>0$ 中，存在无穷多组整数解（Kronecker 定理（Kronecker theorem)） 关于非齐次联立 Diophantus 逼近的这个定理的一个重要特征是 原则上（在对 $\alpha_1,\cdot,\alpha_n$ 的齐次逼近没有特殊信息时），不可能求出当 x 增加时 ε 减少的速度．为使线性型 $\alpha_1 x+y_1,\quad,\alpha_n x+y_n$ 对任意数 $\beta_1,\quad,\beta_n$ 表示"好的"逼近，当且仅当这些线性型对一组特殊数 $\beta_1=\quad=\beta_n=0$ 不是"好的"逼近．

在 Diophantus 逼近中，有些问题虽然初看起来是不同的，但有时可以转换成紧密相关的问题 例如，**Хинчин 转换原理**（Khinchin transference principle)（[1]），方程

$$\|\alpha_1 x_1+\quad+\alpha_n x_n\|<X^{-n-\lambda},\qquad(1)$$

$$X=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|\neq 0,$$

关于整数 $x_1,\quad,x_n$ 的可解性与方程组

$$\max(\|\alpha_1 x\|,\quad,\|\alpha_n x\|)<x^{-(1+\mu)/n}\qquad(2)$$

关于整数 $x>0$ 中的可解性有关，反之亦然 如果 λ_1 和 μ_1 分别是使得 (1) 和 (2) 有无穷多解的 $\lambda>0$ 和 $\mu>0$ 的最小上界，那么

$$\lambda_1\geqslant\mu_1\geqslant\frac{\lambda_1}{n^2+(n-1)\lambda_1}\quad.$$

特别地，$\lambda_1=0$ 和 $\mu_1=0$ 是等价的（这时 $\alpha_1,\cdot,\alpha_n$ 表示"最坏的"逼近，因为不管 $\alpha_1,\quad,\alpha_n$ 为何值，方程 (1) 在 $\lambda=0$ 时以及方程组 (2) 在 $\mu=0$ 时都有无穷多解） 齐次和非齐次问题之间也存在类似的关系（[1]，[5]），而且不仅仅是对线性 Diophantus 逼近．例如，如果对任意 $\varepsilon>0$ 和所有整数 $x>0$，$\alpha_1,\cdot,\alpha_n$ 满足

$$\|\alpha_1 x\|\quad\|\alpha_n x\|>C_1 x^{-1-\varepsilon},\qquad(3)$$

其中的 $C_1>0$ 是依赖于 $\alpha_1,\quad,\alpha_n$ 和 ε 的常数，那么，不等式组

$$\max(\|\alpha_1 x+\beta_1\|,\quad,\|\alpha_n x+\beta_n\|)<x^{-1/n+\varepsilon_1}$$

有一个整数解 x，并满足 $0<x\leqslant X$，$X>X_0(\alpha_1,\quad,\alpha_n,\varepsilon_1)$ 进一步，不等式 (3) 断定分数部分 $(\{\alpha_1 q\},\quad,\{\alpha_n q\}$，$q=1,\quad,Q)$ 是一个"强的"一致分布，这些分数部分包含在区间组 $I_1\times\quad\times I_n$ 中的个数为 $|I_1|\quad|I_n|Q+O(Q^{\varepsilon_2})$，其中，区间组中的每一个位于单位区间内，$|I|$ 是区间 I 的长度，$\varepsilon_2>0$ 是任意的 对所有整数 $x>0$，不等式 (3) 成立与对所有整数 $x_1,\quad,x_n\neq 0$ 和任意的 $\varepsilon_3>0$，不等式

$$\|\alpha_1 x_1+\quad+\alpha_n x_n\|>C_2\prod_{i=1}^{n}(1+|x_i|)^{-1-\varepsilon_3}\qquad(4)$$

成立等价，其中的 $C_2>0$ 只依赖于 $\alpha_1,\quad,\alpha_n$ 和 ε_3．

对于其参数由算术条件或分析条件确定的 Diophantus 不等式，证明它的可解性或不可解性常常是非常复杂的工作．例如，有理数逼近代数数的问题，甚至是从 1844 年证明 Liouville 不等式（见 **Liouville 数**（Liouville number)）时已开始了系统的研究，但到目前为止还没有完全解决（见 **Thue-Siegel-Roth 定理**

(Thue-Siegel-Roth theorem)，**有效的 Diophantus 逼近问题** (Diophantine approximation, problem of effective)).在[11]中已经证明，若代数数 α_1, ，α_n 和 1 在有理数域上线性无关，那么不等式(3)和(4)对任意 ε，$\varepsilon_3>0$ 成立 可以推得，对任意 $\lambda>0$ 不等式组(1)和对任意 $\mu>0$ 不等式组(2)只有有限多解 这些定理与代数数的 Diophantus 逼近及用非完全范形式表示整数等之间存在着紧密的联系 特别地，研究 Thue 方程 $(x,y)=A$ 的解 x,y 的界的问题等价于研究多项式 $f(x,1)$ 的根 α 的有理逼近，这里 $f(x,y)$ 是次数至少为 3 的整不可约二元型，A 是整数变量 A Thue 先得到 α 的有理逼近的非平凡估计，然后证明 $f(x,y)=A$ 只有有限多解 C Siegel 推广和发展了这个领域，导致他证明了亏格大于零的代数曲线的整点数目是有限的定理(见 **Diophantus 几何** (Diophantine geometry)) W Schmidt ([11]) 应用这个思想并基于他自己的逼近定理，完全解决了用范形式表示数的问题

在某些情形下，Diophantus 方程和数的 Diophantus 逼近之间的联系，在证明解的存在性时起了重要的作用(如 **Waring 问题** (Waring problem) 和 Hardy-Littlewood-Виноградов 方法)

对一些特殊数的 Diophantus 逼近，如超越函数在有理点或代数点的值的逼近，可用**超越数**(transcendental number)论方法来研究 通常，如果能证明某个数是无理的或超越的，就有可能得到用有理数或者代数数逼近它的估计，在超越数 α 的情形下，量 $w_n(\alpha, H)=\min|P(\alpha)|$ 称为数 α 的超越度量(measure of transcendency of number α)，其中最小值取在有次数 $\leqslant n$ 和高 $\leqslant H$ 的非零整系数多项式上 对固定的 n 和变化的 H，估计 $w_n(\alpha, H)$ 的下界构成了超越数论中很多定理的内容([12]) 例如，K Mahler ([7], [12]) 证明了

$$w_n(e,H) > H^{-n-C_3n^2\ln(n+1)/\ln\ln H},$$

其中 $C_3>0$ 是一个绝对常数，$H>H_0(n)$ A Baker ([3]) 用另外的方法对 e 的各种非零有理幂证明了(4)式成立，那里的 $\varepsilon_3=C_4(\ln\ln x)^{-1/2}$，其中

$$x=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|,\quad i=1,\quad ,n,$$

$C_4>0$ 只依赖于 $n,\alpha_1,\quad,\alpha_n$ 仅当至少存在一个次数 $\leqslant n$ 和高 $\leqslant H$ 的代数数"接近"于 α 时，量 $w_n(\alpha,H)$ 才将是"很小"，从而得出，$w_n(\alpha,H)$ 的估计和通过次数 $\leqslant n$ 的代数数逼近 α 的估计之间存在着一个联系.令 $w_n^*(\alpha,H)=\min|\alpha-\kappa|$，其中最小值取在次数 $\leqslant n$ 和高 $\leqslant H$ 的所有代数数 κ 上，令

$$w_n(\alpha)=\overline{\lim_{H\to\infty}}\ \frac{-\ln w_n(\alpha,H)}{\ln H},$$

$$w_n^*(\alpha)+1=\overline{\lim_{H\to\infty}}\ \frac{-\ln w_n^*(\alpha,H)}{\ln H}$$

E Wirsing ([13]) 找到了 $w_n(\alpha,H)$ 和 $w_n^*(\alpha,H)$ 之间的关系 如果 α 是实数，则有

$$w_n^*(\alpha)\geqslant\max\left[\frac{w_n(\alpha)+1}{2}\ ,\ \frac{w_n(\alpha)}{w_n(\alpha)-n+1}\right],$$
$$n=1,2,\quad .$$

特别地，如果 $w_n(\alpha)=n$，则有 $w_n^*(\alpha)=n$，而且因为对所有的超越数 α 有 $w_n(\alpha)\geqslant n$，从而得出 $w_n^*(\alpha)\geqslant(n-1)/2$ 这就意味着，对任意超越数 α，存在无穷多个次数 $\leqslant n$ 的代数数 κ，满足不等式

$$|\alpha-\kappa|<h_\kappa^{-(n+3)/2+\varepsilon_4},$$

其中 h_κ 是 κ 的高，$\varepsilon_4>0$ 是任意的 对所有超越数 α 和所有 $n=1,2,\quad$，Wirsing 猜测有 $w_n^*(\alpha)\geqslant n$.除了显然的 $n=1$ 的情形外，对 $n=2$ 这个猜想已被证明([4]).人们还知道，对几乎所有(在 Lebesgue 度量意义下)实数 α，下面的方程成立

$$w_n(\alpha)=w_n^*(\alpha)=n,\quad n=1,2,\quad .$$

(见[2]，**数的度量理论** (metric theory of numbers)，**Diophantus 逼近的度量理论** (Diophantine approximation, metric theory of))

用 p 进分析方法研究 Diophantus 方程刺激了 **p 进数** (p-adic number) 域 $\mathbf{Q}_p$ 上的 Diophantus 逼近理论的发展，这个领域的结构在很多方面与实数域上 Diophantus 逼近理论相平行，但要考虑 $\mathbf{Q}_p$ 上的非 Archimedes 拓扑 例如，令 $\omega\neq0$ 是一个 p 进数，考虑整系数线性型 $\omega x+y$ 的值逼近于零(在 p 进度量下)，就产生了 ω 的有理逼近，如同实数情形一样，它与 ω 展成(p 进)连分数有紧密的联系([10]).Dirichlet 定理，Kronecker 定理，Minkowski 定理等的类似定理，度量定理，关于用代数数逼近的定理等的类似定理，都是成立的([2]，[6]，[8]) 在 $\mathbf{Q}_p$ 中的 Diophantus 不等式，可以解释为通过 p 的"高"次同余，使它可能通过分析方法得到纯算术定理 在 $\mathbf{Q}_p$ 和它的有限扩域中 Diophantus 逼近的一个深远发展，使得有可能用 Thue-Siegel-Roth 方法去证明关于可用二元型来表示的数的算术结构的定理，有理数的幂的分数部分的估计定理，等等([10])

因为函数展成连分数类似于数展成连分数，所以自然产生了进一步的类似——在幂级数域的度量下用有理函数逼近函数 这个途径已经被进一步发展和引导到幂级数域上的 Diophantus 逼近.设 K 是任意代数数域，令 $K[x]$ 是在 K 上关于 x 的多项式环和令 $K\langle x^{-1}\rangle$ 是形式为

$$\omega=\alpha_{-m}x^m+\quad+\alpha_0+\alpha_1x^{-1}+\quad,$$
$$\alpha_i\in K,\ i=-m,-m+1,$$

的幂级数域．在域 $K\langle x^{-1}\rangle$ 中，引入一个非 Archimedes 赋值，

$$|\omega|=\begin{cases} l^m, & \omega\neq 0,\ \alpha_{-m}\neq 0, \\ 0, & \omega=0, \end{cases}$$

其中的 $l>1$ 任意固定的一个数，具有范数 $|\omega|$ 的域 $K\langle x^{-1}\rangle$ 构成一个度量空间 "Diophantus" 逼近的研究按通常的方法实现，其中 $K[x]$ 起着整数环的作用；所考虑的逼近函数是在 $K[x]$ 中取值的有限个变量的函数，它在 $K\langle x^{-1}\rangle$ 中取值，逼近于零的估计是关于所引进的范数的 按这种意义下所得到的结果同实数域中 Diophantus 逼近情形之间有很多类似，但如果 $K<x^{-1}>$ 用形式为

$$\alpha_{-m}x^{-m}+\quad+\alpha_0+\alpha_1 x+\quad,$$

$$\alpha_i\in K,\ i=-m,-m+1,\quad,$$

的幂级数域 $K\langle x\rangle$ 代替，那么所得结果就类似于 p 进数域中的逼近（[2]，[9]）

幂级数域中的 Diophantus 逼近构成了超越数论中某些解析方法的坚实基础（K 的特殊性，逼近精度的明显估计，等等）

在 Diophantus 逼近论的发展中，可以分成三个不同的途径 整体的、度量的和单独的 整体的途径包括逼近的一般定律的研究，它可以应用到所有数上或带有"稀疏的"例外集的所有数上 这种情形包含齐次逼近的 Dirichlet 定理，非齐次逼近的 Kronecker 定理，用代数数逼近数的一般性定理，由逼近性质描述数的分类，等等．相应的方法是"整体的"（连分数，等等）．度量的途径包括根据测度理论的概念来描述数的逼近性质（见 **Diophantus 逼近的度量理论**（Diophantine approximation, metric theory of），**数的度量理论**（metric theory of numbers）） 这样得到的结果不能应用到所有数上，而是应用到所考虑的集合的几乎所有的（按测度的意义）数上，或者借助于某种度量特征（如 Hausdorff 维数，容量，等等）来描述 使用的方法同测度论、概率论和有关的学科有密切联系，单独的途径涉及到特殊数（代数数，e,π 及 $\ln 2$ 等等）的逼近性质，或者包括具有特殊逼近性质的数的构造（Liouville 数，Mahler T 数，等等） 解这种问题的方法是特殊的，且常常对一个特殊的问题建立特殊的方法．

参考文献

[1] Cassels, J W S, An introduction to diophantine approximation, Cambridge Univ Press, 1957

[2] Спринджук, В Г, Проблема Малера в метрической теории чисел, Минск, 1967（英译本 Sprindzhuk, V G, Mahler's problem in metric number theory, Amer Math Soc, 1969）

[3] Baker, A, On some Diophantine inequalities involving the exponential function, *Canad J Math*, **17** (1965), 616 − 626

[4] Davenport, H and Schmidt, W, Approximation to real numbers by quardratic irrationals, *Acta Arithm*, **13** (1967), 169 − 176

[5] Koksma, J F, Diophantische Approximationen, Springer, 1936

[6] Lutz, E, Sur les approximations diophantienes lineaires p-adiques, Hermann, 1955

[7] Mahler, K, Ueber Beziehungen zwischen der Zahlee und den Lionvillschen Zahlen, *Math Z*, **31** (1930), 729 − 732

[8] Mahler, K, Ueber Diophantische Approximationen im Gebiete der p-adischen Zahlen, *Jahresber Deutsch Math-Verein*, **44** (1934), 250 − 255

[9] Mahler, K, An analogue of Minkowski's theory of numbers in a field of series, *Ann of Math*, **42** (1941), 488 − 522

[10] Mahler, K, Lectures on Diophantine approximations, 1, Univ Notre Dame, 1961

[11] Schmidt, W, Approximation to algebraic numbers, *Enseign Math* (2), **17** (1971), 3−4, 187 − 253

[12] Schneider, T, Einführung in die transzendenten zahlen, Springer, 1957

[13] Wirsing, E, Approximation mit algebraischen zahlen beschrankten Grades, *J Reine Angew Math*, **206** (1961), 1 − 2, 67 − 77

В Г Спринджук 撰

【补注】 Diophantus 逼近的最重要发展是**超越数**（transcendental number）论，**无理数**（irrational number）论和**模 1 分布**（distribution module one）几个方向

涉及到用范形式表示数的问题有以下结果（[A2]） 令 K 是代数数域和令 N 记为**范映射**（norm map）$K\to\mathbf{Q}$ 令 M 是 K 中的模（module），即一个有限维 $\mathbf{Z}$ 模 $\subset K$（也称为一个（非完全）格） 如果 $M\otimes\mathbf{Q}=K$，就称 M 为满模（full module） 对存在一个整数 m，使得方程 $N\mu=m$ 在 M 中有无穷多解 μ 的充分必要条件是 M 在 K 的某个子域中是满模，这个子域既不是有理数域，也不是虚二次域．

令 $\beta_1,\quad,\beta_n$ 是模 M 的基底 考虑线性形式 $L(x_1,\quad,x_n)=x_1\beta_1+\quad+x_n\beta_n$ 令 σ 取 K 到复数域 $\mathbf{C}$ 的所有嵌入 令 $L^{(\sigma)}=x_1\sigma(\beta_1)+\quad+x_n\sigma(\beta_n)$．乘积 $f(x)=\prod_\sigma L^{(\sigma)}$ 是 $\mathbf{Q}$ 上 n 次齐次型 这种形式称为范形式（norm forms） 显然，求解 $N\mu=m$ 与用形式 f（在 $\mathbf{Z}$ 中取值）表示 m 的过程是相同的

参考文献

[A1] Baker, A, Transcendental number theory, Cambridge Univ Press, 1975

[A2] Schmidt, W M, Linearformen II, *Math Ann*, **191** (1971), 1 − 20

[A3] Schmidt, W M, Diophantine approximation, Springer, 1980

徐广善 译 潘承彪 校

Diophantus 方程 [**Diophantine equations**, **Диофантовы уравнения**]

有理系数的代数方程或代数方程组，寻求它们的整数解或有理数解．通常假设 Diophantus 方程中的未知数的个数多于方程的个数，因此它们也称为不定方程(indefinite equations)．在现代数学中，Diophantus 方程的概念也适用于这样一些代数方程，对于它们需要求在有理数域 **Q** 的某个代数扩域中的代数整数解，或者在 p 进数域的某个代数扩域中的代数整数解，等等．

Diophantus 方程之研究是数论与 **Diophantus 几何**(Diophantine geometry)的共同对象

求方程的整数解是最古老的数学问题之一 早在公元前 2000 年初期，古巴比伦人就已成功地解出了含两个未知数的方程组 这一数学分支在古希腊繁荣到了极点 Diophantus 著的《算术》(Arithmetika)(可能写于公元 3 世纪)是主要的原始资料，该书中有各种类型的方程及方程组．在这部书中，Diophantus ("Diophantus 方程"即由他而得名)首次提出研究二次及三次方程的一些方法，直到 19 世纪它们才得到了全面的发展(见[1]) 由古希腊学者所创立的有理数理论导致对不定方程有理解的研究 这种观点始终贯穿在 Diophantus 的书中．虽然他的书里只有特殊类型的 Diophantus 方程的解，但有理由相信，他对一些一般性的方法也是很了解的

研究 Diophantus 方程常遇到严重的困难．此外，可能用显式给出整系数多项式

$$F(x, y_1, \quad, y_n),$$

使对任何给定的 x，没有任何算法能判别方程

$$F(x, y_1, \quad, y_n)=0$$

关于 $y_1, \quad, y_n$ 是否有解，见 **Diophantus 方程的可解性问题**(Diophantine equations, solvability problem of)．可以用显式写出这种多项式的实例．对这种多项式的解不可能给出完全的描述(如果采用 **Church 论题**(Church thesis))．

最简单的 Diophantus 方程

$$ax+by=1$$

(其中 a 与 b 为互素的整数)有无穷多个解(如果 x_0, y_0 是一解，则数对 $x=x_0+bn$ 与 $y=y_0-an$ 也为一解，其中 r 是一个任意的整数)．另一个 Diophantus 方程的例子是

$$x^2+y^2=z^2$$

这个方程的正整数解表示边长为整数的直角三角形的直角边 x, y 及斜边 z 的长度，这些数称为 Pythagoras 数(Pythagorean numbers) 所有互素的 Pythagoras 数的三数组由公式

$$x=m^2-n^2, \ y=2mn, \ z=m^2+n^2$$

给出，其中 m 和 n 是互素的整数($m>n>0$)．

Diophantus 在其所著《算术》(Arithmetika)一书中讨论了求一些特殊类型的 Diophantus 方程的有理解(不一定是整数解)．解一次 Diophantus 方程的一般理论是由 C G. Bachet 于 17 世纪创立的，有关这个论题的更为详尽的情况，见**线性方程**(linear equation) 直到 19 世纪初，P Fermat, J Wallis, L Euler, J L Lagrange 以及 C.F Gauss 主要研究的是形如

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

的方程，其中 a, b, c, d, e 及 f 皆为整数，即是一般的二元二次非齐次方程．Lagrange 在研究一般的二元二次非齐次 Diophantus 方程时用到了连分数．Gauss 则发展了二次型的一般理论，这是求解某种类型 Diophantus 方程的基础．

对于高于二次的 Diophantus 方程的研究到 20 世纪才得到有意义的成就 A Thue 证明了，Diophantus 方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}y+ \quad +a_ny^n=c$$

(其中 $n\geq 3, a_0, \quad, a_n$ 及 c 为整数，且多项式 $a_0t^n+ \quad + a_n$ 在有理数域中不可约)不可能有无穷多个整数解．然而，Thue 的方法不能得出解或解数的界限 A Baker 得到了有效性的定理，对这种类型的某些方程给出了解的界限 Б Н Делоне 曾建议采用另外的研究方法，此法只适用于较窄的一类 Diophantus 方程，但却能得到解数的界限．特别地，形如

$$ax^3+y^3=1$$

的 Diophantus 方程可用此法完全解决．

Diophantus 方程的理论有许多方向．该理论中一个著名的问题就是 Fermat 问题，根据这个问题的假设，Diophantus 方程

$$x^n+y^n=z^n \tag{1}$$

当 $n\geq 3$ 时没有非平凡的解．研究方程(1)的整数解是 Pythagoras 三数组问题的一个自然的推广 对 $n=4$，Euler 得到了 Fermat 问题的一个肯定的解．由于这一结果，Fermat 问题就归结为证明 当 n 为奇素数时，方程(1)没有非零整数解 在本文写作之时(1988)，求解(1)的研究尚未完成．求解它的困难是由于代数整数环中的素数分解不唯一 代数整数环中的除子理论使得有可能对许多类素数幂 n 确切证实 Fermat 定理的正确性．

代数整数环的算术还被应用于 Diophantus 方程的许多其它问题中 例如，这种方法曾被用于详细求解一个形如

$$N(\alpha_1x_1+ \quad +\alpha_nx_n)=m \tag{2}$$

的方程，其中 $N(\alpha)$ 是代数数 α 的范数，要寻求满足方

程(2)的有理整数 $x_1, \quad, x_n$ 特别地，这类方程中包括**Pell 方程**(Pell equation) $x^2-dy^2=1$ 根据(2)中出现的 $\alpha_1, \cdot \quad, \alpha_n$ 的值，这些方程分成两种形式．第一种是所谓的完全形式(complete forms)，它所含的方程中的诸 α_i 中有 m 个是有理数域 $\mathbf{Q}$ 上线性无关的数，其中 $m=[\mathbf{Q}(\alpha_1, \quad, \alpha_n):\mathbf{Q}]$ 是代数数域 $\mathbf{Q}(\alpha_1, \quad, \alpha_n)$ 对于 $\mathbf{Q}$ 的次数．而其中线性无关的数 α_i 的最大个数小于 m 的则归入不完全形式(incomplete forms) 完全形式的情形较为简单，从原则上来说，有关它的研究现在已经完成 例如，已有可能表出任一完全形式的所有解(见[2]第2章)．

第二种形式——不完全形式则较为复杂，其理论的发展迄今(1988)还远没有完成 这种方程是借助 **Diophantus 逼近**(Diophantine approximations)研究的．它们包含方程

$$F(x, y)=C,$$

其中 $F(x, y)$ 是一个 $n \geqslant 3$ 次的不可约齐次多项式 此方程可以写成

$$\prod_{j=1}^{n}(x-\alpha_j y)=C, \tag{3}$$

其中 α_j 为多项式 $F(z, 1)=0$ 的所有根 方程(3)若有无穷多个整数解，就会导出形如

$$\left|\frac{x_i}{y_i}-\alpha_j\right| \leqslant \frac{C_1(F)}{y_i^n} \tag{4}$$

的关系式对某个 α_j 成立 不失一般性，可以假设 $y_i \to \infty$．从而当 y_i 充分大时，不等式(4)就与 **Thue-Siegel-Roth 定理**(Thue-Siegel-Roth theorem)矛盾，由此即得，方程 $F(x, y)=C$(其中 F 是一个三次或更高次的不可约型)不可能有无穷多个解

像(2)这样的方程在所有的 Diophantus 方程中只构成比较窄的一类 例如，方程

$$x^3+y^3+z^3=N \tag{5}$$

与

$$x^2+y^2+z^2+u^2=N \tag{6}$$

的形式虽很简单，但它们却不在这一类中，方程(6)的研究是 Diophantus 方程中研究得较为透彻的一个分支——用二次型表示数 Lagrange 定理(Lagrange theorem) 说的是 (6)对所有自然数 N 皆可解 任一个不能表成形如 $4^a(8k-1)$ 的自然数(其中 a 和 k 为非负整数)皆可表为三个平方数之和，此为 Gauss 定理(Gauss theorem)．已知有判别法可判别形如

$$F(x_1, \quad, x_n)=a$$

的方程是否存在有理解或整数解，其中 $F(x_1, \quad, x_n)$ 是一个整系数的二次型．于是，根据 Minkowski-Hasse 定理(Minkowski-Hasse theorem)，方程

$$\sum_{i\,j} a_{ij} x_i x_j=b$$

(其中 a_{ij} 与 b 为有理数)有有理解，当且仅当它有实数解且对每个素数 p 有 p 进数解．

迄今为止，用任意的三次型或更高次型表示数研究得比较少，因为其中出现本质性的困难．研究用高次型表示数的主要方法之一是**三角和法**(trigonometric sums, method of) 此法系用 Fourier 积分以显式写出方程的解数，然后再用**圆法**(circle method)把方程的解数用相应同余式的解数表示出来．与其它方法不同的是，三角和方法较少依赖方程的代数特性．

存在大量具体的 Diophantus 方程，它们可用初等方法求解(见[5])

参考文献

[1] Виноградов, И М, Основы теории чисел, 8 изд, М, 1972(中译本 И М 维诺格拉多夫，数论基础，裘光明译，商务印书馆，1952年，高等教育出版社(新一版)，1956年)

[2] Боревич, З И, Шафаревич, И Р, Теория чисел, 2 изд, М, 1972(英译本 Borevich, Z I and Shafarevich, I R, Number theory, Acad Press, 1966)

[3] Dickson, L E, History of the theory of numbers, 1, Chelsea, 1934

[4] Башмакова, И Г, Диофант и диофантовы уравнения, М, 1972

[5] Sierpinski, W, On solution of equations in integers, PWN, 1956(波兰文)

С М Воронин 撰

【补注】 在 Diophantus 方程的研究中最出色的新成果是由 G Faltings 证明的 **Mordell 猜想**(Mordell conjecture) 这一猜想是说，代数数域上亏格(见**曲线的亏格**(genus of a curve))大于1的曲线至多只有有限多个有理点(见[A1]) 特别地，由此结果推得 对 $n>3$，Fermat 方程 $x^n+y^n=z^n$ 只有有限多个有理解．

最近十年里关于**三次型**(cubic form)及关于**二次型**(quadratic form)对所组成的方程组的研究也有某些进展 这些发展以上同调方法作为基础，它提供了一个对于 **Hasse 原理**(Hasse principle)的阻碍．这些方法是 Ю И Манин(见[A2])提出来的，现在被称为关于 Hasse 原理的 Brauer-Манин 阻碍(Brauer-Manin obstruction) 在[A3]中曾猜测 对有理曲面的 Hasse 原理而言，Brauer-Манин 障碍为其仅有者．这在许多情形下得到了证实，例如对所有的三次方程 $ax^3+by^3+cz^3+dz^3=0$，其中 a, b, c, d 皆为小于 100 的正整数([A5]) 应用适当的超平面截面，可以把有 $N>4$ 个变数的三次方程的有理解的存在性问题，或者把一对有 $N>5$ 个变数的二次方程的有理解的存在性问题，化为**有理曲面**(rational surface)的问题，此曲面上有理点(或者等价地，对应方程组的有理解)的存在性可以用有效性的方法加以验证 特别地，这种方法对于使两个二次方程的方程组有解的 N 给出的下界比目前用**圆法**(circle

method)所得的结果更好([A4])

超越数论对 Diophantus 方程的应用可在 [A11] 及 [A12] 中找到 用代数几何的观点处理 Diophantus 方程见于 [A6] 及 [A13] 专门研究 Fermat 方程(也见 **Fermat 大定理**(Fermat great theorem))的专著有 [A8] 及 [A14]

参考文献

[A1] Faltings, G, Endlichkeitssatze fur abelsche varietaten uber Zahlkorpern, *Invent Math*, **73**(1983), 349 – 366

[A2] Манин, Ю И, Кубические формы алгебра, геометрия, арифметика, М, 1972(英译本 Manin, Yu I, Cubic forms, Algebra, geometry, arithmatic second edition, North-Holland, 1986)

[A3A] Colliot-Thelène, J L and Sansuc, J J, La descente sur les varietes rationnelle, in A Beauville (ed) Journee de geometrie algebrique d'Angers (1979), Sijthoff & Noordhoff, 1980, 223 – 227

[A3B] Colliot-Thelène, J L and Sansuc, J J, La descente sur les varietes rationnelles II, *Duke Math J*, **54** (1987), 375 – 492

[A4A] Colliot-Thelène, J L, Sansuc, J J and Swinnerton-Dyer, P, Intersection of two quadrics and Chatelet surfaces *J Reine Angew Math*, **373**(1987), 37 – 107

[A4B] Colliot-Thélène, J L, Sansuc, J J and Swinnerton-Dyer, P, Intersection of two quadrics and Chatelet surfaces, *J Reine Angew Math*, **374**(1987), 72 – 168

[A5] Colliot-Thélène, J L, Kanevsky, D and Sansuc, J J, Antmetique des surfaces cubiques diagonales, Lecture notes in math, **1290**, Springer, 1987, 1 – 109

[A6] Lang, S, Diophantine geometry, Interscience 1962

[A7] Mordell, L J, Diophantine equations, Acad Press, 1969

[A8] Edwards, H M, Fermat's last theorem, Springer, 1977

[A9] Weil, A, Number theory an approach through history from Hammupari to Lagendre, Birkhauser, 1984

[A10] Waerden, B L, van der, Geometry and algebra in ancient civilizations, Springer, 1983

[A11] Baker, A, Transcendental number theory, Cambridge Univ Press, 1975

[A12] Shorey, T N and Tijdeman, R, Exponential diophatine equations, Cambridge Univ Press, 1987

[A13] Lang, S, Fundamentals of Diophantine geometry, Springer, 1983

[A14] Ribenboim, P, Thirteen lectures on Fermat's last theorem, Springer, 1979

[A15] Hasse, H, Number theory, Springer, 1980

张明尧 译 徐广善 校

Diophantus 方程的可解性问题 [**Diophantine equations, solvability problem of**; **Диофантовых уравнений проблема разрешимости**], Diophantus 集的判定问题(decision problem of Diophantine sets)

该问题寻求一种算法,来判别任一 Diophantus 方程是否有解,见 **Diophantus 方程**(Diophantine equations)

所提出的这一问题的一个基本特征是寻求一种通用的方法,它对任何方程皆适用(判别一个给定的 Diophantus 方程是否有解的所有已知方法都只对(或窄或宽的)特殊类型的方程才适用) 这种方法也可以用于解 Diophantus 方程组,因为方程组 $P_1=0$, , $P_k=0$ 与方程

$$P_1^2+\quad+P_k^2=0$$

是等价的

这个寻求判别整数解的通用方法的问题是由 D Hilbert([1])提出的

50 年代早期曾发表过旨在证明不存在 Diophantus 方程的决定算法的第一批研究成果 当时有过 Davis 假设(Davis hypothesis)([2]),该假设提出任何**可枚举集**(enumerable set)都是一个 **Diophantus 集**(Diophantine set).由于已知有递归可数但算法不可解集的例子,因此如果 Davis 假设正确,立即就可推得 Diophantus 方程的可解性问题有否定的解

1961 年曾证明了一个较弱的命题([3]) 每个可枚举集都是一个指数 Diophantus 集(exponential-Diophantine set),即对每个可枚举集 $\mathfrak{M}$ 存在用自然数及变数 a, z_1, , z_n,通过加、乘及指数运算作成的表达式 K 和 L,使得 $a\in\mathfrak{M}$,当且仅当指数 Diophantus 方程 $K=L$ 对 z_1, , z_n 可解 这样一来,为证明 Davis 假设还需要证明 存在一种方法把任一个指数 Diophantus 方程转变成某个同为有解(或无解)的 Diophantus 方程 已经证明([4]),如果存在一个具有以下两个性质的 Diophantus 方程

$$G(u,v,z_1,\quad,z_k)=0,$$

那么这种转变就是可能的 1)在这个方程的任一个解中皆有 $v\leqslant u^u$,2)对任何 k 均存在满足 $v>u^k$ 的解(这种方程称做有指数增长性(exponential growth)) 给出一个有指数增长性的 Diophantus 方程的例子(它首次在 [5] 中给出)就完成了可枚举集皆为 Diophantus 集这一假设的证明(有关 Davis 假设的完全的证明,见 [6],[7] [9]) 其逆定理,即一切 Diophantus 集皆为可枚举集,是容易证明的 从而可枚举集类与 Diophantus 集类是等同的

由这一结论推出,可能找到一个特殊的整系数多项式 $W(a,z_1,\quad,z_n)$,使得没有一种算法可以从 a 的已知值判定出方程 $W(a,z_1,\quad,z_n)=0$ 对于 $z_1,\cdot,z_n$ 是否可解,从而不存在一种算法可以判断任一个 Diophantus 方程解的存在性

判断 Diophantus 方程关于有理数可解性的算法的存在性问题,与判断齐次 Diophantus 方程关于整数可

解性的算法的存在性问题是等价的．这个重要的问题仍然没有解决（1988），而且尚未充分加以研究．

参考文献

[1] Hilbert, D, Mathematical problems, *Bull Amer Math Soc*, **8**(1902), 10, 437－479

[2] Davis, M, Arithmetical problems and recursively enumerable predicates, *J Symbol Logic*, **18**(1953), 1, 33－41

[3] Davis, M, Putnam, H and Robinson, J, The decision problem for exponential Diophantine equations, *Ann of Math*, **74**(1961), 3, 425－436

[4] Robinson, J, Existential definability in arithmetic, *Trans Amer Math Soc*, **72**(1952), 3, 437－449

[5] Матиясевич, Ю В,《Докл АН СССР》, **191**(1970), 2, 279－282

[6] Матиясевич, Ю В,《Успехи матем наук》, 27(1972), 5, 185－222

[7] Манин, Ю И, в сб Итоги науки и техники Современные проблемы математики, **1**(1973), 5－37

[8] Davis, M, Matiyasevich Yu V and Robinson, J, Hilbert's tenth problem Diophantine equations positive aspects of a negative solution, in Proc Symp Pure Math, Vol 28, Amer Math Soc, 1976, 323－375

[9] Manin, Yu I, A course in mathematical logic, Springer, 1977（译自俄文）．

Ю В Матиясевич 撰

【补注】

参考文献

[A1] Davis, M, Hilbert's tenth problem is unsolvable, *Amer Math Monthly*, **80**(1973), 233－269

张明尧 译 徐广善 校

Diophantus几何 [**Diophantine geometry**, **Диофантова геометрия**] Diophantus分析（Diophantine analysis）

通过代数几何方法，研究代数方程组（或**Diophantus方程**（Diophantine equations））的整数和有理解的数学分支，19世纪后半叶，由于代数数论的出现，自然产生了系数在任意代数数域上的Diophantus方程的研究和寻求在代数数域上或者在它的整数环上的解．同代数数论相平行的代数函数理论得到发展．D Hilbert，特别是L. Kroneker强调指出的这二者之间的深刻类似，最终导致通常称为整体域（global fields）的这两类域的各种算术理论具有一致的构造（[3]） 如果所研究的代数函数是在有限域上的一个变量的函数，则这种类似特别明显．例如，除子（divisor）和分歧（ramification）概念，以及**类域论**（class field theory）的一些结果都是上述观点的很好的说明 在Diophantus方程理论中，这种观点很晚才被采用，即当20世纪50年代系统地研究Diophantus方程（方程的系数不只是数而且还有函数）时才被采用 在这个过程中，代数几何的发展起了决定性的作用 数域和函数域的同时研究，产生同一课题的两个同等重要的侧面，不仅推导出完整优美的结果，而且导致两个内容的相互补充（[3]）

在代数几何中，方程组的非不变量概念被在给定域K上的**代数簇**（algebraic variety）概念代替，同时它的解被取值在域K或者它的扩域上的有理点代替 可以有理由认为，Diophantus几何的基本任务（fundamental task of Diophantine geometry）是研究定义在上述域K上的代数簇X的有理点集$X(K)$．Diophantus方程的整数解也具有几何意义

在代数簇上研究有理（或整数）点时产生的第一个问题是 这样的点是否至少存在一个 Hilbert第十问题（Hilbert tenth problem）是 对任意代数簇寻找一个一般方法来解决上述问题．在一种算法精确的定义出现之后，如能证明很多问题不存在这种算法的解，那么Hilbert问题就有一个否定的回答（见**Diophantus方程的可解性问题**（Diophantine equations, solvability problem of）） 另一方面，最有兴趣的问题是，确定那一类Diophantus方程存在这样的算法．对这个问题的几种一般性的研究是知道的．从代数观点看，最自然的途径是所谓的**Hasse原理**（Hasse principle） 将初始域K与对它的所有可能赋值的完全域K_v放在一起研究．因为$X(K)\subset X(K_v)$，所以K有理点存在性的一个必要条件是对所有的v，集合$X(K_v)$是非空的 事实上，Hasse原理的重要性在于把点的存在性问题归结到局部域上的类似问题，而后者是非常简单的——通过已知的算法可以解决．当簇X是投影和非奇异的这一重要的特殊情形下，**Hensel引理**（Hensel lemma）及其推广给出进一步归结的可能性 问题可以归结为有限域上有理点的研究 它常常通过成功地验证或者有效的技术予以解决（见**代数簇的算术**（algebraic varieties, arithmetic of），亦见[2]，[12]）．最后提到的关于Hasse原理的重要考虑是这样一个事实，除了有限个以外，对所有的v集合$X(K_v)$是非空的，于是条件数总是有限的，且它们能被有效地验证（[2]）．尽管如此，Hasse原理还是不能应用到三次曲线上．例如，曲线$3x^3+4y^3=5$在所有p**进数**（p-adic number）域和实数域中有解，但是没有有理解（[2]，[7]） 在由Abel簇的主齐次空间组成的类中，由Hasse原理所描述的“偏差”理论，正是以这个例子做为出发点来构造的（[7]，[10]） 偏差可以用特殊群Ш来描述，这个群相伴于每个Abel簇（Tate-Шафаревич群），这个理论的主要困难是很难得到计算Ш群的方法，这个理论还已被推广到其它类代数簇（[11]）．

用以研究Diophantus方程的另一种富有启发的想法是，当方程组中的变量个数比方程的次数要大时，方程组通常是有解的 尽管如此，但对任意特殊情形，要证明它却是非常困难的 应用解析数论和三角

和估计给出这类问题的一个一般途径(见**三角和法**(trigonometric sums, method of),**Виноградов 法**(Vinogradov method),亦见[4]) 最初这种方法只是被用于特殊形式方程(例如,**Waring 问题**(Waring problem)) 后来,借助于这一方法证明了,如果F是一个次数为奇数d和n个变量的有理系数的型、n相对于d充分大,那么投影超曲面$F=0$有有理点([2]) 根据Artin假设([2],[10]),甚至当$n>d^2$时,这个结论也是正确的 在写这个条目时(1978年),只对二次型证明了这个结论.对其它的域也可以提出类似的问题.特别对局部域所得到的结果请见**代数簇的算术**(algebraic varieties, arithmetic of)和[5] Diophantus几何的中心问题是研究有理点或整数点集合的构造,并要澄清的第一个问题是,这个集合是不是有限的.在这个问题中,一个启发性的基本猜测是,如果方程组的次数比变量的个数要大得多,那么,这个方程组通常只有有限个解([10]) 与上面所讨论的可解性不同,这个课题的有价值的一般结果还没有出现(1978) 大量的研究是在代数曲线情形 定义在域K上的曲线X的有理点集$X(K)$的构造已经被找到,它很强地依赖于亏格g.如果$g=0$,集合$X(K)$或者是空的,或者曲线X在域K上双有理等价于射影直线,后者意味着$X(K)$是无限的,并存在一个关于它的参数表示,这是通过取值在K上的某个变量的有理函数来描述的([7],[13],[1]).1901年H Poincaré研究了具有非空集合$X(K)$的亏格$g=1$的曲线.他证明了,它们是双有理等价于平面三次曲线 同时给出在集合$X(K)$上的一个Abel群的结构(见**椭圆曲线**(elliptic curve),亦见[1],[7]) Poincaré猜想(Poincare conjecture) 如果$K=\mathbf{Q}$,则这个群有有限个生成元.L.J Mordell于1922年证明了这一见解([15]) A Weil (1928)推广它到任意代数数域上,而A Néron (1952)推广它到任意整体域上([8]).

群$X(K)$可以表示成秩为r的自由群和阶为n的有限群的直和.在给定域K的所有椭圆曲线集合上,这些数是否有界的问题,从20世纪30年代起就引起了人们的注意([7]) 1971年才证明了挠率n的有界性 在函数情形下,任意高秩的曲线是存在的([12]).在数的情形下,直到1978年还没有这个问题的解答.

最后,Mordell猜想(Mordell conjecture)叙述为,对亏格$g>1$的曲线,有理点的个数是有限的(对$K=\mathbf{Q}$提出的,更确切的描述见[9]) 在函数情形下,这个猜想被Ю.И.Манин在1963年证明([12]).

在整点的研究中,获得了更为鼓舞人心的进展.这里有非常一般的**Diophantus逼近**(Diophantine approximations)方法,它是由A Thue在1909年提出的([6],[9],[13]) 它以下述内容为根据 令$F(x,y)=\prod_i(x-a_iy)$是具有有理系数的型,并设方程$F(x,y)=c$ $(c\neq0)$存在一个整数解(x_0,y_0) 那么,对某个i,

$$|a_i-x_0/y_0|<b/y_0^n,\ b=\text{常数}$$

如果α是一个次数$\geqslant3$的代数数,则不等式$|\alpha-p/q|<1/q^\varepsilon$有有限多整数解$p$和$q$,这里的$\varepsilon\geqslant1+\dfrac{n}{2}$ 从而得出,形式为$F(x,y)=c$的曲线上只有有限个整点.从那以后,关于代数数的Diophantus逼近问题的每一个推进,都给出关于整点的相应的结果.1929年C.L Siegel证明了亏格$g>0$的任意曲线上整点的个数是有限的 进一步推广这个定理到任意整体域上的整点情形,见[9]

在Diophantus几何中,证明有限性定理的主要工具是高(见**Diophantus几何中的高**(height in Diophantine geometry))

在维数大于1的代数簇中,**Abel簇**(Abelian variety)是椭圆曲线的多维类似,有了很多透彻的研究.A.Weil得到了在任意维数的Abel簇上有理点群的生成元个数的有限性定理,从而推广了Mordell定理(Mordell-Weil定理) 在20世纪60年代,出现了Birch和Swinnerton-Dyer猜想,这个猜想把这个群的秩与簇X的**ζ函数**(zeta-function)在极点$\dim X$的阶数联系起来([7],[12]) 一些数据明显支持了这个猜想.

通过一般方法和途径来研究的另一类代数簇,是由形式如下的簇组成的

$$F(x_1,\ \ ,x_n)=c,\ c\neq0,\ \deg F=m,\qquad(*)$$

这里F是一个在基域的某个扩域上可分解成线性因子的型.在这样的簇上,对整点的研究有两种方法可以被采用,第一种方法是由Thue给出的上面提到的Diophantus逼近方法,但只考虑含有两个变量的这种形式的方程 只是到了1970年,这种方法才取得了新的进展,利用关于联立逼近的Schmidt定理,证明了在簇$(*)$上整点的个数总是有限的,如果在型F上加上一个容易验证的条件(在较早的工作[2]中,已经知道这个条件是必要的) 另一种完全不同的方法,是在p进整数环中研究方程$(*)$,它是由T Skolem([13])在1935年提出的,这个方法通常用在对较小的n或m,证明方程$(*)$的有限性定理([2])

现在,另一类代数簇在深入地研究中,它们是有理簇以及和它们相近的簇,亏格为零的曲线的类似 关于它的分类和有理数集合的构造的许多结果已经得到([12]).不像上面提到那些例子,这里的情形非常复杂,像Schmidt.Siegel或者Mordell-Weil那样形式的一般性定理直到1978年还没有被发现

上面列出的几乎所有结果的一个明显特征是 它们只给出了整点或有理点集合的定性描述，不能产生描述这些集合的定量估计 一般来说，获得这样的结果，或者有时也被称为定性定理的有效化(effectivization of qualitative theorems)，属于 Diophantus 几何和数论中最困难的内容之一．在 Thue 定理的情形下，1968年由 A Baker 得到了这样的有效化，他给出整点的高作为曲线方程系数的函数的明显估计（见**有效的 Diophantus 逼近问题**（Diophantine approximation, problem of effective)） 然后，对更广的一类超椭圆方程和特别是亏格为 1 的曲线，也得到了这样的估计([12]) 对这样的曲线，这就给出了一个算法，它能找出所有的整点并指出这样的点究竟是否存在 这样的一个算法并不是对所有的 Diophantus 方程都有用

对整点集合的定量描述的另一个特别有趣的途径是 G.H. Hardy 和 J E Littlewood 的**圆法**（circle method）的发展．这个途径推广到 Abel 簇上，产生了 Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想（[15]），应用它建立了一个算法，可以实现 Mordell-Weil 定理的有效化 有很多理由可以相信，这种方法的进一步发展以及与高有关的理论的研究，将在解决 Diophantus 几何的基本问题中起重大作用．

参考文献

[1] Башмакова, И Г, Диофант и диофантовы уравнения, М, 1972.

[2] Боревич, З И, Шафаревич, И Р, Теория чисел, 2 изд, М, 1972（英译本 Borevich, Z I and Shafarevich, I R, Number theory, Acad Press, 1966）

[3] Weil, A, Number theory and algebraic geometry, in Proc internat Congress mathematicians Cambridge, Vol 2, 1950, Amer Math Soc, 1952, 90 - 100

[4] Виноградов, И М, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М, 1971（英译本 Vinogradov, I M, The method of trigonometric sums in the theory of numbers, Interscience, 1954）

[5] Greenberg, M, Lectures on forms in many variables, Benjamin, 1969

[6] Davenport, H, The higher arithmatic, Hutchinson, 1952

[7] Cassels, J, Diophantine equations with special reference to elliptic curves, *J London Math Soc*, **41**(1966), 191 - 291

[8] Koksma, J F, Diophantische Approximationen, Springer, 1936

[9] Lang, S, Diophantine geometry, Interscience, 1962

[10] Lang, S, Some theorems and conjectures in diophantine equations, *Bull Amer Math Soc*, **66**(1960), 240 - 249

[11] Манин, Ю И, Кубические формы, М, 1972（英译本 Manin, Yu N, Cubic forms, Algebra, geometry, arithmetic, North-Holland, 1974）.

[12] Паршин, А Н, Итоги науки Алгебра Топология Геометрия 1970, М, 1971, 111 - 151（英译本 Parshin, A N, Arithmetic on algebraic varieties, *J Soviet Math*, **1**(1973), 5, 594 - 620）.

[13] Skolem, T, Diophantische Gleichungen, Springer, 1938

[14] Swinnerton-Dyer, H P F, Applications of algebraic geometry to number theory, in Proc Symposia Pure Math, Vol 20, Amer Math Soc, 1971, 1 - 52

[15] Cassels, J W S and Frohlich, A (eds), Algebraic number theory, Acad Press, 1967.

А Н Паршин 撰

【补注】 1980 年 Diophantus 几何出现了爆炸性的发展 这些结果中的一些是现代数学进展中最有意义的一部分 下面将列出一些主要的成果和上面主要文章中提到的一些结果的改进

叙述为定义在数域 K 上的亏格 $\geqslant 2$ 的每条代数曲线上，只有有限多个坐标在 K 上的点的 Mordell 猜想，由 G Faltings 在 1983 年作出了证明．同时，Faltings 还证明了 Tate 和 Шафаревич 的二个著名的猜想（见[A1]，[A9]，[A8]，[A5]） [A6] 包含在 $\mathbf{Q}$ 上椭圆曲线的有理挠率是有界的这样一个事实的证明．

最近，K Rubin [A7] 计算了具有复乘积的一类椭圆曲线的可疑群（mysterious group）Ш．

R Heath-Brown 证明，每个表示非奇异超曲面的系数在 $\mathbf{Q}$ 中的十个变量的三次型，有一个非平凡有理点（[A11]）

Schmidt 联立逼近定理（Schmidt simultaneous approximation theorem） 叙述如下．令 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 是代数数，并且 $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 在有理数域上线性无关．那么，对任意 $\varepsilon>0$，只有有限多个正整数 q，使得 $q^{1+\varepsilon}\|q\alpha_1\| \cdots \|q\alpha_n\|<1$ 成立．其中 $\|x\|$ 表示 x 到它最近整数的(正)距离

形式为（*）的可分解型方程和它的推广，可以通过 Schmidt 逼近定理的 p 进形式来处理 一个重要的内容，也是 Diophantus 几何的另一部分，是由 S 单位方程（S-unit equations）作出描述的，它们是形式为 $x_1+\cdots+x_n=0$ 的方程，其中 $x_1, \ldots, x_n$ 属于一个固定的数域 K, $x_1, \ldots, x_n$ 的素因子属于固定的集合 S．在某些自然的限制下，可以证明它的解数是有限的（[A12]）

有理点有限性问题和基簇的复分析结构之间存在一个奇妙的（猜测的）关系，见 [A2]，[A3] 这些关系中的一些甚至被包含在 P Vojta 的一个宠大的（猜测的）计划中 其理由是，在 Diophantus 逼近和多变量解析函数的值分布理论中，存在类似的概念 后者的一些结果在 Diophantus 逼近和几何中有着有趣的（猜测的）对应（[A10]）

Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜测的一些数值结果见

[A13] 和 [A14].

参考文献

[A1] Faltings, G, Endlichkeitssätze für abeische Varietaten uber Zahlkorpern, *Invent Math*, **73** (1983), 349 – 366 Erratum *Ivent Math*, **75** (1984), 381

[A2] Lang, S, Hyperbolic and diophantine analysis, *Bull Amer Math Soc*, **14** (1986), 159 – 205

[A3] Lang, S, Fundamentals of diophantine geometry, Springer, 1983

[A4] Faltings, G and Wüstholtz, G (eds), Rational points, Vieweg, 1984

[A5] Mazur, B, Arithmetic on curves, *Bull Amer Math Soc*, **14** (1986), 207 – 260

[A6] Mazur, B, Modular curves and the Eisenstein ideal, *Publ Math IHES*, **47** (1978)

[A7] Rubin, K, Global unit and ideal class groups, *Invent Math*, **89** (1987), 511 – 560

[A8] Silverman, J and Cornell, G (eds), Arithmetic geometry, Springer, 1985

[A9] Szpiro, L, Sem sur les pinceaux arithmétiques La conjecture de Mordell, *Astérisque*, **127** (1985)

[A10] Vojta, P, Diophantine approximations and value distribution theory, Springer, 1987

[A11] Heath-Brown, R, Cubic forms in 10 variables, in H Jager (ed) *Number theory*, Lecture notes in Math Vol 1068, Springer, 1983, 104 – 109

[A12] Evertse, J H, On sums of S-units and linear recurrences, *Compos Math*, **53** (1984), 225 – 244

[A13] Coates, J and Wiles, A, On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, *Invent Math*, **39** (1977), 223 – 251

[A14] Koblitz, N, Introduction to elliptic curves and modular forms, Springer, 1984

徐广善 译 潘承彪 校

Diophantus 谓词 [Diophantine predicate, Диофантов предикат]

任何定义在整数（或非负整数或正整数）的（有序）n 之组集上的谓词 $\mathscr{P}$，对其有一整数多项式 $P(a_1, \cdots, a_n, z_1, \cdots, z_k)$，使得 n 元组 $\langle a_1, \cdots, a_n\rangle$ 满足谓词 $\mathscr{P}$，当且仅当 **Diophantus 方程**（Diophantine equations）

$$P(a_1, \cdots, a_n, z_1, \cdots, z_k) = 0$$

关于 $z_1, \cdots, z_k$ 可解 一 Diophantus 谓词的真值域是一 **Diophantus 集**（Diophantine set）. Diophantus 谓词类和递归可枚举谓词类相重合（见 **Diophantus 方程的可解性问题**（Diophantine equations, solvability problem of）

Ю В Матиясевич 撰

【补注】 Diophantus 谓词 $\mathscr{P}$ 的真值集是一切满足 $\mathscr{P}$ 的 n 元组 $\langle \alpha_1, \cdots, \alpha_n\rangle$ 之集，即对它 (*) 关于 $z_1, \cdots, z_n$ 可解.

杨东屏 译

加型 Diophantus 问题 [Diophantine problems of additive type, Диофантовы проблемы аддитивного типа]

对 **Diophantus 方程**（Diophantine equations）提出的求其整数解的问题，它同时也可以被看成**加性问题**（additive problems），即把一个（任意的或满足某些附加条件的）整数 n 分解成所希望的形式的项的问题 例如，这些问题包括下列方程的整数解

$n=x^2+y^2$（见 **Gauss 数**（Gauss number）），

$n=x^2+y^2+z^2+t^2$（见关于四平方和的 **Lagrange 定理**（Lagrange theorem）），

$n=x^2+y^2+z^2$（见**整点**（integral point）），以及 **Waring 问题**（Waring problem）等等. 一个加型 Diophantus 问题也可以看成寻求集合的算术和的交集的问题 例如，方程 $x^2+4y^2=z^2$ 的整数解集 M 可表作 $M=A\cap B$，其中

$$A=\{x_1 : x_1=x^2\}+\{y_1 : y_1=4y^2\},\ B=\{z_1 : z_1=z^2\}$$

参考文献

[1] Виноградов, И М, Особые варианты метода тригонометрических сумм, М, 1976.

[2] Гельфонд, А О, Линник, Ю В, Элементарные методы в аналитической теории чисел, М, 1962（英译本 Gel'fond, A O and Linnik, Yu V, Elementary methods in the analytic theory of numbers, M I T, 1966）

[3] Ostmann, H H, Additive Zahlentheorie, Springer, 1956

Б М Бребихин 撰 张明尧 译 徐广善 校

Diophantus 集 [Diophantine set, Диофантово множество]

由整数（非负整数，正整数）的（有序）n 元组组成的集 $\mathfrak{M}$，对它可以写下一 **Diophantus 方程**（Diophantine equations），

$$P(a_1, \cdots, a_n, x_1, \cdots, x_l) = 0. \qquad (*)$$

此方程依赖于 n 个取值为整数（或非负整数或正整数）的参数 $a_1, \cdots, a_n$，且它对 $x_1, \cdots, x_l$ 可解，当且仅当 $\langle a_1, \cdots, a_n\rangle \in \mathfrak{M}$ 此处解理解为整数、非负整数或正整数是无关的，因为方程 (*) 在整数、非负整数或正整数内可解，当且仅当方程

$$P(a_1, \cdots, a_m, y_1-z_1, \cdots, y_l-z_l) = 0$$

在正整数内可解（当且仅当

$$P(a_1, \cdots, a_n, z_1+1, \cdots, z_l+1) = 0$$

在非负整数内可解，或当且仅当

$$P(a_1, \cdots, a_n, p_1^2+q_1^2+r_1^2+s_1^2, \cdots, p_l^2+q_l^2+r_l^2+s_l^2) = 0$$

在整数内可解） 因为根据 Lagrange 的定理，任意非负整数可表示为四个平方数之和

对任意 Dıophantus 集可以找到一对应方程 (*)，在其中多项式 P 的次数最多是 4（这可藉增加未知元的个数而得）. 对每个非负整数的 Dıophantus 集，除了一般方程 (*) 外，还可找到形为 $P(x_1, \quad, x_n)=a_1$ 的方程，换言之，任何非负整数的 Dıophantus 集是某整系数多项式对任意变元值所得的所有非负值的集合. 若变元取任意整数值，则一最多次数为 6 的多项式可取为 P

Dıophantus 集的类关于变目的置换和等同的算子封闭，关于并、交、直接积和投影（一个数的有序 n 元组组成的集合 $\mathfrak{M}$ 的投影是集合 $\{\langle a_1, \cdot, a_{n-1}\rangle \quad \exists b[\langle a_1, \quad, a_{n-1}, b\rangle \in \mathfrak{M}]\}$）的算子封闭，也关于把集合 $\mathfrak{M}$ 转换为集合 $\{\langle a_1, \quad, a_{n-1}, b\rangle \quad \forall c\,[c \leqslant b \Rightarrow \langle a_1, \quad, a_{n-1}, c\rangle \in \mathfrak{M}]\}$ 的算子封闭.

Dıophantus 集类和递归可枚举集类等同 (见 **Dıophantus 方程的可解性问题** (Dıophantıne equatıons, solvabılıty problem of)，**可枚举集** (enumerable set))，且一切对递归可枚举集成立的结果都可用于 Dıophantus 集. 特别地，由通用递归可枚举集存在性定理得出，存在一个数 l，使得对每个 n 存在一整系数多项式 $U_n(a_1, \quad, a_n, m, x_1, \quad, x_l)$ 在如下意义下是通用的. 对每个由数的有序 n 元组组成的 Dıophantus（递归可枚举）集合 $\mathfrak{M}$ 可以找到参数 m 的值（集 $\mathfrak{M}$ 的一下标），使得方程

$$U_n(a_1, \quad \cdot, a_n, m, x_1, \quad, x_l)=0$$

对 $x_1, \quad \cdot, x_l$ 可解，当且仅当 $\langle a_1, \cdot, a_n\rangle \in \mathfrak{M}$ 也存在在其他意义下通用的多项式（例如，见 [1]）.

数论中有趣味的许多集合都是 Dıophantus 集. 其中例如有，一切素数组成的集合，一切完全数组成的集合，以及一切使 Fermat 方程 (Fermat equatıon)

$$x^n+y^n=z^n$$

可解的 n 组成的集合.

断言递归可枚举集是 Dıophantus 集的定理的证明是能行的，即对给定于任何标准形式下的一递归可枚举集，可以找到对应的 Dıophantus 方程. 不包含所考虑集合的特殊性质的通用办法给出十分复杂的多项式，但是对某些特定的集合可以用可枚举性以外的性质找出非常简单的 Dıophantus 表达式

可表为 (*) 型的方程在某环 K 中对 $x_1, \cdot, x_l$ 可解，则该环的元素的一切 n 元组组成的集合也可考虑为 Dıophantus 集.

参考文献

[1] Матиясевич, Ю В, 《Успехи матем наук》, **27** (1972), 5, 185-222

Ю В Матиясевич 撰

【补注】 每个递归可枚举集是 Dıophantus 集的定理由 Ю В. Матиясевич 得到 (1970) 在 [A1] 中可以找到详细的证明以及有关历史的讨论 在 [A2] 中可以找到它各种细节的讨论 因为存在非递归的递归可枚举集，可知存在非递归的 Dıophantus 集，由此可得 Hılbert 第十问题 (Hılbert 10-th problem) 不可解. (Hılbert 的第十问题要求给出判定整数的 Dıophantus 方程可解性的（通用）算法.)

参考文献

[A1] Davıs, M, Hılbert's 10-th problem ıs unsolvable, *Amer Math Monthly*, **80** (1973), 233-269

[A2] Dıvıs, M, Matıyasevıch, Yu and Robınson, J, Hılbert's 10-th problem Dıophantıne equatıons posıtıve aspects of a negatıve solutıon, ın F Browder (ed) Mathematıcal developments arısıng from Hılbert's problems, Amer Math Soc, 1976, 233-378

杨东屏 译

Dirac δ 函数 [Dirac delta-function, Дираказельта-функция]

见 δ 函数 (delta-functıon).

Dirac 方程 [Dirac equation; Дирака уравнение]

在相对论性量子力学中和量子场论中起基本作用的一个相对论性波动方程. 它用于描述具有自旋为 1/2（以 $\hbar$ 为单位）的粒子，即，电子、中微子、μ 子、质子、中子等，还有正电子和所有其他反粒子，以及假设的亚粒子——夸克. Dırac 方程是具有半整数自旋（1/2, 3/2, 5/2 等）的粒子，即遵循 Fermı 统计法的 Fermı 子的理论的基础 例如，Rarıta-Schwınger 方程是 Dırac 方程对具有自旋为 3/2 的粒子的推广.

Dırac 方程是包括四个具有复值常系数的一阶线性齐次偏微分方程的方程组，对广义 Lorentz 变换群是不变的

$$\gamma^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} - \mu\psi = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3,$$

其中 $\mu = mc/\hbar$，m 是静质量，$x^\alpha = x^0, x^1, x^2, x^3 \in \mathbf{R}^4$ 具有伪 Euclıd 度规 $(x, y) = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ 而

$$\| \eta_{\alpha\beta} \| = \left\| \begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

是具有符号差为 +2 的 Mınkowskı 空间的度规张量，ψ 是 **Dirac 旋量** (Dırac spınor)（双旋量）.

$$\psi = \left\| \begin{matrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{matrix} \right\|,$$

和 $\gamma^\alpha = \gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ 是 **Dirac 矩阵** (Dırac matrıces)，它们满足 $\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2\eta_{\alpha\beta} I_4$

在按广义 Lorentz群 $x' = L_{\mu} x$ (见[2])的变量变换下，双旋量 ψ 按公式 $\psi'(x') = S(L)\psi(x)$ 变换，其中 $S(L)$ 是 4×4 非奇异复矩阵. 矩阵 $S(L)$ 形成群 L 的特殊双值表示 ($S^{-1}\gamma^{\nu} S = L^{\nu}_{\mu}\gamma^{\mu}$) 相对于新变量 $\psi'(x'^{\alpha})$, Dirac 方程并不改变其形式(相对论性不变性)

$$\gamma^{\alpha}\frac{\partial \psi'}{\partial x'^{\alpha}} - \mu\psi' = 0$$

$\mu = 0$ 的情况给出 Weyl 方程 (Weyl equation), 它描述中微子 这里, Dirac 方程被分成对旋量函数 (van der Waerden 旋量 (van der Waerden spinors)) $\varphi = (\psi_1, \psi_2)$ 和 $\chi = (\psi_3, \psi_4)$ 的两个独立方程. 相对于反射来说，它们当中谁都不是不变式(宇称不守恒的理论)

Dirac 方程的任何解都满足 **Klein-Gordon 方程** (Klein-Gordon equation), 它描述零自旋标量粒子

$$\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}} - \mu^2\psi = 0, \ \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3,$$

但并不是这个方程的每一个解都能满足 Dirac 方程，它是通过将 Klein-Gordon 方程进行因式分解而获得的

由 Dirac 方程可以得出电子具有内禀角动量(自旋) $\hbar/2$ Dirac 方程是原子中电子在核的场中和在其他电磁场中运动的完全描述，也是一个电子与某些基本粒子的相互作用的完全描述

任何相对论性不变的方程可表示成 Dirac 方程的形式

$$\Gamma^{\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial x^{\alpha}} - \mu\psi = 0,$$

其中 Γ^{α} 是 γ^{α} 的推广. 在 Klein-Gordon 方程中，函数 ψ 有五个分量，而 Γ^{α} 是四个五阶矩阵，它们满足关系式

$$\Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu}\Gamma_{\rho} + \Gamma_{\rho}\Gamma_{\nu}\Gamma_{\mu} = \eta_{\mu\nu}\Gamma_{\rho} + \eta_{\rho\nu}\Gamma_{\mu}, \ \Gamma_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}$$

(Duffin-Kemmer 矩阵 (Duffin-Kemmer matrices))

Fermi 子与电磁场的相互作用可通过将导数 $\partial/\partial x^{\alpha}$ 换成补偿导数 $\partial/\partial x^{\alpha} - iA_{\alpha}$ (其中 A_{α} 是电磁场的四维势)而予以考虑到 在 Fermi 子与广义规范场 (**杨(振宁)-Mills 场** (Yang-Mills field)) 相互作用时，补偿导数是 $\partial/\partial x^{\alpha} - A^{m}_{\alpha} I_m$ (其中 A^{m}_{α} 是场的四维势，而 I_m 形成 Lie 代数的基，即，是 Lie 群的生成元). 类似地，为了考虑到 Fermi 子与引力场的相互作用，按照广义相对论，结果形成 Dirac 方程向 Riemann 空间的推广，通过引进相应的补偿(协变)导数(见[3])

$$\gamma^{\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} - C_{\alpha}\right]\psi - \mu\psi = 0,$$

其中 C_{α} 是旋量联络系数，起始借助于四元组形式体系予以定义，它们满足关系式

$$\frac{\partial \gamma_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\gamma_{\rho} + \gamma_{\beta}C_{\alpha} - C_{\alpha}\gamma_{\beta} = 0,$$

或者

$$C_{\alpha} = \frac{1}{4}\gamma^{\sigma}(\Gamma^{\rho}_{\alpha\sigma}\gamma_{\rho} - \partial_{\alpha}\gamma_{\sigma}),$$

其中 $\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}$ 是 Christoffel 符号. Dirac 方程的广义相对论性推广，在引力坍缩的研究中，在强引力场中预测的粒子产生效应的描述中，以及其他等等，是必不可少的

在具有挠率的空间，Dirac 方程包括三次型非线性增量(见[4])，它变成非线性方程

$$\gamma^{\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} - C_{\alpha}\right]\psi - l^2(\bar{\psi}\gamma\gamma^{\beta}\psi)\gamma\gamma_{\beta}\psi - \mu\psi = 0,$$

其中 $\gamma = i\gamma_5$, $l^2 = 3\pi G\hbar/c^3$, 而 G 是引力常量.

类似地，在非度规时空 (space-time) (Weyl 时空)中，Dirac 方程也包括一个三次型非线性增量(见[5])

$$\gamma^{\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} - C_{\alpha}\right]\psi + l^2(\bar{\psi}\gamma^{\alpha}\psi)\gamma_{\alpha}\psi - \mu\psi = 0,$$

其中 $l^2 = 4\pi G\hbar/(3c^3)$

Dirac 方程是由 P A M Dirac 于 1928 年引进的

参考文献

[1] Dirac, P A M, The principles of quantum mechanics, Clarendon Press, 1958 (中译本 P A M 狄拉克，量子力学原理，科学出版社，1965)

[2] Боголюбов, Н Н, Ширков, Д В, Введение в теорию квантованных полей, 2 изд, М, 1976 (英译本 Bogolyubov, N N and Shirkov, D V, Introduction to the theory of quantized fields, Interscience, 1959)

[3] Brill, D R, Wheeler, J A, Neutrinos in the gravitational field, *Rev Mod Phys*, **29** (1957), 465

[4] Родичев, В И, 《Ж эксперим и теор физ》, **40** (1969), 1469

[5] Кречет, В Г, Спинорное поле и неметричность пространствавремени, 《Изв Вузов СССР, Физика》, **6** (1980), 52 – 55

[6] Bjorken, J D and Drell, S D, Relativistic quantum theory, 1, McGraw-Hill, 1964

В. Г Кречет 撰

【补注】

参考文献

[A1] Umezawa, H, Quantum field theory, North-Holland, 1956

[A2] Takahashi, Y, An introduction to field quantization, Pergamon, 1969

[A3] Roman, R, Theory of elementary particles, North-Holland, 1960

[A4] Varadarajan, V S, Geometry of quantum theory, 1 – 2, v Nostrand, 1968 (译自俄文)

[A5] Hawking, S and Ellis, G F R, The large scale

structure of spacetime, Cambridge Univ Press, 1973

徐锡申 译

Dirac 矩阵 [Dirac matrices, Дирака матрицы]

四个 4 × 4 Hermite 矩阵 $\alpha_k\ (k=1, 2, 3)$ 和 β，它们满足下列条件

$$\alpha_k\alpha_j+\alpha_j\alpha_k=2\delta_{kj}E,$$

$$\alpha_k\beta+\beta\alpha_k=0,\ \alpha_k\alpha_k=\beta^2=E,$$

其中 E 是 4×4 单位矩阵 矩阵 α_k，β 也可以用 Hermite矩阵 $\gamma^k=-\iota\beta\alpha_k\ (k=1, 2, 3)$ 和反 Hermite 矩阵 $\gamma^0=-\iota\beta$来代替，它们满足下列条件

$$\gamma^\kappa\gamma^\lambda+\gamma^\lambda\gamma^\kappa=2\eta_{\kappa\lambda}E,\ \kappa,\ \lambda=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

其中$\eta_{00}=-1=-\eta_{\kappa\kappa}\ (\kappa=1, 2, 3)$，$\eta_{\kappa\lambda}=0$，若$\kappa\neq\lambda\ (\kappa, \lambda=0, 1, 2, 3)$，它使得有可能将 **Dirac 方程** (Dirac equation) 写成对于 Lorentz 变换群为协变的形式．矩阵 α_k，β 和 γ^κ 定义到相差一个任意酉变换，并可以各种方式表示．一个这种表示是

$$\gamma^0=-\iota\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ \gamma^k=-\iota\begin{bmatrix}0 & \sigma_k\\ -\sigma_k & 0\end{bmatrix}$$

其中 σ_k 是 2 × 2 **Pauli 矩阵** (Pauli matrices)，而 1 和 0 分别是 2 × 2 单位矩阵和零矩阵 Dirac 矩阵可用来对 **Klein-Gordon 方程** (Klein-Gordon equation) 作因式分解

$$(\Box-m^2)E\psi=$$

$$=\left[\sum_{\kappa=0}^{3}\gamma^\kappa\frac{\partial}{\partial x^\kappa}-mE\right]\left[\sum_{\lambda=0}^{3}\gamma^\lambda\frac{\partial}{\partial x^\lambda}+mE\right]\psi=0,$$

其中□是 **d'Alembert 算子** (d'Alembert operator)

Dirac 于 1928 年在推导 Dirac 方程时引进

В Д Кукин 撰

【补注】 参考文献见 Dirac 方程条的 [A1] – [A4].

徐锡申 译

Dirac 旋量 [Dirac spinor, Дирака спинор]

四维时空 (space-time) 中的一个四分量复函数，满足 **Dirac 方程** (Dirac equation) 旋量分析中，Dirac 旋量定义为一阶双旋量，实现 $\mathbf{R}^4$ 上广义 Lorentz 群的不可约线性表示，$\mathbf{R}^4$ 具有伪 Euclid 度规

$$(x, y)\equiv\sum_{\alpha}\sum_{\beta=0}^{3}\eta_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta\equiv-x^0y^0+\sum_{k=1}^{3}x^ky^k,$$

$$x=(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Dirac 矩阵 (Dirac matrices)，它们形成 Dirac 方程的一部分，定义到相差一个任意酉变换，使得 Dirac 旋量也定义到相差这样一个酉变换 这个性质使得有可能选择 Dirac 矩阵的，从而 Dirac 旋量的，物理上最方便的表示．

В. Д. Кукин 撰

【补注】 参考文献见 Dirac 方程条的 [A1] – [A4]

徐锡申 译

直接计数 [direct counting, прямой пересчет]

按递增的顺序排列的一个自然数的集合的元素的计数．更准确地说，一个自然数的集合 A 的直接计数是从自然数到 A 上的一个严格递增函数．在算法论中，一个集合的直接计数的重要特征是递归性和增长率 例如，一个无限集的直接计数的一般递归性 (原始递归性) 等价于该集的可解性 (原始递归可解性) 其直接计数不为一般递归函数所优超的自然数的集合称为超禁集 (hyper-immune set)，这种超禁集在**真假值表的可约性** (truth-table reducibility) 理论中起重要作用．

参考文献

[1] Успенский, В А, Лекции о вычислимых функциях, М, 1960

[2] Rogers, jr H, Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967

С Н Артемов 撰 鍾 集 译 李 乔 校

直线法 [direct method, прямых метод]

数值求解偏微分方程的一种方法 (见 [1], [2], [3]) 它适用于非线性方程和任意阶椭圆型 ([4])、双曲型 ([5]) 和抛物型 ([6]) 方程组．直线法使得在曲线边界域上进行数值计算成为可能 ([7])．直线法用于求解力学中的各种问题 ([8])．

在直线法中人们得到微分算子各个方向上的逼近 这就有可能降低问题的维数并通过计算逼近于原方程组的较低阶方程组代替求解原来的偏微分方程组

直线法已经解决了气体动力学的几个问题 ([9]) 其中，积分原来的偏微分方程组归结为求解逼近它的常微分方程组 在直线法中用一组穿过激波的射线把积分域分成若干带条 线尾落在超声区中 射线按 Чебышев 多项式结点分布或等距分布．气动力函数沿着每个带条用逐片线性逼近或者由每条射线对应结点产生的多项式逼近 可以从激波到物体沿每条射线积分最终的常微分方程组 与**积分关系法** (integral-relation method) 不一样，这里不能形成积分关系，并且不能区分出钝区影响域 这造成精确度比较低，但简化了近似方程组的形式 (见[10])．

用直线法人们已经实现了由完全气体 ([11])、均匀气体 ([12]) 和不均匀气体 ([13]) 绕旋转体的二维流动问题的计算 利用爆炸波 ([14]) 模型人们也解决了球体超音速绕流问题、激波问题和火焰前沿 ([15]) 问题等等，利用沿子午线角的三角逼近，直线

法已经推广到包括非均匀流的([18])三维空间的情况(见[16], [17])

参考文献

[1] Rothe, E H, Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben, *Math Ann*, **102** (1930), 650 – 670

[2] Колмогоров, А Н, Петровский, И Г, Пискунов, Н С,《Бюлл МГУ Секц А》, **1** (1937), 6, 1 – 26

[3] Дородницын, А А, в кн Конференция《Пути развития советского математического машиностроения и приборостроения》, М, 1956

[4] Костюкович, Е Х,《Докл АН СССР》, **118** (1958), 3, 433 – 435

[5] Лебедев, В И,《Вест МГУ》, 1955, 10, 47 – 57

[6] Олейник, О А, Калашников, А С, Чжоу Юй-чимь,《Изв АН СССР Сер матем》, **22** (1958), 5, 667 – 704

[7] Будак, Б М, Горбунов, А Д,《Докл АН СССР》, **118** (1958), 5, 858 – 861

[8] Алихашкин, Я И,《Вычислит матем》, 1957, 1, 136 – 152

[9] Гилинский, С М, Теленин Г Ф, Тиняков, Г П,《Изв АН СССР Механ и машиностр》, 1964, 4, 9 – 28

[10] Белоцерковский, О М, Чушкин, П И,《Ж вычисл матем и матем физ》, **2** (1962), 5, 731 – 759

[11] Рослянов, Г С, Теленин, Г Ф, в кн Сб робот ВЦ Моск ун-та, 1968, 11, 93 – 112

[12] Теленин, Г Ф, Тиняков, Г П,《Докл АН СССР》, **159** (1964), 1, 39 – 42

[13] Стулов, В П, в кн Некоторые применения метода сеток в газовой динамике, 5, М, 1974, 140 – 227

[14] Гилинский, С М, Запрянов, З Д, Черный, Г Г,《Изв АН СССР Механ жидкости и газа》, 1966, 5, 8 – 13

[15] Гилинский, С М, Черный, Г Г, там же, 1968, 1, 20 – 32

[16] Миносцев, В В, Теленин, Г Ф, Тиняков, Г П,《Докл АН СССР》, **179** (1968), 2, 304 – 307

[17] Баэжина, А П, Челышева, И Ф,《Изв АН СССР Механ жидкости и газа》, 1967, 3, 119 – 123

[18] Семенихина, О Н, Шкадова, В П, там же, 1973, 2, 99 – 103

Ю М Давыдов 撰 蔡大用 译

直积 [direct product, прямое произведение]

一种基本的、一般的数学构造方法 这种构造方法的思想背景属于 R. Descartes, 因此直积也称 Descartes 积 (Cartesian product), 两个非空集合 X 和 Y 的直积或简称积是一个集合 $X\times Y$, 它由所有形如 (x,y) $(x\in X, y\in Y)$ 的有序对所组成

$$X\times Y=\{(x,y)\ \ x\in X,\ y\in Y\}$$

如果 X 或 Y 之一是空集, 则它们的积也是空集 集合 $X\times Y$ 可以等同于两个元素 $\{1,2\}$ 的集合上的某个函数集, 这些函数在变量值为 1 时在 X 中取值, 变量值为 2 时在 Y 中取值 这种等同导致任意多个集合的直积的一般定义. 设 I 是某个指标集, 又设 $\{X_i\}$ 是任意一族集合, 下标 i 取 I 中的元素 $X_i\,(i\in I)$ 的直积是函数 $f\ I\to X$ 的集合, 其中 $X=\bigcup_{i\in I}X_i$, 且 $f(i)\in X_i$, $\forall i\in I$ 通常以 $\prod_{i\in I}X_i$ 记直积, 对有限指标集 $I=\{1,2,\ \ ,n\}$, 我们也用记号 $\prod_{i=1}^{n}X_i$ 或 $X_1\times\ \ \times X_n$ 若 I 仅由单个元素 1 组成, 则 $\prod_{i=1}X_i=X_1$ 有时我们归纳地定义有限个因子的直积为

$$\prod_{i=1}X_i=X_1,\quad \prod_{i=1}^{2}X_i=\{(x_1,x_2)\ \ x_1\in X_1,\ x_2\in X_2\},$$

$$\prod_{i=1}^{n}X_i=\left[\prod_{i=1}^{n-1}X_i\right]\times X_n$$

如果所有的因子有同样的数学结构, 则直积构造的一个优点就是能够自然地在它上面引进补充的结构 例如, 设 $X_i, i\in I$, 是同类型的代数系, 即具有有限配置谓词和运算的共同记号的一些集合, 则积 $X=\prod_{i\in I}X_i$ 也可作成同样记号的代数系, 对函数 $f_1,\ \ ,f_n\ I\to X$ 及 n 元运算 ω, 函数 $f_1\ \ f_n\,\omega$ 在元素 i 上的作用定义成

$$f_1\ \ f_n\omega(i)=f_1(i)\ \ \ f_n(i)\omega$$

谓词 $P(f_1,\ \ ,f_n)$ 的值是真确的, 如果对每个 $i\in I$, $P(f_1(i),\ \ ,f_n(i))$ 的值是真确的 此外, 若在所有 X_i 中满足某个方程, 则在它们的积中也满足该方程 因此, 半群、群、环、向量空间等的积仍分别是半群、群、环、向量空间等

对直积 $X=\prod_{i\in I}X_i$ 的任一个因子, 存在自然投射 (natural projection) $p_i\ X\to X_i$, 其定义是 $p_i(f)=f(i)$ 集合 X 和投射族 $p_i(i\in I)$ 有下述泛性质 (universal property) 对每族映射 $g_i\ Y\to X_i$, 存在唯一映射 $h\ Y\to X$, 使得 $g_i=p_i(h)$ 对每个 $i\in I$ 成立 若所有 X_i 是同一种类型的代数系, 该性质也成立, 且使得能够在诸拓扑空间的直积上定义一种适当的拓扑 上述性质是**范畴中一族对象的积** (product of a family of objects in a category) 的定义的基础

人们常会碰到下面的问题 描述不能分解成直积的数学对象或给出条件使直积中的因子相差到同构被唯一决定. 这方面的经典结果是主理想环上有限生成模的结构定理和关于具有主列的群的直分解的中心同构的 Remak-Schmidt 定理

直积有时称为完全直积 (complete direct product), 以同离散直积 (或直和 (direct sum)) 相区别, 当因子中的附加的结构能够区分单元素子结构 (例如单位元子群, 零子空间等) 时, 后者被定义, 通常有限个

因子的直积与离散积一致．

M Ш Цаленко 撰 石生明 译 许以超 校

直和 [**direct sum**, **прямая сумма**]

广泛用于一些数学结构理论的一种构造方法，这些数学结构形成范畴且类似于 **Abel 范畴** (Abelian category) 在非 Abel 范畴情形，直和通常称为离散直积 (discrete direct product) 令 $\mathfrak{A}$ 是含单元素（零）子系统的同一种代数系统的类 $\mathfrak{A}$ 中代数系统 $X_\iota(\iota\in I)$ 的直和或（离散）直积是**直积** (direct product) $X=\prod_{\iota\in I}X_\iota$ 的子系统，它由所有满足下面性质的函数 $f\ I\to X$ 组成，的全部值除去有限个外皆属于相应的零子系统．直和可用下述记号之一来表示

$$\prod_{\iota\in I}^{\otimes}X_\iota,\quad \prod_{\iota\in I}^{\oplus}X_\iota,\quad \sum_{\iota\in I}X_\iota,\quad \bigoplus_{\iota\in I}X_\iota$$

当只有有限项时，可用记号

$$X_1\dot{+}\quad\dot{+}X_n$$

由定义即可知，在有限项时直和与直积是一致的

对直和 $X=\prod_{\iota\in I}X_\iota$ 的每一项可以有一个典范嵌入 $q_\iota\ X_\iota\to X$，对于 $x\in X_\iota$，确定函数 $q_\iota(x)\ I\to X$，这里 $q_\iota(x)$ 在变量 ι 上取值 x，在别处取值为零，由此能说直和包含其每一项 在 Ω 群的情形（特别地对群、Abel 群、向量空间和环）我们能给直和一个"内蕴的"刻画．Ω 群 G 是一族 Ω 子群 $G_\iota(\iota\in I)$ 的直积，如果 a) G 由 $G_\iota,\iota\in I$，生成，b) 每个 G_ι 是 G 的理想，及 c) 对每个 ι，G_ι 与其余理想生成的 Ω 子群的交是平凡子群．也参见**多算子群** (multi-operator group)

每个向量空间是一维子空间的直和．每个自由 Abel 群是无限循环群的直和，每个有限循环群是素数幂阶的循环群的直和．每个具有单位元且对理想满足极小条件的半单结合环是有限个适当的有限维向量空间上全线性变换环的直和．

在群论、格论和范畴理论中直分解的同构问题已有广泛的发展．它的起源是关于具有主列的群的直分解中心同构的 Remak-Schmidt 定理（见 **Krull-Remak-Schmidt 定理** (Krull-Remak-Schmidt theorem)）

范畴理论中，与积的概念相对偶就是**余积** (coproduct)，它有时称为直和 M Ш Цаленко 撰

【补注】 正如已经指出的，直和也称为离散直积（见**直积** (direct product)）

在范畴论中，直和 (direct sum) 或余积 (coproduct) 是由泛性质来定义的 在某范畴 $\mathfrak{C}$ 中，给定对象 X_ι，$\iota\in I$ 直和 $Y=\oplus_\iota X_\iota$ 是 $\mathfrak{C}$ 的对象，同时有态射 $\alpha_\iota\ X_\iota\to Y$ 使得对 $\mathfrak{C}$ 的每个对象 Z 和一族态射 $\beta_\iota\ X_\iota\to Z$，有唯一的态射 $\gamma\ Y\to Z$ 满足 $\gamma\alpha_\iota=\beta_\iota$，$\forall\iota\in I$，在许多范畴中，例如 Abel 群范畴和环上的模范畴，范畴的直和就是由上面所说的构造法给出的

石生明 译 许以超 校

有向序 [**directed order**, **направление**]

在一个集合 A 上的一个二元关系 $\leqslant$，具有下列性质 1) 对任意 $x,y,z\in A$，如果 $x\leqslant y$，$y\leqslant z$，那么 $x\leqslant z$，2) 对任意 $x\in A$，总有 $x\leqslant x$，3) 对任意 $x,y\in A$，存在一个 $z\in A$，使得 $x\leqslant z$，$y\leqslant z$ (Moore-Smith 性质 (Moore-Smith property))

В И. Пономарев 撰

【补注】 很多作者要求一个有向序是一个**偏序** (partial order)（即除了上面的 1) 和 2) 外，还满足如下条件由 $x\leqslant y$ 和 $y\leqslant x$ 两者可推出 $x=y$），且要求底集合 A 是非空的

蓝以中 译

有向集 [**directed set**, **направленное множество**]

一个定义了**有向序** (directed order) 的集合 A．一个具有偏序 $\leqslant$ 的集合 A 称为上有向的 (upwards directed)（相应地，下有向的 (downwards directed)），如果 $\leqslant$ 是一个有向序（相应地，相反的序 $\geqslant$ 是有向序）例如，在一个拓扑空间的所有开覆盖 $\{\gamma\}$ 所成的集合内，当 γ' 是 γ'' 的加细时，令 $\gamma'\leqslant\gamma''$，则它是下有向集下有向集的另外的例子是，预滤子 (pre-filter)，那就是，一个由非空集合所成的族 δ，当 $U,V\in\delta$ 时，存在一个 $W\in\delta$ 使得 $W\subset U\cap V$．有向集（见**滤子** (filter)）的主要用途是在拓扑空间中定义点或网络的广义序列及研究这类序列的收敛性等等时作为指标集，见**广义序列** (generalized sequence)

А В Архангельский 撰

【补注】 一个预滤子也称为滤子基 (filter base)

除了上面提到的拓扑学的应用之外，有向集在**范畴** (category) 论，**格** (lattice) 论和理论计算机科学中也起着重要的作用 在范畴论中，它们是作为直和反系统的指标集出现的（见**系统（范畴中的）** (system (in category))）在计算机科学中，数据的构成通常是仿效偏序集，在这里，每个上有向子集有一个最小的上界（虽然有限子集通常不是如此），例如，见 [A1] 在格论中，有向子集的最小上界同样扮演着富有特色的角色，例如，见**连续格** (continuous lattice)．

参考文献

[A1] Scott, D S, Data types as lattices, *SIAM J Computing*, **5** (1976), 522－587

蓝以中 译

有向泛函方法 [**directing functionals, method of**, **направляющих функционалов метод**]

证明有关自共轭微分算子的本征函数展开定理的一个特殊方法 对正半轴上的二阶奇异微分算子这一特殊情形，相应的定理首先由 H Weyl ([1]) 得到．对于 $2n$ 阶微分算子的一般定理，首先由 М Г Крейн

([2])证明，他运用了现已被称为有向泛函法的方法其结论可以阐述如下（见[3]）设 $l(y)$为区间 (a, b) 上的 $2n$ 阶自共轭微分式，$u_1(x, \lambda)$，，$u_{2n}(x, \lambda)$为方程

$$l(y)=\lambda y$$

的解系，满足初始条件

$$u_j^{[k-1]}(x_0)=\begin{cases}1, & 若\ j=k, \\ 0, & 若\ j\neq k,\end{cases}$$

其中 x_0 是 (a, b)中一固定点，且 $u_j^{[k-1]}$ 是 u_j 的 $(k-1)$阶拟导数．那么，对于由 $l(y)$生成的算子的任何自共轭扩张 L，存在着一个矩阵值分布函数

$$\sigma(\lambda)=(\sigma_{jk}(\lambda)), j, k=1, \quad, 2n,$$

使得对任何函数 $f\in L_2(a, b)$，

$$\varphi_j(\lambda)=\int_a^b f(x)u_j(x, \lambda)dx, \tag{1}$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j, k=1}^{2n}\varphi_j(\lambda)u_k(x, \lambda)d\sigma_{jk}(\lambda), \tag{2}$$

这里假定(1)及(2)中的积分分别按 $L_2(\sigma)$及 $L_2(a, b)$中的度量意义收敛．在这些假定下，我们有下列类似于 Parseval 等式的结果

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j, k=1}^{2n}\varphi_j(\lambda)\overline{\varphi_k(\lambda)}d\sigma_{jk}(\lambda)$$

定义于 $L_2(a, b)$中具有紧支集的函数上的泛函 $\varphi(\lambda)$ 称为 $l(y)$的有向泛函（directing functionals）．

有向泛函方法的推广及其进一步发展，产生了装备 Hilber 空间以及广义本征元展开的概念（见[4]，[5]，[6]）

参考文献

[1] Weyl, H , Ueber gewohnliche Differentialgleichungen mit Singularitaten und die zugehorigen Entwicklungen willkurlicher Funktionen, *Math Ann*, **68** (1910), 220－269

[2] Крейн, М , Г , 《Докл АН СССР》, **53** (1946), 1, 3－6

[3] Наймарк, М А , Линейные дифференциальные операторы, 2 изд , М , 1969（中译本 М А 纳依玛克，线性微分算子，科学出版社，1964）

[4] Березанский, Ю М , Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К , 1965

[5] Гельфанд, И М , Шилов, Г Е , Некоторые вопросы дифференциальных уравнений, М , 1958（中译本 И М 盖尔芳特，Г Е 希洛夫，广义函数 Ⅲ，科学出版社，1985）

[6] Гельфанд, И М , Виленкин, Н Я , Некоторые вопросы гармонического анализа, Оснащенные гильбертовы пространства, М , 1961（中译本 И М 盖尔芳特等，广义函数 Ⅳ，科学出版社，1965）

[7] Левитан, Б М , Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, М -Л , 1950（中译本 Б М 列维登，按二阶微分方程的特征函数的展开式，科学出版社，1958)

А И Логинов 撰 王声望 译 郑维行 校

方向场［direction field，направлений поле］

对应于常微分方程组

$$\dot{x}_i=f_i(t, x_1, \quad, x_n), i=1, \quad, n \tag{1}$$

的线素集合的几何解释．一个线素（line element）定义为一个数列

$$t, x_1, \quad, x_n, \tag{2}$$
$$f_1(t, x_1, \quad, x_n), \quad, f_n(t, x_1, \quad, x_n),$$

其中 $(t, x_1, \cdot\cdot, x_n)$ 是区域 $G\subset\mathbf{R}^{n+1}$ 中的一个点，方程组 (1) 右端各项在这个区域上有定义．线素 (2) 可以描述为一个点 $(t, x_1, \cdot, x_n)\in G$ 以及具有方向余弦

$$\left[1+\sum_{k=1}^n f_k^2\right]^{-1/2}, \quad f_i\left[1+\sum_{k=1}^n f_k^2\right]^{-1/2}, \quad i=1, \cdot, n \tag{3}$$

的方向，它可以用通过这一点且平行于向量

$$(1, f_1(t, x_1, \cdot, x_n), \quad, f_n(t, x_1, \cdot, x_n))$$

的微小线段来表示．对于对称形式的方程组

$$\frac{dt}{f_0(t, x_1, \quad, x_n)}=\frac{dx_1}{f_1(t, x_1, \quad, x_n)}= \quad =\frac{dx_n}{f_n(t, x_1, \cdot, x_n)},$$

与方程组 (1) 不同，其方向场也包括与 t 轴正交的方向．

方程组 (1) 的任何一条**积分曲线**（integral curve），在其每一点上，与对应于这一点的方向场的方向相切；具有这种性质的任何曲线都是方程组 (1) 的积分曲线 因此，给定方向场等价于给定方程组 (1)，积分这个方程组的问题相当于确定 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的这样一些曲线，这些曲线在每一点上的切线具有由公式 (3) 定义的方向，即其方向与方向场在这一点上的方向相重合

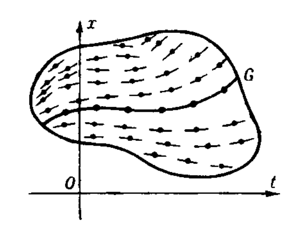
当 $n=1$ 时，上述几何解释变得特别直观，在这种情况下，对于一阶方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x) \tag{4}$$

的右端的定义域 $G\subset\mathbf{R}^2$ 中的每一点 (t, x)，存在通过这一点的一个微小线段，使得 t 轴与这一线段之间的（有向）角等于 $\arctan f(t, x)$（见图）．

往往同时考虑微分方程 (4) 和微分方程

$$\frac{dt}{dx}=F(t, x), \tag{5}$$



其中对于使得 $f(t,x)\neq 0$ 的点 $(t,x)\in G$, $F(t,x)=1/f(t,x)$, 对于 $(t,x)\in \mathbf{R}^2\backslash G$, 定义 $F(t,x)=0$, 如果这个定义保持 $F(t,x)$ 的连续性．这样，对于这一对方程 (4), (5), 通过增添其方向平行于 x 轴的一些点，把区域 G 扩充到区域 G_0, 而积分曲线也就可以包含具有竖直切线的一些点

如果对于方程 (4) 在区域 G 中（或者对于一对方程 (4), (5) 在区域 G_0 中）足够细致地画出方向场，那么这些线段的图案将大体上给出积分曲线性状的定性表示 这种思想就是方程 (4) 的近似图解法——所谓等倾线法 (method of isoclines) 的基础，在这种方法中借助于**等倾线** (isoclines) 来描绘方向场．方向场和积分曲线之间的几何关系也是方程 (4) 的一种近似数值解法——**Euler 法** (Euler method) 的基础．

对于常微分方程**自治系统** (autonomous system), 存在一种根据**向量场** (vector field)(亦见**流形上的向量场** (vector field on a manifold)) —— 在系统的相空间中的相速度场的更方便、更直观的几何解释．

参考文献

[1] Понтрягин, Л С , Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд , М , 1974 (中译本 Л С 庞特利雅金，常微分方程，上海科学技术出版社，1962)

[2] Kamke, E , Differentialgleichungen Losungsmethoden und Losungen, I Gewohnliche Differentialgleichungen, Chelsea, reprint, 1947 (中译本 E 卡姆克，常微分方程手册，科学出版社，1980)

[3] Sansone, G , Equazioni Differenziali, Nel Campo Reale, 1948 (俄译本 Дж Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, т 1-2, М , 1953-1954)

Н Х Розов 撰

【补注】 在关于微分方程及其在力学、生物学和计量经济学中的应用的教科书里，经常用到方向场，即线素场 (line elements field)． 张鸿林 译

准线 [directrix, директриса]

圆锥截线 (conic sections)（椭圆、双曲线或抛物线）所在平面上的一条直线，具有下述性质 由曲线上任何点到曲线的焦点的距离与由该点到这条直线的距离之比是一个常量，—— 按定义，它等于曲线的**离心率** (eccentricity)

Е В Шикин 撰

【补注】 **椭圆** (ellipse) 和**双曲线** (hyperbola) 具有两个焦点，因而具有两条相应的准线，而**抛物线** (parabola) 具有一个焦点，因而具有一条准线．亦见**曲线的焦点** (focus of a curve) 的补注 张鸿林 译

Dirichlet 盒子原理 [Dirichlet box principle, Дирихле принцип (ящиков)], Dirichlet 抽屉原理 (Dirichlet drawer principle)

下述定理 若由 n 个集合组成的总体包含多于 n 个元素，则至少有一个集合，它至少含有两个元素 Dirichlet 盒子原理最通俗的陈述形式是 若 n 个"盒子"中共有 $n+1$ 个"物体"，则至少有一个"盒子"内至少装有两个"物体" 这个原理经常被用于 Diophantus 逼近理论和超越数理论，去证明线性不等式组有整数解（见 Diophantus 逼近理论中的 **Dirichlet 定理** (Dirichlet theorem)）

В．Г Спринджук 撰 潘承彪 译 戚鸣皋 校

Dirichlet 特征标 [Dirichlet character, Дирихле характер], 模 k 的

定义在整数集合上的函数 $\chi(n)=\chi(n, k)$, 它满足下列条件

$$\chi(n)\not\equiv 0,$$
$$\chi(n)\chi(l)=x(nl),$$
$$\chi(n)=\chi(n+k)$$

换句话说，一个模 k 的 Dirichlet 特征标是一个不恒等于 0 的算术函数，它是全乘性的周期函数，周期为 k

P G L Dirichlet 在他研究算术级数中素数分布律的论文中引入了 Dirichlet 特征标的概念 他从直接构造出发，给出了 Dirichlet 特征标理论的基本原理（见[2]-[8]）

设 $k=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 k 的典范分解，设 n 是一与 k 互素的整数，$(n,k)=1$, 若 $\alpha=0$ 或 1, 令 $C=C_0=1$, 若 $\alpha\geqslant 2$, 令 $C=2, C_0=2^{\alpha-2}$, 又令 $C_i=\varphi(p_i^{\alpha_i}), \cdots, C_r=\varphi(p_r^{\alpha_r})$, 其中 φ 是 Euler 函数．设 $\gamma,\gamma_0,\cdots,\gamma_r$ 是数 $n(\bmod k)$ 的指标系，即满足下列同余式的最小非负整数系

$$n\equiv(-1)^{\gamma}5^{\gamma_0}(\bmod 2^{\alpha}),$$
$$n\equiv g_j^{\gamma_j}(\bmod p_j^{\alpha_j}),\quad j=1,\cdots,r,$$

其中 g_j 是模 $g_j^{\alpha_j}$ 的最小原根 设 $\varepsilon,\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_r$ 分别是 C, $C_0,\cdots,C_r$ 阶单位根 定义在自然数集合上的函数

$$\chi(n)=\begin{cases}\varepsilon^{\gamma}\varepsilon_0^{\gamma_0}\cdots\varepsilon_r^{\gamma_r}, & 若\ (n,k)=1,\\ 0\quad, & 若\ (n,k)\neq 1\end{cases}$$

是一个 $\bmod k$ 的 Dirichlet 特征标 (Dirichlet character), 遍历 $\varepsilon,\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_r$ 的所有可能选取，可以得到

$$\varphi(2^{\alpha})\varphi(p_1^{\alpha_1})\cdots\varphi(p_r^{\alpha_r})$$

个不同的函数 χ，即全部模 k 的 Dirichlet 特征标．当 $\varepsilon=\varepsilon_0=\cdots=\varepsilon_r=1$ 时，对应的特征标是熟知的主特征标(principal character)，记为 χ_0

$$\chi_0(n)=\begin{cases}1, & 若\ (n,k)=1,\\ 0, & 若\ (n,k)\neq 1\end{cases}$$

对任意自然数 n,l,k，有

$$\chi(n)\chi(l)=\chi(nl),$$
$$\chi(n)=\chi(l),\ 若\ n\equiv l\ (\mathrm{mod}\ k)$$
$$\chi(1)=1,$$
$$\chi(n,k)=\chi(n,2^{\alpha})\chi(n,p_1^{\alpha_1})\cdots\chi(n,p_r^{\alpha_r})$$

若 $\chi(n)$ 是模 k 的 Dirichlet 特征标，则其复数共轭函数 $\overline{\chi}(n)$ 也是模 k 的 Dirichlet 特征标，此外还有

$$\chi^{\varphi(k)}(n)=\chi_0(n)$$

满足等式 $\chi^{v}(n)=\chi_0(n)$ 的最小正整数 v 称为 Dirichlet 特征标的阶 (order of the Dirichlet character)．当 $v=1$ 时只有主特征标．当 $v=2$ 时，$\chi(n)$ 只能取值 0 和 ±1．这种 Dirichlet 特征标称为实的 (real) 或二次的 (quadratic)．当 $v\geqslant3$ 时，该 Dirichlet 特征标称为复的 (complex)．若 $\chi(-1)=1$，则称 $\chi(n)$ 为偶的 (even)，若 $\chi(-1)=-1$，则称 $\chi(n)$ 为奇的 (odd)．Dirichlet 特征标的主要性质表现为公式

$$\sum_{n\ \mathrm{mod}\ k}\chi(n)=\begin{cases}\varphi(k), & 若\ \chi=\chi_0,\\ 0, & 若\ \chi\neq\chi\end{cases}$$

$$\sum_{\chi\ \mathrm{mod}\ k}\chi(l)=\begin{cases}\varphi(k), & 若\ l\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ k),\\ 0, & 若\ l\not\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ k)\end{cases}$$

其中第一个公式中的 n 取遍模 k 的完全剩余系，第二个公式中 χ 取遍模 k 的全部 $\varphi(k)$ 个特征标．

如果 $(l,k)=1$，则有下述公式

$$\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi\ \mathrm{mod}\ k}\chi(n)\,\overline{\chi}(l)=\begin{cases}1, & 若\ n\equiv l\ (\mathrm{mod}\ k),\\ 0, & 若\ n\not\equiv l\ (\mathrm{mod}\ k).\end{cases}$$

这称为 Dirichlet 特征标的正交性质 (orthogonality property of Dirichlet characters)．这是一个关于 Dirichlet 特征标的基本公式，用于讨论各种类型的算术级数 $\{kv+l, v=1,2,\cdots\}$．在 Dirichlet 特征标的理论和应用中，另外两个重要的概念是特征标的导子和本原特征标．设 $\chi(n,k)$ 是任一模 k 的非主特征标．若对任一与 k 互素的 n 来说，k 是 $\chi(n,k)$ 的最小周期，则 k 称为特征标 χ 的导子 (conductor)，此时称特征标 χ 为模 k 的本原特征标 (primitive character)，反之，就一定存在唯一的 $k_1>1$，$k_1|k$，以及一个本原特征标 χ_1，使得

$$\chi(n,k)=\begin{cases}\chi_1(n,k), & 若\ (n,k)=1,\\ 0, & 若\ (n,k)\neq1\end{cases}$$

这时 $\chi(n,k)$ 称为 $\chi_1(\mathrm{mod}\ k_1)$ 的非本原特征标 (imprimitive character)，并且称 χ_1 诱导出 χ．很多关于特征标的问题都可如此归结为本原特征标的问题．

一个特征标 $\chi(n,k)$ 是本原的，当且仅当对任意 k 的因子 d，$d<k$，存在一个 a，使得

$$a\equiv1\ (\mathrm{mod}\ d),\ \chi(a,k)\neq0,\ 1$$

解析理论广泛地应用 Gauss 和 (Gauss sum) 为工具，对于 $\chi(\mathrm{mod}\ k)$，Gauss 和定义为

$$\tau(\chi)=\sum_{m=1}^{k}\chi(m)\,e^{2\pi i m/k}$$

对于模 k 的本原特征标 χ，有

$$|\tau(\chi)|=k^{1/2}$$

并且，$\chi(n)$ 有下列展开式

$$\chi(n)=\frac{1}{\tau(\overline{\chi})}\sum_{m=1}^{k}\overline{\chi}(m)\,e^{2\pi i n m/k}$$

Dirichlet 特征标理论的主要问题之一是估计特征标的和

$$S(N,M)=\sum_{M<n\leqslant N}\chi(n)$$

其中 χ 是模 k 的非主特征标．Виноградов 的估计 (Vinogradov estimate) 是

$$S(N,M)<<\sqrt{k}\,\ln k$$

当 k 为素数时有 (见 [7])

$$S(N,M)<<k^{(r+1)/4r^2}(N-M)^{1-\frac{1}{r}}\ln k,\ r=1,2,\cdots$$

若 $M=1$，$N=k/2$，则存在无穷多个数 k，使得对模 k 的本原实特征标 χ，有

$$|S(N,M)|\sim\frac{2e^{\gamma}}{\pi}\sqrt{k}\,\ln\ln k,$$

其中 γ 是 **Euler 常数** (Euler constant) (见 [8])．这个渐近等式表明，一般而言，想要从本质上强化前面的估计是不可能的．然而，有一个关于它的 Виноградов 假设 (Vinogradov hypothesis)：对任意 $\varepsilon>0$，$1\leqslant M<N$，有

$$|S(N,M)|<<k^{\varepsilon}(N-M)^{1/2}$$

如果这个假设被证明，则可以解决数论中若干主要问题．

Dirichlet 特征标理论是 **Dirichlet L 函数** (Dirichlet L-function) 论的基础，同时也是 Abel 群特征标理论的一种特例 (见**群的特征标** (character of a group))．

参考文献

[1] Dirichlet, P. G. L., Vorlesungen über Zahlentheorie, Vieweg, 1894

[2] Виноградов, И М , Избр тр , М , 1952 (英译本 Vinogradov, I M Selected works, Sprnger, 1985)
[3] Карацуба, A. A, Основы аналитической теории чисел, М 1975
[4] Prachar, K , Prmzahlverteilung, Sprnger, 1957
[5] Чудаков, Н Г, Введение в теорию L-фукций Дирихле, М , 1947
[6] Davenport, H ,Multiplicative number theory, Sprnger, 1980
[7] Burgess, D A , Dirichlet characters and polynomials, *Proc Steklov Inst Math* , **132** (1975), 234-236 (*Trudy Mat Inst Steklov*, **132** (1973), 203-205)
[8] Лаврик, А Ф, 《Изв АН СССР Сер матем》, **35** (1971), 6, 1189-1207.

А Ф Лафрик 撰 冯绪宁 译 裴定一 校

Dirichlet 准则（关于级数收敛性的）[Dirichlet criterion (convergence of series), Дирихле признак]

如果实数 $a_n(n=1,2,\ \ )$的序列单调地趋向于零，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和序列是有界的（这个级数的各项也可以是复的），则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ 收敛 这个准则由 P G L Dirichlet ([1]) 建立

参考文献

[1] Dirichlet, P G L , *J de Math* (2), 7 (1862), 253-255

Л Д. Кудрявцев 撰

【补注】 亦见 **Dedekind 准则（关于级数收敛性的）**(Dedekind criterion (convergence of series)).

张鸿林 译

Dirichlet 间断乘子 [Dirichlet discontinuous multiplier, Дирихле разрывный множитель]

积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\cos\beta x\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & 如果\ \beta<\alpha,\\ \frac{\pi}{4}, & 如果\ \beta=\alpha,\\ 0, & 如果\ \beta>\alpha,\end{cases}$$

它是参数 $\alpha>0$ 和 $\beta>0$ 的间断函数. 被 P G L Dirichlet 用于其椭球引力研究中 ([1]). 以前，这个积分在 J Fourier, S. Poisson 和 A Legendre 的工作中已经出现.

参考文献

[1] Dirichlet, P G L , Werke, 1, Chelsea, reprint, 1969
[2] Fichtenholz, G M , Differential-und Integralrechnung, 2-3, Deutsch Verlag Wissenschaft , 1964

Т. П. Лукашенко 撰 张鸿林 译

Dirichlet 分布 [Dirichlet distribution, Дирихле распределение]

单纯形

$$S_k=\{(x_1,\ \ ,x_k)\ \ x_1\geq 0,\ \ ,x_k\geq 0, x_1+\ \ +x_k=1\}$$

上的概率分布，$k=2,3,$ ，其概率密度为

$$p(x_1,\ \ ,x_k)=\begin{cases}C_k\prod_{i=1}^{k}x_i^{\nu_i-1}, & 当\ (x_1,\cdot,x_k)\in S_k\ 时,\\ 0, & 当\ (x_1,\cdot,x_k)\notin S_k\ 时\end{cases}$$

此处 $\nu_1>0,\ \ ,\nu_k>0$, 且

$$C_k=\Gamma(\nu_1+\ \ +\nu_k)\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{\Gamma(\nu_i)},$$

而$\Gamma(\cdot)$是 γ 函数 **B 分布** (beta distribution) 是 Dirichlet 分布在 $k=2$ 时的特殊情况. Dirichlet 分布在顺序统计量理论中起重要作用 例如，若 X, ·, X 是独立随机变量，都遵从在区间 $[0,1]$ 上的均匀分布，$X^{(1)}\leq$ $\leq X^{(n)}$ 是相应的**顺序统计量** (order statistic)，则 k 个差

$$X^{(m_1)},\ X^{(m_2)}-X^{(m_1)},\ \ \ ,X^{(m_{k-1})}-X^{(m_{k-2})},\ 1-X^{(m_k)}$$

(假定 $1\leq m_1<m_2<\ \ <m_{k-1}$) 的联合分布是 $\nu_1=m_1$, $\nu_2=m_2-m_1,\cdot\ ,\nu_{k-1}=m_{k-1}-m_{k-2},\ \nu_k=n-m_{k-1}$ 的 Dirichlet 分布.

参考文献

[1] Wilks, S S , Mathematical statistics, Wiley, 1962

Л. Н Больцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ferguson, T S , A Bayesian analysis of some nonparametric problems, *Ann* Stat , 1 (1973), 209-230

李国英 译 吴启光 校

Dirichlet 公式 [Dirichlet formula, Дирихле формула]，关于除数个数的

渐近公式

$$\sum_{n\leq N}\tau(n)=N\ln N+(2C-1)N+O(\sqrt{N}).$$

其中 $\tau(n)$ 是 n 的除数的个数，而 C 是 **Euler 常数** (Euler constant) P Dirichlet 于 1849 年得到这公式时，注意到这个和等于以双曲线 $y=N/x$ 和坐标轴为界的区域内坐标为正整数的点 (x,y) 的数目，即等于

$$[\sqrt{N}]^2+2\sum_{x\leq\sqrt{N}}\left[\frac{N}{x}\right],$$

其中$[\alpha]$ 表示 α 的整数部分.

参考文献

[1] Titchmarsh, E C , The theory of the Riemann zeta-function, Clarendon, 1951.

А. Ф. Лаврик 撰

【补注】 亦见**除数问题** (divisor problems).

戚鸣皋 译 张明尧 校

Dirichlet 函数 [Dirichlet function, Дирихле функция]

在有理点上等于 1、在无理点上等于 0 的函数 这个函数还可由下列公式来定义

$$f(x)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n},$$

它属于第二 **Baire 类** (Baire classes) 它在任何区间上都不是 Riemann 可积的，但是因为它几乎处处等于 0，所以它是 Lebesgue 可积的．

参考文献

[1] Натансон, И П, Теория функций вещественной переменной, 3 изд, M, 1974 (中译本 И П 那汤松，实变函数论，高等教育出版社，1956)

Л Д Кудрявцев 撰 张鸿林 译

Dirichlet 积分 [Dirichlet integral, Дирихле интеграл]

由变分法得到的与 Laplace 方程的 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem) 的解相关联的泛函 设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的有界区域，其边界 Γ 属于 C^1 类，又设 $x=(x_1, \ldots, x_n)$，函数 $u\in W_2^1(\Omega)$ (见 **Соболев 空间** (Sobolev space)) 函数 u 的 Dirichlet 积分是如下表达式

$$D[u]=\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]^2dx$$

对于 Γ 上给定的函数 φ，考虑 $W_2^1(\Omega)$ 中满足边界条件 $u|_\Gamma=\varphi$ 的函数的集合 π_φ 如果 π_φ 不空，则存在唯一的函数 $u_0\in\pi_\varphi$ 使得

$$D[u_0]=\inf_{u\in\pi_\varphi}D[u],$$

并且 u_0 在 Ω 里是调和的 逆定理亦真 如果调和函数 u_0 属于 π_φ，则 $\inf D[u]$ 在 u_0 上取得．于是，u_0 是 Laplace 方程的 Dirichlet 问题在 $W_2^1(\Omega)$ 中的广义解．但是，并非对每个 φ 都能求出函数 u_0 甚至存在 Γ 上的连续函数 φ 使得 π_φ 为空集，即空间 $W_2^1(\Omega)$ 不包含满足边界条件 $u|_\Gamma=\varphi$ 的函数 u 对于这样的边界函数 φ，Laplace 方程的 Dirichlet 问题的古典解不可能有有限的 Dirichlet 积分，且不是 $W_2^1(\Omega)$ 中的广义解

参考文献

[1] Михайлов, В П, Дифференциальные уравнения в частных производных, M, 1976

А К Гущин 撰

【补注】 一个函数 (分布) u 在一个集合 (此时指边界) Γ 的限制也称为 u 在 Γ 上的迹 (trace)

这里增补了著名的参考文献 [A1] 注意到，所有具有紧支集的 C^∞ 类函数关于标量积

$$(u, v)\mapsto\int_\Omega\sum_{i=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}$$

的完全化所得到的 Hilbert 空间可以连续地嵌入 L^2 对这个事实的观察结果导致 Dirichlet 空间 (Dirichlet space) 的公理理论的引进，它阐明了经典位势论的大部分内容 (例如见 [A2] 或 [A3] 及**经典位势论** (potential theory, classical))

亦见 **Dirichlet 原理** (Dirichlet principle), **Dirichlet 变分问题** (Dirichlet variational problem)

参考文献

[A1] Brelot, M, Elements de la theorie classique du potentiel, Sorbonne Univ Centre Doc Univ, Paris, 1959

[A2] Deny, J, Methodes Hilbertienness et theorie du potential, in Potential theory CIME, Cremonese, 1970

[A3] Fukushima, M, Dirichlet forms and Markov processes, North-Holland, 1980

吴炯圻、高琪仁 译

Dirichlet 核 [Dirichlet kernel, Дирихле ядро]

表达式

$$D_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\cos kx=\frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin x/2}$$

P G L Dirichlet ([1]) 证明 函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和可以通过 Dirichlet 核表示如下

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^n a_k\cos kx+b_k\sin kx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_n(t-x)\,dt.$$

右边的积分称为 Dirichlet 奇异积分 (Dirichlet singular integral)

与 Dirichlet 核类似的表达式 ([3])

$$\widetilde{D}_n(x)=\sum_{k=1}^n\sin kx=\frac{\cos x/2-\cos(n+1/2)x}{2\sin x/2}$$

称为共轭 Dirichlet 核 (conjugate Dirichlet kernel)．与 $f(x)$ 的 Fourier 级数共轭的级数的部分和可以用共轭 Dirichlet 核来表示

$$\widetilde{S}_n(x)=\sum_{k=1}^n b_k\cos kx-a_k\sin kx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\widetilde{D}_n(t-x)dt$$

参考文献

[1] Dirichlet, P G L, Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à réprésenter une fonction arbitraire entre des limites donnees, *J fur Math*, **4** (1829), 157–169

[2] Dirichlet, P G L, Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à representer une fonction arbitraire entre des limites données, in Werke, Vol I, Chelsea, reprint, 1969, pp 117–132

[3] Tauber, A, Ueber den Zusammenhang des reellen und imaginaren Teiles einer Potentzreihe, *Monatsh Math*, **2** (1891), 79–118

[4] Бари, Н К, Тригонометрические ряды, M, 1961 (Bary, N K, A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964)

[5] Zygmund, A, Trigonometric series, 1–2, Cambridge Univ Press, 1979

Т П Лукашенко 撰

【补注】 Dirichlet 核也称为 Dirichlet 求和核(Dirichlet summation kernel). 在应用中还有另一种正规化. 核 D_n 和 $\tilde{D}_n$ 通常乘以 2 这时, 它们也可分别表示为级数

$$\sum_{k=-\infty}^{n} e^{ikx} \quad 和 \quad \sum_{k=-n}^{n} \frac{\operatorname{sgn} n}{i} e^{ikx}$$

本条正文中两个积分前面的因子 $\pm 1/\pi$, 则分别由 $\pm 1/2\pi$ 来代替

参考文献

[A1] Dym, H and McKean, H P, Fourier series and integrals, Acad Press, 1972

[A2] Rudin, W, Principles of mathematical analysis, Mc-Graw-Hill, 1953 (中译本 W 卢丁, 数学分析原理, 高等教育出版社, 1979)

张鸿林 译

Dirichlet L 函数 [**Dirichlet L-function**, **Дирихле L-функция**], Dirichlet L 级数 (Dirichlet L-series), L 级数 (L-series)

对任一 **Dirichlet 特征标** (Dirichlet character) $\chi(\bmod d)$ 由级数

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s} \tag{1}$$

所定义的复变元 $s=\sigma+it$ 的函数. 这样的函数由 P G L. Dirichlet 在 1837 年作为实变元函数引入 ([1]), 用以证明公差 d 与首项 l 互素的算术级数 $\{dm+l \ m=0, 1, \ \}$ 中素数的个数是无限的. 这种函数是 Riemann ζ 函数 (zeta-function) $\zeta(s)$ 在算术级数上的自然的推广, 是解析数论中的有力工具 (见 [2]-[4])

级数 (1) 通常称为 **Dirichlet 级数** (Dirichlet series), 它在复 s 平面上的任一满足 $\sigma\geqslant 1+\gamma\ (\gamma>0)$ 的有界区域内绝对一致收敛 如果 χ 是一个非主特征标, 则有

$$L(s,\chi)=s\int_1^{\infty}\sum_{n\leqslant u}\chi(n)u^{-s-1}du \tag{2}$$

由于积分号内的和式是有界的, 此式给出了 $L(s,\chi)$ 的解析延拓, 使之成为半平面 $\sigma>0$ 上的正则函数.

对任一 $\chi(\bmod d)$, 可以把 $L(s,\chi)$ 表示成关于全体素数 p 的 Euler 积

$$L(s,\chi)=\prod_p\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad \sigma>1 \tag{3}$$

由此可知, 若 $\chi=\chi_0$ 是 $\bmod d$ 的主特征标, 则对于 $d=1$,

$$L(s,\chi_0)=\zeta(s),$$

而对于 $d>1$,

$$L(s,\chi_0)=\zeta(s)\prod_{p\mid d}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$$

所以 $L(s,\chi_0)$ 在整个复平面上的性质基本上被 $\zeta(s)$ 的性质所决定. 特别地, 除 $s=1$ 之外, $L(s,\chi_0)$ 对所有的 s 都是正则的, 而 $s=1$ 是它的残数为 $\varphi(d)/d$ 的单极点, 此处 φ 是 Euler 函数 另一方面, 如果 $\chi\neq\chi_0$, χ^* 是诱导出 $\chi(\bmod d)$ 的本原特征标, 则

$$L(s,\chi)=L(s,\chi^*)\prod_{p\mid d}\left(1-\frac{\chi^*(p)}{p^s}\right) \tag{4}$$

所以, 仅考虑关于本原特征标的 Dirichlet L 函数并没有本质上的局限性 Dirichlet L 函数的这个性质是很重要的, 因为有关 $L(s,\chi)$ 的许多结果仅对于本原特征标才具有简单的形式 如果 $\chi(\bmod d)$ 是本原的, 则直接推广 Riemann 关于 $\zeta(s)$ 的方法即可得到函数 $L(s,\chi)$ 到全平面的解析延拓及函数方程. 令

$$\xi(s,\chi)=\left(\frac{d}{\pi}\right)^{(s+\delta)/2}\Gamma\left(\frac{\delta+s}{2}\right)L(s,\chi),\ \delta=\frac{1-\chi(-1)}{2},$$

则有下面形状的结果

$$\xi(1-s,\bar{\chi})=\varepsilon(x)\xi(s,\chi), \tag{5}$$

其中 Γ 是 Γ 函数, $\varepsilon(\chi)=i^{\delta}d^{1/2}/\tau(\chi)$, $|\varepsilon(\chi)|=1$, $\tau(\chi)$ 是 **Gauss 和** (Gauss sum), 而 $\bar{\chi}$ 则是特征标 χ 的复共轭. 这个方程称为 Dirichlet 函数的函数方程 (functional equation of Dirichlet fuction) 由这个公式以及 (2) 和 (4) 可知, 对所有 $\chi\neq\chi_0$, 函数 $L(s,\chi)$ 和 $\xi(s,\chi)$ 都是整函数, 如果 $\sigma\leqslant 0$, 则仅在点 $s=-2\nu-\delta\ (\nu=0,1, \ )$ 以及使得 (4) 式中的乘积为零的点 s 处有 $L(s,\chi)=0$ 这些点称为 $L(s,\chi)$ 的平凡零点 (trivial zero). $L(s,\chi)$ 的其他零点称为非平凡零点 (non-trivial zero) 如果 $\sigma>1$, 则 $L(s,\chi)\neq 0$ Ch J de la Vallée-Poussin 证明了 $L(1+it,\chi)\neq 0$, 所以 Dirichlet L 函数的所有非平凡零点落在区域 $0<\sigma<1$ 之内. 这个区域称为临界带 (critical strip)

非平凡零点的分布, 以及 $L(s,\chi)$ 在临界带中的一般的值, 是 Dirichlet L 函数理论中最重要的问题, 在数论中具有基本的重要性

借助于与 Riemann 公式类似的相应公式已经证明每个函数 $L(s,\chi)$ 都有无穷多个非平凡零点、也证明了支配算术级数中素数分布的规律直接地依赖于这些零点的分布 事实上, 设 $N(T,\chi)$ 为具有本原特征标 $\chi(\bmod d)$ 的函数 $L(s,\chi)$ 在矩形 $0<\sigma<1$, $|t|<T$, $T\geqslant 2$ 中的零点个数, 则

$$\frac{N(T,\chi)}{2}=\frac{T}{2\pi}\ln\frac{Td}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\ln Td)$$

令 $\Lambda(n)$ 为 **Mangoldt 函数** (Mangoldt function), $1\leqslant l\leqslant d$, $(l,d)=1$, 又令

$$\psi(x,d,l)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l(\bmod d)}}\Lambda(n),$$

$$\psi(x,\chi)=\sum_{n\leqslant x}\chi(n)\Lambda(n),$$

则由特征标的正交性质可得

$$\psi(x,d,l)=\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\chi \bmod d}\bar{\chi}(l)\psi(x,\chi), \qquad (6)$$

其中 χ 取遍所有模 d 的特征标．进而言之，对一个本原特征标 χ 和 $\alpha=1-\delta$

$$\psi(x,\chi)=-\sum_{\rho}\frac{x^{\rho}}{\rho}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{\delta-2m}}{2m-\delta}-$$

$$-\lim_{s\to 0}\left\{\frac{L'(\alpha s,\chi)}{L(\alpha s,\chi)}-\frac{\alpha}{s}\right\}-\alpha\ln x,$$

其中 $\rho=\beta+i\gamma$ 取遍 $L(s,\chi)$ 的所有非平凡零点，L' 是 L 对于 s 的导数

有关 $\psi(x,\chi)$ 的渐进公式在实际应用中更有用．对于任一 $\chi\neq\chi_0$ 和 $2\leqslant T\leqslant x$，有

$$\psi(x,\chi)=-\sum_{|\gamma|<T}\frac{x^{\rho}}{\rho}+\sum_{|\gamma|<1}\frac{1}{\rho}+O\left(\frac{x}{T}\ln^2 xd\right), \qquad (7)$$

而对于 $\chi=\chi_0$,

$$\psi(x,\chi_0)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)+O(\ln x\ln d) \qquad (8)$$

(8)中的量是(6)中的和式的主项．

根据所谓广义 Riemann 假设（extended Riemann hypothesis），Dirichlet L 函数的所有非平凡零点都在直线 $\sigma=1/2$ 上　如果这个假设成立，则对于 $d\leqslant x$，有

$$\psi(x,d,l)=\frac{x}{\varphi(d)}+O(\sqrt{x}\ln^2 x),$$

并且数论中许多其他的重要问题将得到最终的解答．但是，与 Dirichlet L 函数非平凡零点的分布有关的问题有其特殊的困难性，迄今为止（1988）在这方面得到的结果还相当少　对于复特征标得到的结果比实特征标的情形要强一些

把 de la Vallee-Poussin 在 1899 年提出的关于 $\zeta(s)$ 的方法推广，得到了 $L(s,\chi)$ 的非平凡零点的一个界　对复特征标 $\chi \pmod d$，存在一个绝对常数 C，使得 $L(s,\chi)$ 在下述区域中没有零点

$$\sigma>1-\frac{C}{\ln d(|t|+2)}$$

但是，如果 χ 是 mod d 的实的非主特征标，则 $L(s,\chi)$ 在此区域内可能有至多一个单的实（$t=0$）零点，它称为 $L(s,\chi)$ 的例外零点（exceptional zero）．下面的关于例外零点 β 的不等式是由二次域的解析类数公式推导出来的

$$\beta\leqslant 1-\frac{C}{d^{1/2}\ln^2 d}$$

关于 β 的众所周知的最好的（1975 年前）界是 1935 年由 C L Siegel 得到的　对任一 $\varepsilon>0$，存在一个正数 $C(\varepsilon)$，使得

$$\beta\leqslant 1-C(\varepsilon)d^{-\varepsilon}$$

但是，这个估计有其本质上的缺陷，即它在下面的意义下不是实际有效的　已知 ε 并不能实际地估计常数 $C(\varepsilon)$ 的数值　这也是基于 Siegel 的估计所得到的各种数论结果的缺陷．

由上述的关于 Dirichlet L 函数的非平凡零点的界以及公式(6)－(8)，可以导出下述关于素数分布的渐进规律

$$\psi(x,d,l)=\frac{x}{\varphi(d)}+O(x\exp[-C_1\sqrt{\ln x}]),$$

此处的 C_1，对某个 $\gamma>0$，当 $d\leqslant(\ln x)^{1-\gamma}$ 时是实效可计算的常数．否则 $C_1=C_1(N)$ 是一个非实效可计算常数，其中 $N>0$，使得 $d\leqslant(\ln x)^N$

以上这些结果是当公差 d 增大时算术级数中的素数一致分布的问题中可以利用的最好结果．当 d 的值固定时，人们知道得稍多一些．在这种情形下，Dirichlet L 函数的理论在许多方面都与 Riemann ζ 函数理论相似（见[5]）借助于估计三角和的 **Виноградов 法**（Vinogradov method）所得到的关于 $L(s,\chi)$ 的零点的最新的界具有以下形式

$$L(s,\chi)\neq 0,$$

对于

$$\sigma>1-\frac{C}{\ln^{2/3}(|t|+2)\ln^{1/3}\ln(|t|+2)},$$

其中 C 是依赖于 d 的常数．

相应于上述的模固定的 d 的 Dirichlet L 函数的非平凡零点的界，$\psi(x,d,l)$ 的渐近公式的最好的（1977）余项为

$$<<x\exp[-C\ln^{3/5}x\ln^{1/5}\ln x]$$

对于所有关于函数 $\psi(x,d,l)$ 的渐近性的公式，都有与之类似的关于函数 $\pi(x,d,l)$ 的公式，$\pi(x,d,l)$ 即素数 $p\leqslant x$，$p\equiv l \pmod d$ 的个数　其首项为 $\operatorname{li}x/\varphi(x)$，以代替 ψ 的主项 $x/\varphi(d)$，其余项比 ψ 的余项少一个因子 $\ln x$

Dirichlet L 函数的现代理论中的一个重要课题，是研究这种函数的非平凡零点的分布密度，即估计下面的量

$$N(\sigma,T,\chi),\quad \sum_{\chi \bmod d}N(\sigma,T,\chi),$$

$$\sum_{d\leqslant D}\sum_{\chi^* \bmod d}N(\sigma,T,\chi),$$

其中 $N(\sigma,T,\chi)$ 表示 $L(s,\chi)$ 在矩形 $0<\alpha\leqslant\sigma<1$，$|t|<T$ 中零点的个数，χ^* 是模 d 的本原特征标

参考文献

[1] Dirichlet, P, Vorlesungen über Zahlentheorie, Vieweg, 1894
[2] Davenport, H, Multiplicative number theory, Springer, 1980
[3] Prachar, K, Primzahlverteilung, Springer, 1957
[4] Чудаков, Н Г, Введение в теории L-функций Дирихле, М -Л, 1947
[5] Walfisz, A Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie, Deutsch Verlag Wissenschaft, 1963
[6] Montgomery, H, Topics in multiplicative number theory, Springer, 1971
[7] Лаврик, А Ф, 《Матем заметки》, **17** (1975), 5, 809 – 817

А Ф Лаврик 撰

【补注】 对模 d 的实的非主特征 χ, $L(s,\chi)$ 的例外零点 β 的实效界

$$\beta \leqslant 1-\frac{C}{d^{1/2}\ln^2 d}$$

已被 D Goldfeld 和 A Schinzel [A1] 改进为 当 $d>0$ 时

$$\beta \leqslant 1-\frac{C\ln d}{d^{1/2}} ,$$

当 $d<0$ 时

$$\beta \leqslant 1-\frac{C}{d^{1/2}} ,$$

其中 C 是实效可计算常数 应用 B H Gross 和 D. Zagier [A2] 的工作，对于 $d<0$ 的结果还可改进为 对任一 $\varepsilon>0$,

$$\beta \leqslant 1-\frac{C(\varepsilon)(\ln d)^{1-\varepsilon}}{d^{1/2}} ,$$

其中 $C(\varepsilon)$ 是实效常数

参考文献

[A1] Goldfeld, D and Schinzel, A, On Siegel's zero, *Ann Scuola Norm Sup Pisa Cl Sci* (4) **2** (1975), 571 – 583
[A2] Gross, B H and Zagier, D, Heegner points and derivatives of L-series, *Invent Math*, **84** (1986), 225 – 320

赵春来 译 冯绪宁 校

Dirichlet 原理 [Dirichlet principle, Дирихле принцип]

通过把椭圆型偏微分方程的边值问题化为在某些函数类中求某些泛函的极小值的变分问题来解该边值问题的一种方法．就狭义而言，Dirichlet 原理把在一个具有边界 ∂G 的域 G 中的 Laplace 方程

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

的第一边值问题

$$u|_{\partial G} = \varphi \tag{2}$$

归结为在满足条件

$$D(u) < +\infty \tag{3}$$

和条件 (2) 的函数类中求 **Dirichlet 积分** (Dirichlet integral)

$$D(u)=\int_G \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx,\ u=u(x_1, \quad , x_n)$$

的极小的问题 (见 **Dirichlet 变分问题** (Dirichlet variational problem))

Dirichlet 原理出现于 19 世纪初叶，并即获得广泛的关注．它既用于证明边值问题的解的存在性和唯一性这样的纯理论目的，也用于具有实际重要性问题的求解 关于函数本身及其诸偏导数都连续的函数类的 Dirichlet 原理的最确切和最完全的叙述，是由 P Dirichlet 在一次讲演中给出的，并于 1876 年由他的一个学生发表的 Dirichlet 给出的证明是不完全的，特别是他没有提出，在可容许的函数即满足条件 (2) 和 (3) 的函数的类中证明所考虑的泛函的极小存在性的必要性问题 19 世纪 60 年代后期 K Weierstrass 对 Dirichlet 的工作提出了非议，他用一个例子表明 具有某个连续的边界函数 φ 的微分边值问题 (1), (2) 有解，而相应的变分问题没有解，其原因是在此情形中对应于问题 (1), (2) 的解的 Dirichlet 积分变为无穷 在 19 世纪和 20 世纪之交，D Hilbert 提出的至少存在一个可容许函数的假设成功地维护了 Dirichlet 原理 Dirichlet 原理的进一步的重要发展包含在 С Л Соболев 的工作中，他证明了 定义在一个 n 维区域中有充分高阶广义偏导数并属于某个空间 $L_p(p \geqslant 1)$ 的任何函数，在该区域的任意足够光滑的 m $(0 \leqslant m < n)$ 维流形上取连续的边界值 这使 Соболев 能够对于多重调和方程，包括区域的边界由不同维数流形组成的情形，叙述并证明 Dirichlet 原理的正确性．

Dirichlet 原理的出现是偏微分方程边值问题理论发展阶段中的重要的一环，因为这意味着在此理论中原则地树立了一种新观点．Dirichlet 原理和它的所有可能的变形，本质上是基于把所研究的问题归结为这类或那类的变分问题 在数学本身及其应用的各个领域中它获得了广泛的应用 这是因为此方法既可用于证明关于方程的解的一般定理，又可用于得到这些方程的表示为所谓极小化序列 (即可容许函数的序列，所考虑的泛函在此函数序列上的值趋于泛函的极小值) 极限形式的具体的解，此外，基于构造极小化序列的数值方法也适用于用电子计算机来求近似解．

Л Д Кудрявцев 撰

【补注】 基于极小化序列的最熟知的方法是 **Ritz 法** (Ritz method)，亦见 [A1]

在 [A2] 中给出了有关 Dirichlet 原理的一些史料

参考文献

[A1] Michlin, S G [S, G Mikhlin], Numerische Realisierung von Variationsmethoden, Akademie Verlag,

1969(译自俄文)

[A2] Monna A F Dirichlet's principle A mathematical comedy of errors and its influence on the development of analysis, Oosthoek, Scheltema & Holkema, 1975

[A3] Miranda, C, Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970 (译自意大利文)

[A4] Courant R, Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces, Interscience, 1950

[A5] Ladyzhenskaya, O A and Ural'tseva, N N, Equations aux derivees partielles de type elliptique, Dunod 1969 (译自俄文)

[A6] Mikhailov, V P, Partial differential equations, MIR, Moscow, 1978 (译自俄文) 陆柱家 译

Dirichlet 问题 [**Dirichlet problem**, **Дирихле задача**]

求在区域 D 中正则的调和函数 u 的问题，在区域 D 的边界 Γ 上 u 与事先给定的连续函数 φ 一致 求二阶椭圆型方程的在区域中正则的、在该区域边界上取预先给定值的解的问题，也称为 Dirichlet 问题，或者第一边值问题 与此课题有关的问题早在 1840 年即由 C F Gauss，随后由 P G L Dirichlet 研究过([1])

对于具有充分光滑边界 Γ 的区域 D 的 Dirichlet 问题的解可由积分公式

$$u(x)=\int_{\Gamma}\varphi(x_0)\frac{\partial G(x,x_0)}{\partial n_0}d\sigma \qquad (1)$$

来表示，其中 $\partial G(x,x_0)/\partial n_0$ 是 **Green 函数** (Green function) $G(x,x_0)$ 在点 $x_0\in\Gamma$ 处沿内法向的导数，Green 函数由下述两个性质刻划

1) $G(x,x_0)=s_n^{-1}r^{2-n}+\gamma(x,x_0)$，当 $n\geqslant 3$ 时，或者

$$G(x,x_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}+\gamma(x,x_0),\ \text{当}\ n=2\ \text{时},$$

其中 $r=|x-x_0|$ 是点 x 与点 x_0 之间的距离，s_n 是 $\mathbf{R}^n$ 中单位球面的面积，$\gamma(x,x_0)$ 是 D 中关于坐标 x 和坐标 x_0 的正则的调和函数，

2) 当 $x_0\in D$，$x\in\Gamma$ 时，$G(x,x_0)=0$

对于球，半空间和某些其他最简单的区域，显式地构造了它们的 Green 函数，因而公式(1)就产生了 Dirichlet 问题的实际的解 对于球和半空间而言，这样所得到的公式称为 **Poisson 公式** (Poisson formula)

Dirichlet 问题是**位势论** (potential theory) 中的基本问题之一 它过去是，现在仍是发展新方法的试金石，而后这些新方法在这种或那种程度上，成为偏微分方程一般理论的组成部分

在 Dirichlet 问题的研究中运用了下述一些方法

变分方法基于下述事实 在定义于 D 中并在 Γ 上取给定值的所有函数 u 之中，调和函数极小化了 **Dirichlet 积分** (Dirichlet integral)

$$I(u)=\int_D\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2d\omega$$

构造了 $I(u)$ 的特殊的极小化序列，并证明了这个序列的收敛性．由于对于 Dirichlet 问题的所求解 u 需要积分 $I(u)$ 的存在性，因而变分方法仅可应用于可作为定义在 $\bar{D}$ 上，使 $I(F)$ 存在并有界的函数 F 在 Γ 上的迹的那些函数 φ

在**位势法** (potentials, method of) 中，Dirichlet 问题的所求解表为定义在 Γ 上的未知密度的双层位势 借助于关于此密度的跳跃公式可得 Fredholm 积分方程，考虑到从最大值原理得到 Dirichlet 问题的解的唯一性，由此积分方程即得到这个解的存在性 此时假设了 $\Gamma\in H^{(1,\lambda)}$

在 **Schwarz 交替法** (Schwarz alternating method) 中，考虑具有非空交集 D_0 的两个区域 D_1 和 D_2，对 D_1 和 D_2 分别解 Dirichlet 问题的方法是已知的 然后实施一个过程，由它可以得到关于区域 $D=D_1\cup D_2$ 的 Dirichlet 问题的解 假设 D_1 和 D_2 的边界 Γ_1 和 Γ_2 是分片光滑的，在 Γ_1 和 Γ_2 的所有交点处 Γ_1 和 Γ_2 是光滑的，且交角非零 在 D_1 和 D_2 中分别构造满足特殊边界条件的、正则的调和函数序列，再证明这两个序列一致收敛以及它们的极限在 D_0 中相同 调和的极限函数在 D 中是正则的，因而它即为 Dirichlet 问题所要求的解．Schwarz 交替法可以应用于任意有限多个区域的并集或交集

最初于 1890 年由 H Poincaré 引进的**扫除法** (balayage method) 适用于可被可数个球的集合穷尽的区域 此法的第一步是构造一个在边界 Γ 上取给定值 φ 的 **Newton 位势** (Newton potential)，接着，问题归结为用一个不改变 φ 在 Γ 上的值的、分布于 Γ 上的质量位势代替这个位势，也就是扫除质量 对于球域 D 而言，借助于 Poisson 公式容易以显式实现这样一个扫除过程 从可数个球——它们的并集穷尽某个一般形式的区域 D —— 的可数次扫除产生了某个分布在 Γ 上的质量位势，此位势给出了 Dirichlet 问题的解

适用于很一般类型区域的 **Perron 法** (Perron method)(或者，上函数和下函数法)与扫除法相近．它涉及上(上调和)函数序列和下(下调和)函数序列的构作，此两序列的公共极限即为 Dirichlet 问题的所求解 为了使这个解在点 $Q\in\Gamma$ 处取某个给定的值，必要且充分的条件是存在局部的**闸函数** (barrier) ω_Q 在交集 $\bar{D}\cap\Sigma$ (这里 Σ 是一个以点 Q 为中心的球)中 ω_Q 是连续的和上调和的，在 $\bar{D}\cap\Sigma$ 中除了点 Q 外处处 $\omega_Q>0$，在 Q 处 $\omega_Q=0$

Γ 的点称为正则点，如果在该点处存在局部闸函数 如果 Γ 只由正则点组成，那么所得到的 Dirichlet

问题的解在 D 中是连续的，并在 Γ 上取给定的值．然而，在 Γ 上也可能有非正则点．例如，Γ 上的孤立点在 $\mathbf{R}^2$ 中是非正则的，而伸向 D 内部的充分尖锐的尖端在 $\mathbf{R}^3$ 中是非正则的 非正则点的存在导致了对于 Γ 上的所有连续函数 φ Dirichlet 问题不总是可解的，要不然，关于边界数据的改变，解是不稳定的（见[6]）

由 N Wiener 于 1924 年采用的 Dirichlet 问题的广义解方法满足下述两个条件 a）它适用于所有区域，b）它产生 Dirichlet 问题的古典解，如果这样的解存在．令区域 D 是一列单调增的正则区域 $\{D_n\}$ 的极限，使得 $D_n \subset D_{n+1} \subset D$，且任意紧集 $K \subset D$ 被包含于 D_n 中，如果 $n > n(K)$ Dirichlet 问题的广义解 u 是作为关于诸区域 D_n 和连续地延拓至 D 内的边界函数 φ 的 Dirichlet 问题的解的序列 $\{u_n\}$ 的极限而得到的．解 u 不依赖于穷尽 D 的序列 $\{D_n\}$ 的选取以及连续延拓 φ 至 D 内的方式

Dirichlet 问题的广义解也有基于 Perron 法的解释．令 $\bar{H}_\varphi$ 是所有上调和函数 v 的族的下包络，它们在 Γ 上满足条件

$$\liminf v(x) \geqslant \varphi(x_0),\ x \in D,\ x \to x_0,\ \underline{H}_\varphi = \bar{H}_{-\varphi}$$

不等式 $\underline{H}_\varphi \leqslant \bar{H}_\varphi$ 适用于所有区域 D 和所有函数 φ．如果 $\underline{H}_\varphi = \bar{H}_\varphi = u$，那么函数 u 即为调和的，它称为 Dirichlet 问题的广义解，而边界函数 φ 则称为可解的．任何连续函数 φ 是可解的，而广义解 u 在一点 $x_0 \in \Gamma$ 处的性状取决于 x_0 是否为正则的

Dirichlet 问题的 Wiener 广义解满足积分表示（de la Valleé-Poussin 公式（de la Valleé-Poussin formula））

$$u(x) = \int_\Gamma \varphi(x_0)\, d\omega(x, D|x_0), \qquad (2)$$

这是公式(1)的推广，其中 $d\omega(x, E)$ 是在点 x 处集合 $E \subset \Gamma$ 的调和测度（见[5]）

由此导致了对于任意边界函数 φ，考虑广义 Dirichlet 问题的可能性，而且可以要求只在某种弱形式下满足边界条件．例如，如果 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中具有充分光滑边界 Γ 的区域，并且边界函数 φ 只有第一类间断点，那么可以只要求边界条件在 φ 的连续点处被满足，为了保证解的唯一性，在间断点处解必须是有界的．对于 Γ 上任一可测的、几乎处处有限的边界函数 φ，Н Н．Лузин 提出广义 Dirichlet 问题 边界条件可以提为：沿着 Γ 的法线解的边界值存在，并且在 Γ 上几乎处处与 φ 相等

一般的二阶椭圆型方程

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = = f(x) \qquad (3)$$

的 Dirichlet 问题是 Fredholm 问题．此时，要求在边界上取事先给定值的、在区域中正则的解 前述研究调和函数 Dirichlet 问题的方法亦已推广于方程（3）

对于一致椭圆型组，Dirichlet 问题不仅被证明是非 Fredholm 问题，而且它甚至有无穷多个线性无关解（见[8]）

对于某些非椭圆型方程或退化方程，也研究了它们的 Dirichlet 问题．在这些情形下，Dirichlet 问题有时是不适定的．

参考文献

[1] Dirichlet, P G L, *Abh der Koniglich Preus Acad Wiss*, 1850, 99 – 116

[2] Miranda, C, Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970（译自意大利文）

[3] Courant, R, The Dirichlet principle, conformal mapping and minimal surfaces, Interscience, 1950

[4] Courant, R and Hilbert, D, Methods of mathematical physics Partial differential equations, 2, Interscience, 1965（中译本 R 柯朗，D 希尔伯特，数学物理方法，卷Ⅱ，科学出版社，1977）

[5] Brélot, M, Elements de la théorie classique du potential, Sorbonne Univ Centre Doc Univ, Paris, 1959

[6] Келдыш, М В, 《Успехи матем наук》, 1941, 8, 171 – 292

[7] Келдыш, М В, 《Докл АН СССР》, 77 (1951) 181 – 183

[8] Бицадзе, А В, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М, 1966（英译本 Bitsadze, A V, Boundary value problems for second-order elliptic equations, North-Holland, 1968）

A Янушаускас 撰

【补注】 定义于区域 D 上的函数 F 在集合 $\Gamma \subset G$ 上的迹（trace on a set of a function）是 Γ 上的函数 φ，它是 F 在 Γ 上的限制，即，$\varphi = F|_\Gamma$

用于上面的正文中的记号 $\Gamma \in H^{(1\ \lambda)}$ 不是标准记号．它出现于[2]中，意为 "边界 Γ 属于可局部地由其一阶导数为 Holder 连续的函数表示的集合类"（见 **Holder 条件**（Holder condition））．

对于 $\mathbf{R}^2$ 中的区域解 Dirichlet 问题的一个重要的工具是**共形映射**（conformal mapping），因为在 $\mathbf{R}^2$ 中调和函数理论与单复变数的解析函数理论密切相关

有时可用 **Fourier 级数**（Fourier series）的形式表示解．

方程 $$-\Delta u = f$$

的具有齐次边界数据的 Dirichlet 问题的**弱解**（weak solution），可定义为一个元素 $u \in H_0^1(D)$，使得对于任何 $v \in H_0^1(D)$，等式

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_D f v\, dx$$

成立，这里f是$H^{-1}(D)$的一个元素(所有符号都是标准的).很容易把此定义推广到更一般的情形.特别地，可用任一散度形式的**椭圆型算子**(elliptic operator)L代替Laplace算子.当L是一致椭圆型时(即满足一个**强制性不等式**(coerciveness inequality))，有关弱解的存在性和唯一性的基本结果是Lax-Milgram定理(Lax-Milgram theorem)

参考文献

[A1] Kellog, O D , Foundations of potential theory, Springer, 1929

[A2] Garabedian, P R , Partial differential equations, Wiley, 1964

[A3] Riesz, F and Nagy, B Sz , Leçons d'analyse fonctionnelle, Gauthier-Villars, 1968 (中译本 F 黎茨，B 塞克佛尔维-纳吉，泛函分析讲义，科学出版社，第一卷，1963，第二卷，1980)

[A4] Friedman, A , Partial differential equations, Holt, Rinehart & Winston, 1969

[A5] Ladyzhenskaya, O A and Ural'tseva, N N , Equations aux dérivées partielles de type elliptique, Dunod, 1969 (译自俄文)

[A6] Yosida, K , Functional analysis, Springer, 1980 (中译本 吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1980)

[A7] Lang, S , Complex analysis, Springer, 1985

[A8] Gilbarg, D and Trudinger, N S , Elliptic partial differential equations of second order, Springer, 1983 (中译本 D 吉耳巴格，N S 塔丁格，二阶椭圆型偏微分方程，上海科学技术出版社，1981)

[A9] Helms, L L , Introduction to potential theory, Wiley (Interscience), 1969

[A10] Constantinescu, C and Cornea, A , Potential theory on harmonic spaces, Springer, 1972

陆柱家 译

Dirichlet级数 [Dirichlet series, Дирихле ряд]

形如

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \tag{1}$$

的级数，其中a_n是复系数，λ_n，$0<|\lambda_n|\uparrow\infty$，是级数的指数，且$s=\sigma+it$是复变数 如果$\lambda_n=\ln n$，就得到所谓通常Dirichlet级数(ordinary Dirichlet series)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

对$\sigma>1$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

表示Riemann ζ**函数**(zeta-function) 级数

$$L(s)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

其中$\chi(n)$是一函数，是熟知的**Dirichlet特征标**(Dirichlet character)，这个函数曾由Dirichlet研究过，见**Dirichlet L函数**(Dirichlet L-function) 具有任意指标λ_n的级数(1)称为一般Dirichlet级数(general Dirichlet series).

具有正指数的一般Dirichlet级数.首先，设λ_n是正数.与幂级数的**Abel定理**(Abel theorem)类似的定理成立 如果级数(1)在点$s_0=\sigma_0+it_0$收敛，那么它在半平面$\sigma>\sigma_0$内收敛，且在任意角$|\arg(s-s_0)|<\varphi_0<\pi/2$内部一致收敛.级数的收敛开域是某个半平面$\sigma>c$.数$c$称为Dirichlet级数的收敛横坐标(abscissa of convergence)，直线$\sigma=c$称为该级数的收敛轴(axis of convergence)，而半平面$\sigma>c$称为Dirichlet级数的收敛半平面(half-plan of convergence).与收敛半平面一样，还研究Dirichlet级数的绝对收敛半平面(half-plane of absolute convergence) 开域$\sigma>a$，在此开域内，级数绝对收敛(这里a是绝对收敛横坐标).一般说来，收敛横坐标与绝对收敛横坐标是不同的.然而总成立.

$$0\leqslant a-c\leqslant d,\ 其中\ d=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n},$$

且存在这样的Dirichlet级数，使得$a-c=d$ 如果$d=0$，则收敛横坐标(绝对收敛横坐标)由如下公式

$$a=c=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|a_n|}{\lambda_n}$$

来计算，它是Cauchy-Hadamard公式的翻版 $d>0$的情况较为复杂 如果量

$$\beta=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\ln\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|$$

是正的，那么$c=\beta$，如果$\beta\leqslant 0$，且级数(1)在点$s=0$发散，那么$c=0$，如果$\beta\leqslant 0$，且级数(1)在点$s=0$收敛，那么

$$c=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\ln\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|$$

级数的和$F(s)$，在其收敛半平面内是解析函数 如果$\sigma\to+\infty$，函数$F(\sigma)$的性态渐近地如同级数的首项$a_1e^{-\lambda_1\sigma}$(如果$a_1\neq 0$) 如果级数的和为零，那么这个级数的所有系数皆为零 使得$F(s)$为解析的最大半平面$\sigma>h$称为函数$F(s)$的全纯半平面(half-plane of holomorphy)，直线$\sigma=h$是所谓的全纯轴(axis of holomorphy)，而数h称为全纯横坐标(abscissa of holomorphy).不等式$h\leqslant c$成立，且$h<c$的情形是可能的.设q是在半平面$\sigma>\beta\ (q\leqslant a)$内使得$F(s)$依模有界的数$\beta$之最大下界 如下公式成立

$$a_n=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{p-iT}^{p+iT}F(s)e^{\lambda_n s}ds,\quad n=1,2,\ \ ,\ p>q,$$

由此可推出不等式

$$|a_n|\leqslant\frac{M(\sigma)}{e^{-\lambda_n\sigma}},\quad M(\sigma)=\sup_{-\infty<t<\infty}|F(\sigma+it)|,$$

它是幂级数系数的 Cauchy 不等式的翻版

Dirichlet 级数的和不可能是在无论哪个半平面 $\sigma>h$ 上解析的任意一个函数 例如，当 $\sigma\to+\infty$ 时，它必定趋于零．然而对任意一个在半平面 $\sigma>h$ 上解析的函数 $\varphi(s)$ 都可以找到这样的一个 Dirichlet 级数 (1)，使得其和 $F(s)$ 与 $\varphi(s)$ 相差一个整函数．

如果指数序列具有密度

$$\tau=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}<\infty,$$

那么收敛横坐标（收敛横坐标与绝对收敛横坐标重合）与全纯横坐标之差不超过量

$$\delta=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\lambda_n}\ln\left|\frac{1}{L'(\lambda_n)}\right|,\quad L(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right],$$

并且存在这样的级数，对于它来说上述差等于 δ δ 的值可能是 $[0,\infty]$ 中的任意值，特别地，如果 $\lambda_{n+1}-\lambda_n\geqslant q>0$, $n=1,2,$ ，那么 $\delta=0$ 全纯坐标轴具有如下性质 在其任何长为 $2\pi\tau$ 的截段上，级数的和至少有一个奇点

如果 Dirichlet 级数 (1) 在全平面上收敛，则其和是整函数．设

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\lambda_n}<\infty,$$

量

$$\rho=\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\frac{\ln\ln M(\sigma)}{-\sigma}$$

称为整函数 $F(s)$ 的 R 阶 (Ritt 阶) (R-order of an entire function)．它可用级数的系数表示为

$$-\frac{1}{\rho}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|a_n|}{\lambda_n\ln\lambda_n}$$

还可以引入整函数 $F(s)$ 的 R 型 (R-type of an entire function) 的概念．

如果

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{\lambda_n}=\tau<\infty,$$

且如果函数 $F(s)$ 在宽度超过 $2\pi\tau$ 的水平带形区域内是依模有界的，那么 $F(s)\equiv 0$ (**Liouville 定理** (Liouville theorem) 的翻版)

具有复指数的 Dirichlet 级数．对一个具有复指数 $0<|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant$ 的 Dirichlet 级数

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n s},\qquad (2)$$

绝对收敛开域是凸的 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}=0,$$

收敛开域与绝对收敛开域重合 级数 (2) 的和 $F(s)$ 是收敛域内的解析函数．一般说来，$F(s)$ 的全纯区域要比 Dirichlet 级数 (2) 的收敛域宽 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=0,$$

那么正则区域是凸的

设

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{|\lambda_n|}=\tau<\infty,$$

并设 $L(\lambda)$ 是在点 λ_n, $n\geqslant1$, 具有简单零点的指数型整函数，设 $\gamma(t)$ 是 $L(\lambda)$ 的 Borel 相伴函数（见 **Borel 变换** (Borel transform)），设 $\bar D$ 是含有 $\gamma(t)$ 的所有奇点的最小闭凸集，并设

$$\psi_n(t)=\frac{1}{L'(\lambda_n)}\int_0^{\infty}\frac{L(\lambda)}{\lambda-\lambda_n}e^{-\lambda t}d\lambda,\ n=1,2,\quad ,$$

那么函数 $\psi_n(t)$ 在 $\bar D$ 外是正则的，$\psi_n(\infty)=0$，并且诸 ψ_n 与函数系 $\{e^{\lambda_n s}\}$ 是双正交的

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\lambda_m t}\psi_n(t)\,dt=\begin{cases}0,\ m\neq n,\\ 1,\ m=n,\end{cases}$$

其中 C 是围绕 $\bar D$ 的闭周线．如果函数 $\psi_n(t)$ 直到 $\bar D$ 的边界为连续，那么边界 $\partial\bar D$ 可取作 C. 对任意一个在 D 内（$\bar D$ 的内部）解析，且在 $\bar D$ 连续的函数 $F(s)$，可指定级数

$$F(s)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{\lambda_n s},\qquad (3)$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\bar D}F(t)\psi_n(t)\,dt,\ n\geqslant1$$

对于一个给定的有界凸区域 $\bar D$，可构造这样一个整函数 $L(\lambda)$，它具有简单零点 $\lambda_1,\lambda_2,$ ，使得对于任意一个在 D 内解析且在 $\bar D$ 连续的函数 $F(s)$，级数 (3) 在 D 内部一致收敛于 $F(s)$ 对于 D 内的解析函数 $\varphi(s)$（它不一定在 $\bar D$ 连续）可以找到零指数型整函数

$$M(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\lambda^n,$$

及在 D 内解析、在 $\bar D$ 连续的函数 $F(s)$，使得

$$\varphi(s)=M(D)F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nF^{(n)}(s),$$

于是

$$\varphi(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nM(\lambda_n)e^{\lambda_n s},\ s\in D$$

当 D 是全平面或 D 是一无界凸多角形区域（它由有限条直线段所界定）的情形，也得到了以 Dirichlet 级数表示任意解析函数的结果

参考文献

[1] Леонтьев, А Ф, Ряды экспонент, М, 1976

[2] Mandelbrojt, S, Dirichlet series, principles and Methods, Reidel, 1972

А Ф Леонтьев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hardy, G M and Riesz, M, The general theory of

dirichlet series, Cambridge Univ Press, 1915

郭思旭 译 邓应生 校

Dirichlet 级数 [**Dirichlet series**, **Дирихле ряд**], 对于解析殆周期函数的

形如

$$f(s) \sim \sum_n A_n e^{\Lambda_n \tau} e^{i\Lambda_n t} = \sum_n A_n e^{\Lambda_n s}, \quad \alpha<\tau<\beta \quad (*)$$

的级数，它们表示在带域 (α,β) $(-\infty\leqslant\alpha<\beta\leqslant+\infty)$ 中解析正则的殆周期函数 $f(s)=f(\tau+it)$ 按一切直线 $\mathrm{Re}(s)=\tau$ 的并展开的全体 Fourier 级数（见**殆周期解析函数**（almost-periodic analytic function））

同一带域中两个不同的殆周期函数对应两个不同的 Dirichlet 级数 在周期为 2π 的函数的情形下，级数 $(*)$ 成为 Laurent 级数 数 A_n 与 Λ_n 分别称为 Dirichlet 系数（Dirichlet coefficient）与 Dirichlet 指数（Dirichlet exponent）. 与经典 Dirichlet 级数不同，$(*)$ 中实指数 Λ_n 的集合可以有有限极限点甚至可以处处稠密. 如果所有 Dirichlet 指数具有相同的符号，例如，如果 $f(s)$ 是带域 (α,β) 中的殆周期函数且在 $(*)$ 中 $\Lambda_n<0$，则 $f(s)$ 是带域 $(\alpha,+\infty)$ 中的殆周期函数，并且关于 t 一致地有 $\lim_{\tau\to+\infty} f(s)=0$. 对于正 Dirichlet 指数也成立类似的定理（[2]） 如果 $f(s)$ 是带域 $[\alpha,\beta]$ 上的殆周期函数且 $f(s)$ 在带域 $[\alpha,\beta]$ 中的不定积分有界，则级数

$$\sum_{\Lambda_n<0} A_n e^{\Lambda_n s}, \quad \sum_{\Lambda_n\geqslant 0} A_n e^{\Lambda_n s}$$

是两个函数 $f_1(s)$, $f_2(s)$ 的 Dirichlet 级数，它们分别在每个带域 $[\alpha_1,+\infty)$ $(\alpha_1>\alpha)$ 或每个带域 $(-\infty,\beta_1]$ $(\beta_1<\beta)$ 中是殆周期的

参考文献

[1] Bohr, H, Almost periodic functions, Chelsea, reprint, 1947 (译自德文).

[2] Левитан, Б М, Почти периодические функции, М, 1953 (中译本 Б М 列维坦, 概周期函数, 高等教育出版社, 1953)

Е А Вредихина 撰

【补注】

参考文献

[A1] Besicovitch, A S, Almost periodic functions, Cambridge Univ Press, 1932

[A2] Corduneanu, C, Almost periodic functions, Wiley, 1968 (译自罗马尼亚文)

沈永欢 译

Dirichlet 定理 [**Dirichlet theorem**, **Дирихле теорема**]

1) Diophantus 逼近理论中的 Dirichlet 定理 (Dirichlet theorem in the theory of Diophantine approximations). 对任意实数 α 和任意自然数 Q，存在整数 a 和 q 满足条件

$$|\alpha q-a| < \frac{1}{Q}, \quad 0<q\leqslant Q.$$

用 **Dirichlet** 盒子原理（Dirichlet box principle）可以证明更为一般的定理 对于任意实数 $\alpha_1, \quad ,\alpha_n$ 和任意自然数 $Q>1$，存在整数 $a_1, \quad ,a_n$ 和 q 使得

$$\max(|\alpha_1 q-a_1|, \quad ,|\alpha_n q-a_n|) < \frac{1}{Q^{1/n}}, \quad 0<q\leqslant Q.$$

参考文献

[1] Cassels, J W S, An introduction to diophantine approximation, Cambridge Univ Press, 1957

В И Берник 撰

2) Dirichlet 单位定理 (Dirichlet unit theorem). 由 P G L Dirichlet ([1]) 得到的描述代数数域上单位乘法群结构的一个定理

有理数域 **Q** 上每一 n 次代数数域 K 到复数域 **C** 有 n 个不同的同构. 如果在同构 σ $K\to\mathbf{C}$ 下域的象包含在实数域内，那么这个同构称为实的 (real)，否则称为复的 (complex) 每一复同构 σ 有一个由方程 $\overline{\sigma}(\alpha)=\overline{\sigma(\alpha)}$ $(\alpha\in K)$ 定义的复共轭同构 $\overline{\sigma}$ $K\to\mathbf{C}$. 这样数 n 可以表示为 $n=s+2t$，其中 s 是 K 到 **C** 的实同构数而 $2t$ 是 K 到 **C** 的复同构数

Dirichlet 定理 (Dirichlet theorem) 在 $n=s+2t$ 次代数数域 K 的任一阶 (order) A 中，存在 $r=s+t-1$ 个单位 $\varepsilon_1, \quad ,\varepsilon_r$，使得任一单位 $\varepsilon\in A$ 可唯一地表示为乘积

$$\varepsilon=\zeta\varepsilon_1^{s_1} \quad \varepsilon_r^{s_r},$$

其中 $s_1, \quad ,s_r$ 是整数，而 ζ 是包含在 A 中的某单位根. 单位 $\varepsilon_1, \quad ,\varepsilon_r$ 称为阶 A 的基本单位 (basic units of the order A)，它的存在性由 Dirichlet 定理确立. 特别地，在域 K 的最大阶 D (即 K 的整数环) 中的基本单位称为代数数域 K 的基本单位 (basic units of the algebraic number field K)

参考文献

[1] Dirichlet, P G L, Werke, 1, Springer, 1889

[2] Боревич, З И, Шафаревич, И Р, Теория чисел, 2 изд, М, 1972 (英译本 Borevich, Z I and Shafarevich, I R, Number theory, Acad Press, 1966)

С А Степанов 撰

3) 关于算术级数中的素数的 Dirichlet 定理 (Dirichlet theorem on prime numbers in an arithmetical progression) 每一个首项与公差互素的算术级数含有无穷多个素数 事实上，P G L Dirichlet ([1]) 证明了 对于任意给定的互素的数 l 和 k 有

$$\lim_{s\to1+0} \sum_p \frac{1}{p^s} \quad \frac{1}{\ln 1/(s-1)} = \frac{1}{\varphi(k)},$$

这里是对于满足条件 $p\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)$ 的全部素数 p 求和，

而 $\varphi(k)$ 是 Euler 函数．这个关系式可以解释为素数对于剩余类 $l(\bmod k)$ 有均匀分布规律，因为

$$\lim_{s\to1+0}\sum_p\frac{1}{p^s}\quad\frac{1}{\ln 1/(s-1)}=1,$$

其中求和扩展到所有的素数

设 $x>1$ 是整数，而 $\pi(x,l,k)$ 是满足条件 $p\equiv l(\bmod k)$ $(0<l<k)$ 及 l 和 k 互素的素数 $p\leqslant x$ 的个数，则

$$\pi(x,l,k)=\frac{\int_2^x\frac{du}{\ln u}}{\varphi(k)}+O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}),$$

其中余项的估计对于给定的 $A>0$，$k\leqslant(\ln x)^A$ 是一致的，而 $c=c(A)>0$ 是一个仅依赖于 A 的量（非实效的）．这是 Dirichlet 定理的近代形式，它直接指明了素数 $p\equiv l(\bmod k)$ 在自然数列中的分布性质　可以相信（广义 Riemann 假设 (extended Riemann hypothesis)）对于给定互素的 l 和 k 及任意整数 $x>1$，有

$$\pi(x;l,k)=\frac{\int_2^x\frac{du}{\ln u}}{\varphi(k)}+O(x^{1/2+\varepsilon}),$$

其中 $\varepsilon>0$ 是任意的，而 O 是依赖于 k 和 ε 的量．

参考文献

[1] Dirichlet, P G L , Vorlesungen über Zahlentheorie, Vieweg, 1894

[2] Prachar, K , Primzahlverteilung, Springer, 1957

[3] Карацуба, А А , Основы аналитической теории чисел, М , 1975（中译本　А А 卡拉楚巴，解析数论基础，科学出版社，1984）

В Г Спринджук 撰

4) 关于 Fourier 级数的 Dirichlet 定理 (Dirichlet theorem on Fourier series)．如果周期为 2π 的函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上逐段单调且至多有有限多个不连续点，即满足所谓 Dirichlet 条件 (Dirichlet conditions)，那么它的 Fourier 三角级数在每一连续点收敛到 $f(x)$，而在每一不连续点收敛到 $[f(x+0)+f(x-0)]/2$．这个首先由 P G L. Dirichlet ([1]) 证明的 Dirichlet 定理被 C Jordan ([3]) 推广到有界变差函数．

参考文献

[1] Dirichlet, P G L , Sur la convergence des series trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites donnés, *J Math* , **4**(1829), 157 －169

[2] Dirichlet, P G L , Werke, 1, Springer, 1889

[3] Jordan, C , *C R Acad Sci* , **92**(1881), 228 － 230

[4] Бари, Н К , Тригонометрические ряды, М , 1961（英译本　Bary, N K [N K Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964）

[5] Zygmund, A , Trigonometric series, 1, Cambridge Univ Press, 1988

Т П Лукашенко 撰　戚鸣皋 译　张明尧 校

Dirichlet 变分问题 [Dirichlet variational problem, Дирихле вариационная задача]

求 **Dirichlet 积分** (Dirichlet integral)

$$D(u)=\int_G\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dG,\quad u=u(x_1,\cdots,x_n)$$

在给定边界条件 $u|_{\partial G}=\varphi$ 下的极小值的问题，其中函数 φ 给在 n 维区域 G 的边界 ∂G 上．这问题的解也是 Laplace 方程的第一边值问题

$$\Delta u=0,\quad u|_{\partial G}=\varphi$$

的解．

Dirichlet 变分问题是关于泛函极小化的第一个问题，解偏微分方程的边值问题就化为这个问题

Dirichlet 变分问题自然地在有平方可和的一阶广义导数的函数类中考虑．在有界域情形下，这些函数的集合与 **Соболев 空间** (Sobolev space) $W_2^1(G)$ 相一致，因此具有在相应的度量中完全的性质．此外，这个空间的每个函数在几乎处处收敛的意义下在 ∂G 上有边界值，如果边界充分光滑，则此边界值和在平均收敛的意义下，或者在空间 $W_2^1(G)$ 的度量中逼近给定函数的、在闭域中的连续函数序列的边界值的极限意义下的边界值相一致．如果 G 是有界域，且如果至少存在一个函数 u，对它有 $|D(u)|<\infty$ 和 $u|_{\partial G}=\varphi$（这样的函数称作可容许的 (permissible)），那么 Dirichlet 变分问题的解 u_0 存在而且唯一．这个解 u_0 是 G 中的调和函数（见 **Dirichlet 原理** (Dirichlet principle)）.如果区域 G 的边界 ∂G 是光滑的，那么为了使得可容许的函数类不是空的，必要且充分地要 $\varphi\in B_2^{1/2}(\partial G)$．Dirichlet 变分问题的解 u_0 可以由直接变分方法求出．这些结果可以推广到包含高阶导数的二次椭圆泛函的情形，亦可推广到无界域的情形．

参考文献

[1] Courant, R and Hilbert, D , Methods of mathematical physics, Partial differential equations, 2, Interscience, 1965（译自德文）（中译本　R 柯朗，D 希尔伯特，数学物理方法，Ⅱ，科学出版社，1977）

[2] Соболев, С Л , Некоторые применения функционального анализа к математической физике, Новосиб , 1962（中译本　С Л 索伯列夫，泛函分析在数学物理中的应用，科学出版社，1959）

[3] Никольский, С М ,《Матем сб 》, **35**(1954), 2, 247－266

[4] Кудрявцев, Л Д ,《Тр Матем ин-та АН СССР》, **55**(1959), 1 － 181

Л Д Кудрявцев 撰　孙和生 译　陆柱家 校

圆盘 [disc, круг]

由一个圆围成的包含圆心的平面部分．圆盘的面积是 $S=\pi r^2$，其中 r 是圆的半径

张鸿林 译

收敛圆盘 [disc of convergence, круг сходимости]

对于幂级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \tag{1}$$

的圆盘 $\Delta=\{z\ |z-a|<R\}(z\in \mathbf{C})$ 使级数(1)在此圆盘内绝对收敛，而在其外($|z-a|>R$)发散 换言之，收敛圆盘 Δ 是级数(1)收敛点集的内部．此圆盘的半径 R 称为所给级数的收敛半径 (radius of convergence)．当 $R=0$ 时，收敛圆盘缩为点 a，当 $R=\infty$ 时，它是整个开平面．收敛半径 R 等于中心 a 到 $f(z)$ 的奇点集的距离 (关于用级数的系数 c_k 确定 R 见 **Cauchy-Hadamard 定理** (Cauchy-Hadamard theorem))．z 平面上任一圆盘 $\Delta=\{z\ |z|<R\}$ $(0\leqslant R\leqslant\infty)$ 是某个幂级数的收敛圆盘

对于多复变量 $z_1,\cdot,z_n(n>1)$ 的幂级数

$$f(z)=f(z_1,\cdot\ ,z_n)=$$
$$=\sum_{k_1,\ ,k_n=0}^{\infty} c_{k_1\ k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\quad(z_n-a_n)^{k_n}, \tag{2}$$

其收敛多圆柱定义为满足下述条件的任一多圆柱

$$\Delta_n=\{z=(z_1,\ \ ,z_n):|z_\nu-a_\nu|<R_\nu,\ \nu=1,\ \ ,n\},$$

级数(2)在该多圆柱的所有点处绝对收敛，而在任一多圆柱

$$\{z=(z_1,\ \ ,z_n):|z_\nu-a_\nu|<R_\nu,\ \nu=1,\cdot,n\}$$

(其中 $R_\nu\geqslant R_\nu$，而且这些不等式中至少有一个是严格的) 中，至少有一个使得级数(2)发散的点．收敛多圆柱的半径 $R_\nu(\nu=1,\cdot\ ,n,0\leqslant R_\nu\leqslant\infty)$ 称为级数(2)的相伴收敛半径 (associated radii of convergence)．它们与所给幂级数的系数之间有确定的关系，使得以 a 为中心以满足这一关系为半径的任一多圆柱是级数(2)的收敛多圆柱 (见 **Cauchy-Hadamard 定理** (Cauchy-Hadamard theorem))．复空间 $\mathbf{C}^n$ 中任一多圆柱 $\Delta_n(0\leqslant R_\nu\leqslant\infty,\ \nu=1,\ \ ,n)$ 是某个 n 复变量幂级数的收敛多圆柱．当 $n>1$ 时，级数(2)的绝对收敛点集的内部比较复杂——它是 $\mathbf{C}^n$ 中以 a 为中心的对数凸完全 **Reinhardt 区域** (Reinhardt domain)

参考文献

[1] Маркушевич, А И, Теория аналитических функций, 2 изд т 1, М, 1967 (中译本 А И 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957)

[2] Шабат, Б В, Введение в комплексный анализ, 2 изд, ч 1, М, 1976

Е Д Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hormander, L, An introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, 1973

[A2] Ahlfors, L V, Complex analysis, McGraw-Hill, 1978 (中译本 L V 阿尔福斯，复分析，第二版，上海科学技术出版社，1984)

[A3] Rudin, W, Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1987 (中译本 W 卢丁，实分析和复分析，人民教育出版社，1981)．

沈永欢 译

拓扑圆盘 [disc, topological, диск в топологии]

同胚于平面内圆盘的曲面，即具有一个边界分支的亏格为零的可定向**二维流形** (two-dimensional manifold)．没有局部分解点的局部连通连续统恰好与圆盘同胚，如果在此连续统内由一给定点外部的简单闭曲线中，仅有一条不能分解它的简单闭曲线，其余任意简单闭曲线都能分解它．

А В Чернавский 撰

【补注】 在西方文献中用割点 (cutpoint) 一词代替"分解点" X 是拓扑空间，点 $x\in X$ 称为一个割点，如果 $X\backslash\{x\}$ 是不连通的 (见**连通空间** (connectted space)) 同时，与"分解"相比，更习惯用"分离" (separate) 一词 X 是拓扑空间，称集合 $A\subset X$(在两点 $x,y\in X$ 之间)分离 X，如果 $X\backslash A$ 是不连通的 (x 和 y 在 $X\backslash A$ 的不同分支中)．

简单闭曲线 (simple closed curve) 是平面内圆周的拓扑象

描述这一特征的另一个较好的方法如下 没有割点的局部连通的度量**连续统** (continuum) 与一个圆盘同胚，当且仅当它含有一个不分离它的简单闭曲线，而其上所有其他简单闭曲线都分离它．

这个定理实质上是由 L Zippin 在[A2]中证明的，在[A1]中对这个领域里的结果有很好的全面介绍．

参考文献

[A1] Kampen, E R van, On some characterizations of 2-dimensional manifolds, *Duke Math J*, **1**(1935), 74–93

[A2] Zippin, L, On continuous curves and the Jordan curve theorem, *Amer J Math*, **52**(1930), 331–350

许依群、罗嵩龄、徐定宥 译

间断点 [discontinuity point, разрыва точка]

函数 $f\ X\to Y$ 的定义域 X 中的一点，在这一点上函数 f 是不连续的，其中 X 和 Y 是拓扑空间 有时，一些点本身虽然不属于函数的定义域，但是它们具有属于函数定义域的去心邻域，而且在这些点上函数不存在有限的极限 (如下所述)，那么这些点也被看成间断点．

可以把定义在实轴的一些点的去心邻域上的函数的间断点区分为第一类间断点和第二类间断点 如果函数 f 定义在点 x_0 的某一去心邻域上 (x_0 本身可能除外)，点 x_0 是函数 f 的间断点，并且函数 f(在 x_0 的一个去心邻域内)存在有限的左极限 $f(x_0-0)$ 和右极限 $f(x_0+0)$，则点 x_0 称为第一类间断点 (discontinuity

point of the first kind)，而数 $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ 称为函数 f 在点 x_0 上的跃变(jump) 如果这个跃变为零，则称点 x_0 是可去间断点(removable discontinuity point) 如果间断点不是第一类的，则称为第二类间断点(discontinuity point of the second kind)

Л Д Кудрявцев 撰

【补注】 函数 $f.X\to\mathbf{R}$ (X是拓扑空间)的间断点的集合总是闭集的可数并(而且，如果 X 是 **Hausdorff 空间** (Hausdorff space)，则闭集的可数并是一个实值函数的间断点的集合)．这个事实与 **Baire 定理** (Baire theorem)有关．亦见 **Baire 类** (Baire classes) 和 [1]

第一类和第二类间断点也分别称为跃变点(jump point)和振荡间断点．定义在 $\mathbf{R}$ 的一个区间上的、不存在振荡间断性的函数，主要应用于**随机过程**(stochastic process)理论，其中按法文，它们通常分别称为 "làg-làd functions" 和 "càglad functions"，如果它们是右连续的和左连续的

参考文献

[A1] Choquet, G , Outils topologiques et métriques de l'analyse mathématique, Centre de Documentation Univ Paris, 1969 Rédigé par C Mayer

[A2] Oxtoby, J C , Measure and category, Springer, 1971

张鸿林 译

间断函数 [discontinuous function, разрывная функция]，亦称不连续函数

函数 f $X\to Y$，它不是 X 上的**连续函数** (continuous function)，其中 X 和 Y 是拓扑空间．**Baire 类** (Baire classes)、分段连续函数和阶梯函数都是实值不连续函数 f $X\to\mathbf{R}$ 的重要类型

例如，当把一些初等函数对参数进行积分时(见 **Dirichlet 间断乘子** (Dirichlet discontinuous multiplier))，当求以初等函数为项的级数的和，特别是求三角级数的和时，以及在一些最优控制问题中，都会出现间断函数

例．

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}=\begin{cases}0, & \text{如果 } x=0,\\ 1+x^2, & \text{如果 } x\neq 0,\end{cases} \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}0, & \text{如果 } x=0,\\ \dfrac{\pi-x}{2}, & \text{如果 } x\neq 0.\end{cases} \tag{2}$$

Л Д Кудрявцев 撰 张鸿林 译

间断乘子 [discontinuous multiplier, разрывный множитель]

依赖于一个或多个参数、取两个(或多个)值的量 例如

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2+i\infty}^{2-i\infty}\frac{y^{s+2k}ds}{s(s+1)\ \ (s+2k)}=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{(y-1)^{2k}}{(2k)!}, & \text{当 } y\geq 1,\ k>0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } 0\leq y<1 \text{ 时}.\end{cases}$$

间断乘子可以用来对求和或积分的区域作形式推广，或者用来把一个给定表达式化为另一个表达式，对后者可应用给定的公式或变换 另外一些例子是 **Dirichlet 间断乘子** (Dirichlet discontinuous multiplier)，**Dirac δ 函数** (delta-function)等．

К Ю Булота 撰 张鸿林 译

间断变分问题 [discontinuous variational problem, разрывная вариационная задача]

变分学中的一个问题，其中泛函的极值在折极值曲线上达到．折极值曲线 (polygonal extremal) 是 **Euler 方程** (Euler equation) 的逐段光滑解，它在角点处满足某些必要的附加条件．这些条件的具体形式依赖于间断变分问题的类型．对第一类间断变分问题在关于被积函数的连续性和连续可微性的通常假定下寻求折极值曲线．对最简单的泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx,\quad y(x_1)=y_1,\quad y(x_2)=y_2, \tag{1}$$

在角点 x_0，折极值曲线必须满足 Weierstrass-Erdmann 条件 (Weierstrass-Erdmann conditions)

$$F_y\,(x_0,y(x_0),y'(x_0-0))\ =F_{y'}(x_0,y(x_0),y'(x_0+0)), \tag{2}$$

$$\begin{aligned}&F(x_0,y(x_0),y'(x_0-0))\ -\\ &-y'(x_0-0)F_y\,(x_0,y(x_0),y'(x_0-0))\ =\\ &=F(x_0,y(x_0),y'(x_0+0))\ -\\ &-y'(x_0+0)F_y\,(x_0,y(x_0),y'(x_0+0)).\end{aligned} \tag{3}$$

当 F 依赖于 n 个未知函数，即 (1) 中的 y 是 n 维向量 $y=(y_1,\ \ ,y_n)$ 时，在角点处的 Weierstrass-Erdmann 条件有类似于 (2)，(3) 的形式

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right]_{x_0-0}=\left[\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right]_{x_0+0},\quad i=1,\cdot\ \ ,n, \tag{4}$$

$$\left[F-\sum_{i=1}^{n}y_i'\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right]_{x_0-0}=\left[F-\sum_{i=1}^{n}y_i'\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right]_{x_0+0} \tag{5}$$

对具有 m 个微分约束型等式的条件极值的问题，其中被积函数依赖于 n 个未知函数 (见 **Bolza 问题** (Bolza

problem)), Weierstrass-Erdmann 条件可利用 Lagrange 函数 L 来表达，且有 (4), (5) 的形式，只是将 F 换为 L

用最优控制理论的术语，在折极值曲线的角点处的必要条件，需要共轭变量和 Hamilton 函数在最优控制的间断点处的连续性 正如由 **Понтрягин 最大值原理** (Pontryagin maximum principle) 所导出的，这些条件是自动满足的，只要沿折极值曲线控制是由 Hamilton 函数有一个最大值这一条件所决定

在第二类间断变分问题中被积函数是间断的．例如，设 $F(x,y,y')$ 沿曲线 $y=\varphi(x)$ 具有这样的间断 $F(x,y,y')$ 在曲线 $y=\varphi(x)$ 的两边分别等于 $F_1(x,y,y')$ 和 $F_2(x,y,y')$．于是，如果最优解存在，那么它在具有角点 $(x_0,\varphi(x_0))$ 的折极值曲线上达到，且代替泛函 (1) 得到泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_0} F_1(x,y,y')dx+\int_{x_0}^{x_2} F_2(x,y,y')dx=J_1+J_2 \quad (6)$$

泛函 (6) 的变分化为泛函 J_1 和 J_2 在比较曲线上的变分，这些曲线的右边和左边的运动端点沿曲线 $y=\varphi(x)$ 滑动．为了在折极值曲线上取到泛函 (6) 的极小，必须在角点 $(x_0,\varphi(x_0))$ 处满足条件

$$[F_1-(\varphi'-y')F_{1y}]_{x=x_0-0}=[F_2-(\varphi'-y')F_{2y}]_{x=x_0+0} \quad (7)$$

当 F 依赖于 n 个未知函数 $y=(y_1, \quad ,y_n)$，而 F 的间断面给成

$$\Phi(x,y)=0 \quad (8)$$

的形式时，位于曲面 (8) 上的折极值曲线在角点处的必要条件取下面的形式

$$\frac{\left[F_1-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial y_i'}\right]_{x_0-0}-\left[F_2-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_2}{\partial y_i'}\right]_{x_0+0}}{\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]_{x_0}}=$$

$$=\frac{\left[\frac{\partial F_1}{\partial y_1'}\right]_{x_0-0}-\left[\frac{\partial F_2}{\partial y_1'}\right]_{x_0+0}}{\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}\right]_{x_0}}=$$

$$=\frac{\left[\frac{\partial F_1}{\partial y_n'}\right]_{x_0-0}-\left[\frac{\partial F_2}{\partial y_n'}\right]_{x_0+0}}{\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y_n}\right]_{x_0}} \quad (9)$$

必要条件 (7), (9) 对于决定折极值曲线 (Euler 方程满足边界条件的特解) 的任意常数的计算来说，不是充分的条件．事实上，等式 (9) 给出 n 个必要条件，它们与 $2n$ 个边界条件，折极值曲线在角点处连续接合的 n 个条件以及方程 (8) 一起给出 $4n+1$ 个条件，利用它们可以决定出角点的横坐标 x_0 和 $4n$ 个任意常数—— 位于曲面 (8) 的不同边的极值曲线的每一条有 $2n$ 个．

参考文献

[1] Гюнтер, Н М , Курс вариационного исчисления, Л - М , 1941

[2] Смирнов, В И , Курс высшей математики, 5 изд , т 4, М , 1958 (中译本 В И 斯米尔诺夫，高等数学教程，第四卷一分册，二分册，人民教育出版社，1958)

[3] Понтрягин, Л С [и др], Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд , М , 1976 (英译本 Pontryagin, L S , et al , The mathematical theory of optimal processes, Wiley, 1962)

И Б Вапнярский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Fleming, W H and Rishel, R W , Deterministic and stochastic optimal control, Springer, 1975

[A2] Bryson, A E and Ho, Y -C , Applied optimal control, Ginn & Waltham, 1969

孙和生 译 陆柱家 校

偏差 [discrepancy, дискрепанс]，s 维单位立方体 $K_s=\{\mathbf{x}\ 0\leqslant x_v\leqslant 1,\ v=1, \quad ,s\}$ 中点列 $\omega=(\mathbf{x}_1, \cdot ,\mathbf{x}_N)$ 的以某种度量计算的泛函

$$\varphi(\alpha,\omega)=v-\frac{N(V)}{N} \quad (1)$$

的范数 这里，v 和 $N(V)$ 分别是域 $V=\{\mathbf{x}\ 0\leqslant x_v\leqslant\alpha_v\leqslant 1,\ v=1, \quad ,s\}$ 的体积和序列 ω 中属于 V 的点数．如果考虑 ω 中的点在类型 $V=\{\mathbf{x}\ 0\leqslant\alpha_v\leqslant x_v\leqslant\beta_v\leqslant 1, v=1, \quad ,s\}$ 的域上的分布，那么，在公式 (1) 中，$\varphi(\alpha,\omega)$ 时常用 $\varphi(\alpha,\beta,\omega)$ 来代替

泛函 (1) 的下列范数是最常用的.

$$D_N(\omega)=\sup_{\alpha\ \beta\in K_s}|\varphi(\alpha,\beta,\omega)|,$$

$$D_N^*(\omega)=\sup_{\alpha\in K_s}|\varphi(\alpha,\omega)|,$$

$$D_N(\omega,L_p)=\left[\int_0^1 \quad \int_0^1 |\varphi(\alpha,\omega)|^p d\alpha_1 \cdot d\alpha_s\right]^{1/p}$$

当且仅当 ([1])

$$\lim_{N\to\infty} D_N(\omega)=0$$

时，s 维单位立方体 K_s 中点的序列 $\omega=(\mathbf{x}_1, \cdot ,\mathbf{x}_N, \cdot)$ 是一致分布的．

对于任意的一维无穷点列 $\omega=\{x_n\ 0\leqslant x_n\leqslant 1, n=1, \quad\}$，下列定理 ([3]) 是正确的

$$\overline{\lim}\ ND_N(\omega)=\infty .$$

对任意序列 $\omega=\{x_n \quad 0\leqslant x_n\leqslant 1, n=1, \quad \}$，可以找到序列 $N_1, \quad, N_k, \quad$，使得当 $N=N_k$ 时有（[4]）

$$ND_N(\omega)\geqslant C_1\sqrt{\ln N}\ .$$

有关一维无穷点列的最终结果是　对于 $N=N_k$ 有

$$ND_N(\omega)\geqslant C_2\ln N$$

已研究了各种具体序列的偏差(见[6]－[8])，对于有限和无限的序列，除了得到下界估计外(见[4])，还分别得到了上界估计，

$$ND_N(\omega, L_2)\leqslant C_3(s)\ln^{s+1}N,$$

$$ND_N(\omega)\leqslant C_4(s)\ln^s N.$$

对于任意 N 个点的序列，有下列不等式

$$ND_N(\omega, L_2)\geqslant C_5(s)\ln^{(s+1)/2}N.$$

对任意无穷序列 $\omega=\{\mathbf{x}_n \quad \mathbf{x}_n\in K_s, n=1, \quad\}$，可找到数列 $N_1, \quad, N_k, \quad$，使得当 $N=N_k$ 时有

$$ND_N(\omega, L_2)\geqslant C_6(s)\ln^{s/2}N$$

及

$$D_N(\omega)\geqslant D_N(\omega, L_2)\ .$$

参考文献

[1] Weyl, H , Ueber die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins, *Math Ann.*, **77**(1916), 313－352

[2] Corput, J G van der , Verteilungsfunktionen, *Proc Konınkl Ned Akad Wet A*, **38**(1935), 8, 813－821, 1058－1066

[3] Aardenne-Ehrenfest, T van, On the impossibility of a just distribution, *Indag Math*, **11**(1949), 264－269

[4] Roth, K F , On irregularities of distribution, *Mathematika*, **1**(1954), 73－79

[5] Schmidt, W M , Irregularities of distribution VII, *Acta Arithm*, **21**(1972), 45－50

[6] Halton, J H , On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals, *Numer Math*, **2**(1960), 2, 84－90

[7] Соболь, И М ,《Ж вычисл матем и матем физ》, **7**(1967), 4, 784－802

[8] Коробов, Н М , Теорикочисловые методы в приближенном анализе, М 1963

[9] Kuipers, L and Niederreiter, H , Uniform distribution of sequences, Wiley, 1974

В М Солодов 撰

【补注】 亦见**模1分布**（distribution modulo one)，**高维模1分布**（distribution modulo one, higher-dimensional)，**一致分布**（uniform distribution)

参考文献

[A1] Beck, J and Chen, W L , Irregularities of distribution, Cambridge Univ Press, 1987

戚鸣皋 译　张明尧 校

近似的偏差 [discrepancy of an approximation, дискрепанс аппроксимации]

算子方程（例如线性代数方程组、微分方程）$P(u)=0$ 的近似解 $\bar{u}$ 的定性特征之一．偏差（discrepancy）定义为量 $P(\bar{u})$ 或这个量的模，例如 $\|P(\bar{u})\|_2$．如果估计

$$\|u_1-u_2\|_1\leqslant C\|P(u_1)-P(u_2)\|_2$$

成立，则这个近似解的误差可以通过偏差来估计

$$\|\bar{u}-u\|_1\leqslant C\|P(\bar{u})\|_2$$

如果得不到这样的估计，则偏差便可作为近似解的性质的一个直接指标

参考文献

[1] Березин, И С , Жидков, Н П , Методы вычислений, т 2, 2 изд , М , 1962(英译本 Berezin, I S and Zhidkov, N P, Computing methods, Pergamon, 1973)

[2] Бахвалов, Н С , Численные методы, М , 1973 (英译本 Bakhvalov, N S , Numerical methods analysis, algebra, ordinary differential equations Mir, 1977)

Н С Бахвалов 撰　张鸿林 译

离散分析 [discrete analysis, дискретный анализ]

研究在数学本身和应用中出现的某些结构的有限性质的数学分支　例如，**有限群**（finite group)，有限图（见**图**（graph)），以及诸如**有限自动机**（automaton, finite）这样的离散信息处理器的某些数学模型，**Turing 机**（Turing machine）等等　离散分析的研究范围有时扩展到包括任意的离散结构，这样就产生了离散数学（discrete mathematics)，因而后者与离散分析成为一回事．这样的结构可包括某些代数系统，无限图，某些类型的计算方法（如齐次结构），等等．名称有限数学（finite mathematics）有时用作离散数学和离散分析的同义词．在下文中，术语“离散分析”按广义理解，包括离散数学

与离散分析不同，经典数学处理的主要是连续的对象　经典数学和离散数学及研究工具之间的选择取决于研究的目标，也取决于所研究现象是用离散模型，还是用连续模型描述．连续和离散数学之间的区分本身是相当随意的，因为首先，两者之间的思想和方法一直是相互影响的，其次，研究中所采用的模型往往兼有离散和连续属性　况且在数学的某些分支中，离散数学的工具用来研究连续模型，反之亦然——经典数学的方法和问题的提法也被用来研究离散结构　因此，这两个数学分支在某种程度上是分不开的．

离散分析是一门重要的数学学科，它具有其自身的研究内容、方法和问题　它的一个突出的特点是经典数学的一些基本概念——极限和连续——必须抛

弃．因此，经典数学的这种强有力的工具不再适合于解决离散分析中的许多问题 除了指明其内容、方法和问题外，离散分析也可通过列出其构成科目来说明．这些科日包括**组合分析**（combinatorial analysis）、**图论**（graph theory）、**编码与译码**（coding and decoding）理论、**函数系统**（functional system）理论及其他 在假设仅考虑有限结构的情况下，术语“离散分析”往往定义为上述这些科目的总和．这个定义的延伸导致对离散分析更广泛的理解，从而它既包含了像**数理逻辑**（mathematical logic）这样的数学的整个分支，也包含了像**数论**（number theory）、**代数**（algebra）、**计算数学**（computational mathematics）、**概率论**（probability theory）这样一些数学的部分分支，以及其他内容为离散的某些学科

离散分析的原理可追溯到远古时代，在与数学其他分支共同发展的过程中，已经成为这些分支的组成部分 与整数性质有关的问题（其后形成数论）是这一时期的典型问题．后来，组合分析和离散概率论的原理在解决对策问题中出现了 而数论、代数和几何中的一般问题导致了像群、域、环等这样一些最重要的数学概念 这些概念决定了以前许多年中代数的发展和内容 这些问题实质上具有离散特征．数学研究中严密性的探求以及对其研究工具——逻辑——的分析又导致了另一个数学分支——数理逻辑．然而，离散分析最新的发展应该归于**控制论**（cybernetics）及其理论部分——数学控制论 作为对实际中出现的各种问题的直接数学研究，数学控制论为离散分析提供了重要的思想和问题，甚至引起了全新的发展方向 一些实际问题需要大量的数值处理，促进了解决问题的有效数值方法的出现，从而形成了计算数学 而对可计算性概念及算法的分析则产生了数理逻辑的一个重要分支——**算法论**（algorithms, theory of） 日益增长的信息以及与信息存储、处理和传输有关的问题导致了编码论的产生，图论的发展是由于经济、电气工程和数学内部问题的需要，复杂控制系统作用的构造和描述问题，导致了泛函系统理论，等等．此外，数学控制论也利用离散分析的结果来解决其自身的问题

离散分析还具有许多其它特点 与具有一般数学特征的“存在性”类型的问题一起所涉及的一类重要问题，是与算法可解性及具体求解算法的构造有关，这也是离散分析的特征 另一个特点是必须对在数学控制论中经常出现的所谓离散多极值问题进行全面的研究 经典数学中寻找极值的相应方法主要基于函数的光滑性，在这里基本上是无效的 离散分析中这类典型问题包括，例如，在国际象棋对弈中在步数有限制的情况下找出最优策略，以及为 Boolean 函数构造其最小析取范式这样一个重要的控制论问题——所谓 **Boolean 函数的极小化**（Boolean functions, minimization of） 与有限结构问题有关的离散分析的另一个特点是用以解决这些问题的算法在大多情况下是存在的，而在经典数学中，它们的完全解决仅仅在十分严格的限制下才有可能．这种算法的一个例子是检验所有可能变量的算法．即“完全抽样”型的算法．这样的问题包括上面所提到的下棋策略问题、Boolean 函数的极小化问题等．由于求解“完全抽样”型问题的工作量很大，因而在实际中很少被采用，所以便产生了许多与抽样局限性有关的新问题，以便把具有给定参数值的个别问题转化为具有无限多个参数值的**判定问题**（decision problem）．这里也会发生用以解决给定类型问题方法的自然限制等问题 这类问题的提法及合适方法的研究是基于各数学分支中特定模型而进行的，例如 Boolean 函数的极小化模型和数学控制论中**控制系统**（control system）的综合．

参考文献

[1] Яблонский С В, Обзор некоторых разультатов в области дискретной математики, 《Информационные материалы》, 1970, 5, 5–15

[2] Kemeny, I, Snell, J and Thompson, G L, Introduction to finite mathematics, Prentice-Hall, 1966

亦见论文集《Проблемы кибернетики》和《Дискретный анализ》，及期刊《Кибернетика》 В Б Кубрявцев 撰

【补注】 亦见**有限数学**（finite mathematics），**经典组合问题**（classical combinatorial problems），**组合分析**（combinatorial analysis），**组合几何学**（combinatorial geometry）．术语“离散分析”在西方很少用．通常，控制论及控制中的问题即使是离散的，也并不认为是离散数学的主要问题． 夏小华译 冯德兴 校

离散分布 [discrete distribution; дискретное распределение]

集中在**样本空间**（sampling space）Ω的有限或可数无限点集上的概率分布 更确切地，设 $\omega_1, \omega_2,$ 是样本点且

$$p_i = p(\omega_i),\ i = 1, 2, \tag{1}$$

满足条件

$$p_i \geq 0,\ \sum_i p_i = 1 \tag{2}$$

关系式（1）和（2）完全定义了一个空间 Ω上的离散分布，因为任意集 $A \subset \Omega$ 的概率测度可用下式定义

$$P(A) = \sum_{\{i\ \omega_i \in A\}} p_i$$

相应地，如果对随机变量 $X(\omega)$，以概率1有有限个或可数无限个不同的值 x_i 具有概率 $p_i = \mathrm{P}\{\omega\ X(\omega) = \{x_i\}$，则称 $X(\omega)$ 的分布是离散的 对分布在实直线上的情形，分布函数 $F(x) = \sum_{\{i\ x_i < x\}} p_i$ 在点 x_i 有跳跃

$p_i = F(x_i+0) - F(x_i)$，且在区间 $[x_i, x_{i+1})$ 上是常数(如果 $x_1 < x_2 <$) 最常见的离散分布有**二项分布**(binomial distribution)，**几何分布**(geometric distribution)，**超几何分布**(hypergeometric distribution)，**负二项分布**(negative binomial distribution)，**多项分布**(multinomial distribution)以及 **Poisson 分布**(Poisson distribution)　　　А В Прохоров 撰

【补注】 注意：在俄文文献中，$F(x)=\mathrm{P}(X<x)$，而在西文文献中 $F(x)=\mathrm{P}(X\leqslant x)$，所以分布函数稍有不同 在俄文文献中左连续，在西文文献中右连续　　　刘秀芳 译

离散集族 [discrete family of sets，дискретное семейство множеств]

拓扑空间的子集族 A，使得空间的每一点都有一个邻域至多与 A 中一个元相交　　　Б А Ефимов 撰

许依群、罗嵩龄、徐定有 译

离散变换群 [discrete group of transformations，дискретная группа преобразований]

Hausdorff 空间 X 中同胚的群 Γ，满足下列条件 对任意点 $x, y\in X$ 都能找到它们的邻域 U, V，使得集合

$$\{\gamma\in\Gamma \quad \gamma(U)\cap V\neq\phi\}$$

有限 点 $x\in X$ 对于这离散变换群的稳定化子

$$\Gamma_x=\{\gamma\in\Gamma \quad \gamma(x)=x\}$$

是有限的，且任意点 $x\in X$ 的轨道是离散的．若 X 是度量空间且 Γ 中变换是等距的，则这两个条件就是使 Γ 成为离散变换群的充分条件．

例．1) 实平面 $\mathbf{R}^2$ 中位移为所有可能的整向量的平行移动

$$(x,y) \rightarrow (x+m, y+n),\ (x,y)\in\mathbf{R}^2;\ m,n\in\mathbf{Z},$$

的群

2) X 是上半复平面

$$\mathbf{C}^+=\{z\in\mathbf{C}.\operatorname{Im}z>0\},$$

具有通常的 Hausdorff 拓扑，Γ 是形如

$$z\rightarrow\frac{az+b}{cz+d}$$

的 Möbius 变换的群，其中 a, b, c 及 d 是整数而且 $ad-bc=1$(Klein 模群 (Kleinian modular group))．

3) Hausdorff 空间 X 中同胚的任意有限群 Γ (具有 Zariski 拓扑的不可约代数簇的例子表明 X 的分离性条件是必要的)

4) 当 X 是连通的且局部道路连通的空间，Y 是 Hausdorff 空间时，任意正则覆叠 $p\ X\rightarrow Y$ 的**覆叠变换群** (group of covering transformations) 是自由作用 (freely-acting) (即 $\Gamma_x=\{1\}$，$\forall x\in X$) 的离散变换群，覆叠 p 本身与该群的因子分解映射一致．反之，若 Γ 是连通拓扑空间 X 的自由作用的离散变换群，则商空间 X/Γ 是 Hausdorff 空间，而商映射 $p\ X\rightarrow X/\Gamma$ 是 X/Γ 的正则覆叠，并以 Γ 为覆叠变换群．特别地由于 Poincaré-Koebe 单值化定理，任何 Riemann 曲面，除少数平凡的例外，皆可由复上半平面 $\mathbf{C}^+$ 通过实系数 Möbius 变换的自由作用离散群(所谓 **Fuchs 群** (Fuchsian group)) 的因子分解而得到

5) 在 Riemann 曲面的模理论中 (更一般地在某种给定类型的复流形的模理论中) 离散变换群作为**模群** (modular group) 出现．例 2 中讨论的是这种群中最简单的

6) 离散变换群包括**晶体群** (crystallographic group) 一类十分广泛的离散变换群，包括 Fush 群和晶体群，是由拓扑群 (特别是 Lie 群) 的**离散子群** (discrete subgroup) 构成的，这些拓扑群是看成齐性空间上的变换群

具有离散变换群 Γ 的拓扑空间 X 中的闭子集 D 称为群 Γ 的基本域 (fundamental domain of the group)，如果它是某开子集的闭包且诸集合 $\gamma(D)$ $(\gamma\in\Gamma)$ 中任两集合无公共内点且形成 X 的局部有限覆盖．例如，对于例 1 中的平行移动的群，正方形

$$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\} \tag{*}$$

可作为基本域，任意以整点为顶点，而在边上及内部无整点的平行四边形都可用作同样目的，而在 Klein 模群情形 (例 2) 可取所谓的模图形 (modular figure)

$$D=\left\{z\in\mathbf{C}^+ \quad -\frac{1}{2}\leqslant\operatorname{Re}z\leqslant\frac{1}{2},\ |z|\geqslant 1\right\}$$

很多情形下可以作出基本域．例如，设 X 是完全的 Riemann 流形，Γ 是由该空间的等距变换组成的 X 的离散变换群，且设 $x_0\in X$ 是一个点，其稳定化子 Γ_{x_0} 是平凡的，则 Dirichlet 区域 (Dirichlet domain)

$$D=\{x\in X \quad d(x,x_0)\leqslant d(x,\gamma(x_0)),\ \text{对所有非单位变换}\ \gamma\in\Gamma\}$$

可作为基本域．上面公式中 $d(x,y)$ 表示 X 中两点 x, y 的距离 若 X 是常曲率的单连通完全空间，即球面，Euclid 空间或 Лобачевский 空间，则 Dirichlet 区域是凸多面体

基本域的构造及其性质的研究对离散变换群提供了重要的信息．比如，商空间 X/Γ 可由基本域“粘接”上某些边界点来得到．例如，平行移动群 (例 1) 的商空间可由正方形 (*) 将相对的两边都粘接起来而得

到，它同胚于二维环面 基本域的概念形成了离散变换群论中组合几何方法的基础，这些方法是在 H Poincaré 关于 Fuchs 群（[1]）和 Klein 群（[2]）的研究中出现的 一方面，这种方法能够作为抽象群来阐明离散变换群的结构（即找出它的生成元和定义关系），而且另一方面能够证明离散性并找出具有给定生成元的变换群的基本域．该方法的原理如下 令 Γ 是常曲率的 n 维单连通完全空间 X 中等距变换的离散群，又令 Φ 是凸多面体，且是 Γ 的基本域，于是群 Γ 由集合

$$M=\{\gamma\in\Gamma \quad \dim(\Phi\cap\gamma(\Phi))=n-1\}$$

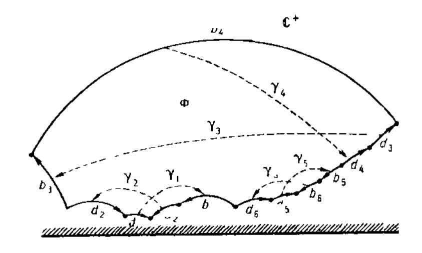
生成．下列两类所有可能的关系可取作定义关系 $\gamma_1\gamma_2=1$，其中 $\gamma_1,\gamma_2\in M$，及 $\gamma_1 \quad \gamma_k=1$，其中 $\gamma_1, \quad ,\gamma_k\in M$，

$$\dim(\Phi\cap\gamma_1(\Phi)\cap \quad \cap\gamma_1 \quad \gamma_{k-1}(\Phi))=n-2,$$

当 $i=1, \quad ,k-1$ 时 $\gamma_i\gamma_{i+1}\neq1$，以及当 $l<k$ 时 $\gamma_1 \quad \gamma_l\neq1$（[7],[3],[6]）．反之，令 Φ 是 n 维常曲率的单连通完全空间 X 中的凸多面体（包括退化的情形，即多面体 Φ 有某些二面角等于 π)，且对多面体 Φ 的每个 $n-1$ 维面给定 X 的一个等距变换 γ_F 使得 $\Phi\cap\gamma_F(\Phi)=F$ 还有 1) 对 Φ 的每个 $n-1$ 维面 F，存在面 F' 使 $\gamma_F\gamma_{F'}=1$，2) 对 Φ 的每个 $n-2$ 维面 E，存在 Φ 的 $n-1$ 维面序列 $F_1, \quad ,F_k$ 使 $\gamma_{F_1} \quad \gamma_{F_k}=1$，

$$\Phi\cap\gamma_{F_1}(\Phi)\cap \quad \cap\gamma_{F_1} \quad \gamma_{F_{k-1}}(\Phi)=E,$$

且使得多面体 $\Phi,\gamma_{F_1}(\Phi), \quad ,\gamma_{F_1} \quad \gamma_{F_{k-1}}(\Phi)$ 两两无公共内点 在这些条件下，X 的由变换 γ_F 生成的等距变换的群是离散的且多面体 Φ 就是基本区域 这是 А Д Александров（[4]）得到的关于用凸多面体填充空间的一个更一般结果的结论（亦见[8]）．下列属于 Poincaré 的具有紧的商空间的自由作用 Fuchs 群的描述正是这种情况的一个例子 这时，上半复平面 $\mathbf{C}^+$ 成为 Лобачевский 几何学的标准模型（Лобачевский 平面的 Poincaré 模型（Poincaré model）） 可取有下列性质的凸有界 $4g$ 边形 Φ 作为这里讨论的这一类型 Fuchs 群的基本域．a) 它的内角和是 2π，b) 对多边形 Φ 的边界 $\partial\Phi$ 的一个给定的环绕方向，如我们记它的边为 $b_1,b_2,d_1,d_2,b_3,b_4,d_3,d_4, \quad ,b_{2g-1},b_{2g},d_{2g-1},d_{2g}$，则 b_i 的长等于 d_i 的长，$i=1, \quad ,2g$ 下方表示了 $g=3$ 时这样的 Dirichlet 区域



若现在我们用 $\gamma_i(i=1, \quad ,2g)$ 表示平面 $\mathbf{C}^+$ 的那些等距变换，它保持定向，改换一下方向，当 i 为偶数时将 b_i 变成 d_i，当 i 为奇数时将 d_i 变成 b_i（这里假定 Φ 的各边的方向是由 $\partial\Phi$ 的定向诱导的），集合 $\{\gamma_1, \quad ,\gamma_{2g}\}$ 是 Γ 的生成系 这些生成元之间的唯一的关系具有形式

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1} \quad \gamma_{2g-1}\gamma_{2g}\gamma_{2g-1}^{-1}\gamma_{2g}^{-1}=1$$

反之，若 Φ 是满足条件 a), b) 的任意凸有界多边形，则由等距变换 $\gamma_1, \quad ,\gamma_{2g}$ 生成的群 Γ 是自由作用的 Fuchs 群，且紧流形 $\mathbf{C}^+/\Gamma$ 是亏格为 g 的紧 **Riemann 曲面**（Riemann surface）

离散变换群的同调论是研究空间 X，空间 X/Γ 及群 Γ 的同调之间的联系 特别地（例 4），若 Γ 这离散变换群是正则覆叠为 $p \quad X\to X/\Gamma$ 的覆叠变换群，其中 X 是零调的（acyclic）拓扑空间（即 $H_n(X)=0$，当 $n\geqslant1$，及 $H_0(X)=\mathbf{Z}$），则 X/Γ 的奇异上同调和 Γ 的上同调作为具有 Abel 群 A（具有平凡 Γ 模结构）中系数的抽象群是同构的

$$H^n(X/\Gamma,A)\cong H^n(\Gamma,A),\ n=0,1, \quad ,$$

该同构对 A 是自然的（[10]） 一般情况下，以上上同调群之间的联系要藉助于某些谱序列表出（[9],[10]）．

亦见**自守形式**（automorphic form），**自守函数**（automorphic function），**算术群**（arithmetic group）．

参考文献

[1] Poincaré, H, Théorie des groupes fuchsiennes, in Oeuvres, Vol 2, Gauthier-Villars, 1952, 108－168 *Acta Math*, **1** (1982), 1－62

[2] Poincaré, H, Mémoire sur les groupes Kleineens, in Oeuvres, Vol 2 Gauthier-Villars, 1952, 258－299 *Acta Math*, **3** (1883), 49－92

[3] Gerstenhaber, M, On the algebraic structure of discontinuous groups, *Proc Amer Math Soc*, **4** (1953), 745－750

[4] Александров, А Д, 《Вестник ЛГУ》, **9** (1954), 2, 34－43

[5] Coxeter, H S M and Moser, W O J, Generators and relations for discrete groups, Springer, 1972

[6] Weil, A, Discrete subgroups of Lie groups, *Ann of Math*, **72** (1960), 369－384

[7] Macbeath, A M, Groups of homeomorphisms of a simply connected space, *Ann of Math*, **79** (1964), 473－488

[8] Abels, H, Geometrische Erzeugung von diskontinuierlichen Gruppen, Univ Münster, 1966

[9] Grothendieck, A, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math J*, 9 (1957), 119－221

[10] MacLane, S, Homology, Springer, 1963

[11] Lehner, J, Discontinuous groups and automorphic functions, *Amer Math Soc*, 1964

[12] Serre, J P, Cohomogie des groupes discretes, *C R*

Acad Sci Paris, **268** (1969), 268–271

Э Б Винберг, В Л Попов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Baerdon, A F, The geometry of discrete groups, Springer, 1983
[A2] Wolf, J A, Spaces of constant curvature, McGraw-Hill, 1967
[A3] Borel, A and Wallach, N, Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups, Princeton Univ Press, 1980

石生明 译 许以超 校

离散测度 [discrete measure, дискретная мера]

集中在一个至多可数集上的测度 更一般地，设λ与μ为定义在集合的半环（具有可测集的σ环）上的测度（通常具有变号） 测度λ称为关于测度μ是离散的，如果λ集中在一个μ测度0的集合上，后者至多可数且它的任一单点子集是λ可测的 例如，线性集的离散 Lebesgue-Stieltjes 测度λ在半区间上等于某个跳跃函数的增量，此跳跃函数是有界变差的，如果λ有界，是非减的，如果λ非负

参考文献

[1] Колмогоров, А Н и Фомин, С В, Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд, М, 1976 (中译本 А Н 柯尔莫果洛夫, С В 佛明, 函数论与泛函分析初步, 高等教育出版社, 1992)

А П Терехин 撰 郑维行 译

离散范数 [discrete norm, дискретное нормирование]

除环上的一个范数，其值群同构于整数群 **Z** 这时，该环称为**离散赋范环** (discretely-normed ring). 一个离散范数，或更精确地说，高度 (height) (或秩 (rank)) 为r的离散范数，有时也可理解为其值群为按字典次序排列的群 **Z** 的r次直幂的范数

【补注】 此概念更通用的名称是离散赋值 (discrete valuation). 一个离散赋范环通常称为离散赋值环 (discrete valuation domain) 亦见**域上的范数** (norm on a field), **赋值** (valuation)

参考文献

[A1] Endler, O, Valuation theory, Springer, 1972

冯绪宁 译 裴定一 校

离散规划 [discrete programming, дискретное программирование]

数学的一个分支，其主题是研究与解决有限集上的极值问题 设$M=\{a_1, \ldots, a_n\}$, f为定义在M的元素上的数值函数 任务是寻求元素$a_j \in M$，使得f在其上达到在M上的绝对最小值（或绝对最大值）. 这种问题以缩写形式表示如下

$$f(x) \underset{x\in M}{\rightarrow} \mathrm{extr}$$

$$(f(x) \underset{x\in M}{\rightarrow} \min \ 或 \ f(x) \underset{x\in M}{\rightarrow} \max)$$

离散规划仅处理此类问题中的非平凡问题，它满足下面的附加条件

1) 数$n=|M|$必须充分大，使得此问题通过人工或借助于电子计算机直接视察$f(a_i)$的值是不可解的 因此，在旅行推销员问题（它是一个典型的离散规划问题）中，经过m个点的可能途径数为

$$(m-1)! \sim c\sqrt{m}\left(\frac{m-1}{e}\right)^{m-1}$$

在 Boole 函数的极小化问题中（见 **Boole 函数的极小化** (Boolean functions, minimization of)，**Boole 函数的度量理论** (Boolean functions, metric theory of)），$|M|>2^{2^n}$

2) 问题不能是正则的 一个问题称为正则的 (regular) 是指 a) 对每个$a_i\in M$，存在一个非空邻域$S(a_i, M)$，并且$|S(a_i, M)| \ll |M|$, b) f的一个局部极值，即点a_i使得$f(a_i)=\mathrm{extr} f(x)$, $x\in S(a_i, M)$，是用一个简单算法确定的，c) 一个局部极值至少与一个整体极值重合

于是，离散规划处理的问题，一般说来要包含几个局部极值 在典型的情形中，局部极值的数目是很大的. 因此，在具有 Boole 变量的整数**线性规划** (linear programming) 问题中，其中目标函数与约束依赖于变量$x_1, \ldots, x_k$, M中元素的数目不超过2^k，并且局部极值的数目可等于常数$2^k/\sqrt{k}$（见[2]）. 解离散规划问题的困难程度取决于局部极值的大量出现 在撰写此文时（1988），解离散规划问题还没有有效的普遍方法. 关于 Boole 函数极小化的研究（它在离散规划中是一个被详尽研究过的模型，见**局部算法** (algorithm, local)）表明，建立这种方法是不可能的. 足够普遍的方法，诸如分支限界法 (branch-and-bound methods)（见[1]）以及它们的各种改进都是基于隐含枚举的方法 它们被有效地采用于解特殊的离散规划问题 然而，有这样一大类问题，对于它们来说，任何隐含枚举法都仅仅是比明显的枚举法略为简单些. 离散规划问题中数学困难的另一个来源是，在其上寻求f的极值的集合M，通常是以一种隐含形式给出的 例如，在整数线性规划问题中，集合M定义为一个线性不等式组的整数解集 如果M是按这种方式或者甚至按更复杂的方式来定义，那么不仅是完全枚举M的任务，甚至连确指M的单个元素的任务都变为非平凡的问题 因此，离散规划中的主要结果都是在求解与研究较窄的问题类中得到的 这些问题包括**运输问题**

(transport problem)，旅行推销员问题与多个推销员问题，整数线性规划，排序问题（见**速度安排理论** (scheduling theory)），关于图上的极值问题（见**图论** (graph theory)），以及关于 Boole 函数与 k 值逻辑函数的极小表示问题，等等

离散极值问题的理论中的另一趋势是发展近似方法，它们通常用于解大规模的实际问题．在这些方法与相应的连续函数和泛函的极值搜索法之间原则上没有差别．离散规划中所采用的算法均与局部最优化算法、下降法、随机搜索等等相类似．关于用离散规划解决实际问题的近似方法的一个评论见[3]

统计方法 (statistical approach) 对于离散规划来说，在理论上与应用上都是有意义的 假设问题的总体 $\{Z\}$ 可表示为形式 $\{Z\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{Z\}_n$，这里当 $i>j$ 时，$|\{Z\}_i|>|\{Z\}_j|$，并且如果 $n\to\infty$，则 $|\{Z\}_n|\to\infty$ 设子集

$$\{Z'\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{Z'\}_n,\ \{Z'\}_n\subset\{Z\}_n$$

如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\{Z'\}_n|}{|\{Z\}|}=1,$$

那么我们说子集 $\{Z'\}$ 包含几乎所有 (almost-all) 问题 Z

下列事实应用于各类离散规划问题 存在一个包含几乎所有问题 $\{Z\}$ 的总体 $\{Z'\}$，对于它来说，在简单算法类中寻求极值或者寻求它的一个好的近似是可能的，这种总体通常被有效地描述 这是在解最优控制系统的综合问题中，例如在析取范式类的 Boole 函数的极小化问题中（见 **Boole 函数的范式** (Boolean functions, normal forms of)，并且也见[4])，首次被注意到的．举例来说，隔离至少包含在 Boole 函数 $F(x_1, \ldots, x_n)$ 的一个极小析取范式中的极值合取的问题，如果 $k\cdot l<$ 常数 $\cdot 2^n$，在局部算法类中是不可解的，这里 k 为局部算法的指标，l 为记忆容量 与此同时，隔离至少由一个"几乎极小"析取范式构成部分的初等合取的问题，在 $k=2$, $l=1$ 的局部算法类中对于几乎所有 Boole 函数是可解的（见[5]） 关于图上的极值问题，最优覆盖的构造等等，在几乎所有问题中所涉及的工作都可得到一种类似的显著减轻

参考文献

[1] Корбут, А А, Финкельштейн, Ю Ю, Дискретное программирование, М, 1969

[2] Коробков, В К, 《Проблемы кибернетики》, 1965, 14, 297－299

[3] Финкельштейн, Ю Ю, Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования, М, 1976

[4] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т 1, М, 1974

[5] Журавлев, Ю И, 《Дискретный анализ》, 1964, 3, 41－77

Ю И Журавлев 撰

【补注】 离散规划或"组合最优化" (combinatorial optimization) 是一个非常活跃的研究领域，它汇集且激励着离散数学、**概率论** (probability theory)、**运筹学** (operations research) 以及计算机科学的发展．若干西方的标准参考文献给出如下．

参考文献

[A1] Gondran, M and Minoux M, Graphs and algorithms, Wiley, 1984

[A2] Lawler, E L, Combinatorial optimization networks and matroids, Holt, Rinehart & Winston, 1976

[A3] Lawler, E L, Lenstra, J K, Rinnooy Kan, A H G and Shmoys, D B (EDS), The traveling salesman Problem a guided tour of combinatorial optimization, Wiley, 1985

[A4] Papadimitriou C H and Steiglitz, K, Combinatorial optimization algorithms and complexity, Prentice-Hall, 1982

[A5] Schrijver, A, Theory of linear and integer programming, Wiley, 1986

胡宣达 译

表示的离散系列 [discrete series of representations, дискретная серия представлений]

局部紧群 G 的连续不可约酉表示族，它们等价于 G 的正则表示的子表示 如果群 G 是幺模的，则 G 的连续不可约酉表示 π 属于离散系列，当且仅当 π 的矩阵元在 $L_2(G)$ 中 这时存在正数 d_π，称为表示 π 的形式次数 (formal degree)，使得关系

$$\int_G(\pi(g)\xi,\eta)\overline{(\pi(g)\xi',\eta')}\,dg=d_\pi^{-1}(\xi,\xi')\overline{(\eta,\eta')},\quad(1)$$

$$(\pi(g)\xi,\eta)^*(\pi(g)\xi',\eta')=d_\pi^{-1}(\xi,\eta')(\pi(g)\xi',\eta)\qquad(2)$$

对表示 π 的表示空间 H_π 中所有向量 ξ,η,ξ',η' 都适合．若 π_1 和 π_2 为 G 的分别在表示空间 H_1 和 H_2 上的两个互不等价的表示，但它们都属于离散系列，则关系

$$\int_G(\pi_1(g)\xi_1,\eta_1)\overline{(\pi_2(g)\xi_2,\eta_2)}dg=0,\qquad(3)$$

$$(\pi_1(g)\xi_1,\eta_1)^*(\pi_2(g)\xi_2,\eta_2)=0\qquad(4)$$

对所有 $\xi_1,\eta_1\in H_1$, $\xi_2,\eta_2\in H_2$ 都成立 关系 (1)－(4) 是紧拓扑群的表示的矩阵元的正交关系的推广，见**紧群的表示** (representation of a compact group)，群 G 是紧的，当且仅当 G 的所有连续不可约酉表示属于离散系列，又若 G 是紧的，且其 Haar 测度 dg 适合条件 $\int_G dg=1$，则数 d_π 和表示 π 的维数相同．单连通幂零实 Lie 群和复半单 Lie 群没有离散系列．

表示 π 的等价类所构成的离散系列的部分在群 G 的对偶空间 $\hat{G}$ 中为一闭点，这一点的 Plancherel 测度和

形式次数d_π相等，此外，如果表示π的非零矩阵元是可和的，则表示π在G的正则表示的支集中是开点，但是$\hat{G}$的开点不必对应于离散系列的表示，离散系列表示的性质可以部分地推广到非幺模局部紧群．

参考文献

[1] Dixmier, J, C^* algebras, North-Holland, 1977(译自法文)

[2A] Harish-Chandra, Discrete series for semisimple Lie groups Ⅰ, *Acta Math*, **113**(1965), 241－318

[2B] Harish-Chandra, Discrete series for semisimple Lie groups Ⅱ, *Acta Math*, **116**(1966), 1－111

[3] Schmid, W, L^2-cohomology and the discrete series, *Ann of Math*, **103**(1976), 375－394

[4A] Kleppner, A and Lipsman, R, The plancherel formula for group extensions, *Ann Sci Ecole Norm Sup*, **5**(1972), 459－516.

[4B] Kleppner, A and Lipsman, R, The plancherel formula for group extensions Ⅱ, *Ann Sci Ecole Norm Sup*, **6**(1973), 103－132

А И Штерн 撰

【补注】 特别对半单 **Lie 群** (Lie group)，属于群的离散系列或群的某些子群的离散系列的表示在群上的**调和分析** (harmonic analysis) 中起本质的作用

参考文献

[A1] Varadarajan, V S, Harmonic analysis on real reductive groups, Springer, 1977

许以超 译 石生明 校

离散空间 [discrete space, дискретное пространство]

具有**离散拓扑** (discrete topology) 的空间

С М Сирота 撰

罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

离散时空 [discrete space-time, дискретное пространство-время]

关于微观世界中空间结构的一种想象性假设，它把微观世界想象为其点不能由观察量来区分的空间中互不连通的元素的集合 离散时空的一种可接受形式能用拓扑空间Y来给出，其中一点$y\in Y$的连通分支就是它的闭包$\bar{y}$，而在 Hausdoff 空间Y中$y\in Y$的连通分支就是该点自己(完全分离空间).这种Y的例子包括离散拓扑空间，有理直线，解析流形以及取超度量绝对值的域上的 Lie 群．

离散时空的假设原本是作为有限完全分离空间的变种来发展的，在 Galois 域上有限几何的模型中 V.A Ambartsumyan 和 Д Д Иваненко (1930) 首先在域论的框架下处理它 (作为空间的立方格)．在量子理论中，离散时空的假设出现在坐标 (动量等) 空间 (像对应算子的C^*代数的谱那样) 是完全分离的模型中 (例如，像概率测度的C^*代数的谱)．这种假设的重要根基来自“基本长度”的概念，后者出现在电动力学，介子动力学和 Dirac 旋量理论的非线性推广中，这时场作用的常数有长度维数，也出现在必须引进各类“截断”因子的量子场论中 这些想法连同后来的非局部模型成为空间极小区域概念的公式化的基础，这里似乎不再能采用依据微观对象与宏观手段相互作用的微观对象的量子论描述 其结果，对于这些区域中空间发展关系的参数化 (例如，非局部理论的 Hamilton 公式化)，时空连续统是不可接受的，并且它们的点不能由观察量来区分 (在空间Y中这可以表示为非 Hausdoff 一致结构的存在性)．离散时空假设在非线性真空的概念中被发展了 根据这个观念——在粒子内部的极端条件下，也可能在天体物理学和宇宙学的奇异情况下——空间的特征可清晰地显示为一个物理系统的动力学特征，在这个物理系统的模型中空间元素具备非交换的二进制运算

参考文献

[1] Соколов, А и Иваненко, Д, Квантовая теория поля, М-Л, 1952

[2] Вяльцев, А Н, Дискретное пространство-время, М, 1965

[3] Блохинцев, Д И, Пространство и время в микромире, М, 1970.

[4] Марков, М А, О природе материи, М, 1976

[5] Finkel'stein, D, Phys Rev, **9**(1974), 8, 2219

Г А Сарданашвили 撰

【补注】 研讨离散时空的另一种方法是考虑 Diophantine 方程$t^2-x^2-y^2-z^2=1$的整数解的集合，并考察一切整数 Lorentz 变换的群 ([A1],[A2])．对此，A Schild 应用具有 Gauss 整数分量的旋量张量．他证明了连接一定点 (“事件”) 和其他格点的时空直线在空间的投影是稠密的，所以质点运动的可能方向组成一个稠密系；即质点能“近似地”沿任何方向运动．然而，其标量速度只取离散的值，直至接近光速．

参考文献

[A1] Schild, A, Discrete space-time and integral Lorentz transformations, *Canad J Math*, **1**(1949), 29－47

[A2] Coxeter, H S M and Whitrow, G J, World structure and non-Euclidean honeycombs, *Proc Royal Soc London*, **A201**(1950), 417－437

[A3] Lee, T D, *Phys Lett*, **122B**(1983), 217.

沈一兵 译 陈维桓 校

离散子群 [discrete subgroup, дискретная подгруппа]

拓扑群G的子群Γ(特别是 Lie 群的子群)，它是拓扑空间G的离散子集 在局部紧拓扑群中 (特别在 Lie 群中)，可以区分出格 (lattices)，即这样一种离散子群Γ，其商空间$\Gamma\backslash G$在群G上左不变 **Haar 测度** (Haar measure) 诱导的测度意义下具有有限体积 格的概念包含了一致离散子群 (uniform discrete subgroups) 的概念，它的商空间$\Gamma\backslash G$是紧的

设 K 为局部紧拓扑群 G 的紧子群，子群 $\Gamma \subset G$ 是离散的，当且仅当它是空间 $X=G/K$ 的**离散变换群** (discrete group of transformations)（其作用是按照群 G 在 X 上的自然作用)，这里 Γ 为格（一致离散子群)，当且仅当商空间 $\Gamma\backslash X$ 按照 X 上 G 不变测度所诱导的测度意义具有有限体积（是紧的） 这样定义就有可能用几何方法来研究 Lie 群的离散子群

在 Lie 群的离散子群论中主要问题之一为在可公度意义下对这种子群作分类．两个这种子群 Γ_1 和 Γ_2 称为可公度的 (commensurable)，如果 $\Gamma_1\cap\Gamma_2$ 关于 Γ_1 及 Γ_2 都有有限指数 如果局部紧拓扑群的两个可公度子群之一是离散子群（或格，或一致离散子群)，则另一个也是．

直到 20 世纪中叶，人们基本上是研究出现在算术、函数论和物理中的 Lie 群的个别的离散子群类 历史上第一个非平凡的离散子群为 $SL_2(\mathbf{R})$ 中的子群 $SL_2(Z)$，后来被命名为 Klein **模群** (modular group) 它在两个变数的二次型的算术中被 J L Lagrange 和 C F Gauss 研究过 $SL_n(\mathbf{R})$ 的子群 $SL_n(\mathbf{Z})$ 是它的自然推广，它作为 n 个变数的正定二次型的空间的离散变换群的研究构成约化理论的对象，在 19 世纪后半期和 20 世纪初，A. N Korkin, E I Zolotarev, Ch Hermite, H Minkowski 和其他人建立起约化理论．典型 Lie 群的算术定义的一系列离散子群在 20 世纪 40 年代被 C L Siegel 研究过，它们是具有有理系数的二次型的单位群，$\mathbf{Q}$ 上单代数的单位群，整数辛方阵群，特别他证明了所有这些群在相应的 Lie 群中是格

在单复变数函数论中，代数函数的积分和更一般的，具有代数系数的微分方程的解导致去研究某种特殊的函数（后来称为**自守函数** (automorphic function))．它在由形如

$$z\mapsto \frac{az+b}{cz+d}\ ,\quad z\in C,\ \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{R}) \tag{1}$$

的变换组成的各种离散群下不变 $SL_2(\mathbf{R})$ 的某些离散子群在 19 世纪中叶也被 Hermite, R Dedekind 和 I L Fuchs 研究过．它们包含了群 $SL_2(\mathbf{Z})$（虽然他们的表达方式和 Lagrange 及 Gauss 不同） 一个很大类的这种群，包括群 $SL_2(\mathbf{Z})$ 及和 $SL_2(\mathbf{R})$ 可公度的 $SL_2(\mathbf{R})$ 的某些子群，也被 F Klein 研究过．几乎同时 (1881－1882)，H Poincaré 给出了形如 (1) 的变换组成的所有离散群一个几何描述．他称这些群为 **Fuchs 群** (Fuchsian group)

20 世纪前半期研究了个别的多个变数的自守函数类，这些函数相关于群 $(SL_2(\mathbf{R}))^k$ 的某些算术地定义的离散子群 (Hilbert 模函数)，$SP_{2n}(\mathbf{R})$ 的这种子群 (Siegel 模函数) 以及其他半单 Lie 群的这种子群．

从 19 世纪末叶以来，晶体研究的中心为晶格的对称群，它等同于三维 Euclid 空间运动群的一致离散子群 这些群以及与 n 维 Euclid 空间的运动群中有关的群（所谓**晶体群** (crystallographic group))，在 1911 年由 L. Bieberbach 用代数观点研究过 特别他证明了任何晶体群包含平行移动的一致离散子群

所有这些研究工作为 Lie 群的离散子群的一般理论提供了原始材料 20 世纪 50 年代到 60 年代才奠定了一般理论的基础

幂零 Lie 群的离散子群的坚实理论已经建立（[9]）主要结论叙述如下 1) 若 H 为定义在 $\mathbf{Q}$ 上的幂幺代数群，则它的整点的群 H_Z 是其实点群 $H_{\mathbf{R}}$（这里 $H_{\mathbf{R}}$ 为单连通幂零 Lie 群）中一致离散子群，2) 单连通幂零 Lie 群 G 的任意一致离散子群 Γ 在下述意义下是算术的 (arithmetic) 即存在定义在 $\mathbf{Q}$ 上的幂零代数群 H 及一个同构 φ $H_{\mathbf{R}}\to G$ 使得子群 Γ 和 $\varphi(H_Z)$ 是可公度的，3) 若 Γ_i 为单连通幂零 Lie 群 $G_i(i=1,2)$ 的一致离散子群，则任意同构 $\Gamma_1\to\Gamma_2$ 能唯一地扩充为同构 $G_1\to G_2$，4) 抽象群 Γ 能嵌入为一个单连通幂零 Lie 群的一致离散子群，当且仅当 Γ 是一个有限生成无挠的幂零群．

可解 Lie 群的离散子群也有了相当透彻的研究，但其结果少于对幂零 Lie 群所获得的结果 可解 Lie 群中任一格必为一致离散子群，若 Γ 为单连通可解 Lie 群 G 中一个格，则 G 有一个忠实的矩阵表示，使得 Γ 中元素可表为整数矩阵（[13]）．这结果可看作上面关于 Мальцев 定理 2) 的推广．下面定理类似于定理 4)，单连通可解 Lie 群中任意格为强**多循环群** (polycyclic group)，反之，任意强多循环群有一个有限指数子群，它同构于一个单连通可解 Lie 群的格．

在 Lie 群的离散子群理论中最精细的结果为关于非可解 Lie 群，特别是半单 Lie 群的离散子群的 在 [4] 中证明了下面定理，它包含了下面一系列特殊情形 Мальцев 定理 1)，关于代数数域的单位的 **Dirichlet 定理** (Dirichlet theorem)，关于半单 Lie 群的某些算术离散子群的 Siegel 的结果（见上面） 设 H 为定义在 $\mathbf{Q}$ 上的线性代数群 子群 H_Z 成为 $H_{\mathbf{R}}$ 中的格的充分必要条件为 H 不允许有理同态于定义在 $\mathbf{Q}$ 上的群 $\mathbf{C}^*$（例如，若 H 是半单或幂幺时这条件适合)，要使子群 H_Z 成为 $H_{\mathbf{R}}$ 中一致离散子群，其必要且充分条件还要加上群 $H_{\mathbf{Q}}$ 的所有幂幺元在 $U_{\mathbf{Q}}$ 中，其中 U 是 H 的幂零根．

对半单 Lie 群的离散子群的类似定理 2) 的定理为以下的算术定理（[11]） 设 Γ 是无紧因子的连通半单 Lie 群 G 的格，且设 G 的中心是平凡的（为了叙述方便)，而且设格 Γ 在下述意义下不可约，即 G 不能非平凡地分解为直积 $G_1\times G_2$ 使得 Γ 和形如 $\Gamma_1\times\Gamma_2$ 之子群可公度，其中 $\Gamma_1\subset G_1, \Gamma_2\subset G_2$ 如果 G 的实秩超过 1，则群 G 在如下意义下为算术的，即存在一个定义在 $\mathbf{Q}$ 上

的半单代数群 H 及同态 φ $H_{\mathbf{R}}^0 \to G$ (其中 $H_{\mathbf{R}}^0$ 是群 $H_{\mathbf{R}}$ 的单位连通分支)，使得同态 φ 之核是紧的，且子群 Γ 和 $\varphi(H_Z)$ 可公度 G 的实秩大于 1 的假设是本质的．已知此定理对群 $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ (Лобачевский 平面的运动群)是不正确的，群 $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ 在 Lie 群的离散子群以及 3, 4, 5 维 Лобачевский 空间的运动群理论中起了重要作用([6],[8])．

类似于半单 Lie 群的离散子群的定理 3) 的定理为强刚性定理 (strong rigidity theorem) 设 Γ_1, Γ_2 分别为无紧因子的连通半单 Lie 群 G_1, G_2 中的不可约格，且设 G_1 和 G_2 之中心为平凡的．若 G_1 和 G_2 不同构于 $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$，则任何同构 $\Gamma_1 \to \Gamma_2$ 可唯一地扩充为同构 $G_1 \to G_2$([10], [14]) 在历史上，这个定理的证明以弱刚性定理 (weak rigidity theorem) 的证明为先导([5])，弱刚性定理论述与单位同构充分接近的同构的扩充 (若 $G_1 = G_2$) 弱刚性定理的一个推论是一组基的存在性，这里离散子群的元素写成了代数数的形式，这事实在半单 Lie 群的离散子群理论的发展中扮演了重要角色

关于群 $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ 的离散子群见 **Fuchs 群** (Fuchsian group)．关于半单Lie 群的离散子群的其他一般性定理可以提到 Borel 稠密性定理 (Borel density theorem) 和王(宪钟) 极大性定理 (Wang maximality theorem)．设 Γ 是无紧因子的连通半单 Lie 群 G 的格．则在 Zariski 拓扑下 Γ 在 G 中稠密 ([3])，且仅包含在 G 的有限个格中([17])．

在上面提到的关于晶体群的 Bieberbach 定理的类似定理的观点下，任意 Lie 群的格的描述在某种程度上可化为半单 Lie 群中格的描述．我们称 Lie 群 G 的正规子群 N 有 Bieberbach 性质 (Bieberbach property)，如果对 G 中任一格 Γ，子群 $N\Gamma$ 是闭的 (在此情形下，$N \cap \Gamma$ 自动地为 N 中格，同时，$\Gamma/N \cap \Gamma$ 是 G/N 中格)．Bieberbach 定理告诉我们在 Euclid 空间的运动群中，平行移动子群有 Bieberbach 性质 在 Lie 群中存在此定理的推广，但是这种 Lie 群是单连通幂零 Lie 群被一个紧群所扩充 ([1])．如此类型的另一定理叙述如下 设 G 为连通 Lie 群，R 为它的根，设 S 是一个极大连通半单子群，设 C 为 S 的极大连通紧正规子群，则子群 RC 在 G 中有 Bieberbach 性质 ([2]) 也已知 Bieberbach 性质在连通可解 Lie 群的幂零根 ([12]) 以及单连通幂零 Lie 群的换位子群 ([9]) 中不成立

能用拓扑方法 (参见**离散变换群** (discrete group of transformations)) 来证明连通 Lie 群的任意一致离散子群是有限表出群 ([5]) 事实上，连通 Lie 群的任意格都是有限表出的 ([17], [18])．

参考文献

[1] Auslander, L, Bieberbach's theorem on space groups and discrete uniform subgroups of Lie groups, *Amer J Math*, **83** (1961), 276－280

[2] Auslander, L, On radicals of discrete subgroups of Lie groups, *Amer J Math*, **85** (1963), 145－150

[3] Borel, A., Density properties for certain subgroups of semi-simple groups without compact components, *Ann of Math*, **72** (1960), 179－188

[4] Borel, A. and Harish-Chandra, Arithmetic subgroups of algebraic groups, *Ann of Math*, **75** (1962), 485－535

[5A] Weil, A, Discrete subgroups of Lie groups Ⅰ, *Ann Math*, **72** (1960), 369－384

[5B] Weil, A., Discrete subgroups of Lie groups Ⅱ, *Ann Math*, **75** (1962), 578－602

[6] Винберг, Э Б, 《Матем сб》, **72** (1967), 3, 471－488

[7] Garland, H and Raghunathan, M S, Fundamental domains for lattices in (**R**-) rank 1 semisimple Lie groups, *Ann of Math*, **92** (1970), 279－326

[8] Макаров, В С, 《Докл АН СССР》, **167** (1966), 1, 30－33

[9] Мальцев, А И, 《Изв АН СССР Сер матем》, **13** (1949), 1, 9－32

[10] Маргулис, Г А, 《Успехи матем наук》, **29** (1974), 1, 49－98

[11] Margulis, G A, Discrete groups of motions of manifolds of non-positive curvature in *Proc Internat Congress Mathematicians Vancouver*, 1974, Vol 2, 21－34

[12] Mostow, G D, Factor spaces of solvable groups, *Ann of Math*, **60** (1954), 1－27

[13] Mostow, G D, Representative functions on discrete groups and solvable arithmetic subgroups, *Amer J Math*, **92** (1970), 1－32

[14] Mostow, G D, Strong rigidity of locally symmetric space, Princeton Univ Press, 1973

[15] Raghunathan, M, Discrete subgroups of Lie groups, Springer, 1972

[16] Selberg, A, On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces, in Internat Coll function theory, Tata Inst, 1960, 147－164

[17] Wang, H-C, On a maximality property of subgroups with fundamental domain of finite measure, *Amer J Math*, **89** (1967), 124－132

[18] Wang, H-C, Topics on totally discontinuous groups in *Symmetric spaces*, M Dekker, 1972, 459－487

Э Б Винберг 撰

【补注】 在正文中提到的算术定理说：在无紧因子(且具有平凡中心的) 连通半单 Lie 群 G 中的不可约格，若 G 的实秩大于 1，则为**算术群** (arithmetic group) 这是 A Selberg 猜想 (对一致离散子群) 及 Пятецкий-Шапиро 猜想 (对一般情形)，也见 [A1] 为了了解有限余体积 (finite co-volume) 的非紧子群 Γ，即 G/Γ 的体积有限，其首要步骤是 D A Kazhdan 和 G A. Margulis 证明了在 Γ 中存在非平凡幂幺元，这是 Selberg

的一个有关猜想的较特殊的情形，参见[A5] 在[A2]中证明了这个定理对群SU$(n,1)$, $n\leqslant 3$不成立.

在正文中提到的一些算术结果的证明中，**遍历理论** (ergodic theory) 扮演了重要的角色，参见[A3] 遍历（乘性遍历定理）论证在证明中扮演重要角色的一个结果就是Margulis的超刚性定理 (superrigidity theorem)，它是在实秩 ≥2的群的情形推广了A. Weil和G D Mostow的刚性定理 (rigidity theorems) 它可叙述如下 设G为实单连通代数群$\mathscr{G}\subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$的实点的单连通Lie群，且设$G$无紧因子 设$G$的实秩 ≥2 设$F$为局部紧的非离散域，且$\rho$ $\Gamma\to \mathrm{GL}_n(F)$是一个线性表示，使得$\rho(\Gamma)$不相对紧，且使得它的Zariski闭包是连通的，则$F=\mathbf{R}$或$\mathbf{C}$，且ρ能扩充为$\mathscr{G}$的一个有理表示．关于这些结果及相关的问题的详细讨论，参见[A6]，也参见上面正文中关于强刚性的讨论

参考文献

[A1] Margulis, G A, Arithmeticity of irreducible lattices in semi-simple groups of rank exceeding 1 Mir 1977 (俄文) 在M S Raghunathan的文章 On the congruence subgroup problem, *Publ Math IHES*, **46** (1976), 107-161 之附录中有此文之英译

[A2] Mostow, G D, Existence of nonarithmetic monodromy groups, *Proc Nat Acad Sc U S A*, **78** (1981), 5948-5950

[A3] Zimmer, R J, Ergodic theory and semisimple groups, Birkhauser 1984

[A4] Humphreys, J E, Arithmetic groups, in Topics in the theory of arithmetic groups, *Notre Dame Univ*, 1982, 73-97

[A5] Kazhdan, D A and Margulis, G A, A proof of Selberg's conjecture, *Math USSR-Sb*, **4** (1968), 1, 147-152 (Mat Sb **75** (1968), 163-168)

[A6] Tits, J, Travaux de Margulis sur les sous-groupes discrets de groupes de Lie in Sem Bourbaki 1975/1976 Exp 482 Springer, 1977, 174-190

许以超 译 石生明 校

离散系统（统计力学中的）[discrete systems (in statistical mechanics), дискретные системы в статистической механике]

其微观状态是由指明给定空间晶格每点的状态来定义的系统 系统的一种应用是把系统用做固体模型，在模型中因晶格结点上状态的变化而导致的微观运动是研究对象，并且每一变化被认为与其他变化无关 最简单的离散系统之一——Ising 模型（1925）——由 Hamilton 算子（[1]）

$$H=-h\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\sigma_i-\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant N}J(i,j)\sigma_i\sigma_j$$

表征，其中$i=\mathbf{r}_i$为晶格点的坐标，$\sigma_i=\pm 1$

这一模型用来研究置换类型的合金、磁体、格栅气体，等等（[2]）这种类型的离散系统在低于转折点的温度时独特地表现出长程有序(long-range order)，即表现出在磁体的自旋σ_i的方向上的一般的规则性，或者双元合金中不同组元的原子的规则顺序，而这种顺序在温度升高到θ点（转折点）时即不复存在，热容c_v此时有典型的奇异性．而在短程有序(short-range order)的情况下，即给定结点与相邻点间关联的情况下，则没有这种陡变．有序现象的定性描述是由分子场论类型理论提供的．虽然这一模型的数学很简单，但只对一维模型和对只与最近邻有相互作用的平面磁铁晶格（$J(i,j)>0$）在$h=0$的情况下，得到了一般形式的精确解 一维模型不含相变，而二维模型具有热容的对数型的奇异性（原则上在$N\to\infty$情况下）在一般情况下已发展了低温和高温区的近似方法

其他应用较广的模型有磁体的 Heisenberg 模型，其 Hamilton 算子与 Ising 模型的 Hamilton 算子的区别在于，数σ_i为σ_i^2代替，而乘积$\sigma_i\sigma_j$为(σ_i,σ_j)代替，其中σ_i为**Pauli 矩阵**（Pauli matrices）

就一类具有晶格点间相互作用类型的离散系统而言，借助近似 Hamilton 算子方法（[3]）做的渐近准确的（当$N\to\infty$时）研究是有根据的．

对离散系统的研究已促进了现代相变理论和临界现象中的定标理论和 Wilson 法（重整化群）的一些基本思想的发展（[4]）

参考文献

[1] Huang, K, Statistical mechanics, Wiley, 1963

[2] Ziman, J M, Principles of the theory of solids, Cambridge Univ Press, 1972

[3] Боголюбов, Н Н (мл), Метод исследования модельных гамильтонианов, М, 1974

[4] Wilson, K G and Kogut, J, The renormalization group and ε-expansion, *Phys Rep*, **12c** (1974), 75-199

И А Квасников 撰 沈 青 译

离散拓扑 [discrete topology, дискретная топология]，集合X上的

每个集合都是开集（因而每个集合也都是闭集）的拓扑．离散拓扑是给定集合上所有拓扑的格中的最大元．术语“离散拓扑”有时在稍微广泛的意义下理解为任意多个开集的交仍是开集．在T_1空间的情形下，两种定义一致 在这个意义下，离散空间的理论等价于偏序集的理论

参考文献

[1] Александров, П С, «Матем сб», **2**(1937), 501-520

А А Мальцев 撰

【补注】 上面提到的等价性是这样得到的 如果p是一

个前序集(见**前序** (pre-order)，则对于 $x \in P$，定义 $O_x = \{y \quad y \leqslant x\}$ 赋予 P 由集合 O_x 生成的拓扑，便成为**离散空间** (discrete space)

若 X 是离散空间，对 $x \in X$，令 $O_x = \bigcap\{O \quad x \in O$，$O$ 是开集$\}$，则"$y \leqslant x$ 当且仅当 $y \in O_x$"定义了 X 上的前序

这些构造法是相互可逆的 而且，离散 T_0 空间对应于偏序，"实"离散空间对应于离散序

这个简单思想及它的变形已被证明是非常有用的 例如，见[A1]

参考文献

[A1] Gierz, G, Hofmann, K H, Keimel, K, Lawson, J D, Mislove, M and Scott, D S, A compendium of continuous lattices, Springer, 1980

罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

离散赋范环 [**discretely-normed ring**, **дискретного нормирования кольцо**]，离散赋值环 (discrete valuation ring 或 discrete valuation domain)

具有离散**赋值** (valuation) 的环，即一个具有单位元的整环，其中存在一个元素 π，使得任一非零理想都由 π 的某个方幂生成，这个元素称为单值化参数 (uniformizing parameter) 此参数在可差一个可逆元因子的意义下是确定的 一个离散赋范环中每个非零元素可唯一写为 $u\pi^n$，其中 u 是一可逆元素，$n \geqslant 0$ 是一整数，离散赋范环的例子包括 p-adic 整数环 $\mathbf{Z}_p$，域 k 上单变量形式幂级数环 $k[[T]]$，以及完全域 k 上的 Witt 向量环 $W(k)$ (见 **Witt 向量** (Witt vector))

离散赋范环也可定义为局部主理想环，局部一维 Krull 环，具有主极大理想的局部 Noether 环，Noether 赋值环或具有 $\mathbf{Z}$ 作为值群的赋值环

一个离散赋范环 (在局部环的拓扑下) 的完全化也是一个离散赋范环 一个离散赋范环是紧的，当且仅当它是完全的并且它的剩余域是有限的．这样的环必同构于 $k[[T]]$ (k 是有限域) 或 $\mathbf{Z}_p$ 的有限维扩张．

设 $A \subset B$ 是单值化参数分别为 π 和 Π 的两个离散赋范环的局部同态，则 $\pi = u\Pi^e$，这里 u 是 B 中的可逆元整数 $e = e(B/A)$ 是扩张 $A \subset B$ 的分歧指数，而

$$[B/\Pi B \quad A/\pi A] = f(B/A)$$

称为剩余次数 (residue degree)，当考虑分式域为 K 的离散赋范环 A 在 K 的有限扩张 L 中的整闭包 B 时就出现上述情况．此时，B 是一个半局部主理想环．设 $\mathfrak{n}_1$，，$\mathfrak{n}_s$ 是它的极大理想，则局部化 $B_i = B_{\mathfrak{n}_i}$ 是离散赋范环 若 L 是 K 的 n 次可分扩张，则公式

$$\sum_{i=1}^{s} e(B_i/A) f(B_i/A) = n$$

成立．若 L/K 是一 Galois 扩张，则所有 $e(B_i/A)$ 相等，所有 $f(B_i/A)$ 也相等，因此 $n = sef$ 若 A 是一完全离散赋范环，则 B 也是离散赋范环，并有 $e(B/A)f(B/A) = n$．在这些假设下，如果 $e(B/A) = 1$ 且 $B/\mathfrak{n}$ 是 $A/\mathfrak{m}$ 上可分扩域，扩张 $A \subset B$(同样 L 在 K 上)就被称为非分歧扩张 (unramified extension) 若 $e(B/A)$ 与域 $A/\mathfrak{m}$ 特征互素且 $B/\mathfrak{n}$ 是 $A/\mathfrak{m}$ 上可分扩张则称为弱分歧的 (weakly ramified)．若 $f(B/A) = 1$，则称为全分歧的 (totally ramified)

在离散赋范环上的模论十分类似于 Abel 群论 任一有限型的模是循环模的直和，无扭模是一平坦模，任一投射模或自由模之子模仍是自由模．但无限多个自由模之直积不是自由的 在完全的离散赋范环上，具有可数秩的无扭模是秩为 1 的模的直和．

参考文献

[1] Bourbaki, N, Elements of mathematics, Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972 (译自法文)

[2] Cassels, J W S and Frohlich, A (EDS), Algebraic number theory, Acad Press, 1967

[3] Kaplansky, J, Modules over Dedekind rings and valuation rings, *Trans Amer Math Soc*, **72** (1952), 327-340

В И Данилов 撰

【补注】 设 A 是一个离散赋范环，具有单值化参数 π 若 $a = u\pi^n$，u 是 A 中单位元，则对应的**赋值** (valuation) 定义为 $v(a) = n$ A 上相应的范数定义为 $|a| = c^{v(a)}$，$|0| = 0$，这里 c 是 0，1 之间的一个实数．这使 A 成为一个正规环．如果 A 的剩余类域为 $k = A/(\pi)$ 是有限的，则习惯上取 $c = q^{-1}$，q 是 k 中元素个数

冯绪宁 译 裴定一 校

离散化方法 [**discretization method**, **расщепления метод**]，亦称分裂法 (splitting method)

求解有一个或多个空间变量非定常问题的一种网格方法 该法通过依次求解几个和非定常问题有关的，但有较少空间变量的网格问题实现从给定的时间 t_n 到下个时间 $t_{n+1} = t_n + \tau$ 的过渡 (见[1]-[7]) 在这类方法中，人们常可找到一些方法使得 1)利用 $O(N)$ 次算术运算就可以实现从时刻 t_n 的网格层过渡到时刻 $t = t_{n+1}$ 的新网格层上，其中 N 是空间网格中结点个数；2)方法的绝对稳定性可以保证，而且 3)方法的可接受精度可以保证 (某种形式逼近的存在性)．离散化方法广泛地用于实际求解高维数学物理问题，比如包括线性和非线性抛物型、双曲型或混合型方程组的问题 (见[1]-[9])．

对于有 p 个空间变量的问题，用离散化方法从 t_n 过渡到 t_{n+1} 通常可用 p 个辅助步 (分步) 实现

$$A_s^{(n)} u^{n+s/p} = B_s^{(n)}(u^n, u^{n+1/p}, \quad , u^{n+(s-1)/p}), \qquad (1)$$

其中

$$u^{(n)} \equiv u(t_n), \; u(t_{n+1}) \equiv u^{n+p/p},$$

$A_s^{(n)}$是个矩阵，它对应于某个只含关于变量x_s的导数的微分算子（一维微分算子）的差分逼近，而且方程(1)的右端项很容易计算　通过对选定的变量x_s方向上未知量适当的编号，矩阵$A_s^{(n)}$通常成为对角阵，并且对每个s求解（1）就化成多次求解x_s方向上的一维差分方程组．因此，离散化方法常被称为交替方向法（见**可变方向法**（variable-directions method）或**分步法**（fractional steps, method of)).

作为一个典型例子，考虑方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f, \quad (x_1, x_2) \in \Omega,$$

初始条件为$u|_{t=0}=\varphi(x_1, x_2)$和边界条件为$u|_\Gamma=\psi(x_1, x_2, t)$，其中$\Omega \equiv (0,1)\times(0,1)$而$\Gamma$是$\Omega$的边界．下面的方法可用于步长为$h$的正方形网格上

$$\left.\begin{aligned} &\frac{u_i^{n+1/2}-u_i^n}{\tau/2}+[\Lambda_1(\sigma u^{n+1/2}+(1-\sigma)u^n]_i=f_i^{n+1/2}, \\ &\qquad \overline{x_i}\in\Omega_n, \\ &u_i^{n+1/2}=\psi_i^{n+1/2} \text{ 且 } u_i^{n+1}=\psi_i^{n+1}, \; \overline{x_i}\in\Gamma, \\ &\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n+1/2}}{\tau/2}+[\Lambda_2(\sigma u^{n+1}+(1-\sigma)u^{n+1/2}]_i=f_i^{n+1/2}, \\ &\qquad \overline{x_i}\in\Omega_n, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

其中$i \equiv (i_1, i_2)$，$\overline{x_i} \equiv (i_1 h, i_2 h)$，$u_i^n \equiv u(n\tau, \overline{x_i})$，$\psi_i^{n+1/2} \equiv \psi((n+1/2)\tau, \overline{x_i})$，$\Lambda_1$和$\Lambda_2$是对$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$和$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$最简单的差分逼近，$\Omega_n$是所有内结点$\overline{x_i}$的集合，$\sigma \geqslant 1/2$．

有两条研究离散化方法理论的不同途径，其中之一，处理中间步和积分步本质上没什么区别，分数步中的差分方程及其边界条件，都和（2）中的类似，以同样方法处理．因此，可以认为u^n和$u^{n+1/2}$是原问题在时刻t_n和$t_{n+1/2}=t_n+\tau/2$解的近似值　这个办法基于利用分裂格式和总体逼近的概念（见[2]）．这类格式常被称为局部一维格式（locally one-dimensional schemes）或可加格式（additive schemes）　它们也可被看作为某个带强振荡系数方程的常差分格式．它的解必须接近原问题的解（见[1]－[4]）．这种方法的优点在于它的简单性和通用性　例如，推广后的方法（2）可用于曲线边界域Ω和更一般的情形　按这个途径得到的方法精度一般不很高．也存在某些熟知的，有时很成功的离散化方法的变种，其中分裂是对物理过程进行而不是按空间变量进行（见[5], [9]）

第二个途径在分析稳定性和收敛性时无需考虑中间步骤　差分格式本身及逼近方法都按传统方法处理　仅在高层格式中才表现出差分格式的不寻常之处．这时出现不寻常的差分算子　例如，代替方法（2）可以考虑

$$\left[A\left[\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}\right]\right]_i+(\Lambda_1 u^n)_i+(\Lambda_2 u^n)_i=f_i^{n+1/2}, \quad (3)$$

$$\overline{x_i}\in\Omega_n,$$

$$u_i^n=\psi_i^n, \; \overline{x_i}\in\Gamma,$$

其中$A \equiv (E+\sigma\tau\Lambda_1)(E+\sigma\tau\Lambda_2)$，$E$为恒等算子　这种算子$A$一般称为分裂算子（split operators）或因子化算子（factorized operators）．分数步仅和解最终的方程组的方法有关系．对于一个方程和同样的格式（3），可以引进不同的方法和相应选定的边界条件　类型（3）的格式可以看作对于诸如

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \varepsilon\frac{\partial^5 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \partial t} = f, \; \varepsilon>0,$$

的ε方程的加权格式，这种方程的解和原问题的解相差为$O(\varepsilon)$（见[4]）．当Ω为由矩形构成的域时，类型（3）方法中出现的方程组矩阵不能写为"一维矩阵"之积　尽管如此，还可以找到用$O(N)$次算术运算解类似方程组的方法（见[4]），而且这类算子被称为广义分裂算子（generalized split operators）．在研究具分裂和广义分裂算子格式的稳定性和收敛性中，能量不等式方法起重要的作用（见[2], [4], [6]－[8]）

参考文献

[1] Марчук, Г И, Методы вычислительной математики, 2 изд, М, 1980（英译本 Marchuk, G I, Methods of numerical mathematics, Springer, 1975)

[2] Самарский, А А, Теория разностных схем, М, 1977

[3] Яненко, Н Н, Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосиб, 1967（英译本 Yanenko, N N, The method of fractional steps, the solution of problems of mathematical physics in several variables, Springer, 1971)

[4] Дьяконов, Е Г, Разностные методы решения краевых задач, в 1－2, М, 1971－1972（英译本 D'yakonov, E G, On the stability of difference schemes for some nonstationary problems, in J Miller (ed) Topics in numerical analysis, Acad Press, 1973, 63－87）.

[5] Ковеня, В М, Яненко, Н Н, Метод расщепления в задачах газовой динамики, Новосиб, 1981

[6] Mitchell, A R, Computational methods in partial differential equations, Wiley, 1969

[7] Fairweather, G, Finite element Galerkin methods for differential equations, M Dekker, 1978

[8] Злотник, А А,《Ж вычислит матем и матем физ》, **20** (1980), 2, 422－432

[9] Glowinski, R, On a new preconditioner for the Stokes

problem, *Math Aplic Comp* **6** (1987), 2, 123－140

Е Г Дьяконов 撰

【补注】 在西方文献里，“离散化方法”这一术语既用来对边值问题也用来对初始问题构造**差分格式** (difference scheme)．也就是用于由**差分方程** (difference equation) 代替微分方程的方法．在本文中它仅在有限的意义下用于借助分裂法对初值问题的时间离散化上．此外，在英文文献中，分步法和局部一维方法 (亦见[A7]) 指的是由 Яненко, Самарский, Дьяконов, 等最先提出的离散化方法，而交替方向隐式方法指的是由 Peaceman, Rachford, Douglas, 等人提出的方法 另一族分裂方法是由 Courlay 提倡的所谓跳点法 (hopscotch methods) ([A4])

参考文献

[A1] Douglas, J , On the numerical integration of $U_{xx}+U_{yy}=U_t$ by implicit methods *J Soc Ind Appl Math* , **3** (1955) 42－65

[A2] Douglas, J and Rachford, H H On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables, *Trans Amer Math Soc* , **82** (1956), 421－439

[A3] Forsythe, G E and Wasow W R , Finite difference methods for partial differential equations, Wiley, 1960

[A4] Gourlay, A R , Hopscotch, a fast second-order partial differential equation solver, *J Inst Math Appl* , **6** (1970), 375－390

[A5] Mitchell, A R and Griffiths, D F , The finite difference method in partial differential equations, Wiley, 1980

[A6] Peaceman, D W and Rachford, H H , The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, *J Soc Indust Appl Math* 3 (1955)

[A7] Ames, W F Numerical methods for partial differential equations, Acad Press, 1977

蔡大用 译 李家楷 校

判别式 [discriminant , дискриминант]

1) 多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\,(a_0\neq0)$ 的判别式 (discriminant of a polynomial) 是乘积

$$D(f)=a_0^{2n-2}\prod_{n\geq i>j\geq1}(\alpha_i-\alpha_j)^2,$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 $f(x)$ 的根 当且仅当多项式有重根时，其判别式为零 判别式关于多项式的根是对称的，所以可用多项式的系数表示

二次多项式 ax^2+bx+c 的判别式为 b^2-4ac，多项式 x^3+px+q (可以用 **Cardano 公式** (Cardano formula) 计算它的根) 的判别式为 $-27q^2-4p^3$ 若 $f(x)$ 是特征为零的域上的多项式，则

$$D(f)=(-1)^{n(n-1)/2}a_0^{-1}R(f,f'),$$

其中 $R(f,f')$ 是 $f(x)$ 和它的导数 $f'(x)$ 的**结式** (resultant) 系数在任意域中的多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 的导数是 $na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$

参考文献

[1] Курош, А Г, Курс высшей алгебры, 11 изд М , 1975 (英译本 Kurosh, A G , Higher algebra, Mir , 1972)

И В Проскуряков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lang, S , Algebra, Addison-Wesley, 1974

2) 半双线性型的判别式 (discriminant of a sesquilinear form) 关于自同构 σ 的半双线性型 f 在基 $(v)=\{v_1,\cdots,v_n\}$ 下的判别式是环 A 中的元素

$$D_f(v_1,\cdots,v_n)=\det\begin{Vmatrix}f(v_1,v_1) & \cdots & f(v_1,v_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ f(v_n,v_1) & \cdots & f(v_n,v_n)\end{Vmatrix},\qquad (*)$$

其中 (v) 是交换环 A (有幺元) 上的有限秩自由 A 模 E 的给定的基 若 $(w)=(w_1,\cdots,w_n)$ 是 E 的另一组基，且

$$C=\begin{Vmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{n1} & \cdots & c_{nn}\end{Vmatrix}$$

是从 (v) 到 (w) 的变换矩阵，则

$$D_f(w_1,\cdots,w_n)=(\det C)(\det C)^{\sigma}D_f(v_1,\cdots,v_n)$$

若 A 没有零因子，则 f 为非退化的必要充分条件为

$$D_f(v_1,\cdots,v_n)\neq0$$

若 $v_1,\cdots,v_n$ 为 E 中任意 n 个元素，由 (*) 定义的 A 的元素 $D_f(v_1,\cdots,v_n)$ 称为 f 相对于系 $v_1,\cdots,v_n$ 的判别式 设 A 没有零因子，f 是非退化的半双线性型，则 E 中元素 $v_1,\cdots,v_n$ 是自由的，其必要且充分条件为 $D_f(v_1,\cdots,v_n)\neq0$ 因此，$v_1,\cdots,v_n$ 为 E 的基，当且仅当对某个基 $u_1,\cdots,u_n$，$D_f(v_1,\cdots,v_n)$ 和 $D_f(u_1,\cdots,u_n)$ 在 A 中相伴

参考文献

[1] Bourbaki, N , Elements of mathematics Algebra modules Rings, Forms, 2, Addison-Wesley, 1975, Chapt 4, 5, 6 (译自法文)

[2] Dieudonnè, J A , La geometrie des groups classiques, Springer, 1955

В Л Попов 撰

3) 域的元素组的判别式 (discriminant of a system of elements of a field) 是域扩张理论中最重要的结构之一 设 K 为域 k 的 n 次有限扩张从 $K\times K$ 到 k 的映射

$$(x,y)\mapsto \mathrm{Tr}(xy)$$

是域 K 上的双线性型，其中 $x,y\in K$，$\mathrm{Tr}\,\alpha$ 是 $\alpha\in K$ 的迹，域 K 被视为 k 上的线性空间．这个双线性型相对于 K 中元素组 $w_1,\cdots,w_m$ 的判别式 (见半双线性型的判

别式（discriminant））称为系 $w_1, \cdots, w_m$ 的判别式，表示为 $D(w_1, \cdots, w_m)$. 特别地，如果此系为 K 在 k 上的基，则称其判别式为 K 在 k 上的基的判别式．两组基的判别式相差 k 中一个非零元的平方．当且仅当扩张 K/k 为可分（见**可分扩张**（separable extension））时，K 在 k 上的任一基的判别式不为零．若 $f_x(t)$ 是可分扩张 K/k 的元素 x 的极小多项式，其次数为 m，则 $D(1, x, \cdots, x^{m-1})$ 与多项式 $f_x(t)$ 的判别式相符．上述定义也适用于域上任意有限维结合代数（见以下的 4)）．

在 K/k 为可分扩张时，基 $w_1, \cdots, w_n$ 的判别式可由下述公式计算

$$D(w_1, \cdots, w_n) = (\det(\sigma_i(w_j)))^2,$$

这里 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 为 K 到 k 的一个代数闭包的所有不同的保持 k 固定的嵌入．

设 $k=\mathbf{Q}$ 为有理数域，K 为代数数域，M 为 K 中秩为 n 的格（lattice）．M 的任意二个基的判别式的值相同，称为格 M 的判别式（discriminant of the lattice）．若 M 为域 K 的整数环，则 M 的判别式简称为域 K 的判别式（discriminant of the field），表为 D_K，这个量是 K 的一个重要特征．例如，若 K 到复数域 $\mathbf{C}$ 有 s 个实的和 $2t$ 个复的嵌入，则

$$\lim_{q \to 1+0}(q-1)\zeta_K(q) = \frac{\alpha^{s+t}\pi^t R}{m\sqrt{|D_K|}} h,$$

其中 $\zeta_K(q)$ 是 Dedekind ζ **函数**（zeta-function），h 是**除子**（divisor）类数，R 是 K 的调整子（见**代数数域的调整子**（regulator of an algebraic number field）,m 是 K 中单位根的个数．由估计式

$$|D_K| > \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2t} \frac{1}{2\pi n} e^{2n-1/6n},$$

可知 $\lim_{n\to\infty}|D_K|=\infty$．对于二次域 $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$，其中 d 为无平方因子有理整数，$d\neq 1$，有公式

$$D_K = d, \quad 若\ d \equiv 1 \pmod 4,$$
$$D_K = 4d, \quad 若\ d \equiv 2\ 或\ 3 \pmod 4)$$

对于**分圆域**（cyclotomic field）$K=\mathbf{Q}(\varepsilon)$，其中 ε 是 p^r 次本原单位根，有

$$D_K = \pm p^{p^{r-1}(p^{r-r-1})},$$

当 $p^r=4$ 或 $p\equiv 3 \pmod 4$ 时上式取负号，在其他情况下取正号．

代数数域中格的判别式的定义可以推广到 k 是 **Dedekind 环**（Dedekind ring）A 的分式域，K 是 k 的 n 次可分扩张的情况．设 B 为环 A 在 K 中的整闭包，$\mathfrak{b}$ 是 B 的任一**分式理想**（fractional ideal），当 $w_1, \cdots, w_n$ 遍及 $\mathfrak{b}$ 中所有 K 在 k 上的基时，所有判别式 $D(w_1, \cdots, w_n)$ 生成的 A 模 $D(\mathfrak{b})$ 称为理想 $\mathfrak{b}$ 的判别式（discriminant of the ideal）．$D(\mathfrak{b})$ 是 A 的一个分式理想，且 $D(\mathfrak{b})=N(\mathfrak{b})^2D(B)$，其中 $N(\mathfrak{b})$ 是理想 $\mathfrak{b}$ 的范数，判别式 $D(B)$ 与环 B 在 A 上的差积的范数相同．

参考文献

[1] Боревич, З. И., Шафаревич, И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972.

[2] Lang, S., Algebraic numbers, Addison-Wesleg, 1964.

[3] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, 1, Springer, 1975.

[4] Jacobson, N., The theory of rings, Amer. Math. Soc., 1943.

В. Л. Попов 撰

4) **代数 A 的判别式**（discriminant of an algebra）是对称双线性型 $(x, y)=T(xy)$ 的判别式，其中 x, y 为域 F 上的有限维结合代数 A 的元素，$T(a)$ 是元素 $a\in A$ 的主迹，其定义如下．设 $e_1, \cdots, e_n$ 是代数 A 的基，$\Phi=F(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 是域 F 上添加代数独立元 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 得到的**纯超越扩张**（transcendental extension），设 $A_\Phi=A\otimes_F\Phi$ 是相应的代数 A 的纯量扩张．元素 $x=\xi_1e_1+\cdots+\xi_ne_n\in A_\Phi$ 称为代数 A 的泛元（generic element of the algebra），x 在 Φ 上的极小多项式称为代数 A 的极小多项式（minimal polynomial of the algebra）．设

$$g(t, \xi) = t^r - m_1(\xi)t^{r-1} + \cdots + (-1)^r m_r(\xi)$$

为代数 A 的极小多项式，系数 $m_i(\xi)$ 是 $F[\xi_1, \cdots, \xi_n]$ 中的多项式，若 $a=\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ne_n(\alpha_i\in F)$ 是 A 中任一元素，则 $m_1(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)=T(a)$ 称为元素 a 的主迹（principal trace of the element），$m_r(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)=N(a)$ 称为它的主范数（principal norm），多项式 $g(t, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 称为它的主多项式（principal polynomial）．对于一个元素 $a\in A$，它的主多项式的系数不依赖基的选择，因此以上提到的 A 上的双线性型 (x, y) 是不变地定义的．如不计 F 中一个非零元素的平方，它的判别式也是确定的．当且仅当它的判别式不为零时，代数 A 是可分的（见**可分代数**（separable algebra））．

参考文献

[1] Jacobson, N., The theory of rings, Amer. Math. Soc., 1970.

Е. Н. Кузьмин 撰

【补注】 设 F 为整体域（代数数域或一元代数函数域）或局部域，E/F 为有限可分扩张．设 A_F 和 A_E 分别为 F 和 E 的整数环（主序模（principal order））．令 $\mathfrak{m}=\{x\in E: \mathrm{Tr}(xA_F)\subset A_F\}$，其中 $\mathrm{Tr}: E\to F$ 是迹函数（trace function）．

设 B 是域 k 上的有限维交换代数，b 是 B 的一个元素，选择 B 在 k 上的基 $x_1, \cdots, x_n$，用 b 作乘法 $a\mapsto ba$ 由一个矩阵 M_b 给定．矩阵 M_b 的迹，行列式和特征多项式定义为元素 b 的迹（trace），范数（norm）和特征多项式（characteristic polynomial）．

$$\mathrm{Tr}_{B/k}(b)=\mathrm{Tr}(M_b),\ N_{B/k}(b)=\det(M_b)$$
$$f_{B/k}(b)(X)=\det(XI_n-M_b))$$

集合 m 是 A_E 的一个分式理想，它在 Dedekind 环 A_E 的分式理想群中的逆 m^{-1} 称为域扩张 E/F 的差积 (different)，记为 $\mathscr{D}_{E/F}$ 有时(当 $F\neq\mathbf{Q}$ 时)称为相对差积 (relative different)，E 的绝对差积 (absolute different) 为 $\mathscr{D}_{E/\mathbf{Q}}$. 若 $D/E/F$ 为域扩张的一个塔 (tower)，则有差积的链定理 (chain theorem for different)，或称为塔中差积的乘性 (multiplicativity of differents)·

$$\mathscr{D}_{D/F}=\mathscr{D}_{D/E}\mathscr{D}_{E/F}$$

理想 $\mathscr{D}_{F/F}$ 是 A_E 的整理想 (即 $\mathscr{D}_{E/F}\subset A_F$)，它与扩张 E/F 的判别式 $D(A_E)$ 的关系为

$$D(A_E)=N_{E/F}\mathscr{D}_{E/F}$$

差积 $\mathscr{D}_{E/F}$ 能被 E 的素理想 $\mathfrak{p}$ 整除的充分必要条件为 $\mathfrak{q}A_E=\mathfrak{p}^e\mathfrak{p}_2^{e_2}\ \ \mathfrak{p}_m^{e_m}$, $e>1$，其中 $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}\cap A_F$ 这是 Dedekind 判别式定理 (Dedekind discriminant theorem). 所以 F 的素理想 $\mathfrak{q}$ 在 E/F 中分歧，当且仅当它整除 E/F 的判别式 $D(A_E)$

给定 E 的加法子群 L，定义它的补集 (complementary set) (相对于迹的) 为

$$L'=\{x\in E\ \ \mathrm{Tr}_{F/F}(xL)\subset A_F\}$$

它也是 E 的加法子群 于是 E/F 的差积是 E 的整数环 A_E 的补集合的逆.

更一般地，在 A_E 中定义理想 $\mathfrak{a}$ 的差积 (different of an ideal) 为它的补集合的逆 $\mathscr{D}(\mathfrak{a})=(\mathfrak{a}')^{-1}$，它仍然是 A_E 的 (分式) 理想 E 中元素 x 的差积 (different of an element) 定义为 $f'(x)$，其中 $f'(X)$ 是元素 x 的特征多项式 $f(X)$ 的导数 若 $\alpha\in O_E$，则 $\mathscr{D}(\alpha)$ 在 $\mathscr{D}_{E/F}$ 中. 当且仅当 $\mathscr{D}_{E/F}=\mathscr{D}(\alpha)A_E$ 时，$\{1,\alpha,\ \ ,\alpha^{n-1}\}$ 是 A_E 在 A_F 上的整基 (integral basis)

设 E/F 为整体域有限扩张 对 E 的任一素理想 $\mathfrak{p}$，以 $E_\mathfrak{p}$ 表示相应的局部域 (E 关于其上的 $\mathfrak{p}$-adic 拓扑的完全化) 如上，若 $\mathfrak{p}$ 为 E 的素理想，$\mathfrak{q}$ 为 F 的在其下的素理想：$\mathfrak{q}=\mathfrak{p}\cap A_F$，则局部差积和整体差积有关系

$$\mathscr{D}_{E/F}=\prod_{\mathfrak{p}}\mathscr{D}_{E_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{q}},$$

这里把 E 的素理想 $\mathfrak{p}'$ 与其在 $E_{\mathfrak{p}'}$ 中的完全化视为等同. 等式右端除有限个因子外，所有的因子都为 1, 即单位理想 (即对几乎所有的 $\mathfrak{p}$ 有 $\mathscr{D}_{E_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{q}}=A_{E_\mathfrak{p}}$)

设 k 为 Dedekind 环，F 为其商域，Σ 为 F 上的中心单代数 (central simple algebra) (即 Σ 是 F 上的有限维结合代数，除了 0 和 Σ 之外无其他理想，Σ 的中心是 F)，则存在一个可分正规扩张 E/F, 使 $h\ \ \Sigma\otimes_F E\simeq M_n(E)$ (作为 E 代数)，其中 $M_n(E)$ 是 E 上 $n\times n$ 矩阵代数 (这样的 E 称为 Σ 的分裂域). 对任一 $x\in\Sigma$，考虑元素 $h(x\otimes 1)\in M_n(E)$，这个矩阵的迹是 F 的元素 (不仅是 E 的)，称为约化迹 (reduced trace)，表为 $\mathrm{Tr}\ \ \Sigma\to F$ (它的定义同样不依赖于 E 和 h 的选择). 类似地定义约化范数 $\mathrm{red}\,N\ \ \Sigma\to F$ 为 $\mathrm{red}\,N(x)=\det(h(x\otimes 1))$

Σ 中的 R 格 (R-lattice) $\mathfrak{a}$ 是指 Σ 中的 R 子模，它在 R 上是有限生成的，且 $F\mathfrak{a}=\Sigma$ 一个 R 格若是一个子环且包含 R, 则称为一个序模 (order). 一个极大序模是不能包含在另一个序模中的序模，它永远是存在的，但可能不唯一 (这三个定义对 F 上任一可分结合代数都成立，不一定是对中心单代数.)

设 A 为 Σ 中一个极大序模，A 的差积 (different) 由 $\mathscr{D}(A)^{-1}=\{x\in E\ \ \mathrm{red\,Tr}(xA)\subset R\}$ 所定义，中心单代数 Σ 的判别式 (discriminant of a central simple algebra) 是理想 $\delta=\mathrm{red}\,N(\mathscr{D}(A))$，它不依赖于 A 的极大序模的选择

参考文献

[A1] Jacobson, N , Lectures in abstract algebra, 3 Theory of fields and Galois theory, V Nostrand, 1964

[A2] Lang, S , Algebraic numbers, Addison - Wesley, 1964

[A3] Weil, A , Basic number theory, Springer, 1967

[A4] Weiss, E , Algebraic number tyeory, McGraw - Hill, 1963

裴定一 译 赵春来 校

判别分析 [discriminant analysis, дискриминантный анализ]

数理统计的一个分支，探讨研究解决下述判别问题的统计方法 根据观测结果，识别从若干个类中随机抽取的客体原来属于哪一类 这项工作在下列实际情况下十分重要 无法观测到可以明确判定该客体的类别的标志，或者得到这种标志所需的时间和劳动过多，还有一些情况，譬如失去了关于这种标志的信息，需要补上，或者要依据已有的数据预测未来的事件 上述的第一种情况在医疗实践中常常遇到，例如，根据许多非特定的症状作诊断 第二种情形的一个例子是鉴别在考古发掘中找到的古尸的性别. 第三种情形的一个例子是，某疗法的长期效果的统计预报. 进行判别分析的一种方法是**多维统计分析** (multidimensional statistical analysis)，用来给出现有资料的定量表示和根据选定的最优准则处理资料

判别问题可表述为下列的一般模式. 设对一随机抽取的客体的 p 个标志的观测结果是 p 维随机向量 $x'=(x_1,\ \ ,x_p)$ 的实现 (此处符号 “ ′ ” 表示转置) 我们的任务是找出一个规则，依据向量 x 的值确定该客体属于 k 个可能的类 $\pi_1,\ \ ,\pi_k$ 中的哪一个. 判别规则 (rule of discrimination) 的构造方法是把向量 x 取值的整个**样本空间** (sampling space) 分成 k 个区域 R_1,

, R_k，当 x 在 R_i 中时，就判定该客体属于类 π_i 从所有可能的判别规则中选择哪一个，要依据一个优良性准则，利用关于类 π_i 和客体来自 π_i 的概率 q_i 的现有先验信息 这样做时要考虑到由错判造成的损失的大小 关于诸类 π_i 的先验信息，可以是对客体的标志向量在各类中的分布函数的知识，也可表现为在诸类中选出每一类的概率，而这些先验概率 q_i 可以已知，也可以未知．显然，初始信息越完全，结论将越正确

考虑有两类 π_1，π_2，且初始信息完全的情况 标志向量在两个类上的分布函数都已知，先验概率也已知（Bayes 方法）．设 $P_1(x)$ 和 $P_2(x)$ 分别是标志向量在 π_1 和 π_2 上的分布函数，$p_1(x)$ 和 $p_2(x)$ 是相应的分布密度，$C(i|j)(i,j=1,2)$ 是把类 π_j 的客体误判到类 π_i 中所造成的损失．则 π_1 和 π_2 中的客体被误判的概率分别为

$$P(2|1,R)=\int_{R_2} p_1(x)dx,\ P(1|2,R)=\int_{R_1} p_2(x)dx$$

（此处 $P(i|j,R)$ 表示根据规则 R 把 π_j 中的客体判为 π_i 中客体的概率），而错判损失的**数学期望**（mathematical expectation）是

$$C(2|1)P(2|1,R)q_1+C(1|2)P(1|2,R)q_2,$$

此即 Bayes 风险．这里自然应该把极小化该量作为最优准则，由此导致样本空间的下述分割（[1]）

$$\begin{cases} R_1 & \dfrac{p_1(x)}{p_2(x)} \geqslant \dfrac{C(1|2)q_2}{C(2|1)q_1}, \\ R_2 & \dfrac{p_1(x)}{p_2(x)} < \dfrac{C(1|2)q_2}{C(2|1)q_1} \end{cases} \tag{1}$$

如果满足条件

$$\mathrm{P}\left\{ \frac{p_1(x)}{p_2(x)} = \frac{C(1|2)q_2}{C(2|1)q_1} \middle| \pi_i \right\}=0,\ i=1,2,$$

则除了一个零概率集外上述分割是唯一的．在这种情况下，用其他方法，例如应用统计假设检验理论中的 **Neyman-Pearson 引理**（Neyman-Pearson lemma），也可得出类似的判别规则

关于最优准则，在先验概率已知时，由于判别规则的优劣是用 Bayes 风险来度量的，因此在两个规则中，应选择 Bayes 风险小的那一个．

如果判别问题中的先验概率 $\{q_i\}$ 未知，则一个自然的做法是从所有允许的规则中寻找这样的规则，它使 Bayes 风险在一切 $\{q_i\}$ 中的最大值达到最小（该规则称为极小化极大规则（minimax rule）） 如果得到了 π_1 和 π_2 中客体的观测值，则损失的数学期望，即风险分别为

$$C(2|1)P(2|1,R)=r(1,R),\ C(1|2)P(1|2;R)=r(2,R)$$

有下述定理（[1]） 若满足条件

$$\mathrm{P}\left\{ \frac{p_1(x)}{p_2(x)} = k|\pi_i \right\}=0,\ i=1,2,\ 0\leqslant k\leqslant\infty,$$

则 Bayes 判别规则的全体是最小完全类．该类中关于 q_i 的极小化极大规则 R^* 满足条件 $P(2|1;R^*)=P(1|2,R^*)$ 在 P_1 和 P_2 都是多维正态分布，均值分别为 $\mu^{(1)}$ 和 $\mu^{(2)}$，**协方差阵**（covariance matrix）都是 Σ 这一重要情况下，判别规则（1）形如

$$\begin{cases} R_1 & x'\Sigma^{-1}(\mu^{(1)}-\mu^{(2)})-\dfrac{1}{2}(\mu^{(1)}+\mu^{(2)})'\Sigma^{-1}(\mu^{(1)}-\mu^{(2)})\geqslant \ln k, \\ R_2 & x'\Sigma^{-1}(\mu^{(1)}-\mu^{(2)})-\dfrac{1}{2}(\mu^{(1)}+\mu^{(2)})'\Sigma^{-1}(\mu^{(1)}-\mu^{(2)})< \ln k, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $k=q_2C(1|2)/\{q_1C(2|1)\}$ 若 $C(1|2)=C(2|1)$，且 $q_1=q_2$，则 $\ln k=0$，且

$$R_1\quad D(x)=x'\Sigma^{-1}(\mu^{(1)}-\mu^{(2)}) \geqslant \frac{1}{2}(\mu^{(1)}-\mu^{(2)})'\Sigma^{-1}(\mu^{(1)}-\mu^{(2)}). \tag{3}$$

若先验概率未知，则可以根据某个原则，例如关于误判的某种最小原则，选取 $\ln k=c$ 一般说来，最优准则的确定取决于问题本身的性质 称（3）式左边的表达式为该问题的**判别函数**（discriminant function），它可被解释为样本空间中把类 π_1 和 π_2 分开的曲面 在上述例子中，判别函数是线性的，即相应的曲面为超平面．在上述例子中，如果两个协方差阵不同，则判别函数将是 x 的二次函数 为了简化计算，对这种情况已经找出了线性判别程序的最小完全类（[3]）．

关于判别分析的应用，最重要的情形是，有关分布的初始信息体现为来自这些分布的样本．此时，问题的提法如下 设 $x_1^{(i)}$，$,x_n^{(i)}$ 是来自类 π_i 的样本，$i=1$，，k，而 $x_j^{(i)}=(x_{j1}^{(i)},\ ,x_{jp}^{(i)})'$ 是类 π_i 的样本中第 j 个客体的标志向量，又设 $x'=(x_1,\cdot,x_p)$ 是对这 k 个类中的另一客体的观测结果 现在要找出判定观测值 x 属于哪一个类的规则．在有两个类的情况下，R A.Fisher（[4]）首先解决了这个问题，奠定了判别分析的基础．他不是直接用标志向量来刻画客体，而是用它们的线性组合，即一超平面 在某种意义下，该超平面是样本点集的最优划分，并得到了判别函数（3）

研究最多的情况，是只知道各类的标志向量遵从正态分布，但其参数未知．这里，一个自然的方法是在判别函数（3）中用参数的最优估计（[5, 6]）代替未知的分布参数 如同在分布已知的情形那样，可以根据似然比原理（[7, 8]）给出判别规则．

在大多数情况下，判别分析中的结果都是在正态分布下获得的．对这些结果在近似正态分布情形下的

适用性也有研究（[9]）．这些研究是用决策函数的一般理论来处理判别分析问题的，判别规则的性质用所谓 Q 最优准则加以考察，它自然包括 Bayes 方法和极小化极大方法．事实上，设 $R(\xi,\delta)$ 是先验概率向量为 ξ 时，使用判别规则 δ 的 Bayes 风险，Q 是先验概率向量空间中的某一集合，且 $\xi\in Q$ 称规则 δ^* 是 **Q 最优的**（Q-optimal），如果

$$\sup_{\xi\in Q}R(\xi,\delta^*)=\inf_{\delta\in D}\ \sup_{\xi\in Q}R(\xi,\delta)=R_Q, \tag{4}$$

此处 D 是所有可能的判别规则组成的集合 设函数形式 $P_i(x,\lambda_i)$ 已知，它依赖于类 π_i 中标志向量的分布参数 $\lambda_i(i=1,2)$，假定参数 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$ 未知，需用样本来估计．假定当分布 $P_i(x,\lambda_i)(i=1,2)$ 中的参数值 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$ 已知时，存在 Q 最优判别规则 $\delta^*(\lambda_1,\lambda_2)$，而且参数 λ_i 的基于容量为 n_i 的样本的估计 $\{\lambda_i^{(n_i)}\}$ 是强相合的，那么在一定的附加条件下，当 $n_1,n_2\to\infty$ 时，规则序列 $\{\delta^*(\lambda_1^{(n_1)},\lambda_2^{(n_2)})\}$ 是渐近 Q 最优的，即概率为 1 地有

$$\lim_{n_1,n_2\to\infty}\ \sup_{\xi\in Q}R(\xi,\delta^*(\lambda_1^{(n_1)},\lambda_2^{(n_2)}))=R_Q, \tag{5}$$

这里 (5) 式左边的风险 R 既可对真参数值计算，也可用估计值 $\lambda_i^{(n_i)}$ 代替参数来计算．如果只要求相合估计，则结论稍弱些．

非参数判别方法不需要知道分布函数的精确形式，而根据关于诸类的少量先验信息就可以解决判别问题，因此在实际应用中特别重要（[2,10]）

判别分析问题可能遇到定性的和定量的两类标志的随机观测（二者混合的情况也是可能的），原则上，这两者之间没有差别 如果标志都是定量的，则对每个客体引进一个多维状态，并考虑它的分布．估计该标志向量的分布函数的方法取决于观测值的性质．只要合适，Bayes 方法和极小极大方法均可使用，还可以根据似然比来建立判别规则 有时为了方便起见，通过划分频率函数把定量标志转化为定性的，或者相反，通过引进反映定性信息的适当的虚变量，把定性的标志转化为定量的．这样做时，必须确保不会使规则的优良性有明显的损害

以上只考虑标志向量空间的维数固定时的判别分析问题 然而，在实际中判别分析工作者往往不得不选择维数 乍看起来，在判别函数中引进一个新标志似乎不会损害（而可能改进）它的性能．但事实上，由于各种原因（包括通常使用分布参数的估计值而不是真值这一事实），判别效果会被削弱 此外，标志数量的增加使计算量大为增加 选择哪些标志可以用多种方法确定，在许多情况下是根据简单的常识决定的．基于计算分布间 **Mahalanobis 距离**（Mahalanobis distance）（[11]）的方法，是理论上最有根据的方法．对标志进行逐次抽样的方法也值得注意．

长期以来，判定一客体属于若干可能类中哪一类的问题被当作分类问题 M G Kendall（[2]）把所有从若干个同等的可能性抽出一个的问题分为三类，本文采用他的术语 他称前面讨论的这类问题为“判别问题”，而把术语“分类”留给下述问题 把给定的样本或一批客体分成若干组，如果可能的话，组内的成员彼此相似．在判别问题中，存在若干这样的组是问题的条件的一部分，而在分类问题中却是研究的课题 在上面研究的判别问题中，所研究的客体是从某个有穷维分布中随机选取的结果 还可能有更一般的情况 所研究的客体是某个连续时间的随机过程的实现．

判别分析与**模式识别**（pattern recognition）理论有密切的联系

参考文献

[1] Anderson, T W, An introduction to multivariate statistical analysis, Wiley, 1958

[2] Kendall, M G and Stuart, A, The advanced theory of statistics, 3 Design and analysis, and time-series, Griffin, 1966

[3] Anderson, T W and Bahadur, R R, Classification into two multivariate normal distributions with different covariance matrices, *Ann Math Stat*, **33**(1962), 2, 420－431

[4] Fisher, R A, *Ann Eugenics*, **7**(1936), 11, 179－188

[5] Wald, A, On a statistical problem arising in the classification of an individual into one of two groups, *Ann Math Stat*, **15**(1944), 2, 145－162

[6] John, S, On some classification problems Ⅰ, Ⅱ, *Sankhya*, **22**(1960), 3－4, 301－316

[7] Welch, B L, Note on discriminant functions, *Biometrika*, **31**(1939), 1－2, 218－220

[8] Gupta, S D, Optimum classification rules for classification into two multivariate normal distributions, *Ann Math Stat*, **36**(1965), 4, 1174－1184

[9] Bunke, O, Stabilitat statistischer Entscheidungsprobleme und Anwendugen in der Discriminanzanalyse, *Z Wahrsch Verw Geb*, **7**(1967), 2, 131－146

[10] Ryzin, J Van, Bayes risk consistency of classification procedures using density estimation, *Sankhya Ser A*, **28**(1966), 261－270

[11] Kudô, A, *Mem Fac Sci Kyushu Univ Ser A*, **17**(1963), 1, 63－75

[12] Урбах, В Ю, в сб, Статистические методы классификации, в 1, М, 1969, 79－173

Н М Митрофанова, А П Хусу 撰

李国英 译 吴启光 校

判别曲线[**discriminant curve; дискриминантная кривая**]，一阶常微分方程 $F(x,y,y')=0$ 的

平面上一些点 (x, y) 的集合，这些点的坐标满足由关系式 $F=0$ 和 $F_y'=0$ 消去 y'，或者由关系式 $G=0'$ 和 $G_x'=0$ (其中 $G(y, x, x')\equiv F(x, y, 1/x')$) 消去 x' 所得到的方程 $\varphi(x, y)=0$ (假设 F_y'' 存在) 如果方程 $F=0$ 的判别曲线不是空集，也不退化为一些个别的点，则判别曲线(或者它的每一支)可能是下述情况之一

1) 是方程 $F=0$ 的解，在其每一点上解的唯一性破坏，这时，判别曲线构成一族积分曲线的包络（例如，对于方程 $y'^2+y^2-1=0$，判别曲线是 $y=1$ 和 $y=-1$（图 1），对于方程 $y'^3-y^2=0$，判别曲线是 $y=0$(图 2))，

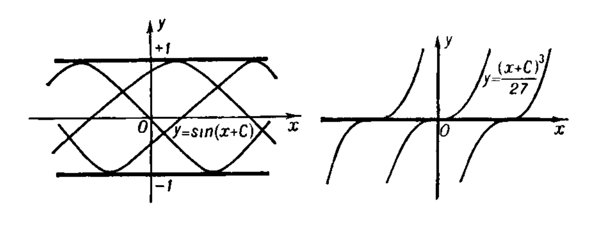


图 1　　　　图 2

2) 是方程 $F=0$ 的解，在其每一点上解的唯一性成立（例如，对于方程 $y'^2-y^2=0$，判别曲线是 $y=0$ (图 3))，

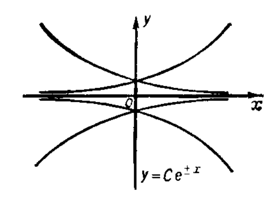


图 3.

3) 不是方程 $F=0$ 的解 在这种情况下，判别曲线或者是积分曲线的尖点的集合(例如，对于方程 $y'^2-x=0$，判别曲线是 $x=0$ (图 4)，或者是不同积分曲线的密切点的集合（例如，对于方程 $y'^2-x^2=0$，判别曲线是 $x=0$ (图 5))

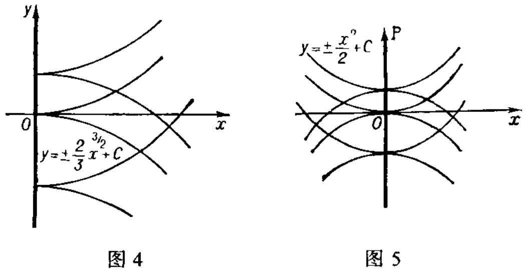


图 4　　　　图 5

当 F 是 y' 的多项式时，也可在复数域中来研究方程 $F=0$ ([2])

参考文献

[1] Sansone G , Equazioni differenziali nel campo reale, 2 Zanichelli, 1949

[2] Голубев, В В , Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд , М -Л , 1950 (中译本 В В 戈鲁别夫，微分方程解析理论讲义，高等教育出版社，1956)

Н Х Розов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ince, E L , Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956

张鸿林 译

判别函数 [discriminant function, дискриминантная функция]

在有两个类的**判别分析** (discriminant analysis) 问题中，用来构造判决规则的统计量．两个类的判别问题可描述如下．设观测值为向量 $x=(x_1, \ldots, x_p)$ 的被观测客体属于两个类 π_1 和 π_2 之一，但不知属于哪一个．问题是要找一个判别规则，使得当向量 x 的观测值已知时，用该规则可确定此客体属于哪一类．建立这样的规则，即是把向量 x 的样本空间划分为区域 R_1 和 R_2，使得当 x 在 R_i 中时，有理由判定 x 属于 π_i(根据选定的求最优解的原则)．如果判别规则是根据划分 $R_1=\{x . T(x)<a\}$ 和 $R_2=\{x \quad T(x)\geqslant b\}$ 给出的，此处 a 和 b 都是常数且 $a<b$，则称统计量 $T(x)$ 为判别函数，而称 $\{x \quad a\leqslant T(x)<b\}$ 为**不确定带** (uncertainty zone)．简单易行的线性判别函数特别重要．如果各个分布都是正态的，有相同的协方差阵，则当判别规则的最优性要求合理时，判别函数将是线性的 在具有多个类的判决分析问题中，采用 **Bayes方法** (Bayesian approach) 时，引进了**判别信息梯度** (discriminant informant) 的概念

Н．М Митрофанова， А П．Хусу 撰

李国英 译　吴启光 校

判别信息梯度 [discriminant informant, дискриминантный информант]

判别分析 (discriminant analysis) 中的一个术语，表示在下述判别问题中用来建立规则的变量 设有 k 个类，分布密度为 $p_1(x), \ldots, p_k(x)$，先验概率为 $q_1, \ldots, q_k$，要确定来自这 k 个类的混合体，观测值为 $x=(x_1, \ldots, x_p)$ 的客体属于哪一类 观测值为 x 的客体的第 i 个判别信息梯度定义为

$$S_i=-[q_1 p_1(x) r_{1i}+\cdots+q_k p_k(x) r_{ki}], \quad i=1, \ldots, k,$$

这里 r_{ij} 是把第 i 个类的客体判到第 j 个类所造成的损失．把客体判到判别信息梯度最大的类的规则使损失的数学期望达到最小 特别地，如果 k 个类的分布都是正态，协差阵相同，则所有判别信息梯度可用 x 的线性函数代替 此时，若 $k=2$，则差 S_1-S_2 即是 Fisher 线性**判别函数** (discriminant function)

参考文献

[1] Rao, C R, Linear statistical inference and its applications, Wiley, 1965 (中译本 C R 劳，线性统计推断及其应用，科学出版社，1987)

Н М Митрофанова, А П Хусу 撰

李国英 译 吴启光 校

判别张量 [discriminant tensor, дискриминантный тензор]

n 维 Euclid 空间上的反对称张量 $\varepsilon_{i_1 \cdots i_n}$，它由（描述体积形式的）$n$ 次外形式或最高阶单项式的（唯一确定的）分量给出．　　沈一兵 译

析取 [disjunction, дизъюнкция]

由两个命题 A 和 B 构成一个命题"A 或 B"的一种逻辑运算．形式语言中，两个命题 A 和 B 的析取表示为 $A \vee B$ 命题 A 和 B 都称为命题 $A \vee B$ 的析取项 (disjunctive terms) 析取的意义由如下**真假值表 (truth table)** 表示

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

В Е. Плиско 撰 沈复兴 译

析取余集 [disjunctive complement, дизъюнктное дополнение]，亦称析取补集，集合 A 的

向量格 (vector lattice) X 中所有和集合 $A \subset X$ 析取的元素 x 的集合 $A^d = \{x \in X \ \ x \perp A\}$ (见**析取元** (disjunctive elements)) 对任何 A，$A \subset A^{dd} = (A^d)^d$，此外，如果 X 是条件完全向量格 (见**条件完全格** (conditionally-complete lattice))，那么 A^{dd} 是 X 的包含 A 的最小分支．　　В И. Соболев 撰 余庆余 译

析取元 [disjunctive elements, дизъюнктные элементы]，独立元 (independent elements)

向量格 (vector lattice) X 中具有性质 $|x| \wedge |y| = 0$ 的两个元素 $x \in X$ 和 $y \in X$，这里

$$|x| = x \vee (-x),$$

它等价于

$$|x| = \sup(x, -x)$$

符号 $\wedge$ 和 $\vee$ 分别是**析取** (disjunction) 和**合取** (conjunction) 两个集合 $A \subset X$ 和 $B \subset X$ 称为是析取的 (disjunctive)，如果任何一对元素 $x \in A$ 和 $y \in B$ 是析取的 元素 $x \in X$ 称为和集合 $A \subset X$ 是析取的，如果集合 $\{x\}$ 和 A 是析取的 一对析取元素记作 $x \perp y$ 或 $x dy$，一对析取集记作 $A \perp B$ 或 AdB．

析取元的例 元素 x 的正部 $x_+ = x \vee 0$，负部 $x_- = (-x) \vee 0$

如果元素 x_i ($i = 1, \cdots, n$) 是成对析取的，则它们线性无关，如果 A 和 B 是析取元，那么它们生成的线性子空间也是析取的，如果 $x_\alpha \perp y$，$\alpha \in \mathfrak{A}$，且

$$\sup_\alpha x_\alpha = x$$

存在，那么 $x \perp y$ 对于析取元素，一些结构关系得到简化；例如，如果 $x \perp y$，那么

$$|x + y| = |x| + |y|,$$

$$(x + y) \wedge z = x \wedge z + y \wedge z, \ z > 0, \text{ 等等}$$

在更一般的偏序集中，如 Boole 代数中，也可引进析取元的概念．

参考文献

[1] Канторович, Л В, Вулих, Б З, Пинскер, А Г, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М -Л, 1950 (中译本 Л В 康托洛维奇，半序空间泛函分析，上集，高等教育出版社，1958，下集，人民教育出版社，1960)

[2] Вулих, Б З, Введение в Теорию полуупорядоченных пространств, М, 1961 (英译本 Yulikh, B Z, Introduction to the theory of partially ordered spaces, Wolters-Noordhoff, 1967)

[3] Bourbaki, N, Elements of mathematics Integration, Addison-Wesley, 1975, Chapt 6, 7, 8 (译自法文)．

В И. Соболев 撰

【补注】 术语"析取集"也有不同的含义，见**析取集族** (disjunctive family of sets)

参考文献

[A1] Luxemburg, W A J and Zaanen, A C, Riesz spaces, 1, North-Holland, 1971

余庆余 译

分离集族 [disjunctive family of sets, дизъюнктное семейство множеств]

两两互不相交的集合组成的集族．

В А Ефимов 撰 张锦文、赵希顺 译

析取范式 [disjunctive normal form, дизъюнктивная нормальная форма]

如下形式的一种命题公式

$$\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m_i} C_{ij}, \qquad (*)$$

其中每个 C_{ij} ($i = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, m_i$) 或是一个变元或是一个变元的否定．形式 (*) 是可实现的当且仅当对每个 i，$C_{i1}, \cdots, C_{im_i}$ 中不同时包含公式 p 和

$\neg p$，其中 p 是任意变元．对任意一个命题公式 A 都可以构造一个与 A 等价的析取范式 B，使 B 与 A 含有相同的变元．这样的公式 B 就称为公式 A 的析取范式．

C К Соболев 撰 沈复兴 译

析取表示 [**disjunctive representations**，**дизъюнктные представления**]，不相交表示（disjoint representation）

某个群的西表示 π_1，π_2，或相应地，某个具有对合的代数（algebra with an involution）的对称表示，它们满足如下的等价条件 1）从 π_1 的表示空间到 π_2 的表示空间中的唯一有界线性算子是恒零算子，2）表示 π_1 和 π_2 没有等价的非零子表示．在因子表示的研究中，不相交表示的概念是富有成效的，特别地，表示 π 是因子表示，当且仅当 π 不能被表示成两个非零不相交表示的直接和．任意两个因子表示或是不相交的，或是它们中的一个等价于另一个的一个子表示（在后一情形，这两个表示是拟等价的）．在把表示分解为直接积分中，不相交表示的概念起着重要的作用．如果 π 是一个可分 Hilbert 空间 H 中的表示，$\mathfrak{A}$ 是 H 上由此表示的算子生成的 **von Neumann 代数**（von Neumann algebra），Z 是 $\mathfrak{A}$ 的中心，那么

$$H=\int^{\oplus} H(l)\,d\mu(l)$$

是空间 H 的一个分解，这个分解把 H 分解为 Hilbert 空间的直接积分，它对应于分解

$$\pi=\int^{\oplus} \pi(l)\,d\mu(l),$$

如果代数 Z 对应于可对角化算子的代数，那么对几乎所有的 l，$\pi(l)$ 是因子表示，且对几乎所有的 l，表示 $\pi(l)$ 是两两不相交的．在可分局部紧群（或具对合的可分代数）的两个表示的不相交性和相应于这些表示的群（代数）的拟谱上的测度的典范类的表示的相互奇异性之间存在简单的联系

参考文献

[1] Dixmier, J., C^* algebras, North-Holland, 1977（译自法文）

А И Штерн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Arveson, W., An invitation to C^*-algebra, Springer, 1976

余庆余 译

析取和 [**disjunctive sum**，**дизъюнктная сумма**]，拓扑空间 $X_\alpha(\alpha\in A)$ 的

空间 $Y=\bigcup_{\alpha\in A}Y_\alpha$，其中每个 Y_α 都是 X_α 的一个拷贝，并且对于 $\alpha_1\neq\alpha_2$，$Y_{\alpha_1}\cap Y_{\alpha_2}=\phi$，而 Y 上的拓扑由下述条件给出．集合 U 是 Y 中开集当且仅当它与每个 Y_α 的交集是开集．换言之，每个 Y_α 在 Y 中既是开集又是闭集

А А Мальцев 撰

【补注】 空间 Y 也称为 X_α 的离散和（discrete sum）或离散并（descrete union）

罗嵩龄 许依群、徐定宥 译

方差 [**dispersion**，**дисперсия**]，概率论中的

随机变量 X 与其**数学期望**（mathematical expectation）$\mathrm{E}X$ 偏离的一种度量，记作 $\mathrm{D}X$，定义为

$$\mathrm{D}X=\mathrm{E}(X-\mathrm{E}X)^2$$

方差具有下列性质

$$\mathrm{D}X=\mathrm{E}X^2-(\mathrm{E}X)^2,$$

若 c 是实数，则

$$\mathrm{D}(cX)=c^2\mathrm{D}X,$$

特别地，$\mathrm{D}(-X)=\mathrm{D}X$

当谈到随机变量 X 的方差时，总是假定它的期望 $\mathrm{E}X$ 存在，方差 $\mathrm{D}X$ 可能存在（即它是有限的），也可能不存在（即它是无限的）．在现代**概率论**（probability theory）中，随机变量的数学期望用基本事件空间上的 **Lebesgue 积分**（Lebesgue integal）来定义．然而，用随机变量在实数集上的分布来表示这个变量的各种函数之期望的公式是重要的（见**数学期望**（mathematical expectation））

对于方差 $\mathrm{D}X$，这些公式是

a) 对于至多取可数个不同值 a_i 且 $\mathrm{P}\{X=a_i\}=p_i$ 的离散随机变量 X，

$$\mathrm{D}X=\sum_i(a_i-\mathrm{E}X)^2p_i,$$

b) 对于具有概率分布密度 $p(x)$ 的随机变量 X，

$$\mathrm{D}X=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mathrm{E}X)^2p(x)\,dx,$$

c) 在一般情形下，

$$\mathrm{D}X=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mathrm{E}X)^2\,dF(x),$$

这里 F 是随机变量 X 的分布函数，且积分理解为在 Lebesgue-Stieltjes 或 Riemann-Stieltjes 意义下的积分

方差不是随机变量与其期望偏离的唯一度量．像基于**分位数**（quantile）的偏离度量一样，依据同样的原则也可构造其他的偏离度量，例如 $\mathrm{E}|X-\mathrm{E}X|$，$\mathrm{E}(X-\mathrm{E}X)^4$ 等．方差的重要性主要在于这个概念在**极限定理**（limit theorems）中所起的作用．粗略地说，若大量随机变量之和的期望和方差都已知，则圆满的描述这个和的分布律是可能的．它是带有相应参数的近似**正态分布**（normal distribution）．因此，方差最重要的性质，是随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 之和的方差 $\mathrm{D}(X_1+\cdots+X_n)$ 的表达式

$$\mathrm{D}(X_1+\quad+X_n)=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{D}X_i+2\sum_{i<j}\mathrm{cov}(X_i,X_j),$$

此处

$$\mathrm{cov}(X_i,X_j)=\mathrm{E}\{(X_i-\mathrm{E}X_i)(X_j-\mathrm{E}X_j)\}$$

是随机变量 X_i 和 X_j 的**协方差**（covariance）. 如果随机变量 X_1, X_n 是两两独立的，则 $\mathrm{cov}(X_i, X_j)=0$. 因此，等式

$$\mathrm{D}(X_1+\quad+X_n)=\mathrm{D}X_1+\quad+DX_n \tag{2}$$

对于两两独立的随机变量成立．逆命题是不正确的(2) 式不蕴含独立性．不过，(2) 式的应用通常是基于随机变量的独立性 严格地说，(2) 式成立的充分条件是 $\mathrm{cov}(X_i,X_j)=0$, 即随机变量 X_1, X_n 两两不相关.

方差这一概念的应用已经有两个发展方向．第一个是在概率论的极限定理中的应用 对于随机变量序列 X_1,X_2, ，若当 $n\to\infty$ 时，$\mathrm{D}X_n\to 0$, 则对于任何 $\varepsilon>0$, 当 $n\to\infty$ 时

$$\mathrm{P}\{|X_n-\mathrm{E}X_n|>\varepsilon\}\to 0$$

（见 **Чебышев 不等式（概率论中的）**（Chebyshev inequality (in probability theory))), 这就是说，对于大 n，随机变量 X_n 实际上等同于非随机变量 $\mathrm{E}X_n$ 这些思想的发展提供了**大数律**（law of large numbers）及数理统计中的**相合估计**（consistent estimator）的证明，也导致了其他应用，其中包括随机变量依概率收敛的建立 极限定理的另一种应用与标准化的概念有关 随机变量 X 的标准化是指该变量减去它的期望后除以标准差 $\sqrt{\mathrm{D}X}$，即变量 $Y=(X-\mathrm{E}X)/\sqrt{\mathrm{D}X}$ 为了得到分布律收敛（特别是收敛到标准正态律）的序列，通常需要把随机变量序列标准化 第二个方向是方差概念应用于数理统计中的样本加工．如果把随机变量看作随机试验的观测结果，则数值刻度的任何改变将把随机变量 X 变换为 $Y=\sigma X+a$，这里 a 是任意实数，σ 是正数 有意义的作法是，在许多情况下不只是考虑随机变量 X 的某一理论分布 $F(x)$，而是考虑其分布类型，即至少包含两个参数 a 和 σ 的分布族 $F(\frac{x-a}{\sigma})$ 若 $\mathrm{E}X=0$, $\mathrm{D}X=1$, 则 $\mathrm{E}Y=a$ 和 $\mathrm{D}Y=\sigma^2$ 相应地，参数在理论分布中的含义是 $a=\mathrm{E}Y$ 和 $\sigma=\sqrt{\mathrm{D}Y}$ 因此能够通过抽取样本来确定这些参数

参考文献

[1] Гнеденко, Б В , Курс теории вероятностей, 5 изд , M , 1969（中译本 Б В 格涅坚科，概率论教程，高等教育出版社，1956）

[2] Feller, W , An introduction to probability theory and its applications, 1－2, Wiley, 1957－1971（中译本 W 费勒，概率论及其应用，科学出版社，（上册）1964,（下册）1979）

[3] Cramér, H , Mathematical methods of Statistics, Princeton Univ Press, 1946（中译本 H 克拉美，统计数学方法，上海科学技术出版社，1966）

B H Тутубалин 撰

【补注】 在英文中 "dispersion" 一词常被 "variance"（方差）代替，并相应地用 $\mathrm{Var}\,X$ 代替 $\mathrm{D}X$.

吴启光 译 陶 波 校

方差分析 [dispersion analysis ,дисперсионный анализ], 数理统计中的

一种统计方法，用来了解各个因子对试验结果的影响和设计以后的类似试验 R A Fisher ([1]) 最先提出了方差分析，用来处理农业试验的结果，以确定农作物的高产条件 方差分析的现代应用十分广泛，包括经济学、社会学、生物学和工业技术中的各种问题，处理这些问题的方法是根据统计理论，探讨在指定的不同条件下得到的直接观测结果之间的系统差异.

假定可用某些方法或仪器 M_1, M_J 测量未知常数 a_1, a_I 的值，原则上说，在每种情况下的系统误差 b_{ij} 可能依赖于所用的方法 M_j 和被测的未知量 a_i 此时，试验结果是下列形式的和

$$x_{ijk}=a_i+b_{ij}+y_{ijk},$$

$$i=1,\quad ,I,\ j=1,\quad ,J,\ k=1,\quad ,K,$$

其中 K 是用方法 M_j 对未知量 a_i 进行独立测量的次数，y_{ijk} 是用方法 M_j 测量 a_i 的第 k 个观测值的随机误差（假定所有 y_{ijk} 是独立同分布的随机变量 **数学期望**（mathematical expectation）为零 $\mathrm{E}y_{ijk}=0$）这样的线性模型称为方差分析的两因子方案（two-factor scheme)，第一个因子是测量对象的真值，第二个因子是测量方法，此外，对于第一个和第二个因子取值的任一可能的组合，都独立测量相同的次数 K（这个假定对于方差分析来说不是本质的，只不过是为了行文简洁）

这种情形的一个例子是 I 个运动员间的比赛，由 J 个裁判员给运动员评分，每个运动员在比赛中出场 K 次（允许 K 次角逐）在该例中，a_i 是第 i 个运动员成绩的真值，b_{ij} 是第 j 个裁判员对第 i 个运动员评分的系统误差，x_{ijk} 是第 j 个裁判员对第 i 个运动员在第 k 次角逐中的评分，而 y_{ijk} 是相应的随机误差．在由一组专家独立地评价若干物品的质量这类所谓主观考核问题中，上述的结构有典型性 另一个例子是对农作物产量的统计研究，其产量依赖于 I 类土壤和 J 种耕作方法，对于土壤 i 和耕作方法 j 的各种组合均作了 K 次独立试验 在这个例子中，b_{ij} 是在第 i 类土壤上用第 j 种方法耕作时农作物产量的真值，x_{ijk} 是它在第 k 次试验中相应的实际产量，而 y_{ijk} 是由诸随机因素造成的随机误差，关于 a_i 的值，在农业试验中可以把它们当作 0（亦

见 [5])

令 $c_{ij}=a_i+b_{ij}$，设 c_{i*}，c_{*j} 和 c_{**} 是 c_{ij} 关于相应下标的平均值，即

$$c_{i*}=\frac{1}{J}\sum_j c_{ij},\quad c_{*j}=\frac{1}{I}\sum_i c_{ij},$$

$$c_{**}=\frac{1}{IJ}\sum_{i,j} c_{ij}=\frac{1}{I}\sum_i c_{i*}=\frac{1}{J}\sum_j c_{*j}$$

再令 $\alpha=c_{**}$，$\beta_i=c_{i*}-c_{**}$，$\gamma_j=c_{*j}-c_{**}$，且 $\delta_{ij}=c_{ij}-c_{i*}-c_{*j}+c_{**}$ 方差分析的思想源于下列显然成立的恒等式

$$c_{ij}=\alpha+\beta_i+\gamma_j+\delta_{ij},\ i=1,\ \ ,I,\ j=1,\ \ ,J \tag{1}$$

若用 (c_{ij}) 表示由 $I\times J$ 矩阵 $\|c_{ij}\|$ 的元素按某种预先指定的次序排列而成的 IJ 维向量，则(1)可写成等式

$$(c_{ij})=(\alpha_{ij})+(\beta_{ij})+(\gamma_{ij})+(\delta_{ij}), \tag{2}$$

其中所有向量都是 IJ 维的，且 $\alpha_{ij}=\alpha$，$\beta_{ij}=\beta_i$，$\gamma_{ij}=\gamma_j$ 因为(2)式右边的四个向量是相互正交的，所以若用常数作为变量 i 和 j 的函数 c_{ij} 的近似，则 $\alpha_{ij}=\alpha$ 是最好的近似(在极小化离差平方和 $\sum_{i,j}(c_{ij}-\alpha)^2$ 的意义下)在同样的意义下，当用仅依赖于 i 的函数来逼近 c_{ij} 时，$\alpha_{ij}+\beta_{ij}=\alpha+\beta_i$ 是最优逼近，当用仅依赖于 j 的函数来逼近 c_{ij} 时，$\alpha_{ij}+\gamma_{ij}=\alpha+\gamma_j$ 是最优的，当用仅依赖于 i 的函数(例如 $\alpha+\beta_i$)与仅依赖于 j 的函数之和来逼近 c_{ij} 时，$\alpha_{ij}+\beta_{ij}+\gamma_{ij}=\alpha+\beta_i+\gamma_j$ 是最优的 Fisher ([1]) 于 1918 年确立的这个事实后来成为函数的二次逼近理论的基础．

在上述的关于体育比赛的例子中，函数 δ_{ij} 表示第 i 个运动员与第 j 个裁判员的"交互作用"(δ_{ij} 取正值说明"评价过头"，即第 j 个裁判员对第 i 个运动员的评分系统地偏高，而 δ_{ij} 取负值意味着"评价不足"，即评分系统地偏低)．专家组必须达到的条件是所有 δ_{ij} 都为零．在农业试验中，主要目的是找出 i 和 j，使得函数 (1) 达到它的最大值，因而把 $\delta_{ij}=0$ 作为要用试验结果进行检验的假设．若该假设正确，则

$$\max c_{ij}=\alpha+\max\beta_i+\max\gamma_j,$$

这说明寻找最优的"土壤"和"耕作方法"可以分开处理，使试验工作量显著减少(例如，人们对所有 I 类土壤用同一种耕作方法，找出最优的一类土壤，然后在该类土壤上使用所有 J 种耕作方法，找出最优的耕作方法，包括重复在内，试验总次数为 $(I+J)K$) 相反，如果假设 {所有的 $\delta_{ij}=0$} 不正确，则要找 $\max c_{ij}$ 只能采用前述的 K 次重复的"完全设计"，共有 IJK 次试验．

在体育比赛一例中，可把函数 $\gamma_{ij}=\gamma_j$ 看作第 j 个裁判员相对所有运动员的系统误差 因此，γ_j 是第 j 个裁判员的"精确性"或"适中性"的度量 在理想情况下，所有 γ_j 为零 但实际发生的情况是，人们不得不面对 γ_j 不为零的情形，而且在总结评分结果时必须考虑这一点(例如，在比较各个运动员的成绩时，人们不是根据 $\alpha+\beta_1+\gamma_j$， ，$\alpha+\beta_I+\gamma_j$ 的真值，而是根据它们的大小次序，因为对所有 $j=1$， ，J，这个次序是相同的)．最后，其余两个函数之和 $\alpha_{ij}+\beta_{ij}=\alpha+\beta_i$ 仅依赖于 i，因此可作为第 i 个参赛者成绩的度量 然而必须牢记，这里 $\alpha+\beta_i=a_i+b_{i*}\neq a_i$ 因此，按照 $\alpha+\beta_i$ 的值(或对给定的 j，按照 $\alpha+\beta_i+\gamma_j$) 对参赛者排序可能与按 a_i 值的排序不同．在专家评分的实际过程中，这个事实被忽略了，因为上述的"完全设计"没有为 a_i 和 b_{i*} 提供各自的设计 因此，数值 $\alpha+\beta_i=a_i+b_{i*}$ 所反映的不只是第 i 个运动员的成绩，还在一定程度上包括了专家们对该运动员表现的看法．这就是不同时期(特别地，在不同届的奥运会上)专家主观评判结果几乎是不可比较的原因 另一方面，在农业试验中，由于所有的 $a_i=0$，即 $\alpha+\beta_i=b_{i*}$，所以没有这样的困难

函数 α，β_i，γ_i 和 δ_{ij} 的真值是未知的，且用诸未知函数 c_{ij} 表示．因此，方差分析的第一步是根据观测结果 x_{ijk} 给出 c_{ij} 的统计估计 c_{ij} 的一个**方差** (dispersion) 最小的线性无偏估计是

$$\hat{c}_{ij}=x_{ij*}=\frac{1}{K}\sum_k x_{ijk}$$

由于 α，β_i，γ_j 和 δ_{ij} 是矩阵 $\|c_{ij}\|$ 的元素的线性函数，所以用估计 $\hat{c}_{ij}$ 代替 c_{ij} 就获得了这些函数的方差最小的无偏线性估计，即

$$\hat{\alpha}=x_{***},\ \hat{\beta}_i=x_{i**}-x_{***},\ \hat{\gamma}_j=x_{*j*}-x_{***},$$
$$\hat{\delta}_{ij}=x_{ij*}-x_{i**}-x_{*j*}+x_{***},$$

而且，用与前面引进 (α_{ij})，(β_{ij})，(γ_{ij}) 和 (δ_{ij}) 相同的方法定义的随机向量 $(\hat{\alpha}_{ij})$，$(\hat{\beta}_{ij})$，$(\hat{\gamma}_{ij})$ 和 $(\hat{\delta}_{ij})$ 是相互正交的，也就是不相关的随机向量(换句话说，属于不同向量的任何两个分量的**相关系数** (correlation coefficient) 为零) 此外，任何形如

$$x_{ijk}-x_{ij*}=x_{ijk}-\hat{c}_{ij}$$

的差与这四个向量的任何分量不相关．考虑五组随机变量 $\{x_{ijk}\}$，$\{x_{ijk}-x_{ij*}\}$，$\{\hat{\beta}_i\}$，$\{\hat{\gamma}_j\}$ 和 $\{\hat{\delta}_{ij}\}$ 因为

$$x_{ijk}-x_{ij*}=y_{ijk}-y_{ij*},\ \hat{\beta}_i=\beta_i+(y_{i**}-y_{***}),$$
$$\hat{\gamma}_j=\gamma_j+(y_{*j*}-y_{***}),$$
$$\hat{\delta}_{ij}=\delta_{ij}+(y_{ij*}-y_{i**}-y_{*j*}+y_{***}),$$

所以相应于这五组随机变量的经验分布的方差分别为

$$S^2=\frac{1}{IJK}\sum_{ijk}(x_{ijk}-x_{***})^2,$$

$$S_0^2=\frac{1}{IJK}\sum_{ijk}(x_{ijk}-x_{ij*})^2=\frac{1}{IJK}\sum_{ijk}(y_{ijk}-y_{ij*})^2,$$

$$S_1^2=\frac{1}{I}\sum_i\hat{\beta}_i^2=\frac{1}{I}\sum_i[\beta_i+(y_{i**}-y_{***})]^2,$$

$$S_2^2=\frac{1}{J}\sum_j\hat{\gamma}_j^2=\frac{1}{J}\sum_j[\gamma_j+(y_{\cdot j\cdot}-y_{\cdots})]^2,$$

$$S_3^2=\frac{1}{IJ}\sum_{ij}\hat{\delta}_{ij}^2=\frac{1}{IJ}\sum_{ij}[\delta_{ij}+(y_{ij\cdot}-y_{i\cdot\cdot}-y_{\cdot j\cdot}+y_{\cdots})]^2$$

这些经验方差是随机变量的平方和，属于不同和式中的任意两个随机变量是不相关的，而且，对所有y_{ijk}有恒等式

$$S^2=S_0^2+S_1^2+S_2^2+S_3^2,$$

它阐明了术语“方差分析”的由来．

设$I, J, K\geqslant 2$，且

$$s_0^2=\frac{K}{K-1}S_0^2,\ s_1^2=\frac{IJK}{I-1}S_1^2,\ s_2^2=\frac{IJK}{J-1}S_2^2,$$

$$s_3^2=\frac{IJK}{(I-1)(J-1)}S_3^2,$$

则

$$\mathrm{E}s_0^2=\sigma^2,\ \mathrm{E}s_1^2=\sigma^2+\frac{JK}{I-1}\sum_i\beta_i^2,\ \mathrm{E}s_2^2=\sigma^2+\frac{JK}{J-1}\sum_j\gamma_j^2,$$

$$\mathrm{E}s_3^2=\sigma^2+\frac{K}{(I-1)(J-1)}\sum_{ij}\delta_{ij}^2,$$

此处σ^2是随机误差y_{ijk}的**方差**（dispersion）

这些公式奠定了方差分析中第二步的基础，这一步骤要弄清第一个和第二个因子对试验结果的影响（在农业试验中，第一个因子是土壤类型，第二个因子是耕作方法）．例如，为了检验假设　两个因子相互“无关”，即$\sum_{ij}\delta_{ij}^2=0$，可计算方差比（dispersion proportion）$s_3^2/s_0^2=F_3$　如果这个比值显著地大于1,则否定假设　与此类似，通常将比值$s_2^2/s_0^2=F_2$与1比较以检验假设$\sum_j\delta_{ij}^2=0$，如果还知道$\sum_{ij}\delta_{ij}^2=0$，则应该用

$$\frac{(IJK-I-J-1)s_2^2}{IJ(K-1)s_0^2+(I-1)(J-1)s_3^2}=F_2^*,$$

而不是用F_2来与1比较　检验假设$\sum_i\beta_i^2=0$的统计量也可用类似方法构造

上述各式与1有显著差别的精确含意可以仅用随机误差y_{ijk}的分布律来定义　在方差分析中，研究得最多的是诸y_{ijk}均遵从正态分布的情形　这时，$(\hat{\alpha}_{ij})$，$(\hat{\beta}_{ij})$，$(\hat{\gamma}_{ij})$和$(\hat{\delta}_{ij})$是相互独立的随机向量，s_0^2，s_1^2，s_2^2和s_3^2是相互独立的随机变量，且

$$IJ(K-1)\frac{s_0^2}{\sigma^2},\quad (I-1)\frac{s_1^2}{\sigma^2},\quad (J-1)\frac{s_2^2}{\sigma^2},$$

$$(I-1)(J-1)\frac{s_3^2}{\sigma^2}$$

分别遵从自由度为f_m，非中心参数为λ_m的非中心χ^2分布，$m=0,1,2,3$，此处

$$f_0=IJ(K-1),\quad f_1=I-1,\quad f_2=J-1,\ f_3=(I-1)(J-1),$$

$$\lambda_0=0,\ \lambda_1=JK\sum_i\frac{\beta_i^2}{\sigma^2},\ \lambda_2=IK\sum_j\frac{\gamma_j^2}{\sigma^2},\ \lambda_3=K\sum_{ij}\frac{\delta_{ij}^2}{\sigma^2}$$

若非中心参数为零，则非中心χ^2分布变成通常的χ^2分布．因此，若假设$\lambda_3=0$成立，则$s_3^2/s_0^2=F_3$遵从参数为f_3和f_0的F分布（方差比的分布）．设x使事件$\{F_3>x\}$的概率等于预先指定的值ε，该值称为显著性水平（significance level）（大多数的数理统计教科书中都有函数$x=x(\varepsilon,f_3,f_0)$的数值表）．检验假设$\lambda_3=0$的规则是，当算出的F_3值大于x时，否定假设，否则，称假设与试验结果不矛盾　基于统计量F_2和F_2^*的检验规则可用同样的方式构造．

方差分析的下一个步骤不仅严重地依赖于问题本身的性质，而且依赖于在第二步中统计检验的结果　正如已看到的那样，在农业试验中假设$\lambda_3=0$成立可使以后的试验更为经济（若假设$\lambda_3=0$和$\lambda_2=0$都正确，则产量仅依赖于土壤类型，且以后的试验可按单因子方差分析的模式进行），若假设$\lambda_3=0$不正确，则可能需要寻找与该问题有关的至今尚未考察的第三个因子．如果试验中的土壤类型和耕作方法不限于同一地区，而是涉及地域，则气候或地理条件可能成为第三个因子，且需用三因子方差分析来处理观测结果

在专家评分的情况下，如果已经从统计上证实了$\lambda_3=0$，则可根据$\hat{\alpha}+\hat{\beta}_i$的值，$i=1,\ \ ,I$，对所比较的对象（例如运动员）排序．如果假设$\lambda_3=0$不正确（就体育比赛而言，这表示参赛者和裁判员之间存在交互作用），则自然的做法是　当统计估计δ_{ij}的绝对值超过某个预定值时，就把前两个下标为(i,j)的那些x_{ijk}丢掉，然后重新计算所有结果．这样，矩阵$\|x_{ij\cdot}\|$的某些元素被删掉了，方差分析的设计变为不完全设计．

现代方差分析的模型所包括的实际试验方案十分广泛（例如，随机地或非随机地选择元素$x_{ij\cdot}$的不完全设计方案）　许多相应的统计理论仍处在发展阶段　撰写本文时（1987），观测结果$x_{ijk}=c_{ij}+y_{ijk}$是不同分布的随机变量情形下的一些特殊问题还远未解决，更困难的问题是x_{ijk}相依的情形．因子选择问题即使是在线性情形下也未解决　该问题可叙述如下　设$c=c(u,v)$是连续函数，$u=u(z,w)$和$v=v(z,w)$是变量z和w的任意线性函数　给定$z_1,\ \cdot,z_I$和$w_1,\ \ ,w_J$，c_{ij}可由任意选定的线性函数u和v用公式

$$c_{ij}=c[u(z_i,w_j),\ v(z_i,w_j)]$$

确定，根据相应的观测结果x_{ijk}，可构造诸变量c_{ij}的方差分析　问题是要找线性函数u和v，使平方和$\sum_{ij}\delta_{ij}^2$达到最小（假定函数$c(u,v)$未知），此处

$$\delta_{ij}=c_{ij}-c_{i*}-c_{*j}+c_{**}$$

用方差分析的话来说，该问题是用统计方法确定因子 $z=z(u,v)$ 和 $w=w(u,v)$，使其交互作用最小．

参考文献

[1] Fisher, R A, Statistical methods of research workers, Oliver & Boyd, 1925

[2] Scheffe, H, The analysis of variance, Wiley, 1959

[3] Hald, A, Statistical theory with engineering applications, Wiley, 1952

[4] Snedecor, G W and Cochran, W G, Statistical methods applied to experiments in agriculture and biology, Iowa State College Collegiate Press, 1957

[5] Nikulin, M S, Application of the model of two-factor analysis of variance without interation, *J Soviet Math*, **25** (1984), 3, 1196－1207

Л Н Большев 撰

【补注】 在英文中“dispersion analysis”一词已不用，而用“analysis of variance”（方差分析）来代替．

李国英 译 吴启光 校

散布椭球面 [dispersion ellipsoid, рассеивания эллипсоид]

随机向量值空间中的一个椭球面，它用二阶矩描述该随机向量的概率分布在某个给定向量周围的集中程度 设 X 是随机向量，其值 $x=(x_1, \ldots, x_n)^T$ 取于 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$，它的协方差阵 B 是非奇的．那么，对于值空间 $\mathbf{R}^n$ 中任一固定向量 a，称椭球面

$$(x-a)^T B^{-1}(x-a)=n+2, \quad x\in\mathbf{R}^n,$$

为 X 的概率分布关于 a 的一个散布椭球面（dispersion ellipsoid)，或随机向量 X 的散布椭球面．特别地，若 $a=\mathsf{E}X$，则散布椭球面是 X 的概率分布在其数学期望 $\mathsf{E}X$ 周围集中程度的几何表示

在未知 n 维参数 θ 的统计估计问题中，散布椭球面的概念，可用来在 θ 的具有非奇协方差阵的无偏估计类 $\tau=\{T\}$ 中按下列方式定义一个偏序 给定两个估计量 $T_1, T_2\in\tau$，若 T_1 的散布椭球面全部落在 T_2 的散布椭球面以内，则称 T_1 优于 T_2 未知参数向量的无偏有效估计量在下述意义下是最优的 它的散布椭球面落在任何其他无偏估计量的散布椭球面以内 见 **Rao-Cramér 不等式**（Rao-Cramér inequality)，**有效估计量**（efficient estimator)；**信息量**（information, amount of)．

参考文献

[1] Cramer, H and Leadbetter, M R, Stationary and related stochastic processes, Wiley, 1967

[2] Anderson, T W, An introduction to multivariate statistical analysis, Wiley, 1958

[3] Ибрагимов, И С, Хасьминский, Р З, Асимптотическая теория оценивания, М, 1979（英译本 Ibragimov, I S and Has'minskii, R Z, Statistical estimation asymptotic theory, Springer, 1981)

М С Никулин 撰 吴启光 译 陶 波 校

色散方程 [dispersion equation, дисперсионное уравнение]

联系平面波的振动频率 ω 与**波向量**（wave vector)$\mathbf{k}$ 的方程．波按规律

$$\exp\{i(\omega t-\mathbf{kr})\}$$

依赖于时间和坐标．色散方程是从描述所讨论过程的方程推导而得，并决定波的色散（例如见 [1], [2] 中的电动力学过程的情况)．根据问题的性质，色散方程可用来从波向量得到振动频率 $\omega_n=\omega_n(\mathbf{k})$，或者从波向量的方向和振动频率得到波向量之值．

第一种情况与求解 Cauchy 问题及研究对应于讨论的波动过程方程的平凡解的平衡位置的稳定性紧密相关．通过将初始条件展开为 Fourier 级数，Cauchy 问题的解可以写为频率为 $\omega_n(\mathbf{k})$ 的平面波的迭加 如果对某个实数 $\mathbf{k}$ 这些频率中至少有一个具有负的虚部，这意味着存在按指数增长的解，即不稳定性．

第二种求解色散方程的情况与随时间作简谐变化的外源引起的单色振荡问题有关

参考文献

[1] Ландау, Л Д, Лившиц, Е М, Электродинамика сплошных сред, М, 1957（中译本 朗道，Л Д 和栗弗席兹，Е М，连续媒质电动力学，人民教育出版社，1963)

[2] Силин, В П, Рухадзе, А А, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, М, 1961

Д П. Костомаров 撰

【补注】 具有色散关系 $\omega=\pm\gamma k^2$ 的射线方程 $\varphi_{tt}+\gamma^2\varphi_{xxxx}=0$ 和具有色散关系 $\omega=ck-\nu k^3$ 的线性 Korteweg-de Vries 方程 $\varphi_t+c\varphi_x+\nu\varphi_{xxx}=0$ 提供了（一维空间情况下的）**色散关系**（dispersion relation）的例子．

对于线性方程 $P(\partial/\partial t, \partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)\varphi=0$，其中 P 为一多项式，相应的色散关系是 $P(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3)=0$，因此方程与色散关系互相决定．色散关系的思想和实用性也适于非线性情况．如果色散关系为非线性的，则不同波数的波以不同的相速度（$c=k^{-1}\omega$ 在一维空间情况下）运动，这就说明色散一词的含义．

参考文献

[A1] Brillouin, L, Wave propagation and group velocity, Acad Press, 1960

[A2] Timman, R, Hermans, A J, Hsian, G C, Water waves and ship hydrodynamics, Martinus Nijhoff, 1985

[A3] Whitham, G B, Linear and nonlinear waves, Wiley (Interscience), 1974（中译本 G B 惠瑟姆著，线性与非线性波，科学出版社，1986)

[A4] Zanderer, E, Partial differential equations of applied mathematics, Wiley (Interscience), 1983

沈 青 译

离差法 [**dispersion method**；**дисперсионный метод**]，数论中的

解某种形如

$$\alpha+\beta=n \tag{1}$$

的二元方程（二元**加性问题**（additive problems））的一种方法，这里α和β属于充分稠密的且在算术级数序列中分布得足够好的自然数序列．

由 Ю.В.Линник 于 1958－1961 发展起来因而称为 Линник 离差法（Linnik dispersion method）的这一方法，把概率论的基本概念（特别是离差的概念和 Чебышев 型不等式）和 И.М.Виноградов 与 A. Weil 的分析和代数思想结合起来．可以叙述如下（亦见**加性数论**（additive number theory））

方程（1）可以归结为形如

$$\nu D'+\beta=n \tag{2}$$

的方程，这里ν和D'彼此独立地通过矩形域$\nu\in(\nu)$，$D'\in(D)$中的某些值，其中（ν）和（D）是某区间，此外，ν是素数，而对D'可加上各种附加条件　设F是这方程的解数

现对任意$D\in(D)$考虑方程

$$\nu D+\beta=n,$$

设$A(n,D)$是用某些直接推断方法求得的它的解数．于是方程（2）的期望解数（假设的）可写成

$$S=\sum_{D'\in(D)}A(n,D')$$

的形式　差$F-S=V$的估计具有形式

$$V=\sum_{D\in(D)}\left[\sum_{\nu D'+\beta=n}1-A(n,D')\right]. \tag{3}$$

应用 Cauchy 不等式得出

$$V^2\leqslant D_0 V', \tag{4}$$

其中D_0是区间(D)的长度而

$$V'=\sum_{D'\in(D)}\left[\sum_{\nu D+\beta=n}1-A(n,D')\right]^2 \tag{5}$$

是方程(2)的解数的离差．

如果（5）中的求和范围扩展到全部$D\in(D)$，那么在（2）中加于D'的所有附加条件将消失．同时离差值只能递增，因此，

$$V'\leqslant\sum_{D\in(D)\nu}\left[\sum_{D+\beta=n}1-A(n,D)\right]^2=\Sigma_1-2\Sigma_2+\Sigma_3$$

在某些情形下，和式Σ_1，Σ_2及Σ_3可以渐近地计算．Σ_1是离差法中的基本和，它的计算最为困难．借助 **Виноградов 法**（Vinogradov method）对某些函数计算出落入给定区段中分数部分的大小，并利用由代数几何方法得到的三角和的最新估计，可以有效地得到对Σ_1的渐近估计　和式Σ_2和Σ_3的渐近式可由初等求和法求得　如果最终所得离差不太大，那么由（3）和（4）就得到方程（2）的解数的渐近式．

结合所有形式为（2）为方程的解数就产生方程（1）的解数的渐近公式

上述离差法的研讨也可以用来解形如

$$\alpha-\beta=l$$

的方程，其中l是给定的非零整数．

Линник 和其他人（见[3]）用这个方法解决了一系列经典加性问题，而在离差法创立以前只能在直观推断或假设构想的基础上解决．这些问题包括**加性除数问题**（additive divisor problem）（$\alpha=x_1,\cdot,x_k$，$k=$常数，$\beta=xy$），关于除数的 **Titchmarsh 问题**（Titchmarsh problem）（$\alpha=p$是素数，$\beta=xy$），和 **Hardy-Littlewood 问题**（Hardy-Littlewood problem）（$\alpha=p$是素数，$\beta=x^2+y^2$）

离差法也解决了这些问题的某些类似和推广的问题，特别是找到了广义 Hardy-Littlewood 方程（Hardy-Littlewood equation）

$$p+\varphi(\xi,\eta)=n$$

解数的渐近展开式，其中p是素数而$\varphi(\xi,\eta)$是给定的本原正定二次型　关于形式为

$$p=\varphi(\xi,\eta)+l$$

的素数无限集的存在性也被证明了，这里$l\neq0$是任意固定的整数

离差法的应用范围与 Линник 的**大筛法**（large sieve）的应用范围相互交叉．

参考文献

[1] Линник, Ю В, Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л, 1961（英译本 Linnik, Yu V, The dispersion method in binary additive problems, Amer Math Soc, 1963）

[2] Prachar, K, Primzahlverteilung, Springer, 1957.

[3] Бредихин, Б М,《Успехи матем Наук》, **20** (1965), 2, 89－130

[4] Бредихин, Б М, Линник, Ю В, в сб, Актуальные проблемы аналитической теории чисел, Минск, 1974, 5－22

Б М Бредихин 撰　戚鸣皋 译　张明尧 校

弥散点 [**dispersion point**，**дисперсии точка**]

拓扑空间中的一点，它的余集只包含单点连通集．

А А Мальцев 撰

【补注】 即弥散点的余集是**弥散空间** (dispersive space)

罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

方差比 [dispersion proportion, дисперсионное отношение]

见**方差分析** (dispersion analysis).

色散关系 [dispersion relation, дисперсионное соотношение]

将表征粒子散射的某些量与表征其吸收的一些量联系起来的一个关系. 更确切地说, 色散关系是将散射幅 (更一般情况下, **Green 函数** (Green function)) 的实部与其虚部的某类积分联系起来的一个关系. 设函数 $f(t)$ 为在轴上绝对可积的, 并设它满足因果关系 $f(t)=0, t<0$ 于是, 它的 Fourier - Laplace 变换

$$\tilde{f}(\zeta)=\int f(t)e^{i\zeta t}dt, \zeta=p+iq,$$

将是上半平面 $q>0$ 中的一个全纯函数, 并且边界值 $\tilde{f}(p)$ 的实部和虚部将满足色散关系

$$\mathrm{Re}\tilde{f}(p)=\frac{1}{\pi}v_p\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\tilde{f}(p')dp'}{p'-p} \qquad (*)$$

在描述真实物理过程时, 类型 (*) 的色散关系变得更加复杂, 因为函数 $\tilde{f}(\zeta)$ 在无穷处可能像多项式那样增加 (在这个情况得到带减除的色散关系 (dispersion relation with substractions)), 边界值 $\tilde{f}(p)$ 可以是缓慢增长的广义函数, 而变量数可大于 1 (多维色散关系 (multi-dimensional dispersion relations))

参考文献

[1] Боголюбов, Н Н , Медведев, Б В , Поливанов, М К , Вопросы теории дисперсионных соотношений, М , 1958

[2] Владимиров, В С , Обобщенные функции в математической физике, М , 1976 (英译本 Vladimirov, V S , Generalized functions in mathematical physics, MIR, 1979)

[3] Боголюбов, Н Н , Логунов, А А , Оксак, А И , Тодоров, И Т , Обобщенные принципы квантовой теории полей, Наук, Москва, 1987

В С Владимиров 撰

【补注】 这里所定义的这种类型色散关系通常称为 Kramers - Kronig 关系 (Kramers - Kronig relation) 在光的经典色散中, 色散关系给出折射率的实部 (色散) 和虚部 (吸收) 之间的联系.

考虑一个线性波方程, 例如束方程 (beam equation) $\varphi_{tt}+\gamma^2\varphi_{xxxx}=0$ 对于正弦波列 $\varphi(x, t)=A\exp(ik\cdot x-i\omega t)$, 要使它满足这种方程, 频率和波数之间的某个关系 $G(k, \omega)=0$ 必须成立. 在这种情况下, $\omega^2-\gamma^2k^4=0$. 这个关系称为色散关系 (dispersion relation) 对于非线性波方程, 例如 KdV 方程, 推广的色散关系其中还涉及振幅. 关于波的色散关系, 在 [A5] 中有广泛讨论.

参考文献

[A1] Kronig, R , J Opt Soc Amer , 12 (1926), 547

[A2] Kramers, H A , Atti Congr Intern Fisica Como, 2 (1927), 545

[A3] Kampen, N G van, S - matrix and causality condition I , Maxwell fields, Phys Rev , 89 (1953), 1072 - 1079

[A4] Kampen, N G van, S - matrix and causality condition II Nonrelativistic particles, Phys Rev , 91 (1953), 1267 - 1276

[A5] Bremermann, H , Distributions, complex variables, and Fourier transforms, Addison - Wesley, 1965

[A6] Whitham, G B , Linear and nonlinear waves, Wiley, (Interscience), 1974

徐锡申 译

弥散空间 [dispersive space, дисперсное пространство], 遗传不连通空间 (hereditarily disconnected space)

不含多于一点的连通集的拓扑空间.

А А Мальцев 撰

【补注】 一些作者称上述空间为完全不连通的 (totally disconnected) 但是, 通常称一个空间是完全不连通的, 是指对于 X 中所有的 $x\neq y$, 存在一个既闭又开的集合 C, 使得 $x\in C$ 而 $y\notin C$ 闭开集 (closed and open set 或 clopen set)

也见**全不连通空间** (totally - disconnected space).

参考文献

[A1] Kuratowski, K, Topology, Acad Press, 1966 – 1968 (译自法文)

[A2] Arkhangel'skiĭ, A V and Ponomarev, V I, Fundamentals of general topology problems and exercises, Reidel, 1984 (译自俄文)

罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

耗散函数 [dissipative function, диссипативная функция]

用于估计粘性摩擦力对力学系统运动的影响而引入的函数 耗散函数描述系统的机械能下降的速率, 更一般地说, 它还用来考虑有序运动能量向无序运动能量的转变 (最终变为热能)

对于各向同性介质, 单位体积的耗散函数具有如下形式

$$\Phi=\frac{M}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right]^2+ + \left[\eta-\frac{2}{3}\mu\right]\sum_{m=1}^{3}\left[\frac{\partial v_m}{\partial x_m}\right]^2,$$

式中 $\partial v_i/\partial x_k$ 为应变率张量分量, μ 与 η 分别为描述剪切粘性和体积膨胀粘性的粘性系数.

粘性介质中熵变化方程有如下形式

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \Phi,$$

其中 S 为比熵，ρ 是流体密度，T 是流体温度

耗散函数表征连续介质运动时的粘性摩擦．粘性介质运动方程有如下形式

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k},$$

这里 σ_{ik} 为应力张量无摩擦部分的分量，

$$\sigma_{ik} = \mu\left\{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial v_m}{\partial x_m}\delta_{ik}\right\} + + \eta \frac{\partial v_m}{\partial x_m}\delta_{ik}$$

为应力张量"粘性部分"的分量，而

$$\Phi = \sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

为了估计在系统围绕其平衡位置的小振动上阻力的影响，为了研究振动在弹性介质中的衰减，以及为了估计回路系统中电流振荡衰减时的热损失等等，均用到耗散函数．

参考文献

[1] Ландау, Л Д , Лифшиц, Е М , Механика сплошных сред, 2 изд , М , ч 1, § 16, 1954（英译本 Landau, L D , Lifshitz, E M , Fluid mechanics, Pergamon (1959)）

В А Дородницын 撰

【补注】 Newton 流体的应力张量的分量为 $t_{kl} = -\rho\delta_{kl} + \sigma_{kl}$，其中 $-\rho\delta_{kl}$ 为无摩擦部分（在前面称为 σ_{kl}）而 σ_{kl} 为粘性部分

参考文献

[A1] Pai, S I , Viscous flow theory, 1, Laminar flow, v Nostrand, 1956

【译注】

参考文献

[B1] Batchelor, G K , An introduction to fluid mechanics, Cambridge Univ Press, 1967

沈 青 译

耗散算子 [**dissipative operator**; **диссипативный оператор**]

一个定义在 Hilbert 空间 H 中稠密域 D_A 上的线性算子 A，使得

$$\mathrm{Im}(Ax, x) \geqslant 0, \text{ 若 } x \in D_A$$

有时这个要求用条件 $\mathrm{Re}(Ax, x) \leqslant 0$ 对 $x \in D_A$ 来代替，即在这个意义下，A 的耗散性等价于算子 $(-iA)$ 的耗散性．

一个耗散算子称为极大的（maximal），如果它没有真耗散扩张．一个耗散算子总是有闭包，它也是一个耗散算子，特别地，一个极大耗散算子是闭算子 任何耗散算子可以扩张为一个极大耗散算子．对于一个耗散算子，满足 $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$ 的所有点 λ，均属于它的预解集，进而还有

$$\|Ax - \lambda x\| \geqslant |\mathrm{Im}\,\lambda|\,\|x\|, \; x \in D_A$$

一个耗散算子是极大的，当且仅当对所有满足 $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$ 的 λ 有 $(A - \lambda I)D_A = H$ 耗散算子极大性的一个等价条件是它为闭的，且

$$\mathrm{Im}(A^* y, y) \leqslant 0, \; y \in D_{A^*}.$$

如果 A_0 是一个极大**对称算子**（symmetric operator），那么或者 A_0 或者 $-A_0$ 是一个极大耗散算子 对任何对称算子 A_0，可以考虑耗散扩张，特别地，可以考虑极大耗散扩张，而且它们的描述等价于保守算子 $B_0 = iA_0$ $\mathrm{Re}(B_0 x, x) = 0$, $x \in D_B$ 的极大耗散扩张的描述．

耗散算子与压缩（contraction）算子以及所谓的增生算子（accretive operator）有紧密联系，后者是指这样的算子 A，使 iA 是耗散算子．特别地，一个增生算子是极大的，当且仅当 $-A$ 是 H 上一个连续的单参数压缩半群 $\{T_S\}_{S \geqslant 0}$ 的生成算子（或生成元） Cayley 变换

$$T = (A - I)(A + I)^{-1}, \; A = (I + T)(I - T)^{-1}$$

是用来建立极大耗散算子的函数演算的，特别地，是用来建立它们的分数幂理论的，其中 A 是一个极大增生算子，而 T 是一个不以 $\lambda = 1$ 为其本征值的压缩算子．

在有界线性算子 A 的情形下，耗散算子的定义等价于要求 $A_J \geqslant 0$，其中 $A_J = (A^* - A)/2i$ 是算子 A 的虚部 对于可分 Hilbert 空间 H 上具有核型虚部 A_J 的全连续耗散算子 A，它的根向量系完全性的几个判别准则（即必要充分条件）是有效的，例如

$$\sum_{j=1}^{\nu(A)} \mathrm{Im}\,\lambda_j(A) = \mathrm{tr}\,A_J,$$

其中 $\lambda_j(A)$ 是算子 A 的全部本征值，$j = 1, \ldots, \nu(A) \leqslant \infty$，且 $\mathrm{tr}\,A_J$ 是算子 A_J 的迹（Лившиц 准则（Livshits criterion）），

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{n_+(\rho, A_R)}{\rho} = 0 \text{ 或 } \lim_{\rho \to \infty} \frac{n_-(\rho, A_R)}{\rho} = 0,$$

其中 $A_R = (A + A^*)/2$ 是 A 的实部，而 $\eta_\pm$ 是算子 A_R 位于线段 $[0, \rho]$ 及 $[-\rho, 0]$ 中的特征数的个数（Крейн 准则（Kreĭn criterion）） 对应于耗散算子不同本征值 $\lambda_j (j = 1, 2, \ldots)$ 的本征向量系 $\{\varphi_j\}$，构成了它的闭线性包中的一个基，且若

$$\sum_{\substack{j, k=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \lambda_j \operatorname{Im} \lambda_k}{|\lambda_j - \overline{\lambda}_k|} < \infty,$$

则系 $\{\varphi_j\}$ 等价于一个规范正交基

对于非线性算子，甚至对于多值算子 A，也可引进耗散算子的概念 Hilbert 空间上这样的算子称为耗散的，如果对于它的任何两个值，不等式

$$\operatorname{Re}(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2) \leqslant 0$$

成立 这个概念也构成了单参数非线性压缩半群及有关的微分方程的理论基础 耗散算子概念的另一个推广是关于作用在具有所谓半内积的 Banach 空间上的算子的．还有一个推广则是关于作用在**具有不定度规的 Hilbert 空间** (Hilbert space with an indefinite metric)上的算子的

参考文献

[1] Foias, C and Sz - Nagy, B , Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North - Holland, 1970 (译自法文)

[2] Крейн, С Г , Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М , 1967

[3] Ливщиц, М С , 《Матем сб》, **34** (1954), 1, 145 - 199

[4] Phillips, R S , Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, *Trans Amer Math Soc* , **90** (1959), 2, 193 - 254

[5] Crandall, M and Pazy, A , Semi - groups of nonlinear contractions, *J Funct Anal* , **3** (1969), 376 - 418

[6] Lumer, G and Phillips, R , Dissi pative operators in a Banach space, *Pacific J Math* , **11** (1961), 679 - 698

И С Иохвидов 撰

【补注】 对在比 Hilbert 空间的更广的空间上的耗散算子，[A1] 是一篇好的参考文献 对于 Hilbert 空间上的算子，亦见 [A2]

参考文献

[A1] Fattorini, H O , The cauchy problem, Addison - Wesley, 1983, 120 - 125, 154 - 159

[A2] Гохберг, И Ц , Крейн, М Г , Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М , 《Наука》, 1965 (英译本 Gohberg, I C and Kreĭn, M G , Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators, Transl Math Monographs, 18, Amer Math Soc 1969)

王声望 译 郑维行 校

耗散系统 [dissipative system, диссипативная система], *D* 系统 (*D*-system)，极限有界系统 (limit-bounded system)

具有连续右端的常微分方程组

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

它的解 $x(t, t_0, x_0)$ 满足唯一性和可无限向右扩展，并且存在数 $\rho > 0$，使得对任何解 $x(t, t_0, x_0)$ 可以找到时间 $T(t_0, x_0) \geqslant t_0$，对一切 $t \geqslant T(t_0, x_0)$ 有

$$\| x(t, t_0, x_0) \| < \rho$$

换句话说，每一个解迟早要进入固定球 $\|x\| < \rho$ 耗散系统的一个重要的特殊情形是所谓的收敛系统 (systems with convergence)，该系统所有解 $x(t, t_0, x_0)$ 对 $t_0 \leqslant t < \infty$ 有定义，此外在整个 t 轴上存在唯一有界解且是大范围渐近稳定的 这种系统已被详细研究了 (例如见 [1])

参考文献

[1] Плисс, В А , Нелокальные проблемы теории колебаний, М - Л , 1964 (英译本 Pliss, V A , Nonlocal problems of the theory of oscillations, Acad Press, 1966)

[2] Демидович, Б П , Лекции по математической теории устойчивости, М , 1967

К С Сибирский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hale, J K , Ordinary differential equations, Wiley, 1980

周芝英 译 叶彦谦 校

远离动力系统 [distal dynamical system, дистальная динамическая система]

具有一个度量相空间 X 的动力系统 $\{T^t\}$，使对任意两点 $x \neq y$，其距离的下确界

$$\inf_t \rho(T^t x, T^t y) > 0$$

如果某动力系统的一对点 $x \neq y$ 具有这一性质，就说这一对点是远离的 (distal)，因此，远离动力系统就是这样的动力系统，其任何一对点 $x \neq y$ 都是远离的．

当 "时间" t 遍历任意群 G 时，这个定义适用于 "一般" 动力系统 如果 G 是局部紧的 (级联或流，即 $G = \mathbf{Z}$ 或 $G = \mathbf{R}$ 的 "经典" 情形是基本的，然而它们的处理难以简化)，且 X 是紧的，则得到若干有趣的结果 特别有趣的是 X 为**极小集** (minimal set) 的情形 (在某种意义下一般情形都可化为这种情形，因为在上述限制下每条轨道 (的闭包) 都是极小集)．最重要的远离动力系统的例子是由某动力系统的一条殆周期轨道的闭包所生成的系统．第二个例子是零流 ([1])．包括上述二例在内，在这些条件下，对于具有极小集 X 的远离动力系统的构造，可以相当详细地描述其代数特征 ([2])，对于远离动力系统理论及其推广的论述，以及有关文献见 [3]

参考文献

[1] Auslander, L , Green, L and Hahn, F , Flows on homogeneous space, Princeton Univ Press, 1963

[2] Furstenberg, H, The struture of distal flows, *Amer J Math*, **85** (1963), 3, 477-515

[3] Бронштейн, И У, Расширения минимальных групп преобразований, Киш, 1975 Д В Аносов 撰

【补注】在实用上有几种“殆周期轨道”的概念．在上述条款中，**流**（**连续时间动力系统**（flow (continuous-time dynamical system)））中一点的殆周期轨道（almost-periodic trajectory）是使在该点的轨道闭包上，流是等度连续（见**等度连续性**（equicontinuity））的轨道（见[A7]，这种轨道又称为一致殆周期的（uniformly almost-periodic），[3]）

上面提到的 Furstenberg 结构定理（Furstenberg structure theorem）最初是对紧度量空间 X 及任意群 G 上的任意远离极小动力系统证明的　在[A2]中，删去了 X 可度量化的条件　还有所谓 Furstenberg 定理的“相关”形式，适用于紧极小动力系统间的远离态射　X 可度量化或 G 是 σ 紧的情形，见[A1]，(15 4)或[3]，(3 14 22)，一般情形也见[A4]及[A6]　更进一步的推广（例如对点远离态射，所谓 Veech 结构定理（Veech structure theorem））见[3]（3 15 42），[A3]及[A5]

参考文献

[A1] Ellis, R, Lectures on topological dynamics, Benjamin, 1969

[A2] Ellis, R, The Furstenberg structure theorem, *Pacific J Math*, **76** (1978), 345-349

[A3] Ellis, R, The Veech structure theorem, *Trans Amer Math Soc*, **186** (1973), 203-218

[A4] Ihrig, E and McMahon, D, On distal flows of finite codimension, *Indian Univ Math J*, **33** (1984), 345-351

[A5] McMahon, D and Nachman, L J, An intrinsic characterization for PI-flows, *Pacific J Math*, **89** (1980), 391-403

[A6] McMahon, D and Wu, T S, Distal homomorphisms of non-metric minimal flows, *Proc Amer Math Soc*, **82** (1981), 283-287

[A7] Nemytskiǐ, V V and Stepanov, V V, Qualitative theory of differential equations, Princeton Univ Press, 1960 (译自俄文)　罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

畸变定理 [**distortion theorems, искажения теоремы**]，*在平面区域共形映射下的*

表征在**共形映射**（conformal mapping）下区域给定点处线素的畸变、区域及其子集的畸变以及区域边界的畸变的各种定理．在区域给定点的解析函数导数模的估计是首要的畸变定理．对于 $|\zeta|>1$ 内亚纯单叶函数

$$F(\zeta)=\zeta+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{\zeta}+$$

组成的类 Σ 中的函数，对所有的 $\zeta_0, 1<|\zeta_0|<\infty$，不等式

$$1-\frac{1}{|\zeta_0|^2}\leqslant|F'(\zeta_0)|\leqslant\frac{|\zeta_0|^2}{|\zeta_0|^2-1}\qquad(1)$$

成立．这一命题就是一个畸变定理．

(1)的左边的等号仅对于函数

$$F_1(\zeta)=\zeta+\alpha_0+\zeta_0(\overline{\zeta_0}\zeta)^{-1}$$

才成立，而其右端等号仅对于函数

$$F_2(\zeta)=\frac{\zeta-\zeta_0}{1-(\overline{\zeta}_0\zeta)^{-1}}+\beta_0$$

才成立　此处 α_0 和 β_0 是两个任意固定的数　函数 $w=F_1(\zeta)$ 把区域 $|\zeta|>1$ 映射成以连接点 $\alpha_0-2\zeta_0/|\zeta_0|$ 和 $\alpha_0+2\zeta_0/|\zeta_0|$ 的区间为割线的 w 平面　函数 $w=F_2(\zeta)$ 把区域 $|\zeta|>1$ 映射成以圆周 $|w-\beta_0|=|\zeta_0|$ 上具有中点 $\beta_0-\zeta_0$ 的一段弧为割线的 w 平面．不等式（1）容易由 Grunsky 不等式（Grunsky inequality）

$$|\ln F'(\zeta_0)|\leqslant-\ln\left[1-\frac{1}{|\zeta_0|^2}\right]$$

得到，后者确定了类 Σ 上泛函 $\ln F'(\zeta_0)$ 的值域．另一方面，不等式（1）是如下 Голузин 定理（Goluzin theorem）的直接推论　若 $F(\zeta)\in\Sigma$，则对于任何满足 $|\zeta_1|=|\zeta_2|=\rho\,(1<\rho<\infty)$ 的两点 ζ_1,ζ_2，有精确的不等式

$$\left|\ln\frac{F(\zeta_1)-F(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\right|\leqslant-\ln\left[1-\frac{1}{\rho^2}\right],\qquad(2)$$

且仅对于函数 $F(\zeta)=\zeta+e^{i\alpha}/\zeta$，其等号成立，其中 α 是实常数．不等式（2）亦蕴涵弦畸变定理（chord-distortion theorem，见[1]）　若 $F(\zeta)\in\Sigma$，则对于圆周 $|\zeta|=\rho>1$ 上任何两点 ζ_1,ζ_2，有精确不等式

$$\left|\frac{F(\zeta_1)-F(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\right|\geqslant1-\frac{1}{\rho^2}.$$

在此情形下，仅对于函数

$$F(\zeta)=\zeta+C+\frac{e^{2i\varphi}}{\zeta},$$

其等号成立，其中 C 是常数，$\varphi=(\arg\zeta_1+\arg\zeta_2)/2$　已知（2）有种种推广形式　这些结果给出相应泛函的值域，并且是关于 Σ 或它的子类的畸变定理的精确形式（例如见[1]）

在圆盘 $|z|<1$ 内正则单叶函数

$$f(z)=z+c_2z^2+$$

的类 S 中，对于 $0<|z_0|<1$，有下列精确不等式

$$\frac{1-|z_0|}{(1+|z_0|)^3}\leqslant|f'(z_0)|\leqslant\frac{1+|z_0|}{(1-|z_0|)^3},\qquad(3)$$

$$\frac{|z_0|}{(1+|z_0|)^2}\leqslant|f(z_0)|\leqslant\frac{|z_0|}{(1-|z_0|)^2},\qquad(4)$$

$$\frac{1-|z_0|}{1+|z_0|} \leqslant \left|\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\right| \leqslant \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|} \qquad (5)$$

估计式 (4) 和 (5) 由 (3) 推出 不等式 (3)－(5)称为类 S 的畸变定理．其下界仅由函数

$$f_\alpha(z) = \frac{z}{(1-e^{-i\alpha}z)^2}$$

达到，而其上界仅由函数

$$f_{\pi+\alpha}(z) = \frac{z}{(1-e^{-i\alpha}z)^2}$$

达到，其中 $\alpha=\arg z_0$ 函数 $w=f_\alpha(z)(0\leqslant\alpha<2\pi)$称为Koebe函数 (Koebe functions)，它把圆盘 $|z|<1$ 映射成沿射线 $\arg w=\alpha$, $|w|\geqslant\frac{1}{4}$ 切开的 w 平面 它们是单叶函数理论中一系列问题的极值函数 Koebe $\frac{1}{4}$ 定理 (Koebe $\frac{1}{4}$-theorem) 断言 作为圆盘 $|z|<1$ 在映射 $w=f(z)$, $f\in S$ 下的象的区域必包含圆盘 $|w|<\frac{1}{4}$，且仅当 $f(z)=f_\alpha(z)$ 时点 $w=e^{i\alpha}/4$ 位于该区域的边界上

估计式 (3)－(5) 又是关于类 S 上泛函

$$\ln f'(z_0),\quad \ln\frac{f(z_0)}{z_0},\quad \ln\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}$$

的值域的结果的简单推论 (见[2])

设 Σ_0 是满足对于 $1<|\zeta|<\infty$, $F(\zeta)\neq0$ 的函数 $F(\zeta)\in\Sigma$ 的类．在属于 S 和 Σ_0 的函数之间有下述关系 若 $f(z)\in S$, 则 $F(\zeta)=1/f(1/\zeta)\in\Sigma_0$, 反之，若 $F(\zeta)\in\Sigma_0$, 则 $f(z)=1/F(1/z)\in S$ 因此，S 上某个泛函 (或泛函组) 的值域可由 Σ_0 上相应的泛函 (或泛函组) 的值域确定，反之亦然．例如，S 上 $\ln f(z_0)/z_0$ $(0<|z_0|<1)$ 的值域容易由 Σ_0 上 $\ln F(\zeta_0)/\zeta_0 (1<|\zeta_0|<\infty)$ 的值域得到

对于圆盘内的有界正则函数，**Schwarz 引理** (Schwarz lemma，见[1]) 及其推广，以及下述的 Löwner 边界畸变定理 (boundary-distortion theorem) 是畸变定理的例子 Löwner 定理为 若 $|z|<1$ 内正则函数 $\varphi(z)$ 满足 $\varphi(0)=0$, 在 $|z|<1$ 内 $|\varphi(z)|<1$, 且在 $|z|=1$ 的一个圆弧 A 上 $|\varphi(z)|=1$, 则 A 的象的长度不会小于 A 本身的长度，且仅当 $\varphi(z)=e^{i\alpha}z$ (α 是实数) 时相等

对于给定多连通域内的单叶函数类，区域内指定一点处导数的最小模 (最大模) 仅对于该区域到径向裂纹区域 (同心圆弧裂纹区域) 的映射达到 对于无界映射有如下定理 设 D 是 ζ 平面内含有无穷远点的有限连通域，设 $\Sigma(D)$ 是满足下述条件的 D 内单叶函数 $F(\zeta)$ 构成的函数类 在 $\zeta=\infty$ 的邻域内它具有展开式

$$F(\zeta) = \zeta+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{\zeta}+\quad,$$

设 $\zeta_0\neq\infty$ 是 D 内一点．设 $F_0(\zeta)$ 是 $\Sigma(D)$ 中的函数，$F_\theta(\zeta_0)=0$, 且把 D 映射成具有沿对数螺线的一些弧的裂纹的平面，这些对数螺线同从原点发出的射线交成 θ 角 (取 $-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ 即可，当 $\theta=0$ 时，对数螺线退化为从原点发出的射线，而当 $\theta=\pm\pi/2$ 时，则退化为以原点为心的圆周) 令

$$p(\zeta)=\sqrt{F_0(\zeta)F_{\pi/2}(\zeta)}\ ,\qquad q(\zeta)=\sqrt{\frac{F_0(\zeta)}{F_{\pi/2}(\zeta)}}\ ,$$

此处取定平方根的分支使 $p(\zeta)$ 和 $q(\zeta)$ 在 $\zeta=\infty$ 邻域内 Laurent 展开式的第一个系数为 1 则在 $\Sigma(D)$ 上 $\ln F'(\zeta_0)$ 的值域是由下式定义的圆盘

$$|\ln F'(\zeta_0)-\ln p'(\zeta_0)|\leqslant-\ln q(\zeta_0),$$

此处对应于每个边界点唯有函数 $F(\zeta)=F_\theta(\zeta)+C$, θ 是适当的值，C 是常数 特别有精确的不等式

$$|F_0'(\zeta_0)|\leqslant|F'(\zeta_0)|\leqslant|F_{\pi/2}'(\zeta_0)|,$$
$$\arg F_{\pi/4}'(\zeta_0)\leqslant\arg F'(\zeta_0)\leqslant\arg F_{-\pi/4}'(\zeta_0)$$

参考文献

[1] Голузин, Г М, Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд, М, 1966 (中译本 Г М 戈鲁辛，复变函数的几何理论，科学出版社，1956)

[2] Jenkins, J J, Univalent functions and conformal mappings, Springer, 1958

[3] Черников, В В, в кн, Итоги исследований по математике и механике за 50 лет 1917－1967, Томск, 1967, 23－51

[4] Базилевич, И Е, в кн, 《Математика в СССР за 40 лет》, М, 1959, 444－472

[5] Белинский, П П Общие свойства квазиконформных отображений, Новосиб, 1974

[6] Kuhnau, R, Verzerrungssatze und Koeffizientenbedingungen vom Grunskyschen Typ fur quasikonforme Abbildungen *Math Nachrichten*, **48** (1971), 77－105

Е Г Голузина 撰

【补注】 其他的畸变定理有例如 **Landau 定理** (Landau theorems)，Bloch 定理 (见 **Bloch 常数** (Bloch constant)) 和 **Pick 定理** (Pick theorem)

参考文献

[A1] Duren, P L, Univalent functions, Springer, 1983

[A2] Pommerenke, Ch, Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht, 1975 (中译本 Ch 泊茂仁克，单叶函数，科学出版社，1987)

杨维奇 译

分布 [**distribution**, **распределение**]
同**广义函数** (generalized function)

分布函数 [**distribution function**, **распределения функция**]，随机变量 X 的

实变量 x 的函数，在每个 x 处的值等于不等式 $X<x$ 的概率．

每一个分布函数 $F(x)$ 具有以下性质

1) $F(x')\leqslant F(x'')$，当 $x'<x''$ 时;

2) 在每个 x 处 $F(x)$ 是左连续的,

3) $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$，$\lim_{x\to\infty}F(x)=1$.

(有时分布函数定义作 $X\leqslant x$ 的概率，那么它就是右连续的).

在数学分析中，分布函数是满足1)－3)的任意函数．在实值线 $\mathbf{R}^1$ 的 Borel 子集的 σ 代数 $\mathscr{B}$ 上的概率分布 P_F 和分布函数 F 之间存在一一对应．这个对应如下 对任意区间 $[a, b]$,

$$P_F([a, b))=F(b)-F(a)$$

任何满足1)－3)的函数 F 可以看作定义在概率空间 $(\mathbf{R}^1, \mathscr{B}, P_F)$ 上的某一随机变量 X(例如，$X(x)=x$)的分布函数.

任一分布函数可以唯一地写作和式

$$F(x)=a_1F_1(x)+a_2F_2(x)+a_3F_3(x),$$

其中 a_1, a_2, a_3 是非负数，其和为1，F_1, F_2, F_3 是分布函数，使得 $F_1(x)$ 是绝对连续的.

$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x}p(z)dz,$$

$F_2(x)$ 是"跳跃函数"，

$$F_2(x)=\sum_{x_k<x}p_k,$$

这里 x_k 是 $F(x)$ 的跳跃点且 $p_k>0$，与 $F(x)$ 在这些点处的跳跃值成比例，$F_3(x)$ 是"奇异"部分 — 它是一个连续函数，其导数几乎处处为零

例 设 $X_k(k=1, 2, \quad)$ 是一个独立随机变量的无穷序列，X_k 取值为1和0的概率分别为 $0<p_k\leqslant\frac{1}{2}$ 和 $q_k=1-p_k$ 再设

$$X=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k}{2^k},$$

于是

1) 如果对所有 k，$p_k=q_k=\frac{1}{2}$，则 X 有绝对连续的分布函数(具有 $p(x)=1$，对一切 $0\leqslant x\leqslant 1$，即 X 在 $[0, 1]$ 上均匀分布),

2) 如果 $\sum_{k=1}^{\infty}p_k<\infty$，则 X 具有"跳跃"分布函数(它在 $[0, 1]$ 上所有二进制有理点跳跃),

3) 如果 $\sum_{k=1}^{\infty}p_k=\infty$，且当 $k\to\infty$ 时 $p_k\to 0$，则 X 具有"奇异"分布函数

这个例子是P Lévy 定理的一个例证．他断言无穷多个离散分布函数的卷积的极限只能含有上述三个组成部分之一.

实直线上两个分布 P 和 Q 之间的"距离"，常用相应的分布函数 F 和 S 来定义，例如，令

$$\rho_1(P, Q)=\sup_x|F(x)-S(x)|$$

或

$$\rho_2(P, Q)=\mathrm{Var}[F(x)-S(x)]$$

(见**分布的收敛**(distributions, convergence of)，**Lévy 度量**(Lévy metric)，**特征函数**(characteristic function))

最常用的概率分布(例如正态、二项和 Poisson 分布)的分布函数已经制成了表.

为了用独立观测的结果检验关于分布函数 F 的假设，可以使用 F 与经验分布的偏差的某种度量(见**Колмогоров 检验**(Kolmogorov test)，**Колмогоров-Смирнов 检验**(Kolmogorov-Smirnov test)，**Cramér-von Mises 检验**(Cramér-von Mises test))

分布函数的概念可以自然地推广到多维情形，但比起一维分布函数来重要性差一些.

分布函数的一个更细致的处理见**Gram-Charlier 级数**(Gram-Charlier series)，**Edgeworth 级数**(Edgeworth series)；**极限定理**(limit theorems)

参考文献

[1] Cramér, H , Random variables and probability distributions, Cambridge Univ Press, 1970

[2] Cramér, H , Mathematical methods of statistics, Princeton Univ Press, 1946(中译本 H 克拉默，统计学的数学方法，上海科学技术出版社，1966)

[3] Feller, W, An introduction to probability theory and its applications, 1－2, Wiley, 1957－1971(中译本 W 费勒，概率论及其应用，科学出版社，上册，1964，下册 1979)

[4] Большев, Л Н , Смирнов, Н В , Таблицы математической статистики, 2 изд М , 1968

Ю В Прохоров 撰

【补注】 在俄文文献中分布函数是左连续的，而在西文文献中一般定义为右连续的．于是，随机变量 X 的分布函数定义为 $F(x)=\mathrm{P}(X\leqslant x)$，它具有性质1)，2')对每个 x，$F(x)$ 是右连续的，3)相应于分布函数 F 的唯一的概率分布 P_F 定义为

$$P_F((a, b])=F(b)-F(a),$$

而在上述分解 $F=a_1F_1+a_2F_2+a_3F_3$ 中的"跳跃函数" $F_2(x)$ 是

$$F_2(x)=\sum_{x_k\leqslant x}p_k$$

参考文献

[A1] Johnson, N L and Kotz, S , Distributions in statistics, Houghton-Miflin, 1970

刘秀芳 译

分布律 [**distribution law, распределения закон**]，概率论中的

一种方便的、描述性术语，(根据上下文)用来表示一个随机变量的**概率分布**(probability distribution)，相应的**分布函数**(distribution function)或者**概率分布**

的密度（density of a probability distribution）

Ю В Прохоров 撰 刘秀芳 译

模 1 分布 [distribution modulo one, распределение дробных долей]

在单位区间 $[0,1]$ 上，实数序列 α_j $(j=1,2,\ \ )$ 的分数部分 $\{\alpha_j\}$ 的分布 分数部分序列 $\{\alpha_j\}$ $(j=1,2,\ \ )$，称为在 $[0,1)$ 上一致分布的（uniformly distributed），如果对任何区间 $[a,b)\subset[0,1)$，等式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_n(a,b)}{n}=b-a$$

成立，其中 $\varphi_n(a,b)$ 是 $\{a_j\}$ $(j=1,2,\ \ )$ 中前 n 个数落入 $[a,b)$ 的个数 这种情形下，序列 α_j $(j=1,2,\ \ )$，被称为模 1 一致分布的（uniformly distributed modulo one）.

模 1 一致分布的 Weyl 准则（Weyl criterion）（见 [1]） 一个无穷分数部分序列 $\{\alpha_j\}$ $(j=1,2,\ \ )$ 在单位区间 $[0,1)$ 上是一致分布，当且仅当对 $[0,1)$ 上任意 Riemann 可积函数 f 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(\{\alpha_j\})=\int_0^1 f(x)\,dx$$

这与下面的叙述等价．序列 α_j $(j=1,2,\ \ )$ 是模 1 一致分布，充分必要条件是，对任意整数 $m\neq0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}e^{2\pi i m\alpha_j}=0$$

从 Weyl 准则和他的关于含有多项式 f 的三角和

$$\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i f(x)}$$

的估计可以推出 分数部分序列 $\{f(n)\}$ $(n=1,2,\ \ )$ 在 $[0,1)$ 上是一致分布的，只需假定多项式

$$f(x)=a_k x^k+\ \ +a_1x$$

的系数 a_s $(1\leqslant s\leqslant k)$ 至少有一个是无理数

模 1 一致分布的概念可以通过量

$$D_n=\sup_{0\leqslant a\leqslant b\leqslant 1}\left|\frac{\varphi_n(a,b)}{n}-(b-a)\right|$$

来实现定量化，D_n 称为序列 $\{\alpha_j\}$ $(j=1,2,\ \ )$ 前 n 个数的**偏差**（discrepancy）（见 [2]，[3]）.

参考文献

[1] Weyl, H, Ueber die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins, *Math Ann* **77** (1916), 313－352

[2] Виноградов, И М, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М, 1971（英译本 Vinogradov, I M, The method of trigonometric sums in the theory of numbers, Interscience, 1954）

[3] Hua, L-K, Abschatzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, in Enzyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen Vol 1, 1959, Heft 13, Teil 1（中译本 华罗庚，指数和的估计及其在数论中的应用，科学出版社，1963）

С А Степанов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hlawka, E, Theorie der Gleichverteilung, B I－Wissenschaftverlag, 1979

[A2] Kuipers, L and Niederreiter, H, Uniform distribution of sequences, Wiley, 1974

徐广善 译 潘承彪 校

高维的模 1 分布 [distribution modulo one, higher-dimensional, распределение дробных долей многомерное]

在 n 维 Euclid 空间的单位立方体 $E=(0\leqslant x_i<1, i=1,\ \ ,n)$ 中，n 维元素序列 $P_j=(x_1^{(j)},\ \ ,x_n^{(j)})$ 的分数部分 $\{P_j\}=(\{x_1^{(j)}\},\ \ ,\{x_n^{(j)}\})$ 的分布，这里，$\{\ \}$ 记为数的分数部分

序列 $\{P_j\}$ $(j=1,2,\ \ )$ 称为 E 中的一致分布的（uniformly distributed），如果对任意长方体 $V\subset E$，等式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_m(V)}{m}=|V|$$

成立，其中 $\varphi_m(V)$ 表示序列的前 m 个落入 V 中的个数，$|V|$ 表示 V 的度量

序列 P_j $(j=1,2,\ \ )$ 被称为模 1 一致分布的（uniformly distributed modulo one），如果相应的分数部分序列 $\{P_j\}$ 在 E 中一致分布．

高维模 1 分布的 Weyl 准则（Weyl criterion for higher-dimensional distribution modulo one）. 序列 $\{P_j\}$ $(j=1,2,\ \ )$ 在 E 中一致分布，当且仅当对任意整数点 $(a_1,\ \ ,a_n)\neq(0,\ \ ,0)$ 有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}e^{2\pi i(a_1x_1^{(j)}+\ \ +a_nx_n^{(j)})}=0$$

实数序列为模 1 一致分布的 **Weyl 准则**（Weyl criterion）是这个定理的特殊情形 Weyl 准则包含了下面的 Kronecker 定理（Kronecker theorem） 设实数组 $\theta_1,\ \cdot\ ,\theta_n$，1 在有理数域上线性无关，$\alpha_1,\ \ ,\alpha_n$ 是任意实数组且 N 及 ε 是正常数，那么存在整数 m 和 $p_1,\ \ ,p_n$，使得

$$m>N,\ |m\theta_i-p_i-\alpha_i|<\varepsilon,\ i=1,\ \ ,n.$$

换言之，序列 $m\theta=(m\theta_1,\ \ ,m\theta_n)$ $(m=1,2,\ \ )$ 是模 1 一致分布的．

参考文献

[1] Cassels, J W S, An introduction to diophantine approximation, Cambridge Univ Press, 1957

С А Степанов 撰

【补注】 增加的参考文献见**模 1 分布**(distribution modulo one)

【译注】 高维模 1 一致分布序列在高维数值积分上有很多应用[B1].

参考文献

[B1] 华罗庚、王元，数论在近似分析中的应用，科学出版社，1978

徐广善 译 潘承彪 校

幂剩余和非剩余的分布 [distribution of power residues and non-residues, распределение степенных вычетов и невычетов]

在数 1, , $m-1$ 中，使得同余方程

$$y^n \equiv x(\bmod m)$$

在整数中可解（或不可解）的值 x 的分布 在模为素数 p 的情形下，对幂剩余和非剩余的分布问题已经作了最充分的研究．设 $q=$g c d $(n, p-1)$ 那么，同余方程 $y^n \equiv x(\bmod p)$ 对集合 1, , $p-1$ 中的 $(p-1)/q$ 个值 x 可解，而对其余的 $(q-1)(p-1)/q$ 个值不可解(见**二项同余式**(two-term congruence))．但是，对这些值在数 1, , $p-1$ 中如何分布知道得比较少

关于幂剩余的第一个结果是 C F Gauss(见[1])在 1796 年得到的．从那时起，直到 И М Виноградов 的工作之前，关于幂剩余和非剩余的分布问题只是得到了一些孤立的特殊的结果．1915 年 Виноградов（见[2]）对幂剩余和非剩余的分布，及在数 1, , p 中模 p 的**原根**（primitive root）得到了一系列一般的结果．特别地，对模 p 的最小二次非剩余 $N_{\min}$ 得到了上界估计

$$N_{\min} < p^{1/(2\sqrt{e})}\ (\ln p)^2\ ,$$

以及对模 p 的最小原根 $N^*_{\min}$ 得到了上界估计

$$N^*_{\min} \leqslant 2^{2k}\sqrt{p}\ \ln p\ ,$$

其中 k 是 $p-1$ 的不同的素因数的个数

此外，他对二次剩余和非剩余的分布提出了一些假设（见 **Виноградов 假设**（Vinogradov hypotheses)），这推动了这一领域内的一系列研究 Ю В. Линник([3])证明了 对充分大的 N, 在区间 $[N^\varepsilon, N]$ 中 $N_{\min} > p^\varepsilon$ 的素数 p 的个数不超过某个仅与 $\varepsilon>0$ 有关的常数 $C(\varepsilon)$．这样，使得 $N_{\min} > p^\varepsilon$ 的素数 p(如果存在的话) 是非常稀少的．关于 Виноградов 假设的工作的另一有意义的一步是 D A Burgess([4])的定理 对任意给定的充分小的 $\delta>0$, 相邻的二次非剩余之间的最大距离 $d(p)$ 满足不等式

$$d(p) \leqslant A(\delta)\, p^{1/4+\delta}$$

特别地，可推出

$$N_{\min} \leqslant B(\delta)\, p^{1/(4\sqrt{e})+\delta}\ .$$

在这些不等式中，常数 $A(\delta)$, $B(\delta)$ 仅依赖于 δ，而和 p 无关．Burgess 定理的证明是十分复杂的，它基于关于超椭圆同余方程

$$y^2 \equiv f(x)\ (\bmod p)$$

的解数的 Hasse-Weil 定理，这定理的证明需要抽象代数几何的技巧 关于 Burgess 定理的简单说明见[5]，[6]．

参考文献

[1] Gauss, C F , Untersuchungen über hohere Arithmetik, A Maser, 1889
[2] Виноградов, И М , Избранные труды, М , 1952 (英译本 Vinogradov, I M , Selected works, Springer, 1985)
[3] Линник, Ю В , 《Докл АН СССР》, **36**(1942), 131
[4] Burgess, D A , The distribution of quadratie residues and non-residues, Mathematika, **4**(1957), 8, 106 - 112
[5] Степанов, С А , 《Тр Матем ин-та АН СССР》, **132** (1973), 237 - 246
[6] Карацуба, А А , 《Докл АН СССР》, **180**(1968), 6, 1287 - 1289

С А Степанов 撰 潘承彪 译 戚鸣皋 校

素数分布 [distribution of prime numbers, распределение простых чисел]

数论的一个分支，研究素数在自然数中的分布规律 中心问题是寻求当 $x\to\infty$ 时函数 $\pi(x)$ 和 $\pi(x; d, l)$ 的最佳渐近表示，其中 $\pi(x)$ 是不超过 x 的素数的个数，$\pi(x, d, l)$ 是在算术级数 $dn+l\,(1\leqslant l\leqslant d, n=1, 2, \cdot)$ 中不超过 x 的素数的个数，d 的取值可随 x 而增加．

算术基本定理(fundamental theorem of arithmetic) 任何自然数 $n>1$ 或者是素数，或者是一个唯一的(不计因子的排列)乘积

$$n=p_1^{n_1}\quad p_k^{n_k}$$

(所谓 n 的典范表示(canonical representation))，其中 p_1, , p_k 是不同的素数，而 n_1, , n_k 是自然数．因此素数组成了自然数集的乘法基．虽然这些丝毫未涉及 $\pi(x)$ 的值

用来寻找 1 到 x 之间的素数的一个方法是公元前三世纪就已知道的 **Eratosthenes 筛法**（Eratosthenes, sieve of)．Eratosthenes 筛法是获得素数序列的最简单的步骤．但是它的解析式

$$\pi(x)-\pi(\sqrt{x})+1=\sum_d(-1)^{\nu(d)}\left[\frac{x}{d}\right]$$

对于研究当 $x\to\infty$ 时的 $\pi(x)$ 并不很适用，其中 d 的取值为所有 $\leqslant\sqrt{x}$ 的素数乘积的因数，$\nu(d)$ 是 d 的素因子的个数，而 $[u]$ 是 u 的整数部分

考察从 1 到 x 之间的素数序列·

$$2,3,5,7,11,13,\quad ,p, \qquad (1)$$

显示随 x 的增加平均来说素数愈来愈稀疏　自然数列中存在任意长的一段不包含素数　例如，对任意 $n\geqslant 2$，形如 $n!+2,\ \cdot, n!+n$ 的 $n-1$ 个数全都是合数．同时在(1)中有相差为2的素数（**孪生素数**(twins)），如8004119和8004121．当 $x\to\infty$ 时 $\pi(x)$ 的性态是数论中最困难但又最感兴趣的问题之一．

第一个关于 $\pi(x)$ 的结果是Euclid定理(Euclid theorem)　当 $x\to\infty$ 时，$\pi(x)\to\infty$　Euler(1737, 1749, 见[1])引进函数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \qquad (2)$$

并且证明当 $s>1$ 时

$$\zeta(s)=\prod_p\left[1-\frac{1}{p^s}\right]^{-1}. \qquad (3)$$

这里的级数遍历全部自然数，而乘积遍历全部素数　恒等式(3)及其推广在素数分布理论中起着主要的作用　基于这一恒等式，Euler证明了级数 $\sum 1/p$ 和乘积 $\prod(1-1/p)^{-1}$ 遍历素数序列时发散　这是素数集为无限集的另一证明．此外，Euler还证明了

$$\pi(x)>\log\frac{x}{e}\quad,$$

这表明存在着"很多"的素数，虽然在

$$\frac{\pi(x)}{x}\to 0,\quad x\to\infty,$$

这个意义上讲，几乎全部自然数是合数

随后，П Л Чебышев(1851－1852，见[2])取得了重大的成就　他证明了

1) 对任意 $m, M>0$，存在序列 $x, y\to\infty$ 使得

$$\pi(x)-\mathrm{li}\,x<Mx\log^{-m}x,$$

$$\pi(y)-\mathrm{li}\,y>-My\log^{-m}y,$$

2) 如果商 $(\pi(x)\log x)/x$ 当 $x\to\infty$ 时收敛，那么极限等于1．

这样就第一次解决了一个简单函数

$$\mathrm{li}\,x\equiv\int_2^x\frac{du}{\log u}=\frac{x}{\log x}+\quad+\frac{(r-1)!\,x}{\log^r x}+O\left[\frac{x}{\log^{r+1}x}\right]$$

的存在问题，这个函数是 $\pi(x)$ 的最佳近似

然后，П Л Чебышев又确定了 $\pi(x)$ 增长的真正的阶，就是　存在常数 $a>0$ 和 $A>0$，使得

$$a\frac{x}{\log x}<\pi(x)<A\frac{x}{\log x}, \qquad (4)$$

值得注意的是，当 $x\geqslant x_0$ 时有 $a=0\ 92$　, $A=1\ 05$　．他还证明了对任意 $n\geqslant 2$，在区间 $(n,2n)$ 中至少含有一个素数（Bertrand假设(Bertrand postulate)）．(4)的证明基于Чебышев恒等式(Chebyshev identity)

$$F(x)\equiv\log[x]!=\sum_{n\leqslant x}\psi\left[\frac{x}{n}\right], \qquad (5)$$

其中由Чебышев引进的函数 ψ 是由遍历全部素数幂 p^m $(m\in\mathbf{N})$ 的和式

$$\psi(x)=\sum_{p^m\leqslant x}\log p=\sum_{n<x}\Delta(n)$$

定义的　如果 $x\geqslant 30$　下面 $\log[u]!$ 的组合，

$$F^*(x)=F(x)+F\left[\frac{x}{30}\right]-F\left[\frac{x}{2}\right]-F\left[\frac{x}{3}\right]-F\left[\frac{x}{6}\right],$$

由于(5)而给出恒等式

$$F^*(x)=\psi(x)-\psi\left[\frac{x}{6}\right]+\psi\left[\frac{x}{7}\right]-\psi\left[\frac{x}{10}\right]+\quad,$$

由此得到

$$\psi(x)-\psi\left[\frac{x}{6}\right]<F^*(x)<\psi(x).$$

借助于对 $n!$ 的Stirling渐近公式，由上式可得到关于 $\psi(x)$ 的类似(4)的不等式，由它再用部分求和就可得到(4)．在研究素数分布时已经证明用Чебышев函数 $\psi(x)$ 比函数 $\pi(x)$ 更为方便，因为它的最佳逼近就是自变量 x 本身．因此，通常首先考虑 $\psi(x)$，然后用部分求和得出关于 $\pi(x)$ 相应的结果

Riemann原理(Riemann principle)　B Riemann([3])于1859－1860年考虑把由Euler引进的当 $s>1$ 的函数 $\zeta(s)$ 作为复变量 $s=\sigma+it$ 的函数，在 $\sigma>1$ 时由(2)定义，其中 σ 和 t 是实变量（见 **ζ 函数**(zeta-function)），并发现这个函数在素数分布理论中极其重要．特别地，他发现了由 x 和 $\zeta(s)$ 在带形 $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ 内的零点来表示差 $\pi(x)-\mathrm{li}\,x$ 的一个表达式，这些零点称作 $\zeta(s)$ 的非平凡零点(non-trivial zero)

常用的不是Riemann公式，而是对 $\psi(x)$ 的更简单的有限类似公式，这公式是由H (von) Mangoldt于1985年（与Riemann公式一起）证明的．即对 $x>1$ 有

$$\psi(x)=x-\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{x^\rho}{\rho}+O\left[\frac{x}{T}\log^2 xT+\log 2x\right], \qquad (6)$$

其中 $\rho=\beta+i\gamma$ 取遍 $\zeta(s)$ 的非平凡零点，而 $T\geqslant 2$ 是任意的．

因为

$$\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{1}{\gamma}\ll\log^2 T,$$

所以公式(6)表明差 $\psi(x)-x$ 主要由 β（最右端零点 ρ 的实部）决定．特别地，如果在垂直线 $\sigma=\theta$ $(1/2\leqslant\theta<1)$ 的右边 $\zeta(s)\neq 0$，那么下面的关于 $\psi(x)$ 和 $\pi(x)$ 的渐近表达式成立

$$\psi(x)=x+O(x^\theta\log^2 x),$$

$$\pi(x)=\mathrm{li}\,x+O(x^\theta\log x)$$

反之，也可由这些关系式得知，当 $\sigma\geqslant\theta$ 时，$\zeta(s)\neq0$．如果 Riemann 假设成立，也就是如果 $\zeta(s)$ 的全部非平凡零点在直线 $\sigma=1/2$ 上，则素数的渐近分布规律有如下形式

$$\psi(x)=x+O(\sqrt{x}\ \log^2 x),$$

$$\pi(x)=\mathrm{li}\,x+O(\sqrt{x}\ \log x),$$

并且这些关系式已不可能再有实质上的加强．后者的意思是指 存在序列 $x,\ y\to\infty$，使得

$$\pi(x)-\mathrm{li}\,x<-\sqrt{x}\ \frac{\log\log\log x}{\log\log x},$$

$$\pi(y)-\mathrm{li}\,y>+y\ \frac{\log\log\log y}{\log\ \log y}.$$

因此，由 Riemann 原理，关于 $\psi(x)$ 和 $\pi(x)$ 的渐近表示式的问题可归结为 $\zeta(s)$ 的非平凡零点实部的界限问题．但是迄今（1983）没有找到满足条件 $\beta<\theta$ 的常数 $\theta\,(1/2\leqslant\theta<1)$．对 β 期望的界限变成与零点 ρ 的虚部 γ 有关，并且以直线 $\sigma=1$ 为其渐近线

Hadamard 法（Hadamard method）和 de la Vallée-Poussin 法（de la Vallée-Poussin method） 素数的渐近分布规律的最简单形式

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}=1$$

是由 J. Hadamard 和 Ch J. de la Vallée-Poussin 于 1896 年互相独立地得到的，他们证明了 $\zeta(1+it)\neq0$，即在直线 $\sigma=1$ 上无 $\zeta(s)$ 的零点 1899 年 de la Vallée-Poussin 证明了在区域 $\sigma\geqslant1-c/\log(|t|+2)$ 内 $\zeta(\sigma+it)\neq0$．从而证明了

$$\psi(x)=x+O(x\exp(-a\sqrt{\log x})),$$

$$\pi(x)=\mathrm{li}\,x+O(x\exp(-b\sqrt{\log x})),$$

其中 $a,b>0$ 是常数

$\zeta(s)$ 的无零点区域的进一步扩展也已经得到（见 [4]－[12]）．

Weyl-Littlewood 法（Weyl-Littlewood method） $\zeta(s)$ 的模的增长与它在直线 $\sigma=1$ 附近的零点之间有某种联系．特别地，如果当 $1-\theta(t)\leqslant\sigma\leqslant2$ 时 $|\zeta(s)|\ll\exp\varphi(t)$，而 $\varphi(t)$ 和 $1/\theta(t)$ 是 $t\geqslant0$ 的正的非减函数，且当 $t\to\infty$ 时，$\theta(t)\leqslant1$，$\varphi(t)\to\infty$ 及 $\varphi(t)/\theta(t)\ll\exp\varphi(x)$，则存在常数 A，使得在区域

$$\sigma\geqslant1-\frac{A\theta(2t+1)}{\varphi(2t+1)}$$

内 $\zeta(s)\neq0$．对 $\zeta(s)$ 的估计可借级数（2）的部分和而得到．这就把问题归结为对形如

$$\sum_{v<n\leqslant u}\exp(it\log n)$$

的三角和的估计．用 **Weyl 法**（Weyl method）估计了这类和，J E Littlewood 于 1921 年证明了如果 $t>A$，$\sigma\geqslant1-\log^2\log t/\log t$，则 $|\zeta(s)|\ll\log^5 t$，因此在区域

$$\sigma\geqslant1-\frac{A\log\log t}{\log t}$$

内 $\zeta(s)\neq0$．由此得出

$$\pi(x)=\mathrm{li}\,x+O(x\exp(-a\sqrt{\log x\log\log x}))．$$

Виноградов 法（Vinogradov method） 对 $\pi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的估计的进一步推进，是与由 И. М Виноградов 创立的关于三角和估计的一种新的本质上更为强有力的方法联系在一起的（见 **Виноградов 法**（Vinogradov method））．他用这一方法于 1938 年证明了· 如果

$$\sigma\geqslant1-\frac{c}{\log^{3/4}(|t|+2)\log^{3/4}\log(|t|+2)},$$

则 $\zeta(s)\neq0$，由此而得

$$\pi(x)=\mathrm{li}\,x+O(x\exp(-a\log^{4/7}x\log^{-3/7}\log x))$$

1958 年 Виноградов 和其他学者（见 [6]－[11]）证明了 如果

$$\sigma\geqslant1-\frac{c}{\log^{2/3}(|t|+2)\log^{1/3}\log(|t|+2)},$$

则 $\zeta(s)\neq0$ 迄今（1983）这是关于 $\zeta(s)$ 的非平凡零点界限的最好的结果，与之对应的有下面的关于素数分布的最佳结果.

$$\pi(x)=\mathrm{li}\,x+O(x\exp(-a\log^{3/5}x\log^{-1/5}\log x)),$$

$$\psi(x)=x+O(x\exp(-b\log^{3/5}x\log^{-1/5}\log x))$$

由 $\pi(x)$ 的渐近式得到第 n 个素数的渐近式 $p_n\sim n\log n$．而且也证明了（见 [21]）对所有 $n\geqslant1$ 有 $p_n>n\log n$，以及对 $17\leqslant x\leqslant e^{100}$，$x\geqslant e^{200}$，有

$$\frac{x}{\log x}<\pi(x)<\frac{x}{\log x-2},$$

对 $x\geqslant55$，有

$$\frac{x}{\log x+2}<\pi(x)<\frac{x}{\log x-4}.$$

初等方法（elementary methods） 这是对于不依赖 Riemann 原理（ζ 函数的零点）而且一般地也不依赖于复变函数论中任何原理的研究素数渐近分布的方法的称呼 A Selberg（[16]）和 P Erdős（[17]）首先发现了这样一种方法 它基于初等的 Selberg 公式（Selberg formula）．

$$\psi(x)\log x+\sum_{n\leqslant x}\psi\left[\frac{x}{n}\right]\Lambda(n)=2x\log x+O(x).\quad(7)$$

进一步的问题在于从（7）给出的 $\psi(u)$ 的平均渐近式得

到 $\psi(x)$ 的渐近表达式 可以用不同的方法去做，但所有的方法都用到了 $\psi(x)$ 是缓慢振荡的这一事实（见[18]） 1962年E Bombieri 和 E Wirsing 证明，对于任意固定的 $A>0$，有

$$\psi(x)=x+O(x\log^{-A}x) .$$

1970年H G Diamond和J Steinig([19])用初等方法实际上完善了估计的原则和技巧。他们证明，对 $x \geqslant \exp\exp 100$，有

$$|\psi(x)-x|<x\exp(-\log^{1/7}x\log^{-2}\log x)$$

最后，А.Ф.Лаврик 和 А.Ш.Собиров ([20]) 于 1973 年指出，初等方法能够证明如下的定理 对于 $x\geqslant \exp\exp 10^3$，有

$$|\psi(x)-x|<x\exp(-\log^{1/6}x\log^{-3}\log x)$$

这个结果是迄今为止初等方法在素数分布方面取得的最佳成果 虽然它比用解析方法得到的结果稍弱一些，但本质上是很接近的

素数差（difference between prime numbers）. 素数分布中有许多问题与素数差有关 其中突出的是关于相邻素数差 $d_n=p_{n+1}-p_n$ 的性态问题，孪生素数对的个数问题，或者更一般些，差为 $2k$ 的素数对的个数问题，或者，最一般的形式是 在 $[1,x]$ 一段内的 $m+1$ 个素数 $p, p+u_1,\quad, p+u_m$ 所成的组的组数问题 .

用 Riemann 假设已证明 $d_n \ll \sqrt{p_n}\log p_n$，而直观的考虑猜测有可能 $d_n \ll \log^2 p_n$. 直到1983年，最好的估计是 $d_n \ll p_n^{\delta}$，其中 $\delta=(7/12)+\varepsilon$，$\varepsilon>0$，这是由M N Huxley (1973) 用大筛法得到的 至于差为2(孪生) 或为 $2k(k=1,2,\quad)$ 的素数对，至今(1983)还不知道这种数对是有限的还是无限的 设 $\pi_k(x)$ 是不超过 x 的差为 $2k$ 的素数的个数 1919年V Brun发现了一种筛法(见**Brun筛法**(Brun sieve))，能够得到关于 $\pi_k(x)$ 的期待的上界

$$\pi_k(x)\ll\frac{x}{\log^2 x}\prod_{p|k}\left[1-\frac{1}{p}\right]^{-1}$$

此外，借助于 Виноградов 的关于素变数三角和的估计(见**Виноградов 法**(Vinogradov method))，用**圆法**(circle method ([13])) 已证明 对于任意固定的 $A>1$, $M>0$,

$$\sum_{1\leqslant 2k\leqslant x\log^{-A}x}\left[\pi_k(x)-f(x)\prod_{\substack{p|k\\p>2}}\frac{p-1}{p-2}\right]^2\ll x^3\log^{-A-M}x,$$

其中

$$f(x)=2\prod_{p>2}\left[1-\frac{1}{(p-1)^2}\right]\int_2^x\frac{du}{\log^2 u}$$

特别地，这意味着当 $X=x\log^{-A}x$ 时，下面的关于 $\pi_k(x)$ 的渐近式，除了至多有 $X\log^{-M}x$ 个在 $1\leqslant k\leqslant X$ 范围内的 k 外，对所有 $1\leqslant k\leqslant X$ 的 k 成立

$$\pi_k(x)\sim 2\prod_{p>2}\left[1-\frac{1}{(p-1)^2}\right]\frac{x}{\log^2 x}\prod_{\substack{p|k\\p>2}}\frac{p-1}{p-2} .$$

对于任意 $m\geqslant 1$ 的素数组 $p, p+u_1,\quad, p+u_m$ 也得到了类似的结果

算术级数中的素数 证明素数无限的第一个方法(Euclid)也可应用于某些算术级数. 但是用这一方法证明每一首项 l 和公差 d 互素的算术级数 $dn+l$ 含有无穷多个素数还未(1983)成功. 这一问题是由P Dirichlet (1837 – 1840) 用另一方法解决的，他把 Euler 证明 $s\to 1+0$ 时 $\sum 1/p^s\to\infty$ 的思想推广到素数 $p\equiv l(\bmod d)$ 上 为了做到这点，他引进了某些算术函数——特征标 $\chi=\chi(n, d)$ (见 **Dirichlet 特征标** (Dirichlet character)) 和函数 $L(s,\chi)$ (见 **Dirichlet L 函数** (Dirichlet L-function))，作为研究 $\pi(x,d,l)$ 和它的类似函数

$$\psi(x,d,l)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\n\equiv l(\bmod d)}}\Lambda(n)$$

的基本手段，如同函数 $\zeta(s)$ 被用来研究 $\pi(x)$ 和 $\psi(x)$ 一样 . 对于固定值 $d, 1\leqslant l\leqslant d, (l,d)=1$, 前面关于 $\pi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的大多数结果可以转移到 $\pi(x,d,l)$ 和 $\psi(x,d,l)$ 中来 . 但是这里对于 d 的值随 x 而增加的有关结果有着特殊的兴趣，因为这在堆垒数论和其他问题中是重要的 在这种情况下，要出现一些严重困难，这些困难主要在于如何估计量 d(函数 $L(s,\chi)$ 模 d 的最大实零点) 用**Page 定理**(Page theorem) 能够证明，对于 $1\leqslant d\leqslant(\log x)^{2-\varepsilon}$, $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$，有

$$\psi(x;d,l)=\frac{x}{\varphi(d)}+O(x\exp(-a\log^{\varepsilon/3}x)),$$

而由 C L.Siegel 估计 (1935) 的一个结果，对任意固定的 $A>1$，当 $1\leqslant d\leqslant\log^A x$ 时，有

$$\psi(x,d,l)=\frac{x}{\varphi(d)}+O(x\exp(-c_1\sqrt{\log x})),$$

其中 $\varphi(d)$ 是 Euler φ 函数，a 是正的常数而 $c_1=c_1(A)$ 是一个 >0 的非实效常数，即对于给定的 A, c_1 是不能够计算出来的 .

如果广义 **Riemann 假设** (Riemann hypotheses) 正确，则当 $d\leqslant x$ 时，

$$\psi(x,d,l)=\frac{x}{\varphi(d)}+O(\sqrt{x}\log^2 x) .$$

因此，直到1983年只对公差 $d\leqslant\log^A x$ 证明了素数均匀分布在全部 $\varphi(d)$ 个级数 $1\leqslant l\leqslant d((l,d)=1)$ 内 . 至于说对于级数的一段 $dn+l\leqslant x$，例如对任意 $\varepsilon>0$, $d=x^{\varepsilon}$ 甚至不能从上面得出这一级数至少含有一个素数的结

论．

Brun 的筛法，如同 Selberg 于 1947 年提出的修正一样，指出了对所有 $1\leqslant d<x$，$1\leqslant l\leqslant d$，$(l,d)=1$，有上界

$$\pi(x,d,l)\ll\frac{Cx}{\varphi(d)\log\frac{x}{d}},$$

其中 C 是绝对常数，但是用这类方法得不到 $\pi(x,d,l)$ 的下界．

根据 Riemann 原理，通过 $L(s,\chi)$ 在带形 $0\leqslant\sigma\leqslant1$ 内的零点 $\rho=\beta+i\gamma$，$\psi(x,d,l)$ 有如下形式

$$\psi(x,d,l)=\frac{\psi(x)}{\varphi(d)}-\frac{1}{\varphi(d)}\left[\sum_{\chi}{}'\,\overline{\chi}(l)\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{x^{\rho}}{\rho}+\right.$$
$$\left.+\frac{\overline{\chi}(l)x^{\alpha}}{\alpha}\right]+R, \tag{8}$$

这里，$\sum$ 上角的撇表示对复特征标 $\chi(\bmod d)$ 求和，α 是 $L(s,\chi)$ 的实零点，如果它存在且又大于 $1-C_0/\log d$. 又对任意 $T\geqslant2$，有

$$R\ll xT^{-1}\log^2 dx+x^{1/4}\log x$$

由 (8) 可见，如果不计对应于 α 的项，则余项由二重和确定，同时也依赖于 ρ 的实部和具有零点 ρ ($\operatorname{Re}\rho=\beta$) 的对应 $\chi(\bmod d)$ 的所有 $L(s,\chi)$　如果当 $0.5\leqslant\sigma\leqslant1$ 时，以 $N(\sigma,T,\chi)$ 表示 $L(s,\chi)$ 在矩形 $\sigma\leqslant\operatorname{Re}s\leqslant1$，$|t|\leqslant T$ 内的零点个数，则对 $\psi(x,d,l)$ 的余项估计和均值估计就归结为估计 L 函数的零点分布密度

$$\left.\begin{aligned}N_1&\equiv\sum_{\chi\bmod d}{}'N(\sigma,T,\chi),\\ N_2&\equiv\sum_{d\leqslant D}\sum_{\chi\bmod d}{}'N(\sigma,T,\chi).\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

因此，对于素数各类估值的降低不仅与 $L(s,\chi)$ 在临界带内零点的缺少有关，而且与零点在那里的相当稀疏的分布有关．

这一思想的实现是最近 40 年来素数分布研究的中心方向之一．Ю.В.Линник 以其 1941 年发现的**大筛法** (large sieve)（见 [22]，亦见 [14]，[24]）为此奠定了基础　特别重要的是关于算术级数中的最小素数的定理，$\pi(x,d,l)$ 和 $\psi(x,d,l)$ 在 $d\leqslant D$ 上的均值性态以及在 $1\leqslant l\leqslant d$，$(l,d)=1$ 上和在 $d\leqslant D$ 上的二重均值性态．

也就是说，Линник（[23]）于 1944 年证明了当 $d\to\infty$ 时 (9) 中的和 N_1 有上界 $\ll d^{a(1-\sigma)}$，其中 a 是一常数；由此他推导出存在常数 c，使得任一算术级数 $dn+l$ ($1\leqslant l\leqslant d$，$(l,d)=1$) 含有小于 d^c 的素数．Линник 常数的最近估计是 $c=17$，但是如果密度假设成立，即如果 $N_1\ll(dT)^{2(1-\sigma+\varepsilon)}$，则 $c=2+\varepsilon$

1965 年 А.И Виноградов 和 Bombieri 独立地得到了关于 (9) 中 N_2 的很强的估计．估计这类和的一种更加完善的方法已由 H Montgomery (1969) 建立．估计 N_2 所得的结果之一是下面的素数在算术级数中的平均分布的结果　对任意常数 A 和 $B=A+7/2$，

$$\sum_{d\leqslant\sqrt{x}\log^{-B}x}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\psi(y,d,l)-\frac{y}{\varphi(d)}\right|\ll x\log^{-A}x,$$

$$\sum_{d\leqslant\sqrt{x}\log^{-B}x}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\pi(y,d,l)-\frac{\operatorname{li}y}{\varphi(d)}\right|\ll x\log^{-A}x$$

这些估计已不可能有实质上的改进，因为在广义 Riemann 假设下只能得 $B=A+2$．

有关素数分布的其他问题如下．设 $\pi_v(x,d,l)$ 为形如 $dn+l\leqslant x$ 且为 v 个素数乘积的整数的个数．H Richert (1953 年) 证明了

$$\pi_v(x,d,l)=\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{m=0}^{r(x)}\sum_{h=0}^{v-1}A_v(h,m,d)\int_2^x\frac{\log^h\log u}{\log^{m+1}u}\,du$$
$$+O(x\exp(-r(x)))+O\left[x^{1-1/bd^{\varepsilon}}\frac{\log^{v-1}d\log^{v-1}\log x}{\varphi(d)\log x}\right],$$

其中 $r(x)=c\sqrt{\log x}$ ($c\geqslant20$)，$b=b(\varepsilon)$，$\varepsilon>0$，而 $A(h,m,d)$ 由依赖于 h,m,d 和 v 的级数确定．

E Landau (1903 －1918) 把素数分布的某些结果转移到代数数域上．设 K 是 n 次代数数域，$\pi(x,K)$ 是 K 中范数 $\leqslant x$ 的素理想数的个数．则

$$\pi(x,K)=\operatorname{li}x+O\left[x\exp\left[-\frac{c}{\sqrt{n}}\sqrt{\log x}\right]\right],$$

其中 c 是正的绝对常数，而

$$\pi(x)-\operatorname{li}x=\pm\Omega\frac{\sqrt{x}}{\log x}\log\log\log x,$$

其中 Ω 是符号 o(小) 的反意

许多研究是关于函数 $F(x,y)$ 的，它表示 $\leqslant x$ 且不含有小于 y 的素因数的自然数个数．当 $y=x^{1/\xi}$ 及当 $x\to\infty$，$\xi=\xi(x)\to\infty$ 时，这种数称为拟素数 (quasi-prime numbers)　运用筛法可得到关于它的分布的十分完整的理论，类似于从素数的分布所预期的结果．对小素因子数的分布也进行了研究（见 [15]）

参考文献

[1] Euler, L , Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Springer, 1983 (译自拉丁文)
[2] Чебышев, П Л , Избр матем труды, М - Л , 1946
[3] Riemann, B , Werke, Teubner, 1892
[4] Ingham, A E , The distribution of prime numbers, Cambridge Univ Press, 1932.
[5] Виноградов, И М , Избр труды, М , 1952 (英译本 Vinogradov, I M , Selected works, Springer, 1985)
[6] Виноградов, И М , 《Изв АН СССР Сер матем》,

22(1958), 2, 161 - 164
[7] Виноградов, И М , Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М , 1971(中译本 数论中的三角和法, 数学进展, 1(1955), 1, 3 -106)
[8] Titchmarsh, E C , The theory of the Riemann zeta-function, Clarendon Press, 1951
[9] Prachar, K , Primzahlverteilung, Springer, 1957
[10] Карацуба, А А , Основы аналитической теории чисел, М , 1975 (中译本 解析数论基础, 科学出版社, 1984)
[11] Hua, L K , Abschatzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, in Enzyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Vol 1, 1959 Heft 13, Teil 1 (中译本 华罗庚, 指数和的估计及其在数论中的应用, 科学出版社, 1963)
[12] Чудаков, Н Г , Введение в теорию L-функций Дирихле, М - Л , 1947
[13] Лаврик, А Ф , 《Тр Матем ин-та АН СССР》, 64(1961), 90 -125
[14] Davenport, H , Multiplicative number theory, Springer, 1980
[15] Halberstam, H and Richert, H , Sieve methods, Acad Press, 1974
[16] Selberg, A , An elementary proof of the prime-number theorem, *Ann of Math* , 50(1949), 305 - 313
[17] Erdos, P , On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem, *Proc Nat Acad Sci USA*, 35(1949), 374 -384
[18] Лаврик, А Ф , Обзорный доклад маждународной конференции по теории чисел, М , 1981
[19] Diamond, H G and Steinig, J , An elementary proof of the prime number theorem with a remainder term, *Indag Math* , 11(1970), 199 - 258
[20] Лаврик, А Ф , Собиров, А Ш 《Докл АН СССР》, 211 (1973), 3, 534 - 536
[21] Rosser, B , The n-th prime is greater than nlogn, *Proc London Math Soc* (2), 45(1939), 21 - 44
[22] Линник, Ю В , 《Докл АН СССР》, 30(1941), 4, 290 - 292
[23] Линник, Ю В ,《Матем сб 》, 15(1944), 139 -178 .
[24] Лабрик, А Ф ,《Успехи матем наук》, 35 (1980), 2, 55 - 65

А Ф Лаврик 撰

【补注】 在上面的公式(7)中, $\Lambda(n)$是(Von) **Mangoldt 函数**(Mangoldt function), 当 n 为素数幂 p^m 时, 它取值 $\log p$, 其它情形取值为零 .

有关三角和的估计亦见**三角和法**(trigonometric sums, method of)

更多的一些事实 . 函数 $\pi(x)-\mathrm{li}(x)$ 无穷多次改变符号, 虽然数值表并不支持这点 . 这是由 Littlewood 证明的 . 由于 H Iwaniec, J Pintz 和 C J Mozzochi 的工作, 现在(1986)已知 $d_n \ll p_n^{\theta}$, $\theta=11/12-1/384$. 已知最大孪生素数为 1639494 $(2^{4423}-1)\pm1$(W Keller, 1983) .

在计算和理论方面有关素数分布的许多有趣事实可在文献 [A5] 中找到, 它写得比较通俗易懂 关于初等方法亦可参见 [A1] 在 [A4] 中有素数定理的简单证明 .

存在无穷多个素数(即当 $x\to\infty$ 时 $\pi(x)\to\infty$)这一事实也称为 **Euclid 素数定理**(Euclidean prime number theorem) 素数定理 (prime number theorem)指出, $\pi(x)$ 渐近等于 $x(\log x)^{-1}$(亦见 **de la Vallée-Poussin 定理** (de la Vallée-Poussin theorem)) Dirichlet 素数定理 (Dirichlet prime number theorem)是指在每一算术级数中有无穷多个素数(即当 $x\to\infty$ 时 $\pi(x, d, l)\to\infty$)

关于 Bombieri-Виноградов 的结果亦见(参考)**密度假设**(density hypothesis) .

参考文献

[A1] Diamond, H G , Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers, *Bull Amer Math Soc* , 7(1982), 553 -589
[A2] Ellison, W J and Mendes France, M Les nombres premiers, Hermann, 1975
[A3] Ivic, A , The Riemann zeta-function, Wiley 1985
[A4] Newman, D J , Simple analytic proof of the prime number theorem, *Amer Math Monthly*, 87(1980), 693 - 696
[A5] Riesel, H , Prime numbers and computer methods for factorisation, Birkhauser, 1985
[A6] Bombieri, E , La grand crible dans la theorie analytique des nombres, *Astérisque*, 18(1974)

【译注】 在文献 [1], [2], [3] 中有与素数分布有关的数论函数的许多估计式, 这些公式在许多数论问题中是有用的 在文献 [4] 中有关于素数定理初等证明的系统总结 . 在文献 [5] 中对算术级数中最小素数得到 $c=8$, 这是目前(1922)已知的最好结果 .

参考文献

[B1] Rosser, J B and Schoenfeld, L , Approximate formulas for some functions of prime numbers, *Illinois J Math* , 6(1962), 64 - 94
[B2] Rosser, J B and Schoenfeld, L , Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$, *Math Comp* , 29(1975), 243 - 269
[B3] Schoenfeld, L , sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$ II, *Math Comp* , 30(1976), 337 - 360
[B4] 潘承洞, 潘承彪, 素数定理的初等证明, 上海科学技术出版社, 1988
[B5] 王炜, On the least prime in an arithmetic progression, *Acta Math Sinica*, New Series, 7(1991), 279 -289

戚鸣皋 译 张明尧 校

分布型 [distribution, type of, распределении тип]

随机变量概率分布的集合，其中每一个可以从另一个经线性变换得到．在一维情形下，确切定义如下 称随机变量 X_1 和 X_2 为同型的，如果存在常数 A，$B>0$ 使 X_2 的分布和 BX_1+A 的分布相同．相应的分布函数用关系式

$$F_2(x)=F_1\left(\frac{x-A}{B}\right)=F_1(bx+a)$$

相联系 其中 $b=1/B$ $a=-A/B$

于是分布函数集合可以划分为互不相交的型．例如，所有正态分布形成一个型，所有均匀分布形成另一个型．

型的概念广泛地应用于概率论的**极限定理**(limit theorems)中．当 $n\to\infty$ 时独立随机变量和 S_n 的分布常常“无界发散”，只有通过线性“标准化”，即 $(S_n-a_n)/b_n$，才可能收敛到某一极限分布(例如正态分布)，此处 a_n, $b_n>0$ 是常数，且当 $n\to\infty$ 时，$b_n\to\infty$ 此外，如对随机变量序列 $\{X_n\}$，$(X_n-a_n)/b_n$ 和 $(X_n-a_n)/b_n$ 都收敛到非退化的极限分布，则它们必定是同一型的．于是可以给出如下的型收敛定义(A．Я Хинчин, 1938) 设 $T(F)$ 是分布函数 F 的型(在这个讨论中退化分布排除在外)．称型序列 T_n 收敛到型 T，如果存在分布函数 $F_n\in T_n$ 的序列，它弱收敛到分布函数 $F\in T$ 用这种方法拓扑化的型集是一个非正则的 Hausdorff 空间，因此是不可度量化的(W Doeblin, 1939)

现在，设 S_n 是独立同分布随机变量和，具有相应的分布函数 F_n，则 $T(F_n)$ 的极限型的类与所有稳定型的类相合．型 T 称为稳定的，如果 F_1 和 F_2 属于 T，则 F_1 和 F_2 的卷积也属于 T(换言之，具有 T 型分布的两个独立随机变量之和仍具有 T 型分布 见**稳定分布**(stable distribution))．

分布型的概念可以扩展到多维情形，但这种扩展是不明确的 对于整个矩阵群的任一子群 G，可以得到一个相应的分布型的概念．称 $\mathbf{R}^n$ 中取值的随机向量 X_1 和 X_n 是同 G 型的，如果存在一个变换 $g\in G$ 使 X_2 和 gX_1 同分布．同样的方法，可以导出 G 稳定型分布的概念．对于整个矩阵群，只有正态分布是稳定的(Г．Сакович, 1960)

参考文献

[1] Гнеденко, Б В, Колмогоров, А Н, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М-Л 1949 (中译本 Б В 哥涅坚科等，相互独立随机变量和的极限分布，科学出版社，1955)

Ю В．Прохоров 撰

【补注】 关于分布函数的(弱)收敛见**分布的收敛**(distribution, convergence of)，**概率测度的弱收敛**(weak convergence of probability measures)

参考文献

[A1] Loève, M Probability theory, Princton Univ Press, 1963

[A2] Feller, W, An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiely, 1971

[A3] Sharpe, M, Operator stable distributions on vector groups, *Trans Amer Math Soc*, **136** (1969), 51－65

刘秀芳 译

完全分布族 [distributions, complete family of, распределений полное семейство]

定义在可测空间 $(\mathfrak{X},\mathfrak{B})$ 上的概率测度族 $\{\mathrm{P}_\theta$ $\theta\in\Theta\subset\mathbf{R}^k\}$，在其上 0 的 $\mathfrak{B}$ 可测函数类中的唯一的无偏估计是恒等于零的函数，即如果 $f(\cdot)$ 是定义在 $\mathfrak{X}$ 上的任意 $\mathfrak{B}$ 可测函数，满足关系式

$$\int_{\mathfrak{X}} f(x)\,d\,\mathrm{P}_\theta(x)=0,\ \text{对一切}\ \theta\in\Theta, \qquad (*)$$

则有 P_θ 几乎处处 $f(x)=0$ 对一切 $\theta\in\Theta$ 成立 例如，指数分布族是完全的 如果进一步假定 f 是有界的，关系式 $(*)$ 满足，那么就称分布族 $\{\mathrm{P}_\theta,\theta\in\Theta\}$ 是有界完全的(boundedly complete) 有界完全的充分统计分布族在数理统计中起着重要的作用，特别是在构造具有 **Neyman 结构**(Neyman structure)的**相似检验**(similar test)的问题中．

参考文献

[1] Линник, Ю В, Статистические задачи с мешающими параметрами, М, 1966 (英译本 Linnik, Yu V, Statistical problems with nuisance parameters Amer Math Soc, 1968)

[2] Lehmann, E L, Testing statistical hypotheses, Wiley, 1959

М С Никулин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Zacks, S The theory of statistical inference, Wiley, 1971

刘秀芳 译

分布的收敛 [distributions, convergence of, распределений сходимость]

如下定义的弱收敛(weak convergence)或依变差收敛(convergence in variation) 称度量空间 S 的 Borel 集上的分布(概率测度)序列 $\{P_n\}$ 弱收敛到一个分布 P，如果对任意 S 上的实值有界连续函数 f

$$\lim_n \int_S f\,d\,P_n=\int_S f\,d\,P \qquad (*)$$

弱收敛是概率论中所讨论的基本收敛类型．通常用符号 ⇒ 表示 以下条件与弱收敛等价

1) $(*)$ 对任意实值有界一致连续函数 f 成立，

2) $(*)$ 对任意实值有界 P 几乎处处连续函数 f 成立，

3) $\lim_n \sup P_n(F) \leqslant P(F)$ 对任何闭集 $F \subset S$ 成立,

4) $\lim_n \inf P_n(G) \geqslant P(G)$ 对任何开集 $G \subset S$ 成立,

5) $\lim_n P_n(A) = P(A)$ 对任何具有 $P(\partial A) = 0$ 的 Borel 集 $A \subset S$ 成立，其中 ∂A 是 A 的边界,

6) $\lim_n p(P_n, P) = 0$，其中 p 是 **Lévy-Прохоров 度量** (Lévy-Prokhorov metric)

设 U 是 S 的子集类，在交运算下封闭且使得 S 中每个开集是 U 中有限或可数个集合的并 如果对一切 $A \in U$ 有 $\lim_n P_n(A) = P(A)$，则 $P_n \Rightarrow P$ 如果 $S = \mathbf{R}^k$，F_n 和 F 分别是 P_n 和 P 所对应的分布函数，则 $P_n \Rightarrow P$，当且仅当对 F 的一切连续点 x 有 $F_n(x) \to F(x)$

设 S 是**可分空间** (separable space) 而 $\mathscr{F}$ 是 S 上一个实值有界 Borel 函数类．为使 $\int_S f dP_n \to \int_S f dp$ 对每一 $P_n \Rightarrow P$ 的序列 $\{P_n\}$ 在 $f \in \mathscr{F}$ 上一致收敛，充分必要条件是

a) $\sup_{f \in F} \omega_f(S) < \infty$ 和

b) $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{f \in \mathscr{F}} P(\{x \quad \omega_f(S_{x,\varepsilon}) > \delta\}) = 0$，对一切 $\delta > 0$ 成立，其中

$$\omega_f(A) = \sup\{|f(x) - f(y)| \quad x, y \in A\},$$

而 $S_{x,\varepsilon}$ 是中心在 x 半径为 ε 的开球 如果 $\mathscr{F}$ 由集类 E 中的集合的示性函数生成，则条件 a) 和 b) 可导出条件

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{A \in E} P(A^\varepsilon \setminus A^{-\varepsilon}) = 0,$$

其中 $A^\varepsilon = \bigcup_{x \in A} S_{x,\varepsilon}$，$A^{-\varepsilon} = S \setminus (S \setminus A)^\varepsilon$（当 S 中每一开球皆连通时，$A^\varepsilon \setminus A^{-\varepsilon} = (\partial A)^\varepsilon$） 如果 $S = \mathbf{R}^k$ 且分布 P 关于 Lebesgue 测度绝对连续，那么，当且仅当在所有的凸 Borel 集 A 上一致地有 $P_n(A) \to P(A)$ 时，$P_n \Rightarrow P$

设 P_n，P 是度量空间 S 上的分布，$P_n \Rightarrow P$，h 是 S 到度量空间 S' 的连续 P 几乎处处可测映射，则 $P_n h^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$ 这里，对 S 上任一分布 Q，Qh^{-1} 是它在 S' 上的 h 象 即对任意 Borel 集 $A \subset S'$ 有

$$Qh^{-1}(A) = Q(h^{-1}(A))$$

S 上的分布族 $\mathscr{P}$ 称为弱相对紧的 (weakly relatively compact)，如果它的元的每一序列均包含一个弱收敛的子序列 弱相对紧的条件由 Прохоров 定理给出 一个族 $\mathscr{P}$ 被称为胎紧的 (tight)，如果对任意 $\varepsilon > 0$，存在一个紧集 $K \subset S$ 使得对一切 $P \in \mathscr{P}$ 有 $P(K) > 1 - \varepsilon$ Прохоров 定理 (Prokhorov theory) 陈述为 如果 $\mathscr{P}$ 是胎紧的，则它是相对紧的，此外，如果 S 是完全的和可分的，则 $\mathscr{P}$ 的弱相对紧性蕴含胎紧性．在 $S = \mathbf{R}^k$ 的情形下，分布族 $\mathscr{P}$ 是弱相对紧的当且仅当相应于 $\mathscr{P}$ 的特征函数族在零点是等度连续的．

现在，设 P_n，P 是测度空间 (X, A) 上的分布，其中 A 是 σ 代数 P_n 依变差收敛 (convergence in variation) 到 P 意味着在 A 中所有集上一致收敛，或等价地在 A 的所有集上收敛，或等价地变差

$$|P_n - P| = (P_n - P)_+ + (P_n - P)^-$$

收敛到零 此处 $(P_n - P)^+$ 和 $(P_n - P)^-$ 是符号测度 $P_n - P$ 的 Jordan-Hahn 分解的分量．

参考文献

[1] Billingsley, P, Convergence of probability measures Wiley, 1968

[2] Loève, M Probability theory, Princeton Univ Press, 1963

[3] Bhattacharya, R N and Ranga Rao, R, Normal approximation and asymptotic expansions, Wiely, 1976

В В Сазонов 撰

【补注】 关于弱收敛的更多的信息见**概率测度的弱收敛** (weak convergence of probability measures)，**测度的收敛** (convergence of measures)　　刘秀芳 译

分配格 [**distributive lattice, дистрибутивная решетка**]

一个满足等式

$$(a+b)c = ac + bc$$

的**格** (lattice) 这个等式与下列两式等价

$$ab + c = (a+c)(b+c)$$

和

$$(a+b)(a+c)(b+c) = ab + ac + bc$$

分配格用它们的所有凸子格可以看作同余类这一事实来刻画．任何分配格与某个集合的子集（不必是全体）所成的格同构 这种格的一个重要特殊情况是 **Boole 代数** (Boolean algebra) 对于一个分配格内的任意有限集 I，下列等式成立

$$a \sum_{i \in I} b_i = \sum_{i \in I} ab_i$$

和

$$a + \prod_{i \in I} b_i = \prod_{i \in I} (a + b_i),$$

以及

$$\prod_{i \in I} \sum_{j \in J(i)} a_{ij} = \sum_{\varphi \in \Phi} \prod_{i \in I} a_{i\varphi(i)}$$

和

$$\sum_{i \in I} \prod_{j \in J(i)} a_{ij} = \prod_{\varphi \in \Phi} \sum_{i \in I} a_{i\varphi(i)},$$

这里 $J(i)$ 是有限集，而 Φ 是所有将 I 映入 $\bigcup J(i)$，使得对每个 $i \in I$ 有 $\varphi(i) \in J(i)$ 的单值函数 φ 所成的集合 在一个完全格内，当 I 和 $J(i)$ 是无限集合时，上述等式也有意义．然而，它们不是从分配律推导出来的．对所有集合 I 和 $J(i)$ 都满足上面最后两个等式的分配完全格称为完全分配的 (completely distributive)，见**完全格**

(complete lattice)

参考文献

[1] Birkhoff, G , Lattice theory, Colloq Publ , 25, Amer Math Soc , 1973

[2] Скорняков, Л А , Элементы теорий структур, М ,1970

[3] Grätzer, G , General lattice theory, Birkhauser, 1978 Original Lattice theory First concepts and distributive lattices Freeman, 1978
Л А Скорняков 撰

【补注】 格的分配性质可以用充分多的本原滤子的存在性来刻画 一个格 A 是分配的，当且仅当它的本原滤子分离它的点，或者等价地说，如果在 A 内给定 a/b，则存在一个格同态 $f\ A\to\{0,1\}$，使 $f(a)=1$ 和 $f(b)=0$ ([A1]) 在分配格的研究中，它们的拓扑表示起重要的作用，这首先是由 M H Stone 建立起来的([A2])，以后由 H A Priestley 用更方便的术语重新阐明 ([A3])——这两者都推广了 Boole 代数的 Stone 对偶，亦见 **Stone 空间** (Stone space)．为描述 Priestley 的观点，令 spec A 表示分配格 A 的本原滤子所成的集合，按包含关系赋予偏序，利用集合

$$U(a)=\{X\in\operatorname{spec}A\ \ x\in X\}$$

及它们的补集作为开集子基将它拓扑化 那么，对应 $a\mapsto U(a)$ 是从 A 到 spec A 的在偏序中是上封闭的闭开子集 (即既是闭的又是开的) 的一个格同构 此外，偏序空间，诸如对某些 A 的 spec A，恰为紧空间，在其中给定 X/Y，就存在一个包含 X 但不包含 Y 的闭开上封闭集合——这样的空间有时称为 Priestley 空间 (Priestley spaces)．注意，一个 Priestley 空间 spec A 是离散有序的当且仅当 A 的每个本原滤子是极大的，当且仅当 A 是一个 Boole 代数．分配格的其他重要类型可藉助序理论或它们的 Priestley 空间的拓扑性质类似地来刻画 (见[A4])

作为上面的一般参考文献[1]－[3]的补充，[A5] 也可被推荐来作为论述分配格一般理论的文献

见**完全分配格** (completely distributive lattice)

参考文献

[A1] Birkhoff, G , On the combination of subalgebras, *Proc Cambr Philos Soc* ,**29** (1933), 441 – 464

[A2] Stone, M H , Topological representation of distributive lattices and Brouwerian logics, *Časopis Pešt Mat Fys* , **67** (1937), 1 – 25

[A3] Priestley, H A , Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices, *Proc Lond Math Soc* (3), **24** (1972), 507 – 530

[A4] Priestley, H A , Ordered sets and duality for distributive lattices, in Orders Description and Roles, Ann Discrete Math , Vol 23, North-Holland, 1984, 39 – 60

[A5] Balbes, R and Dwinger, P , Distributive Lattices, Univ of Missouri Press, 1974
蓝以中 译

分配拟群 [distributive quasi - group , дистрибутивная квазигруппа]

满足左及右分配律

$$x\cdot yz=xy\cdot xz,\quad yz\cdot x=yx\cdot zx$$

的**拟群** (quasi - group) 拟群中这两个分配律是互相独立的 (存在左分配拟群但不是右分配拟群 ([1])) 可引用有理数集 $\mathbf{Q}$ 作为分配拟群的例子，其运算是 $(x+y)/2$. 任何幂等中间拟群 (idempotent medial quasi-group，即拟群 Q，其中关系式 $x^2=x$ 及 $xy\cdot uv=xu\cdot yv$ 对所有 $x,y,u,v\in Q$ 都成立) 是分配拟群，一般情形下，每个分配拟群 $Q(\cdot)$ **同痕** (isotopy) 于某个交换的 **Moufang 幺拟群** (Moufang loop) ([3])．分配拟群的共生拟群 (parastrophy) (对于逆运算构成的**拟群** (quasi - group)) 也是分配拟群且合痕于同一个交换的 Moufang 幺拟群 设分配拟群中的四个元素 a,b,c,d 适合中间律 (medial law) $ab\cdot cd=ac\cdot bd$，则它们生成中间子拟群，特别地，分配拟群中任何三元素生成中间子拟群．在子拟群中平移是自同构，且在某种意义上，分配拟群是齐性的 没有元素和子拟群是特殊的 由有限分配拟群的全部右平移生成的群是可解群 ([4])

参考文献

[1] Stein, Sh , On a construction of Hosszu, *Publ Math Debrecen*, **6** (1959), 1－2, 10－14

[2] Белоусов, В Д , 《Матем сб》, **50** (1960), 3, 267－298

[3] Белоусов, В Д , Основы теории квазигрупп и луп, М , 1967

[4] Fischer, B , Distributive Quasigruppen endlicher Ordnung, *Math Z* , **83** (1964), 4, 267－303
В Д Белоусов 撰

【补注】 [A1] 中证明了阶为 $p_1^{\alpha_1}\ \ p_k^{\alpha_k}$ 的拟群 (其中 p_i 为不同的素数，α_i 是非负整数) 皆同构于分配拟群 Q_1, , Q_k 的直积，其中 Q_i 具有阶 $p_i^{\alpha_i}$ 且当 $p_i\neq3$ 时是 Abel 拟群 (即满足 $ab\cdot cd=ac\cdot bd$)

参考文献

[A1] Galkin, V M , Finite distributive quasigroups, *Math Notes*, **24** (1978), 525－526 (*Mat Zametki* (1978), 39－41, 141)
石生明 译 许以超 校

分配性 [distributivity , дистрибутивность] ——一种运算关于另一种运算的分配律 (distributivity law)，分配性质 (distributive property)

可用下列等式之一表示的两个二元代数运算 (algebraic operation) 的性质

D1 $(\forall xyz)\,x*(y\oplus z)=(x*y)\oplus(x*z)$,

D2 $(\forall xyz)\,(y\oplus y)*z=(x*z)\oplus(y*z)$,

其中 $\oplus,*$ 是二元运算符号，x,y,z 是对象变元．如果

在集合A中定义了两个特定的二元运算 $x+y$, $x\circ y$,即两个已知映射

$$+\quad A\times A\to A,\quad \circ\quad A\times A\to A,$$

且把符号 ⊕, *分别解释为A中的运算符号 +, ∘ , 那么可以判断公式 D1 和 D2 在 A 中的真假 . 如果这两个公式在 A 中都成立, 则称运算 ∘ 关于运算 + 是分配的 (distributive)

Д М Смирнов 撰

【补注】 即A中运算 ∘ 关于运算 + 是分配的, 如果对任意 $x,y,z\in A$ 有 $x\circ(y+z)=(x\circ y)+(x\circ z)$, 且 $(x+y)\circ z=(x\circ z)+(y\circ z)$

例如, 在实数集和整数集中乘法关于加法是可分配的 .

张锦文、赵希顺 译

散度 [**divergence**, **дивергенция**], 向量场 $\mathbf{a}(x)$ 在点 $(x^1,\ \ ,x^n)$上的

标量场

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\ a^i(x),$$

其中 $a^i(x)$是向量场$\mathbf{a}(x)$的分量

散度用 $\operatorname{div}\mathbf{a}(x)$来表示, 也用 **Hamilton 算子** (Hamilton operator) $\nabla=(\partial/\partial x^1,\ \ ,\partial/\partial x^n)$和向量 $\mathbf{a}(x)$ 的内积 $(\nabla,\mathbf{a})$ 来表示

如果向量场 $\mathbf{a}(x)$ 是不可压缩流体定常流的速度场, 则 $\operatorname{div}\mathbf{a}(x)$等于在点 x 处的源 ($\operatorname{div}\mathbf{a}>0$) 或汇 ($\operatorname{div}\mathbf{a}<0$) 的强度 .

设对 n 维区域 E 计算的流体密度为 ρ, 则积分

$$\int_E \operatorname{div}(\rho\mathbf{a})dx$$

等于单位时间从区域 E "流出" 的流体的数量, 其大小为 (见 **Остроградский 公式** (Ostrogradski formula)

$$\int_{y\in\partial E}[\mathbf{N}(y),\ \rho\mathbf{a}(y)]ds=\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial E}N_i(y)\rho a^i(y)ds,$$

这里 $\mathbf{N}=(N_1,\ \ ,N_n)$ 是 ∂E 的单位外法向量, ds 是 ∂E 的面积元 . 散度 $\operatorname{div}\mathbf{a}(x)$是向量场 $\mathbf{a}(x)$ 流过封闭曲面 ∂E 的速度的体积导数

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(x)=\lim\frac{1}{\operatorname{Vol}E}\int_{\partial E}(\mathbf{N},\ \mathbf{a})ds,\ 当\ E\to 0\ 时$$

因此, 散度关于坐标系的选择是不变的

在曲线坐标系中, $y=(y^1,\ \ ,y^n)$, $y^j=y^j(x)$, $1\leqslant j\leqslant n$, 有

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}(y))=\frac{1}{\sqrt{g}}\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\ (\sqrt{g}\ a^i),$$

其中

$$g=\det(g_{ij}),\quad g_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i}\ \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j},$$

$$\mathbf{a}=\sum_{i=1}^{n}a^i(y)\mathbf{s}_i(y),$$

而 $\mathbf{s}_i(y)$是在点 y 处第 i 条坐标线的单位切向量

$$\mathbf{s}_i(y)=\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\ \frac{\partial y}{\partial x^i}$$

对于在具有仿射联络的 n 维流形的一个区域中给定的 $(p,\ q)$ 型张量场

$$a(x)=\{a_{j_1\ \ j_q}^{i_1\ \ i_p}(x),\ 1\leqslant i_\alpha,\ j_\beta\leqslant n\},$$

其散度借助于 $a(x)$的分量的绝对 (共变) 导数以及随后的卷积 (缩并) 来定义, 它是 $(p-1,q)$ 型张量, 分量为

$$b_{j_1\ \ j_q}^{i_1\ \ i_{s-1}i_{s+1}\ \ i_p}=\sum_{k=1}^{n}\nabla_k a_{j_1\ \ j_q}^{i_1\ \ i_{s-1}k i_{s+1}\ \ i_p},$$

$$1\leqslant k,i_\alpha,j_\beta\leqslant n$$

在张量分析和微分几何中, 作用在微分形式的空间上并与外微分算子相联系的一个微分算子, 也称为散度

参考文献

[1] Кочин, Н Е , Некторное исчисление и начала тензорного исчисления, 9 изд , М , 1965

[2] Рашевский, П К , Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд , М , 1967

Л П Купцов 撰

【补注】 Hamilton 算子常称为纳布拉算子 (nabla operator), 因其符号 ∇ 大致像西伯来人的一种竖琴 (nabla) 而得名 Остроградский 公式称为 Gauss - Остроградский 公式 (Gauss - Ostrogradski formula) 或 Gauss 公式 (Gauss formula) 更为合适 .

关于其他向量微分算子, 见**旋度** (curl), **梯度** (gradient) . 它们之间的关系, 亦见**向量分析** (vector analysis)

设 M是一个n维流形, ω是 M上的体积元 (volume element) 这时, Lie 导数 $L_X\omega$ 也是一个微分 n 形式, 对于 M 上的某个函数 f_X, 有 $L_X\omega=f_X\omega$ 这个函数是 X 关于体积元 ω 的散度 $\operatorname{div}(X)$ 如果 g是 M上的 Riemann 度量, 则上面由 (*) 定义的 X的散度是 X关于由 g 定义的体积元 $\omega_g=\det(g)^{1/2}dx^1\wedge\ \ \wedge dx^n$ 的散度 对于任何函数f, f_ω 是一个 n形式, 于是定义了 $\int_M f_\omega$ —— 函数 f 关于体积元 ω 的积分 如果 M 是紧的, 则 Green 定理 (Green theorem) 说的是

$$\int_M \operatorname{div}(X)\omega\ =0$$

对于 $x_1,\ \ ,x_n$的函数的 n 元组 $\mathbf{a}=(a^1,\ \ ,a^n)$ 的散度, 也采用另一表示法 $\nabla\cdot\mathbf{a}$

参考文献

[A1] Bourne, D E and Kendall, P C , Vector analysis and

Cartesian tensors, Nelson and Sons, Sunbury-on-Thames, 1977
张鸿林 译

发散积分[divergent integral, расходящийся интеграл]

与收敛积分概念相对的概念(见**奇异积分**(singular integral)). 例如, 如果函数 $f(x)$ 定义在有界或无界区间 $[a, b)(-\infty<a\leqslant b\leqslant\infty)$ 上, 并且对于每个 $\eta\in[a, b)$, 它在 $[a, \eta]$ 上是可积的, 但是不存在有限的极限

$$\lim_{\eta\to b}\int_a^\eta f(x)\,dx,$$

则称积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散 当

$$\lim_{\eta\to b}\int_a^\eta f(x)dx = +\infty \text{ 或 } -\infty$$

时, 分别称发散积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 等于 $+\infty$ 或 $-\infty$

Л Д Кудрявцев 撰 张鸿林 译

发散序列[divergent sequence, расходящаяся последовательность]

拓扑空间中没有极限的点序列 紧度量空间中每个发散序列都包含一个收敛子序列 在赋范空间的发散序列类中可以找到无穷大序列, 即点序列 $\{x_n\}$, 使得 $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\infty$ 发散序列的概念可以推广到多重序列以及有向(偏序)集上的序列

Л. Д Кудрявцев 撰

罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

发散级数[divergent series, расходящийся ряд]

一个级数, 其部分和序列没有有限的极限 例如, 级数

$$1+1+1+1+1+\quad,$$

$$1-1+1-1+1-\quad,$$

$$1-2+3-4+5-\quad,$$

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\quad(|x|>1)$$

都是发散的.

发散级数最初出现在17世纪和18世纪数学家的一些著作中. L Euler 首先得出结论 必须提出的问题不在于发散级数的和等于什么, 而是如何来定义它的和, 他找到的解决这个问题的方法同现代方法很接近 在19世纪末以前, 发散级数并没有得到任何应用, 因而几乎被遗忘 到了19世纪末, 由于数学分析中各种事实的积累, 又重新唤起人们对发散级数的兴趣 特别是提出了在不同一般的意义下求级数之和的可能性问题

例. 1) 设两个级数

$$\sum_{n=0}^\infty a_n \text{ 和 } \sum_{n=0}^\infty b_n$$

分别收敛于 A 和 B 如果把这两个级数相乘, 则得到的级数

$$\sum_{n=0}^\infty c_n=\sum_{n=0}^\infty(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\quad+a_nb_0) \tag{1}$$

可能是发散的 然而, 如果不把级数(1)的和定义为部分和 s_n 的极限, 而是把它定义为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_0+s_1+\quad+s_n}{n+1}, \tag{2}$$

则在这种意义下, 级数(1)总是收敛的(即极限(2)存在), 在这种意义下它的和等于 $C=AB$

2) 在点 x_0 上连续的(或具有第一类间断点的)函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数在这一点上可能发散 如果级数的和由公式(2)来定义, 则这样的函数的 Fourier 级数在这种意义下总是收敛的, 在这种意义下它的和将等于 $f(x_0)$ (或 $\{f(x_0+0)+f(x_0-0)\}/2$)

3) 幂级数

$$\sum_{n=0}^\infty z^n \tag{3}$$

对于 $|z|<1$ 收敛于和 $1/(1-z)$, 对于 $|z|>1$ 发散 如果把这个级数的和定义为

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}\sum_{n=0}^\infty\frac{s_nx^n}{n!}, \tag{4}$$

其中 s_n 是级数(3)的部分和, 则在这种意义下, 级数(3)对于满足 $\mathrm{Re}\,z<1$ 的一切 z 都收敛, 其和为函数 $1/(1-z)$

为了把和的概念推广到发散级数的情况, 考虑某一个算子或法则, 使得一个发散级数对应于一个确定的数, 称为(在这个定义下的)级数的和. 这样的法则称为**求和法**(summation methods) 例1)中描述的法则称为算术平均求和法(见 **Cesàro 求和法**(Cesàro summation methods)) 例2)中给出的法则称为 **Borel 求和法**(Borel summation method).

亦见**发散级数的求和法**(summation of divergent series).

参考文献

[1] Borel, E, Leçons sur les series divergentes, Gauthier-Villars, 1928

[2] Hardy, G H, Divergent series, Clarendon, 1949

[3] Cooke, R G, Infinite matrices and sequence spaces, MacMillan, 1950

[4] Peyerimhoff, A, Lectures on summability, Springer, 1969

[5] Knopp, K, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, 1964

[6] Zeller, K and Beekmann, W, Theorie der Limitierungsverfahren, Springer, 1970

И. И Волков 撰

【补注】"求和法"(summation method)一词在英文中常用"summability method"来表示.

张鸿林 译

整除准则 [divisibility criterion, делимости признак]

自然数 A 被自然数 d 整除所要满足的充分必要条件 同时要求这种条件容易被验证，以及这种验证要比直接用 d 去除 A 简单

若两个数 A 与 B 的差被 d 整除，则 A 被 d 整除，当且仅当 B 被 d 整除．这一性质是许多整除准则的基础 设 A 在十进制中的表示记为

$$A=(a_n \quad a_0)_{10}=a_0+10a_1+ \quad +10^na_n,$$

则

$$A=a_0+10A_1, \quad A_1=a_1+10a_2+ \quad +10^{n-1}a_n,$$

$$A=a_0+10a_1+100A_2,\ A_2=a_2+10a_3+ \quad +10^{n-2}a_n,$$

$$A=a_0+10a_1+100a_2+1000A_3,\ A_3=a_3+10a_4+ \quad +10^{n-3}a_n,$$

。

由这些等式直接得到被 10, 100, 整除的准则 此外，A 被 2 整除的充分必要条件是它的最后一位，即数 a_0 被 2 整除，A 被 4（被 8）整除的充分必要条件是 A 的最后两（相应的，三）位数，即数 a_0+10a_1（数 $a_0+10a_1+100a_2$）被 4（被 8）整除 因为差 $(a_0+10a_1)-(a_0+2a_1)$ 是 4 的倍数，所以被 4 整除的准则也可表述为 数 A 被 4 整除，当且仅当数 a_0+2a_1 被 4 整除

每一个被 d 整除的准则，总是使得数 A（除了 A 太小外）可能用某个比 A 更小的非负整数来替代，它被 d 整除，当且仅当 A 本身被 d 整除 换句话说，每个被 d 整除的准则就是定义了某个取整值的函数 f，它满足条件 对每个自然数 A，$|f(A)|<A$，以及 $f(A)$ 被 d 整除，当且仅当 A 被 d 整除。任一满足上述条件的整值函数称为关于整数 d 的整除性函数（divisibility function for the number d），所有这种函数组成的集合记作 $\Omega(d)$ 显见，

$$f_1(A)=a_0\in\Omega(2)\cap\Omega(5),$$

$$f_2(A)=a_0+10a_1\in\Omega(4)\cap\Omega(25),$$

$$f_3(A)=a_0+10a_1+100a_2\in\Omega(8)\cap\Omega(125),$$

$$f_4(A)=a_0+2a_1\in\Omega(4)$$

因为

$$A=(a_0+A_1)+9A_1=(a_0+a_1+A_2)+9(A_1+A_2)$$

$$= \quad =(a_0+ \cdot +a_n)+9(A_1+ \quad +A_{n-1}),$$

所以有

$$f_5(A)=a_0+ \quad +a_n\in\Omega(9)\subset\Omega(3)$$

因而，A 被 3（或 9）整除，当且仅当它的各位数字之和被 3（或 9）整除 类似地，

$$A=(a_0-A_1)+11A_1=(a_0-a_1+A_2)+11(A_1-A_2)$$

$$= \quad =(a_0-a_1+ \cdot +(-1)^na_n)+11(A_1-A_2+ +(-1)^{n-2}A_{n-1}),$$

所以

$$f_6(A)=a_0-a_1+ \quad +(-1)^na_n\in\Omega(11)$$

如果在 10^k 进制中表示整数（这里 $k=2, 3,$ ），那么就可找到被 $10^k\pm1$ 型的数整除的准则，若 $k=2$，可得下面的被 11 及被 101 整除的准则．

$$f_7(A)=(a_1a_0)_{10}+(a_3a_2)_{10}+(a_5a_4)_{10}+ \quad \in\Omega(11),$$

$$f_8(A)=(a_1a_0)_{10}-(a_3a_2)_{10}+(a_5a_4)_{10}- \quad \Omega(101)$$

因为 $10^3+1=7\cdot11\cdot13$，所以就得到了被 7, 11, 及 13 整除的公共的准则 为了确定一个给定的整数是否能被 7, 11, 或 13 中的任何一个数整除，只要从右开始把这个数的数字以三位一组来分组，然后作这些组表示的数的交错和 这样，所得到的这个数被 7, 11, 或 13 整除，当且仅当原来的数相应地被 7, 11, 或 13 整除．因而，

$$f_9(A)=(a_2a_1a_0)-(a_5a_4a_3)_{10}+(a_8a_7a_6)- \in\Omega(7)\cap\Omega(11)\cap\Omega(13)$$

若整数 c 与 d 互素，则 d 整除 Ac，当且仅当 d 整除 A 这一思想也经常用来构造整除准则．设 d 是差 $10c-1$ 的一个除数，则 c 和 d 互素，并从等式

$$Ac=(cA_0+A_1)+(10c-1)A_1$$

推出 d 整除 A，当且仅当 d 整除 A_1+ca_0 例如，当 $d=19$, $c=2$ 时，差 $10c-1$ 被 19 整除。所以

$$f_{10}(A)=A_1+2a_0\in\Omega(19)$$

为了确定一个给定的整数是否被 19 整除，可反复应用这个准则 设 d 是 $10c+1$ 的一个除数 从等式

$$Ac=(ca_0-A_1)+(10c+1)A_1$$

推出 d 整除 A，当且仅当 d 整除 A_1-ca_0 若 $c=11$，则 $10c+1$ 被 37 整除，因而，

$$f_{11}(A)=A_1-11a_0\in\Omega(37)$$

相应的整除准则可表述如下 为了确定一个整数 A 是否被 37 整除，只要移去 A 的最后一位数，再从剩下的各位数字构成的数中减去 11 与移去的这位数字的乘积．这样，A 被 37 整除，当且仅当所得到的这个数被 37 整除。用类似的方法，可得到被形式为 $10^kc\pm1$ 的数整除的准则

参考文献

[1] Воробьев, Н Н, Признаки делимости, 2 изд, М, 1974

В И Нечаев 撰 潘承彪 译 戚鸣皋 校

环中的整除性 [divisibility in rings, делимость в кольце]

不带余数的整除性概念的推广（见**除法**（division））

环 A 中的一个元素 a 称为可被另一元素 $b\in A$ 整除的（divisible），如果存在 $c\in A$，使得 $a=bc$ 此时也称 b 整除 a，并且称 a 为 b 的倍元（multiple），b 为 a 的约元或除子（divisor） 用符号 $b|a$ 表示 a 可被 b 整除．任一结合交换环显然具有下述整除性质

如果 $b|a$ 且 $c|b$，则 $c|a$，

如果 $b|a$，$c\neq 0$，则 $cb|ca$，

如果 $c|a$ 且 $c|b$，则 $c|(a\pm b)$

这后两条性质等价于说可被 b 整除的元素的集合构成环 A 的一个理想 bA（由元素 b 生成的主理想） 当 A 是有幺元的环时，此理想含有 b.

在整环中，元素 a 和 b 可同时互相整除（$a|b$ 且 $b|a$），当且仅当它们是相伴的（associated），即 $a=\varepsilon b$，其中 ε 是可逆元 两个相伴元生成同一个主理想．根据定义，单位除子即是可逆元．环中的素元（prime element）是不含单位除子之外的其他真除子的非零元素 在整数环中，这样的元素称为素数（prime number），而在多项式环中这种元素称为不可约多项式（irreducible polynomial） 如果一个环，像整数环或多项式环那样，在其中有素因子分解的唯一性（在不考虑单位除子以及素因子序列的次序的意义下），则称此环为唯一分解环（factorial ring） 在这种环中，任一有限的元素集合都有最大公约元及最小公倍元，这两个量在可能相差一个单位除子的意义下都是唯一确定的

参考文献

[1] Kummer, E, Zur Theorie der komplexen Zahlen, *J Reine Angew Math*,, **35** (1847), 319－326

[2] Виноградов, И М, Основы теории чисел, 8 изд, М, 1972（英译本 Vinogradov, I M, Elements of number theory, Dover, reprint, 1954）

[3] Боревич, З И, Шафаревич, И Р, Теория чисел, 2 изд, М, 1972（英译本 Borevich, Z I and Shafarevich, I R, Number theory, Acad Press, 1966）

О А Иванова, С А Степанов 撰

【译注】 在众多文献中，上面所定义的素元称为不可约元（irreducible element），而素元是如下定义的整环中非零元素 p 称为素元，如果对于环中任意二元素 a,b，都有 $p|ab\Rightarrow p|a$ 或 $p|b$ 素元必为不可约元，但反之并不成立 当且仅当环是唯一分解环时，素元与不可约元是同样的．

参考文献

[B1] Hungerford, T W, Algebra, Springer, 1974（中译本 T W Hungerford、代数学，湖南教育出版社，1985）

赵春来 译 冯绪宁 校

可除群［divisible group，полная группа］

一个群，对任何元素 g 及任何整数 $n\neq 0$，方程 $x^n=g$ 都可解．这种群通常都理解为 Abel 群．可除群的重要例子有全部有理数的加法群和次数为 $p^k(k=1,2,$ $)$ 的全部复单位根的群（拟循环群（quasi-cyclic group）），其中 p 是素数 任意 Abel 可除群可分解为一些群的直和，其中每个群与以上例子中提到的群中之一同构 对非 Abel 可除群（也称完全群（complete group））知之甚少 任何可除群，除去单位元群外都是无限群 任一群可嵌入一适当的可除群中 如果某可除群的定义中的方程仅有一个解，就称该群为 D 群（D-group）．特别的例子有局部幂零的可除无扭群．

参考文献

[1] Курош, А Г Теория групп, 3 изд, М, 1967（英译本 Kurosh, A G, The theory of groups, 1－2, Chelsea, 1955－1956）

[2] Каргаполов М И, Мерзляков, Ю И, Основы теории групп, 3 изд, М, 1982（英译本 Kargapolov, M I and Merzlyakov, Yu I, Fundamantals of the theory of groups, Springer, 1979）

А Л Шмелькин 撰

【补注】 **Abel 群**（Abelian group）是可除的，当且仅当被看成 $\mathbf{Z}$ 模时是**内射模**（injective module）．令 $\mathbf{Q}_p$ 是 p-进数域，$\mathbf{Z}_p$ 是它的整数环，则对素数 p 的拟循环群是商群 $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$，对于嵌入 $\mathbf{Z}/(p^k)\to\mathbf{Z}/(p^{k+l})$，$1\mapsto p^l$，它也是内射极限 $\varinjlim \mathbf{Z}/(p^n)$ 亦见**分裂群**（split group），**可分裂群**（splittable group）

参考文献

[A1] Fuchs, L, Infinite abelian groups, 1, Acad Press, 1970, Chapt 4

石生明 译 许以超 校

除法［division，деление］

乘法（multiplication）的逆运算 求 x，使得对给定的 a 和 b，有 $bx=a$ 或 $xb=a$ 除法的结果 x 称为 a 与 b 之商（quotient）或比值（ratio），a 称为被除数（divided），b 称为除数（divisor）．除法运算用冒号（a b）、水平线（$\frac{b}{a}$）或斜线（a/b）来表示

在有理数域中，除法（用零除的情况除外）总是可能的，而且除法的结果是唯一的 在整数环中，除法并不总是可能的．例如，10 可被 5 除，但是不可被 3 除．如果在有理数域中，整数 a 除以整数 b，得到的商也是一个整数，则称 a 可被 b 整除（totally divisible，divisible without remainder），这时，记为 $b|a$ 复数的除法由下式定义

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(ac+bd)(bc-ad)i}{c^2+d^2},$$

用三角形式表示的复数的除法由下式给出

$$\frac{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{\rho(\cos\beta+i\sin\beta)}=\frac{r}{\rho}(\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta))$$

带余数的除法（division with remainder）实际上是

一种单独的运算，它与上面定义的除法不同 如果 a 和 $b\neq0$ 是整数，则 a 除以 b 的带余数的除法是 求整数 x 和 y，使得

$$a = bx+y,\ 其中\ 0\leqslant y<|b|$$

这里，a 是被除数（divided），b 是除数（divisor），x 是商（quotient），y 是余数（remainder）．这种运算总是可能的，结果是唯一的 如果 $y=0$，则称 b 可被 a 除尽 这时得到的商与通常的除法相同

系数取自给定域的多项式的带余式的除法可以类似地来定义 对于两个给定的多项式 $A(x)$ 和 $B(x)$，求多项式 $Q(x)$ 和 $R(x)$，使其满足条件

$$A(x) = Q(x)B(x)+R(x),$$

这里，$R(x)$ 的次数小于 $Q(x)$ 的次数．这种运算也总是可能的和唯一的．如果 $R(x)\equiv0$，则称 $A(x)$ 可被 $B(x)$ 除尽．

C A Степанов 撰

【补注】 除法（带余项的）与 **Euclid 算法**（Euclidean algorithm）有关．

复数 z 除以复数 $w\neq0$，可以看成把 z 乘以 $\overline{w}$，再除以 $|w|^2$，即

$$\frac{z}{w}=\frac{z\overline{w}}{|w|^2}$$

这里 $\overline{w}$ 是 w 的复共轭，$|w|$ 是 w 的模（见**复数**（complex number））．

张鸿林 译

可除代数 [division algebra, алгебра с делением]

域 F 上的一个代数 A，使得对任意 $a\neq0$ 及 b，方程 $ax=b$，$ya=b$ 在 A 中均可解 结合可除代数，当作为环考虑时是一个除环（skew-field） 它的中心 C 是一个域，且 $C\supseteq F$ 如果 $C=F$，则称可除代数 A 为中心可除代数（central division algebra） 域 F 上的有限维中心结合可除代数（在同构意义下）等同于域 F 的 **Brauer 群**（Brauer group）$B(F)$ 的元素 以 $[A\ \ F]$ 记 A 在 F 上的维数，设 $A\in B(F)$，L 是 A 的极大子域（$L\supseteq F$），则 $[A\ \ F]=[L\ \ F]^2$ 依据 **Frobenius 定理**（Frobenius theorem），实数域 $\mathbf{R}$ 上所有有限维结合可除代数，只有 $\mathbf{R}$ 自身、复数域和**四元数**（quaternion）代数 由此可知，群 $B(\mathbf{R})$ 是二阶循环群 如果去掉结合性的要求，则实数域上还有另一可除代数的例子 **Cayley-Dickson 代数**（Cayley-Dickson algebra）．这个代数是交错的，在 $\mathbf{R}$ 上维数是 8 如果 A 是 $\mathbf{R}$ 上有限维（不一定结合）可除代数，则 $[A\ \ \mathbf{R}]$ 可取值 1, 2, 4, 8

参考文献

[1] Курош, А Г, Лекции по общей алгебре, 2 изд, М, 1973（英译本 Kurosh, A G, Lectures on general algebra, Chelsea, 1963）

[2] Albert, A A, structure of algebras, Amer Math Soc, 1939

[3] Herstein, I, Noncommutative rings, Math Assoc Amer, 1968

[4] Adams, J F, On the non-existence of elements of Hopf invariant one, *Ann of Math*, **72** (1960), 1, 20-104

Е Н Кузьмин 撰

【补注】 有限域上的每个有限维中心可除代数必是交换的．对于无限维可除代数，情况就很不同了．因为由 Mokar-Limonov 的结果可知，这样一个代数包含一个二变元的自由代数

若一有限维中心可除代数 D 包含一个极大交换子域 L，它是 F 的 **Galois 扩张**（Galois extension），则 D 是 L 和 $G=\mathrm{Gal}(L/F)$ 的**交叉积**（cross product），也就是说，D 是一个由 $\{u_\sigma|\sigma\in G\}$ 生成的自由 L 模，乘积定义为

$$\begin{aligned} u_\sigma u_\tau &= c(\sigma,\tau)u_{\sigma\tau},\ 对某个\ c(\sigma,\tau)\in L^*, \\ u_\sigma\lambda &= \lambda^\sigma u_\sigma,\qquad 对\ \lambda\in L,\ \tau\in G \end{aligned} \tag{A1}$$

D 的结合性要求 $c\ \ G\times G\rightarrow L^*$ 代表 $H^2(G,L^*)$（第二 **Galois 上同调群**（Galois cohomology group））中的一个元素 代数中的一个基本问题是 A Albert 于 1931 年提出来的 是否每个有限维中心可除代数必然是一个叉积？ 1972 年 S Amitsur 利用由 **PI 代数**（PI-algebra）理论得到的泛可除代数的性质，举出一个反例（见[A2]） 另一些可除代数的例子是由 F van Oystaeyen 得到的（1972 年的学位论文，见[A3]），即泛叉积，这是由 Amitsur 和 D Saltman（1978）推广的一个概念，它将域 F 上相应于给定群 G 的所有叉积可除代数描述为泛可除代数的约化

参考文献

[A1] Schofield, A H, Representations of rings over skew fields, London Math Soc, 1986

[A2] Jacobson, N, PI algebras An introduction, Springer, 1975

[A3] Oystaeyen, F van, Prime spectra in non-commutative algebra, Springer, 1975

冯绪宁 译 裴定一 校

因数，因式，因子 [divisor, делитель]，亦称约数，除数，除子，整数 a 的

整数 b 是 a 的因数，如果 b 除 a 没有余数 换句话说，整数 a 的因数是一个整数 b，使对某个整数 c 有等式，$a=bc$ 成立．多项式 $A(x)$ 的因式（divisor）是一个多项式 $B(x)$，它除 $A(x)$ 没有余式（见**除法**（division）） 更一般地，在任意一个环 A 中，元素 $a\in A$ 的因子（divisor）是一个元素 $b\in A$，使对某个 $c\in A$ 有 $a=bc$ 成立

C A Степанов 撰 潘承彪 译 戚鸣皋 校

除子 [divisor, дивизор]

交换环中元素的因子概念的推广．首先由 E E

Kummer ([1]) 在研究分圆域时以"理想除子"的名称而引入

具有单位元素的交换整环 A 的除子理论就是要构造从 A 的非零元的乘法半群 A^* 到某个有唯一因式分解的半群 D_0 中的同态，D_0 的元素就是环 A 的（整）除子（(integral) divisor）. 有了除子理论就可把因式分解不一定唯一的环 A 中与素因子分解有关的一系列问题化为 D_0 中的素因子分解问题 元素 $a \in A^*$ 的象 $\varphi(a) \in D_0$ 记为 (a)，并称为元素 a 的主除子（principal divisor）. 称 $a \in A^*$ 能被除子 $\mathfrak{a} \in D_0$ 整除，如果 $\mathfrak{a}$ 在 D_0 内整除 (a).

更精确地说，设 D_0 是具有单位元素的自由 Abel 半群，它的自由生成元称为素除子（prime divisor），且设同态 $\varphi . A^* \to D_0$ 为已知 如果以下条件被满足，就说同态 φ 定义了环 A 的一个除子理论

1) 对 $a, b \in A^*$，在 A 内 a 整除 b，当且仅当在 D_0 内 (a) 整除 (b).

2) 对任意的 $\mathfrak{a} \in D_0$，

$$\{a \in A . \mathfrak{a} \text{ 整除 } (a)\} \cup \{0\}$$

是 A 的理想.

3) 如果 $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \in D_0$，且对任何一个 $a \in A^*$，(a) 可被 $\mathfrak{a}$ 整除，当且仅当 (a) 被 $\mathfrak{a}'$ 整除，则 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$.

如果同态 φ 存在，那么它可被上述条件唯一确定到差一个同构 核 $\ker\varphi$ 就是 A 的单位元素的群. D_0 的元素称为 A 的正除子（positive divisor）. 设 K 是 A 的分式域，且设 $D \supset D_0$ 是由素除子集合生成的自由 Abel 群 那么对任何 $c \in K^*$，$K^* = K \backslash 0$，可以定义一个主除子（principal divisor）$(c) \in D$ 如果 $c = a/b$，其中 $a, b \in A^*$，则 $(c) = (a)/(b)$ 群 D 的元素称为 A 的（或 K 的）分式除子（fractional divisor）(或简称除子（divisor)). 任何除子 $\mathfrak{a} \in D$ 可被写成

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{n_r}$$

的形式，其中 $\mathfrak{p}_i$ 是素除子 写成加法形式就是 $\mathfrak{a} = n_1\mathfrak{p}_1 + \cdots + n_r\mathfrak{p}_r$ 如果 $a \in K^*$，$(a) = \sum n_i \mathfrak{p}_i$ 那么映射 $a \to \sum n_i$ 是 K 上一个离散赋值，称为 K 的本质赋值（essential valuation） 同态 φ 可扩张为一个同态 $\psi \ K^* \to D$，使 $\psi(c) = (c)$，且含于正合列

$$1 \to U(A) \to K^* \xrightarrow{\psi} D \to C(A) \to 1$$

之中. 这里 $U(A)$ 是 A 的可逆元群，群 $C(A)$ 称为 A (或 K) 的除子类群（divisor class group） 属于由主除子子群所定义的同一个等价类里的两个除子称为等价的（equivalent）(在代数几何学中有时要考虑除子间许多其他的等价关系，这个等价关系就称为线性的（linear)).

除子理论可适用于任何 **Dedekind 环**（Dedekind ring），特别是代数数域里整元素的环，这时 D_0 的元素与环 A 的非零理想成一一对应（除子 $\mathfrak{a}$ 对应于 A 中被 $\mathfrak{a}$ 整除的所有元素所成的理想） 因此在 Dedekind 环里除子群也被称为理想群（group of ideals），除子类群称为理想类群（ideal class group）

代数数域的除子类群是有限的，代数数论中的很多问题涉及到它的阶（类数）的计算及群的结构（[2]）.

更一般地，除子理论对 **Krull 环**（Krull ring）（[11]）也有效 这时环的**除子理想**（divisorial ideal）半群起着 D_0 的作用，而分式除子理想群则起 D 的作用

Weil 除子（Weil divisor）的概念是交换环的分式除子理想的概念到代数簇或解析空间 X 里的推广 Weil 除子就是指 X 内余维数 1 的不可约闭子空间 W 的形式的有限整线性组合 $\sum n_W W$ 当所有的 $n_W \geq 0$ 时，Weil 除子称为正的（positive）或有效的（effective）. 所有的 Weil 除子构成一个群 $Z^1(X)$ (Weil 除子群（group of Weil divisors)). 当 X 是光滑代数簇时，Weil 除子的概念等同于余维数 1 的**代数闭链**（algebraic cycle）的概念

当 A 是 Noether 的 Krull 环时，A 中每个素除子理想 $\mathfrak{p}$ 在概形 $X = \mathrm{Spec}(A)$ 里确定了一个余维数 1 的子空间 $V(\mathfrak{p})$，而每个除子 $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{n_k}$ 则可等同于 Weil 除子 $\sum n_i V(\mathfrak{p})$

设 X 是正规概形，f 是 X 上有理（解析的情形为亚纯）函数. 主 Weil 除子（principal Weil divisor）被典范地定义为

$$(f) = \sum n_W W$$

这里 n_W 是 f 在 $\mathscr{O}_{X,W}$ 里的代表元关于子簇 W 的环 $\mathscr{O}_{X,W}$ 的离散赋值 如果

$$(f) = \sum n_W^+ W + \sum n_W^- W,$$

其中 $n_W^+ > 0$，$n_W^- < 0$，则 Weil 除子 $(f)_0 = \sum n_W^+ W$ 称为零点除子（divisor of the zeros），$\sum n_W^- W$ 称为函数 f 的极点除子（divisor of the poles） 主 Weil 除子的集合是群 $Z^1(X)$ 的子群 $Z_p^1(X)$ 商群 $Z^1(X)/Z_p^1(X)$ 记为 $C(X)$，称为概形 X 的除子类群（divisor class group）. 如果 $X = \mathrm{Spec}\, A$，其中 A 是 Noether 的 Krull 环，则 $C(X)$ 与环 A 的除子类群相同

设 K 是代数函数域. K 的除子有时被定义为 K 的秩 1 离散赋值的形式整线性组合. 如果 K 是单变量的代数函数域，则每个这样的除子可等同于它的完全非奇异模型的 Weil 除子.

设 X 是正则概形或复的簇，$D = \sum n_W W$ 是 Weil 除子. 对任何的点 $x \in X$ 存在开邻域 U，使得 D 在 U 上的限制

$$D|_U = \sum n_W (W \cap U)$$

是 U 上某个亚纯函数 f_U 的主除子 (f_U) 函数 f_U 被唯一确定到相差 U 上一个可逆函数，被称为除子 D 在邻域 U 里的局部方程，并且对应 $U \to f_U$ 确定了层 $M_X^*/\mathcal{O}_X^*$ 的一个截面 一般地说，环空间 $(X, \mathcal{O}_X)$ 上的 Cartier 除子 (Cartier divisor) 被定义为除子的芽层 $M_X^*/\mathcal{O}_X^*$ 的一个整体截面 这里 M_X 表示 X 上亚纯 (或有理) 函数的芽层，即使得每个开子集 $U \subset X$ 对应到环 $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ 的全分式环的层，而 M_X^* 和 $\mathcal{O}_X^*$ 则分别是 M_X 和 $\mathcal{O}_X$ 里可逆元的层．一个 Cartier 除子可被一族局部方程

$$f_i \in \Gamma(U_i, M_X^*)$$

所确定，其中 $\{U_i\}$ 是 X 的开覆盖，函数 f_i/f_j 则是层 $\mathcal{O}_X^*$ 在 $U_i \cap U_j$ 上的截面．特别地，一个亚纯函数 f 可定义一个除子 $\operatorname{div}(f)$，称为**主除子** (principal divisor)．使得 $(f_i)_x \notin \mathcal{O}_{X,x}^*$ 的 $x \in M$ 的集合称为**除子的支集** (support of the divisor) Cartier 除子构成 Abel 群 $\operatorname{Div}(X)$，而主除子构成它的子群 $\operatorname{Div}_l(X)$ 每个除子 $D \in \operatorname{Div}(X)$ 可确定一个包含在 M_X 里的可逆层 $\mathcal{O}_X(D)$ 如果 D 在覆盖 $\{U_i\}$ 上由局部方程 f_i 代表，则

$$\mathcal{O}_X(D)|_{U_i} = f_i^{-1}\mathcal{O}|_{U_i} \subset M_X|_{U_i}$$

对应 $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ 是群 $\operatorname{Div}(X)$ 到 **Picard 群** (Picard group) $\operatorname{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ 内的同态映射 这个同态包含在正合列

$$\Gamma(X, M_X^*) \to \operatorname{Div}(X) \xrightarrow{\delta} \operatorname{Pic}(X) \to H^1(X, M_X^*)$$

之中，上述正合列又来自层的正合列

$$0 \to \mathcal{O}_X^* \to M_X^* \to M_X^*/\mathcal{O}_X^* \to 0$$

从而 $\ker\delta = \operatorname{Div}_l(X)$ 如果 $D - D_1$ 是主除子，则称 D 和 D_1 **线性等价** (linearly equivalent) 如果 X 是拟射影代数簇或复 **Stein 空间** (Stein space)，则同态 δ $\operatorname{Div}(X) \to \operatorname{Pic}(X)$ 是满射，并诱导一个从除子的线性等价类群 $\operatorname{Div}(X)/\operatorname{Div}_l(X)$ 到 Picard 群 $\operatorname{Pic}(X)$ 上的同构．

当 X 为**复空间** (complex space) 时，提出了这样的问题 已给的除子何时成为主除子？这就是第二 **Cousin 问题** (Cousin problems)．例如复 Stein 空间 $(X, \mathcal{O})$ 上的除子类群是平凡的，当且仅当 $H^2(X, \mathbf{Z}) = 0$

除子 D 称为**有效的** (effctive) (或**正的** (positive))，如果 $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_X(D)$ 这时 $\mathcal{O}_X(-D)$ 是 $\mathcal{O}_X$ 内一个理想层，除子 D 的支集再赋予结构层 $\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-D)$ 后构成 X 里的一个子空间，仍记为 D

对于正规 Noether 概形或**正规解析空间** (normal analytic space) X，有一个自然同态

$$\operatorname{cyc} \quad \operatorname{Div}(X) \to Z^1(X),$$

把 $D \in \operatorname{Div}(X)$ 映到 $\sum n_W W$ 中，这里 $n_W = v_W(f)$，f 是 D 在邻域 W 里的局部方程，v_W 是对应于 W 的离散赋值 ([3]) 同态 cyc 是单射且把有效除子映到有效闭链 cyc 是一一映射，当且仅当 X 是局部唯一分解的 (例如当 X 是非奇异概形或解析流形时)．当 cyc 是一一映射时，Weil 除子与 Cartier 除子重合．

设 f $X' \to X$ 是概形的态射，且是余维数 1 平坦的．则对 X 上任何的 Cartier 或 Weil 除子 D，其逆象 $f^*(D)$ 有定义，并且 $\operatorname{cyc}(f^*(D)) = f^*(\operatorname{cyc}(D))$ 映射 $D \to f^*(D)$ 是群的同态，并把主除子映到主除子，因而定义了群的同态

$$f^* \quad \operatorname{Pic}(X) \to \operatorname{Pic}(X')$$

(相应地，

$$f^* \quad C(X) \to C(X'))$$

当 X' 是 X 内开子集，它的补集的余维数至少是 2 并且 f 为 X' 到 X 里的嵌入时，则 f^* $C(X) \to C(X')$ 是同构．当概形 X 为局部唯一分解时，f $\operatorname{Pic}(X) \to \operatorname{Pic}(X')$ 也是同构．

设 X 是 $\mathbf{C}$ 上光滑射影簇．X 上的任何一个除子 D 可确定一个同调类

$$[D] \in H_{2\dim X - 2}(X, \mathbf{Z})$$

Poincaré 对偶于 $[D]$ 的上同调类可以等同于可逆层 $\mathcal{O}_X(D)$ 的**陈 (省身) 类** (Chern class) $c_1(\mathcal{O}_X(D)) \in H^2(X, \mathbf{Z})$ 从而在 $\operatorname{Div}(X)$ 上有了同调等价关系．有一个除子的相交理论 ([7])，它能导出除子的代数等价概念 (见**代数闭链** (algebraic cycle)) 群

$$\operatorname{Pic}^0(X) = \operatorname{Div}_a(X)/\operatorname{Div}_l(X),$$

其中 $\operatorname{Div}_a(X)$ 代表代数等价于零的除子的群，自然地具有 Abel 簇的结构 (即 **Picard 簇** (Picard variety)，如果 X 是曲线，则它也称为 X 的 **Jacobi 簇** (Jacobi variety))．群 $\operatorname{Div}(X)/\operatorname{Div}_a(X)$ 称为 **Néron-Severi 群** (Néron-Severi group)，它具有有限多个生成元，后两个事实也可用于任意域上的代数簇

当 X 为一维复流形 (**Riemann 曲面** (Riemann surface)) 时，X 上的除子是一个有限线性组合

$$D = \sum_i k_i x_i,$$

其中 $k_i \in \mathbf{Z}$，$x_i \in X$ 数 $\sum k_i$ 称为**除子 D 的次数** (degree) 对于亏格 g 的紧 Riemann 曲面 X，零次除子类的群是一个 g 维 Abel 簇，并且等同于 **Picard 簇** (Picard variety) (或等同于 **Jacobi 簇** (Jacobi variety)) 当 f 是 X 上亚纯函数时，一个主除子是

$$\operatorname{div}(f) = \sum_i m_i x_i - \sum_j n_j y_j,$$

其中 x_i 是 f 的零点，y_j 是 f 的极点，m_i 和 n_j 是它们的重

数 于是 $\sum_i m_i = \sum_j n_j$，即一个主除子是零次的．X上的一个零次除子是主除子，当且仅当存在奇异1维链 C 使得

$$\partial C = D, \text{ 以及 } \int_C \omega = 0$$

对于 X 上所有的1次全纯形式 ω 都成立（Abel 定理（Abel theorem））．亦见 **Abel 微分**（Abelian differential）．

参考文献

[1] Kummer, E E , Ueber die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexe Zahlen in ihre Primfaktoren, *J Reine Angew Math* , 35 (1847), 327－367

[2] Боревич, З И , Шафаревич, И Р , Теория чисел, 2 изд , М , 1972 (英译本 Borevich, Z I and Shafarevich, I R , Number theory, Acad Press, 1966)

[3] Weil, A , Introduction a l'étude des variétes kahleriennes, Hermann, 1958

[4] Cartier, P , Questions de rationalité de diviseurs en geometrie algébrique, *Bull Soc Math France*, **86** (1958), 177－251

[5] Grothendieck, A , Eléments de geometrie algebrique IV Etude locale des schémas et des morphismes des schemas, *Publ Math IHES*, no 32 (1967)

[6] Mumford, D , Lectures on curves on an algebraic surface, Princeton Univ Press, 1966

[7] Шафаревич, И Р , Основы алгебраической геометрии, М , 1972 (英译本 Shafarevich, I R , Basic algebraic geometry, Springer, 1977)

[8] Chevalley, C , Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, Amer Math Soc , 1951

[9] Gunning, R C and Rossi, H , Analytic functions of several complex variables, Prentice - Hall, 1965

[10] Chern, S S , Complex manifolds without potential theory, Springer, 1979

[11] Bourbaki, N , Elements of mathematics Commutative algebra, Addison - Wesley, 1972 (译自法文)

[12] Springer, G , Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1957

В И Данилов, Л В Кузьмин, А Л Онищик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hartshorne, R , Algebraic geometry, Springer, 1977

[A2] Griffiths, Ph and Harris, J , Principles of algebraic geometry, Wiley - Interscience, 1978

[A3] Wells, R O , jr , Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980

陈志杰 译

除子类群 [divisor class group, классов дивизоров группа]

Krull 环（Krull ring）A 的**除子理想**（divisorial ideal）群 $D(A)$ 关于由主理想组成的子群 $F(A)$ 的商群 除子类群是交换群，通常记为 $C(A)$．群 $C(A)$ 由 A 中高度为1的素理想所在的类生成（见**理想的高度**（hight of an ideal））

在一定意义上说，除子类群度量了 A 的元素在不可约因子分解时偏离唯一性的程度．例如，唯一分解环具有平凡的除子类群 设 φ $A \to B$ 是 Krull 环的同态，那么在一定的附加条件下（例如，当 B 是 A 的整的或平坦的扩张时），存在着除子类群的一个典范同态 φ^*．$C(A) \to C(B)$ 如果 B 是 A 对于某个乘法系 S 的局部化（见**交换代数的局部化**（localization in a commutative algebra）），则 φ^* 是映上的，并且 φ^* 的核被与 S 相交的除子素理想所生成（永田定理（Nagata theorem）） 如果 B 是 A 上的多项式环，则典范同态 φ^* 是一一对应（这是 Gauss 定理，即域上的多项式环是唯一分解环的推广） 对于更一般的情形，当 B 是某个 A 模 M 的对称 Noether 代数时，只要所有的对称幂 $S^{(i)}(M)$ 都是自反的，则典范同态 φ^* 是一一对应．如果 B 是 A 上的形式幂级数环，则 φ^* 是单射（甚至是左可逆的），但一般讲来不是一一对应．

由可逆理想生成的 $C(A)$ 的子群同构于 A 的 **Picard 群**（Picard group）$\mathrm{Pic}(A)$，并且 $\mathrm{Pic}(A)$ 和 $C(A)$ 的函子性质是相容的 于是，如果 B 是 A 的忠实平坦扩张且 φ^* $\mathrm{Pic}(A) \to \mathrm{Pic}(B)$ 是单射，则 φ^* $C(A) \to C(B)$ 也是单射 特别地，如果局部环 A 的完全化 $\hat{A}$ 是唯一分解环，则 A 也是因子分解环（森光定理（Mori theorem））

设 A 是正规 Noether 环 群 $\mathrm{Pic}(A)$ 与 $C(A)$ 相同，当且仅当 A 在局部上是唯一分解环（factorial ring），也就是说，所有的局部环 A_m 是唯一分解环（例如，当 A 是正则环时）．更精确地，如果 $F=\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ $A_{\mathfrak{p}}$ 是因子分解环$\}$，则 $C(A)=\lim_{\to} \mathrm{Pic}(U)$，这里 U 取遍 $\mathrm{Spec}(A)$ 的包含 F 的开子概形系．这使得人们可以定义正规概形的除子类群（[5]）—— Weil 除子类群（见**除子**（divisor））

人们研究除子类群首先是对代数数环进行的．关于这些群的有限性的最早结果是 E Kummer 得到的．除子类群的性质与数论问题，例如 Fermat 定理，有着密切的联系 在 [1] 中给出了某些代数数环的除子类群的阶的表．

除子类群理论的全面推广是由 W Krull 得到的，P Samuel 研究了除子类群的函子特征，并且提出了计算它们的某些方法（例如，下降法）．研究除子类群的另外一些途径基于与 Picard 群的类比，同时也应用上同调与代数几何的方法

每个 Abel 群都可以作为除子类群出现．

参考文献

[1] Боревич, З И , Шафаревич, И Р , Теория чисел, М , 1964 (英译本 Borevich, Z I , and Shafarevich, I R , Number theory, Acad Press, 1966).

[2] Bourbakı, N , Elements of mathematıcs Commutatıve algebra, Addıson - Wesley, 1972 (译自法文)
[3] Samuel, P , Classes de dıvıseurs et dérıvées logarıthmıques, *Topology*, 3(1964), 81−96
[4] Fossum, R M , The dıvısor class group of a Krull domaın, Sprınger, 1973
[5] Grothendıeck, A and Dıeudonné, J , Eléments de géometry algébrıque IV, *Publ Math IHES*, 32(1967)

В И Данилов 撰

【补注】 见类域论 (class field theory)，以了解代数整数环的除子类群与域的 Abel 扩张之间的联系

赵春来 译 冯绪宁 校

除数问题 [divisor problems, делителей проблемы]

数论中与求和函数

$$D(x)=\sum_{n\leqslant x}\tau(n),\quad D_k(x)=\sum_{n\leqslant x}\tau_k(n)$$

(其中，$\tau(n)$是 n 的除数个数，而 $\tau_k(n)(k\geqslant 2)$是表 n 为 k 个自然数乘积的表法数) 及其变形的渐近性态有关的问题．

Dırıchlet 除数问题 (Dırıchlet dıvısor problem) 这是在渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n)=x\ln x+(2C-1)x+\Delta(x)$$

中余项 $\Delta(x)$ 的最佳估计问题，其中 C 是 **Euler 常数** (Euler constant) 1849 年 P Dırıchlet 首先考虑了和式

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n)=D(x)$$

的渐近式．他根据这个和等于在双曲线 $uv=x$ 下面具有正整数坐标的点 (u,v) 的个数这一事实证明了

$$D(x)=x\ln x+(2C-1)x+O(\sqrt{x}).$$

这就是著名的关于除数个数的 Dırıchlet 公式 (Dırıchlet formula for the number of dıvısors)

除数问题是典范之一，在这基础上估计各种类型扩展域内整点数的方法发展起来了，设 θ 是关系式 $\Delta x\ll x^{\alpha}$ 中数 α 的最大下界 根据 Dırıchlet 的结果，$\theta\leqslant 1/2$．Г Ф Вороной 证明了 $\theta\leqslant 1/3$ 后来相继得到了下面的估计

$$\theta\leqslant\frac{33}{100},\ \theta\leqslant\frac{27}{82},\ \theta\leqslant\frac{15}{46},\ \theta\leqslant\frac{13}{40}$$

$\Delta(x)$ 的真正的阶还不知道 (1988)，依照某种假设有

$$\Delta(x)\ll x^{1/4}\ln^2 x$$

另一方面，G H Hardy 证明了 $\theta\geqslant 1/4$，更精确地说证明了

$$\varliminf_{x\to\infty}\frac{\Delta(x)}{(x\ln x)^{1/4}\ln\ln x}<0<\varlimsup_{x\to\infty}\frac{\Delta(x)}{(x\ln x)^{1/4}\ln\ln x}.$$

此外，已知另一公式

$$\int_0^x\Delta^2(y)dy=Ax^{3/2}+O(x\ln^5 x),$$

其中 A 是常数，这公式表明关于 $\Delta(x)$ 的阶的假设在"平均"意义上是正确的．

广义除数问题 (generalızed dıvısor problem) 这是寻求和

$$\sum_{n\leqslant x}\tau_k(n)=D_k(x)$$

当 $x\to\infty$ 时的最佳渐近表示式的问题，特别地，若 $k=2$，则

$$\tau_2(n)=\tau(n),\quad D_2(x)=D(x)$$

广义除数问题与 Rıemann ζ **函数** (zeta-functıon) $\zeta(s)$ 当 s 的值在临界带内时的性态密切相关．事实上，对于非整数 $x>0$，$c>1$，公式

$$D_k(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\zeta^k(s)\frac{x^s}{s}\,ds$$

成立 这里的被积函数在点 $s=1$ 有一 k 级极点，具有形如 $xP_k(\ln x)$ 的残数，其中 P_k 是 $k-1$ 次多项式．

设

$$D_k(x)=x\,P_k(\ln x)+\Delta_k(x),$$

并设 $\gamma_k<\gamma<1$，其中 γ_k 是使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\zeta(\sigma+it)|^{2k}}{|\sigma+it|^2}\,dt<\infty$$

成立的数 σ 的最大下界．则公式

$$\Delta_k(x)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT}\zeta^k(s)\frac{x^s}{s}\,ds,$$

与 Mellın 公式 (Mellın formula) 的反转公式

$$\frac{\zeta^k(s)}{s}=\int_0^{\infty}\Delta_k(x)x^{-s-1}dx,\quad s=\sigma+it$$

皆成立，其中积分对于 $\gamma_k<\sigma<1$ 在均方意义下存在

在关于 $D_k(x)$ 的公式中，对余项 $\Delta_k(x)$ 的估计与所期望的仍相距甚远 (1988) 对任意 $\varepsilon>0$，设 α_k 是使

$$\Delta_k(x)\ll x^{\alpha+\varepsilon}$$

成立的数 α 的最小值 已知有下面的估计·

$$\alpha_k\leqslant\frac{k-1}{k+1},$$

$$\alpha_k\leqslant\frac{k-1}{k+2},\quad k\geqslant 4.$$

对个别 k 的值可以有更精确的估计

$$\alpha_3 \geqslant \frac{37}{75}, \alpha_7 \geqslant \frac{71}{107}, \alpha_8 \leqslant \frac{41}{59}, \alpha_9 \leqslant \frac{26}{35}, \alpha_{11} \leqslant \frac{19}{25}.$$

在 [3] 中发展了 **Виноградов 法**（Vinogradov method）的思想，得到了关于 α_k 的上界估计的最新结果 存在绝对常数 $c>0$，使得

$$\alpha_k \leqslant 1-\frac{c}{k^{2/3}}, \quad k=2,3, \quad .$$

这个估计来自对 $\zeta(s)$ 在临界带内的一个估计．对于 $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1$，$|t| \geqslant 2$，存在常数 $a>1$，使得

$$\zeta(\sigma+it) \ll |t|^{a(1-\sigma)^{3/2}} \ln |t|.$$

另一方面，Hardy 证明了

$$\alpha_k \geqslant \frac{k-1}{2k}$$

关于 $\Delta_k(x)$ 的值有一假设 对所有 $k \geqslant 2$，

$$\alpha_k = \frac{k-1}{2k}$$

但是还不能证实，即使解决了 **Lindelöf 假设**（Lindelöf hypothesis） 对于任意 $\varepsilon>0$，$\sigma>1/2$，有

$$\zeta(\sigma+it) \ll |t|^{\varepsilon},$$

也无法予以证明

除数问题的进一步推广如下（[4]） 当 $x \geqslant 1$ 时，关于整数 $k \geqslant 2$，$m \geqslant 1$ 一致地有

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\tau_k^m(n) < A_k^{(m)}(\ln x+k^m-1)^{k^m-1},$$

其中

$$A_k^{(m)}=\frac{k^m}{(k!)^{(k^m-1)/(k-1)}}$$

算术级数中的除数问题（divisor problem in arithmetical progressions）．这是关于 x 和 d（$0 \leqslant l \leqslant d$，$(l,d)=1$）一致的和

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l(\bmod d)}} \tau_k^m(n)=D_k^{(m)}(x;d,l)$$

的估计问题．这类和用 L 函数理论的解析方法进行研究，在数论的大量问题中（[7]）非常重要 在最简单的情形（$m=1$）下得到的渐近表示式有

当 $k=2$，对于 $d \leqslant x^{2/3}$（见 [5]），

当 $k=4$，对于 $d \leqslant x^{1/2}$（见 [6]），

当 $k \geqslant 4$，对于 $d \leqslant x^{2/k}/\ln^c x$（见 [8]）．对任意 $m \geqslant 1$ 和 $k=2$，已求得（[9]）增长的真正的阶（$\asymp$）当 $d \leqslant x^{1-\alpha}$，$0<\alpha<1/2$ 时为

$$D_2^{(m)}(x,d,l) \asymp \frac{x}{d}\left[\ln\frac{x}{d}\prod_{p\mid d}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right]^{2^m-1}$$

在一般情况下已证明有（[10]）

$$\sum_{d\leqslant x^{1/2-\varepsilon}}\max_{l}|D_k^{(m)}(x,d,l)-A_k^{(m)}(x,d)| < x(\ln x)^{-M},$$

这里 $A_k^{(m)}(x,d)$ 是增长的期望主要项，M 是可以任意大的正的常数，而 $\varepsilon>0$ 是任意数．

特别地，最后的不等式表明，对于任意整数 $k \geqslant 2$，$m \geqslant 1$，和 $D_k^{(m)}(x,d,l)$ 与具有公差 $d \leqslant x^{1/2-\varepsilon}$ 的全部本原算术级数在"平均"意义上有相同的增长的主要项．

参考文献

[1] Titchmarsh, E C, The theory of the Riemann zeta-function, Clarendon, 1951

[2] Hua, L K, Abschatzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, in Enzyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Vol 1, 1959 Heft 13, Teil 1（中译本 华罗庚，指数和的估计及其在数论中的应用，科学出版社，1963）

[3] Карацуба, А А, 《Тр Матем ин-та АН СССР》, **112** (1971), 241 − 255

[4] Марджанишвили, К К, 《Докл АН СССР》, **22** (1939), 391 − 393

[5] Hooley, C, An asymptotic formula in the theory of numbers, *Proc London Math Soc* (3), **7** (1957), 27, 393 − 413.

[6] Линник, Ю В, 《Матем сб》, **53**(1961), 1, 3 − 38.

[7] Линник, Ю В, Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л, 1961（英译本 Linnik, Yu V, The dispersion method in binary additive problems, Amer Math Soc, 1963）

[8] Лаврик, А Ф, 《Изв АН СССР Сер Матем》, **30** (1966), 2, 443 − 448

[9] Виноградов, А И, 《Успехи матем наук》, **12** (1957), 4, 277 − 280

[10] Виноградов, А И, 《Изв АН СССР Сер матем》, **29** (1965), 4, 903 − 934

А Ф Лаврик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hooley, C, On a new technique and its applications to the theory of numbers, *Proc London Math Soc* (3), **38** (1979), 115 − 151

[A2] Chandrasekharan, K, Arithmetical functions, Springer, 1970, Chapt VIII

【译注】 关于 Dirichlet 除数问题，目前（1922）已知的最好结果是

$$\theta \leqslant \frac{7}{22},$$

这个结果是 H Iwaniec 与 C J. Mozzochi 于 1988 年得到的（见 [B1]）

参考文献

[B1] Iwaniec, H and Mozzochi, C J, On the divisor and circle problems, *J Number Theory*, **29** (1988), 60 − 93

戚鸣皋 译 张明尧 校

除子理想 [divisorial ideal, дивизориальный идеал]

一个交换整环 A 中的**分式理想** (fractional ideal) $\mathfrak{a}$，使得 $\mathfrak{a}=A\ (A\ \mathfrak{a})$ (这里 $A\ \mathfrak{a}$ 表示环 A 的分式域中满足 $x\mathfrak{a}\subseteq A$ 的元素 x 的集合). 一个除子理想有时称为环的一个除子 (divisor) 任取一个分式理想 $\mathfrak{a}$, $\tilde{\mathfrak{a}}=A\ (A\ \mathfrak{a})$ 总是除子理想. 环 A 的除子理想集合 $D(A)$ 是一个具有格序的交换幺半群，两除子理想 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 的乘积定义为 $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$，整除子理想被认为是正的 (positive) 或有效的 幺半群 $D(A)$ 是一个群，当且仅当环 A 是完全整闭的，这时 $A\ \mathfrak{a}$ 是除子 $\mathfrak{a}$ 的逆

通常在 Krull 环 (即 Noether 整闭环) 中考虑除子理想 这时高度为 1 的素理想是除子理想并组成除子 Abel 群 $D(A)$ 的基. 事实上，这个结果应归功于 E Artin 和 B L van der Wearden ([1])，作为他们关于理想的拟相等理论的一部分 (两个理想 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 称为拟相等的 (quasi-equal)，是指 $\tilde{\mathfrak{a}}=\tilde{\mathfrak{b}}$) 这个理论形成了近世代数的一个主要分支 ——理想分解的研究.

主分式理想和可逆分式理想都是除子理想，并分别形成 $D(A)$ 的子群 $F(A)$ 和 $J(A)$ 商群 $D(A)/F(A)=C(A)$ 和 $J(A)/F(A)=\mathrm{Pic}(A)$ 分别称为 A 的**除子类群** (divisor class group) 和 **Picard 群** (Picard group)

参考文献

[1] Waerden, B L van der, Algebra, 1-2 Springer, 1967-1971 (译自德文 中译本 B L 范德瓦尔登，代数学，I-II，科学出版社，1978)

[2] Bourbaki, N, Elements of mathematics Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972 (译自法文)

В И Данилов 撰 冯绪宁 译 裴定一 校

十二面体空间 [dodecahedral space, додекаэдра пространство]

Poincaré 空间 (Poincaré space) 的第一个例子 是由 H Poincaré 于 1904 年构造的 它是将十二面体的相对面彼此相对旋转 $\frac{\pi}{5}$ 角度后粘合而成的. 十二面体空间是具有 **Seifert 纤维化** (Seifert fibration) 的亏格为 2 的流形，并且是唯一知道的具有有限基本群的 Poincaré 空间 十二面体空间是三维球面上的二元二十面体群的自由作用的轨道空间

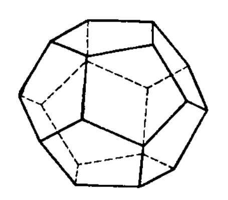
参考文献

[1] Seifert, H and Trelfall, W, Lehrbuch der Topologie, Chelsea, reprint, 1980

А В Чернавский 撰 罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

正十二面体 [(regular) dodecahedron, (правильный) додекаэдр]

五种**正多面体** (regular polyhedra) 之一. 正十二面体有 12 个 (正五边形的) 面、30 个棱、20 个顶点 (在每个顶点上有三个棱相交). 如果正十二面体的边



长为 a，则它的体积为

$$v=\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})\approx 7\,6631a^3.$$

БС Э-3 张鸿林 译

区域 [domain, область]

拓扑空间 Z 中的非空连通开集 区域 D 的闭包 $\overline{D}$ 称为闭域 (closed domain)，闭集 $\mathrm{Fr}\,D=\overline{D}\setminus D$ 称为 D 的边界 (boundary) 点 $x\in D$ 也称为 D 的内点 (interior point)，点 $x\in\mathrm{Fr}D$ 称为 D 的边界点 (boundary point)，余集 $C\overline{D}=Z\setminus\overline{D}$ 的点称为 D 的外点 (exterior point)

实 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$, $n\geqslant 1$ 中 (或复空间 $\mathbf{C}^m$, $m\geqslant 1$ 中，或 Riemann 曲面上，或 Riemann 区域中) 区域 D 的任何两个点可用完全位于 D 内的路径 (或弧段) 相连，如果 $D\subset\mathbf{R}^n$ 或 $D\subset\mathbf{C}^m$，则甚至可用具有有限条边的折线相连. 有限或无穷开区间是实直线 $\mathbf{R}=\mathbf{R}^1$ 中仅有的区域，其边界由至多两个点构成. 平面区域 D 称为单连通的 (simply connected)，如果 D 中任一闭路径可以保持位于 D 内而连续变形为一个点 一般地，(开) 平面 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{C}=\mathbf{C}^1$ 中单连通域的边界可由任何 k 个 $(0\leqslant k\leqslant\infty)$ 连通分支组成. 如果把 D 看作紧扩张平面 $\overline{\mathbf{R}}^2$ 或 $\overline{\mathbf{C}}$ 中的区域且其边界分支数 k 为有限，则 k 称为 D 的连通阶 (connectivity order)，当 $k>1$ 时，D 称为多连通的 (multiply connected). 换言之，连通阶数 k 比把 D 的边界分支两两相连以使得 D 成为单连通区域所必须的最少截线数多 1 $k=2$ 时 D 称为双连通的 (doubly connected)，$k=3$ 时称为三连通的 (triply connected)，等等，$k<\infty$ 时 D 称为有限连通域 (finitely-connected domains)，而 $k=\infty$ 时称为无限连通域 (infinitely-connected domain) 平面区域的连通阶刻画了它的拓扑类型 $\mathbf{R}^n\,(n\geqslant 3)$ 或 $\mathbf{C}^m\,(m\geqslant 2)$ 中区域的拓扑类型不可能单用一个数刻画

即使对于平面单连通域 D，边界 $\mathrm{Fr}D$ 的度量结构就可能非常复杂 (见**极限元** (limit elements)). 特别是，其边界点可以分为可达点 (accessible point) $x_0\in\mathrm{Fr}D$，即存在位于 D 内连接 x_0 与任一点 $x(0)\in D$ 的路径 $x(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $x(1)=x_0$，与不可达点 (inaccessible point)，即不存在这样的路径 (见**可达边界点** (attainable boundary point)). 对任一平面单连通域 D，$\mathrm{Fr}\,D$ 的可达点集在 $\mathrm{Fr}\,D$ 内处处稠密

$\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^m$ 中的区域 D 称为有界的（bounded）或有限的（finite），如果

$$\sup\{|x|: x\in D\}<\infty,$$

否则称为无界的（unbounded）或无限的（infinite）. 闭平面 Jordan 曲线把平面 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{C}$ 划分为两个 Jordan 区域（Jordan domain） 有限区域 D^+ 与无限区域 D^-. Jordan 区域的所有边界点都是可达的.

Е Д Соломенцев 撰

【补注】 D 的边界 $\mathrm{Fr}\,D$ 也常记作 $\mathrm{b}D$ 或 ∂D.

从定义可知，一个区域为有界，当(且仅当)它包含于中心在坐标原点，半径为有限的一个球内.

沈永欢 译

双圆形域 [**domain, double-circled, двоякокруговая область**]

二维复空间 $\mathbf{C}^2$ 中具有如下性质的区域 D 存在一个点（a_1, a_2）使得对区域 D 中每个点（z_1^0, z_2^0），所有坐标为

$$z_j=\{a_j+(z_j^0-a_j)e^{i\varphi_j}\},\ 0\leqslant\varphi_j\leqslant 2\pi,\ j=1,\ 2,$$

的点(z_1, z_2)属于 D 点（a_1, a_2）称为此双圆形域的中心（centre） 如果一个双圆形域包含它自已的中心，就称为完全的（complete），否则就称为不完全的（incomplete） 完全双圆形域的例子是球或双圆柱，一个不完全的双圆形域的例子是圆环的 Descartes 积. n 圆形域或 **Reinhardt 区域**（Reinhardt domain）由类似的方法来定义.

М Ширинбеков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hormander, L , An introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, 1973, Chapt 2 4

陈志华 译

定义域 [**domain of definition, область определения**], 函数的

一个集合，所考虑的函数是在这个集合上给出的，即一切元素 x 的集合 X, 函数 f 使每个 $x\in X$ 对应于另一个集合 Y 的元素 y 因此，如果 f $X\rightarrow Y$, 则 X 称为函数 f 的定义域.

Л Д Кудрявцев 撰

【补注】 如果 X 表示 f 的定义域，则 f 的值的集合即 $f(x)$, 称为 f 的**值域**（range of values）

张鸿林 译

全纯域 [**domain of holomorphy, голоморфности область**]

复空间 $\mathbf{C}^n$ 中的一个区域 D, 存在一个在 D 上的全纯函数 $f(z)$ 不能全纯扩张到更大的域，则此域称为 $f(z)$ 的自然定义域(natural domain of definition). 例如函数

$$\sum_{k=1}^{\infty}Z^{k!}$$

的自然定义域是单位圆盘，因而它是 $\mathbf{C}^1$ 中的一个全纯域. $\mathbf{C}^1$ 中的每一个区域都是全纯域. 相反在 $\mathbf{C}^n(n\geqslant 2)$ 中，并非所有的区域都是全纯域. 例如形式为 $D\setminus K$ 的区域都不是全纯域. 此处 K 是包含在 D 内的紧统.

一个区域 $D\subset\mathbf{C}^n$ 称为全纯凸的（holomorphically convex），如果对每个紧集 $A\subset D$, 存在一个包含 A 的紧集 $F_A\subset D$, 使对任意的点 $z_0\in D\setminus F_A$, 存在一个在 D 上全纯的函数 $f(z)$, 使得

$$\sup_{z\in A}|f(z)|<|f(z_0)|$$

一个区域 D 是全纯域，当且仅当它是全纯凸的（Cartan-Thullen 定理（Cartan-Thullen theorem）） 一个区域 D 是全纯域，当且仅当对每个点 $z_0\in\partial D$ 有一个障碍（barrier）函数，即一个在 D 上全纯的函数 $f_{Z_0}(z)$ 不能全纯开拓到 z_0 例如 D 是 $\mathbf{C}^1$ 中的任意的一个区域，则函数 $(z-z_0)^{-1}$ 是在任意点 $z_0\in\partial D$ 的一个障碍函数，所以 D 是一个全纯域，如果 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个凸域且

$$\mathrm{Re}(a,\ z-z_0)=\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{n}a_i(z_i-z_{0i})=0$$

是在点 $z_0\in\partial D$ 的支撑平面，则函数 $(a,\ z-z_0)^{-1}$ 是在 z_0 的障碍函数，因此 $\mathbf{C}^n$ 中的任一凸域都是全纯域.

全纯域之交是全纯域，任一**双全纯映射**（biholomorphic mapping）将全纯域映成全纯域（Behnke-Stein 定理（Behnke-Stein theorem））

一个区域 $D\subset\mathbf{C}^n$ 称为伪凸的（pseudo-convex），若函数 $-\ln\Delta_D(Z)$ 是一个在 D 内的**多重次调和函数**（plurisubharmonic function），这里 $\Delta_D(Z)$ 是从点 z 到 ∂D 的距离 一个区域是全纯域，当且仅当它是伪凸的（冈洁定理（Oka theorem）） 这构成了 1911 年 E Levi 提出的 Levi 问题（Levi problem）的内容，在冈洁定理中上述条件是充分的. 对 $n=2$, Levi 问题在 1942 年为冈洁所解决，对 $n\geqslant 2$, 是由冈洁，F Norguet 和 H Bremermann 在 1953－1954 年各自独立地解决的.

一个有充分光滑边界的全纯域能被局部地描述 一个区域 $D\subset C^n$ 称为在点 $Z_0\in\partial D$ 是伪凸的，如果存在一个 z_0 的邻域 V 和一个类 C^2 中实值函数 $\varphi(z)$, 使得 a) $D\cap V=\{z\ \ \varphi(z)<0,\ z\in V\}$, b) 在平面

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial\varphi(z_0)}{\partial z_i}=0$$

上，Hesse 形式

$$\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi(z_0)}{\partial z_i\partial\overline{z}_k}a_i\overline{a}_k\geqslant 0$$

如在条件 b)中，对所有考虑中的向量 $a \neq 0$，严格不等式成立，则称区域 D 在点 z_0 是严格伪凸的（strictly peusdo-convex） 一个区域 D 称为在 Levi 意义下（严格）伪凸，如果它在所有的点 $z_0 \in \partial D$ 都是（严格）伪凸的

如果一个区域是在 Levi 意义下严格伪凸的，则它是伪凸的（Levi 定理（Levi theorem））

定义在一个初始邻域 V 上的函数 $f(z)$ 的全纯域可以应用全纯延拓原理，通过 Taylor 级数展开来构造，然后，在这样构造出来的区域中可以使得全纯函数 $f(z)$ 不是单值的 为了使函数单值，区域的概念必须扩大 为此引入 $\mathbf{C}^n$ 上的 Riemann 区域（Riemann domain）（**覆叠域**（covering domain），多叶域（multi-sheeted domain））（$\mathbf{C}^1$ 上的 Riemann 域就是 **Riemann 曲面**（Riemann surface）） 全纯域的概念可推广到 Riemann 域，甚至更一般结构的对象 —— 复流形和复空间．全纯域概念的推广引出了 **Stein 空间**（Stein space）

参考文献

[1] Владимиров, В С, Методы теории функций многих комплексных переменных, М, 1964（英译本 Vladimirov, V S,, Methods of the theory of functions of several complex variables, M I T, 1966）

[2] Шабат, Б В, Введение в комплексый анализ, 2 изд, ч 2 М, 1976

[3] Hormander, L, Introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, 1973

В С Владимиров 撰

【补注】 下述结果是通常视为上面提到的 Behnke-Stein 定理（Behnke-Stein theorem）的一部分 全纯域的（可数）增序列的并是一个全纯域

对 Riemann 曲面上的全纯域的概念，见 **Riemann 域**（Riemannian domain） 对伪凸域等，亦见**伪凸与伪凹**（psendo-convex and pseudo-concave） 陈志华 译

个体域 [**domain of individuals, предметная область**]，全域（universe），逻辑中的

模型论的一个术语，指一阶谓词演算给定的一个形式语言中个体（客体）变元变化的范围．每个这样的语言都可以描述为集合

$$L = \{P_0, \quad , P_n, \quad , F_0, \quad , F_m, \quad \},$$

其中 $P_0, \quad , P_n,$ 是谓词符号，$F_0, \quad , F_m,$ 是函数符号，对每个符号都有一个确定的数表明它是几元的（谓词或函数） L 的一个模型（或代数系统）$\mathfrak{M}$是由一个非空集 M 和一个解释函数 I 确定的，I 给每个 n 元谓词符号指派 M 的一个 n 元关系，即 M 的 Descartes 积 M^n 的一个子集，给每个 n 元函数符号指派一个 n 元函数 $M^n \to M$ 集合 M 就称为模型 $\mathfrak{M}$的个体域（或全域）

参考文献

[1] Kleene, S C, Mathematical logic, Wiley, 1967

[2] Chang, C C, Keisler, H J, Model theory, North-Holland, 1973

[3] Ершов, Ю Л, Палютин, Е А, Математическая логика, М, 1979

В Н Гришин 撰 沈复兴 译

影响域 [**domain of influence, влияния область**]

点 M（点 M 的集合 A）的影响域是所有这样一些点的集合 $B(M)$（相应地，$B(A)$），在这些点处微分方程或微分方程组的解随着解在点 M（相应地，集合 A）处的变化而改变 在最简单的线性偏微分方程情形下，影响域不依赖于解 对大多数非线性问题，影响域既依赖于解本身，也依赖于扰动特性 在这样的情形下考虑无穷小扰动．对于双曲型方程，点 M 的影响域是通过点 M 的特征锥及其内部的并（见**特征流形**（characteristic manifold）），对于抛物型和椭圆型方程，点 M 的影响域通常就是解的定义域

Б Л Рождественский 撰

【补注】 这个概念通常是在有关**一阶偏微分方程**（differential equation, partial, of the first order）或一般地，**双曲型偏微分方程**（hyperbolic partial differential equation）的初值问题（亦称 **Cauchy 问题**（Cauchy problem））的叙述中出现 对后一情形的更加确切的讨论见[A1]，第 6 章第 Ⅰ 部分第 7 节

与此相关的一个概念是依赖域（domain of dependence）（见 **Cauchy 问题**（Cauchy problem））

参考文献

[A1] Courant, R and Hilbert, D, Methods of mathematical physics, Partial differential equations, 2, Interscience, 1965（译自德文）（中译本 R 柯朗，D 希尔伯特，数学物理方法，Ⅱ 科学出版社，1977）

孙和生 译 陆柱家 校

支配空间 [**dominant, доминанта**]，拓扑空间 X 的

以 X 作为收缩核的任意拓扑空间（见**拓扑空间的收缩核**（retract of a topological space））．

А В Чернавский 撰

【补注】 这不是标准的西方术语，事实上，西方不使用这一概念 支配的标准西方用法是 空间 X 支配空间 Y，当且仅当存在连续映射 $f \quad X \to Y$ 及 $g \quad Y \to X$，使得 fg 同伦于（Y 上的）恒等映射

罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

控制 [**domination, доминирование**]

1）微分算子之间用**特征多项式**（characteristic polynomial）$P(\xi)$ 来表示的一种次序关系．例如，如果

$$\widetilde{P}^2(\xi) = \sum_{|\alpha| \geqslant 0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2,$$

$$P^{(\alpha)}(\xi)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\xi_1^{\alpha_1}\cdots\partial\xi_n^{\alpha_n}}P(\xi)\equiv i^{|\alpha|}D^{\alpha}P(\xi),\ \xi\in\mathbf{R}^n,$$

那么当对于任何 $\xi\in\mathbf{R}^n$，不等式

$$\frac{\widetilde{Q}(\xi)}{\widetilde{P}(\xi)}<常数$$

成立时，称 $P(D)$ 强于 $Q(D)$

控制还有另一些定义（见[1]）

参考文献

[1] Hormander, L , Linear partial differential operators, Springer, 1963（中译本 L 霍曼德尔，线性偏微分算子，科学出版社，1980） А А Дезин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hormander, L V , The analysis of linear partial differential operators, 2, Springer, 1983, §10 4

2）对策论中的控制（domination in the theory of games） 表示一个对象**策略（对策论中的）**（strategy (in game theory)），分配（sharing））对于另一个对象的优势的一种关系 策略的控制 局中人 i 的一个策略 s 控制（严格控制）他的策略 t，如果在包含 s 的任何情形中他的支付不小于（大于）在由其余局中人的相同策略和策略 t 所构成的情形中他的支付 （在一个**合作对策**（cooperative game）中的）分配的控制 一个分配 x 控制另一个分配 y（记为 $x\succ y$），如果存在一个非空**联盟**（coalition）$P\subset N$，使得

$$\sum_{i\in P}x_i\leqslant v(P),$$

并且对于 $i\in P$ 有 $x_i>y_i$（这里 v 是对策的特征函数）. И Н Врублевская 撰

【补注】 经常用术语**分配**（imputation）和支付向量（pay-off vector）代替“sharing”一词（亦见**增益函数**（gain function））

参考文献

[A1] Owen, G , Game theory, Acad Press, 1982

3）位势论中的控制（domination in potential theory） 函数之间的，特别是特定类的位势之间的一种次序关系 $v_1\geqslant v_2$，即对于 v_1 和 v_2 的公共定义域内所有的 x 不等式 $v_1(x)\geqslant v_2(x)$ 成立. 在各种控制原理（domination principles）中，关系 $v_1\geqslant v_2$ 作为在定义域的某个真子集上不等式 $v_1(x)\geqslant v_2(x)$ 的结果而建立 最简单的 Cartan 控制原理（Cartan domination principle）是 令 $v=v(x)$ 是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 3)$ 上的一个非负上调和函数（见**下调和函数**（subharmonic function）），并令 $U_\mu=U_\mu(x)$ 是具有有限能量的一个测度 $\mu\geqslant 0$（见**测度的能量**（energy of measures））的 Newton 位势 那么，如果在某个使得 $\mu(CA)=0$ 的集合 $A\subset\mathbf{R}^n$ 上 $v(x)\geqslant U_\mu(x)$，则控制 $v\geqslant U_\mu$ 成立 亦见**抽象位势论**（potential theory, abstract）

参考文献

[1] Brelot, M , Eléments de la theorie classique du potential, Sorbonne Univ Centre Doc Univ , Paris, 1959
[2] Brelot, M , On topologies and boundaries in potential theory, Springer, 1971 Е Д Соломенцев 撰

【补注】 数学中还有更多一些概念涉及词“控制的”或“控制” 例如，对于一个函数序列 $\{f_n\}$ 而言，一个常数序列 $\{M_n\}$ 称为 $\{f_n\}$ 的控制（dominant）序列或强（majorant）序列，如果对于所有 x 和所有 n 不等式 $|f_n(x)|\leqslant M_n$ 成立.

在代数几何中论及一个控制态射（dominant morphism）$\varphi\quad X\to Y$，如果 $\varphi(X)$ 在 Y 中稠密

在局部交换环理论中，如果 R 和 S 是包含于一个域 K 中的两个局部环，并且 $R\subseteq S$，然而 $m_S\cap R=m_R$，那么 S 控制 R，这里 m_R 是 R 的极大理想

最后，有关控制权（dominant weight）和控制线性形式（dominant linear form）的概念，见 **Lie 代数的表示**（representation of a Lie algebra）和**具有最高权向量的表示**（representation with a highest weight vector）

Cartan 控制原理亦称为 Cardan 最大值原理（Cartan maximum principle）令 $\Phi(x,y)$ 是 $\Omega\times\Omega$ 上的一个实值函数，对于 Ω 上的一个测度 ν，令 $\Phi(x,\nu)=\int\Phi(x,y)d\nu(y)$ 核 Φ 称为满足扫除原理（balayage principle 或 sweeping-out principle），如果对于每个紧集 K 和由 K 支撑的测度 μ，存在一个由 K 支撑的测度 ν，使得在 K 上 $\Phi(x,\nu)=\Phi(x,\mu)$ 拟处处成立，并且在 Ω 中 $\Phi(x,\nu)\leqslant\Phi(x,\mu)$. 测度 ν 是 μ 的扫除（balayage），亦见**扫除法**（balayage method）令 S_μ 是 μ 的支集 那么扫除原理蕴含着下述形式的 Cartan 控制原理 如果对某个有有限能量的 μ 和某个 ν 在 S_μ 上有 $\Phi(x,\mu)<\Phi(x,\nu)$，那么此不等式在 Ω 中亦成立（测度 μ 具有有限能量（finite energe），如果 $(\mu,\mu)=\int\Phi(x,\mu)d\mu(x)$ 是有限的）位势称为满足逆控制原理（inverse domination principle），如果对于有有限能量的 μ 和任意的 ν 不等式 $\Phi(x,\mu)<\Phi(x,\nu)$ 在 S_ν 上成立蕴含着此不等式在 Ω 中亦成立

在抽象位势论中 Cardan 控制原理简化为“控制公理”（axiom of domination）. 令 p 是一个在开集 U 上调和的局部有界**位势**（potential），并令 u 是一个正的超调和函数（见**多重调和函数**（poly-harmonic function））如果在 U 的补集上 $u\geqslant p$，那么 $u\geqslant p$ 有关性质的概况，见[A1]

参考文献

[A1] Constantinescu, C and Cornea, A , Potential theory on harmonic spaces, Springer, 1972
[A2] Hartshorne, R , Algebraic geometry, Springer, 1977

陆柱家 译

门空间 [door space, дверное пространство]

一个拓扑空间，它的每个子集不是开的就是闭的.

A A Мальцев 撰

罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

Doppler 效应 [Doppler effect, Доплера эффект]

接收到的振动频率随振动源相对观察者的运动速度的变化 如果源与观察者间的距离减小，则频率增加，如果此距离增加，则频率减小 各种类型的波都有 Doppler 效应 声波、弹性波以及电磁波

令 x^j 与 $\overline{x}^j$ 为电磁波的源和观察者的惯性参考系，其中 $j=0,1,2,3$，而 $x^0=t$，$\overline{x}^0=\overline{t}$ 是时间 且令平面波的相因子在第一和第二参考系中分别具有形式 $\exp(i\omega_j x^j)$ 和 $\exp(i\overline{\omega}_j\overline{x}^j)$，Doppler 效应则由联系四维波矢量 $\{\omega_j\}$ 与 $\{\overline{\omega}_j\}$ 的时间分量 频率) ω_0 与 $\overline{\omega}_0$ 的公式表达

$$\overline{\omega_0}=\omega_0\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-(v/c)\cos\varphi}$$

这里 v 是源与观察者间的相对速度，φ 是在观察者参考系中测量的速度与观察线间的夹角，而 c 是真空中的光速

Doppler 效应是以最早从理论上预言这种效应的 Ch Doppler 的名字命名的 (1842)

参考文献

[1] Ландау, Л Д , Лифшиц, Е М , Теория поля, 5 изд М ,1967, гл 6 (英译本 Landau, L D , Lifshitz, E M , The classical theory of fields, Addison-Wesley, 1951, Chapt 6)

[2] Фриш, С Э , Тиморева, А В , Курс общей физики, 10 изд , М 1962 , т 1, гл 12

В М Бабич, М М Попов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Whittaker, E , A history of the theories of aether and electricity, Vol Ⅰ Chapter Ⅻ, p 368, Vol Ⅱ Chapter Ⅱ, p 40 - 42 & Chapter Ⅲ, p 92, Harper Torchbooks, 1960

[A2] Rayleigh, J W S , The theory of sound, Ⅱ, Dover, reprint, 1945, pp 154 - 156

沈 青 译

二重数和对偶数 [double and dual numbers, двойные и дуальные числа]

形如 $a+be$ 的超复数，其中 a, b 是实数，如果满足 $e^2=1$，就是二重数，如果满足 $e^2=0$，就是对偶数 (见**超复数** (hypercomplex number)) 二重数和对偶数加法都定义为

$$(a_1+b_1e)+(a_2+b_2e)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)e$$

二重数乘法定义为

$$(a_1+b_1e)(a_2+b_2e)=(a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)e,$$

对偶数乘法定义为

$$(a_1+b_1e)(a_2+b_2e)=a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1)e$$

复数、二重数、对偶数也分别称为双曲型、椭圆型、抛物型复数 这些数有时用于表示 Лобачевский, Riemann 和 Euclid 三维空间中的运动 (例如，见**螺旋演算** (helical calculus))

二重数或对偶数都形成实数域上二维结合交换代数 (基为 1 和 e) 与复数域不同的是，这两个代数有零因子 二重数代数中所有零因子形式为 $a\pm ae$ 二重数代数可分裂为两个实数域的直和，因此它有另一名称——分裂复数 (splitting complex number) 二重数还有一个名称——仿复数 (paracomplex numbers). 对偶数代数不仅在实数域 $\mathbf{R}$ 上而且可以在任一域或交换环上讨论. 设 A 是一交换环，并设 M 是 A 模，定义 A 模直和 $A\oplus M$，其乘法为

$$(a,m)(a',m')=(aa',am'+a'm)$$

这是一个交换 A 代数，记为 $I_A(M)$，它称为关于模 M 的对偶数代数 (algebra of dual numbers). A 模 M 等同于代数 $I_A(M)$ 中的一个理想，它是增广同态

$$\varepsilon\ I_A(M)\to A,((a,m)\to a)$$

的核 理想的平方 $M^2=0$，同时有 $I_A(M)/M\simeq A$ 若 A 是正则环，则其逆也成立 设 B 是 A 代数，M 是 B 的一个理想，且 $M^2=0$，$B/M\simeq A$，那么 $B\simeq I_A(M)$ 这里 M 被视为 A 模 ([4])

若 $M=A$，则代数 $I_A(M)$ (可记为 I_A) 同构于多项式代数 $A[T]$ 关于理想 T^2 的商代数 很多 A 模性质可被阐述为 $I_A(M)$ 的性质 因此，很多 A 模问题可归结为环论中相应的问题 ([2]).

设 B 是任一 A 代数，$\varphi\ B\to A$ 是一同态，并设 $\partial\ B\to M$ 是 B 的在 A 模 M 中取值的导子 (见**环中的导子** (derivation in a ring))，M 在同态 φ 下可视为 B 模. 映射 $\overline{\partial}\ B\to I_A(M),(b\to(\varphi(b),\partial(b)))$ 是 A 代数同态. 反之，任给一 A 代数同态 $f.B\to I_A(M)$，记 $\varepsilon'\ I_A(M)\to M$ 是 $I_A(M)$ 到 M 之上的投影，则合成映射 $\varepsilon'\circ f\ B\to M$ 是 B 的在 M 中取值的 A 导子，这里 M 被视为对应于同态 $\varepsilon\circ f\ B\to A$ 的 B 模 二重数与对偶数的这个性质对描述概形范畴的任一函子的切空间很有益处

参考文献

[1] Mumford, D, Lectures on curves on an algebraic surface, Princeton Univ Press, 1966

[2] Fossum, R , Griffith, P A and Reiten, I , Trivial exten-

sions of Abelian categories, Springer, 1975

[3] Schemas en groupes, I Springer, 1970

[4] Lichtenbaum, S and Schlessinger, M , The cotangent complex of a morphism, *Trans Amer Math Soc* , **128** (1967), 1, 41－70　　И В Долгачев 撰

【补注】 对一个 **R** 上有单位元的结合代数 A，旧称为超复数系 (system of hypercomplex number)，A 中的元素称为超复数．在同构意义下，只有三个二维的这种代数，即 复数、对偶数和二重数．

参考文献

[A1] Demazure, M and Gabriel, P , Groupes algebriques, 1, Masson, 1970　　冯绪宁 译 裴定一 校

二重积分 [double integral, двойной интеграл]

见**多重积分** (multiple integral)

双层位势 (double-layer potential, двойного слоя потенциал]

这种类型的表示式

$$u(x)=\int_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial n_y}(h(r_{xy}))\mu(y)ds_y,\qquad(1)$$

其中 Γ 是任意有界 N 维区域 $G\subset\mathbf{R}^N(N\geqslant 2)$ 的边界，n_y 是 G 的边界 Γ 在点 y 的外法线，μ 为位势密度，是定义在 Γ 上的函数，h 是 Laplace 方程的一个基本解

$$h(r_{xy})=\begin{cases}\dfrac{1}{(N-2)\omega_N}r_{xy}^{2-N}, & N>2,\\ \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r_{xy}}, & N=2,\end{cases}\qquad(2)$$

$\omega_N=2(\sqrt{\pi})^N/\Gamma(N/2)$ 是 $(N-1)$ 维单位球的球面面积，$r_{xy}=\sqrt{\sum_{i=1}^N(x_i-y_i)^2}$ 是两点 $x,y\in\mathbf{R}^N$ 之间的距离，边界 Γ 属于 $C^{(1,\lambda)}$ 类，是 Ляпунов 曲面或 Ляпунов 弧 (见 **Ляпунов 曲面和曲线** (Lyapunov surfaces and curves))

式 (1) 可解释为由放置在 Γ 上的偶极子产生的位势，偶极子在任一点 $y\in\Gamma$ 的方向与外法线 n_y 重合而强度等于 $\mu(y)$

如果 $\mu\in C^{(0)}(\Gamma)$，则 u 在 $\mathbf{R}^N$ 上 (特别，在 Γ 上) 有定义并且具有如下性质．

1) 函数 u 在 $\mathbf{R}^N\setminus\Gamma$ 里处处有各阶导数 ($\in C^{(\infty)}$) 并满足 Laplace 方程，而且，对点坐标的导数可通过对被积函数求导来计算．

2) 当点通过边界 Γ 时，函数 u 出现间断．设 x_0 是 Γ 上的任意一点，又设 $u^+(x_0)$ 与 $u^-(x_0)$ 分别是内、外边界值，则 $u^\pm(x_0)$ 存在且等于

$$u^\pm(x_0)=\pm\frac{\mu(x_0)}{2}+\int_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial n_y}(h(r_{x_0y}))\mu(y)ds_y,\ (3)$$

对于任意 $0\leqslant\alpha<1$，式 (3) 中的积分作为 $x_0\in\Gamma$ 的函数属于 $C^{(0,\alpha)}$ 类，此外，在 G 里等于 u 而在 Γ 上等于 u^+ 的函数在 $G\cup\Gamma$ 上是连续的，同时，在 $\mathbf{R}^N\setminus(G\cup\Gamma)$ 里等于 u 而在 Γ 上等于 u^- 的函数在 $\mathbf{R}^N\setminus G$ 上为连续的

3) 如果密度 $\mu\in C^{(0,\alpha)}$ 且 $\alpha\leqslant\lambda$，则按照 (2) 的方法，u 延拓到 $G\cup\Gamma$ 或 $\mathbf{R}^N\setminus G$ 时，在 $G\cup\Gamma$ 或者 $\mathbf{R}^N\setminus G$ 上是 $C^{(0,\alpha)}$ 类函数．

4) 如果 $\alpha>1-\lambda$，又设点 x_1 与 x_2 位于由 x_0 发出的法线上，并关于 x_0 为对称，则

$$\lim_{x_1\to x_0}\left[\frac{\partial u(x_2)}{\partial n}-\frac{\partial u(x_1)}{\partial n}\right]=0\qquad(4)$$

特别，如果导数 $\dfrac{\partial u^+(x_0)}{\partial n}$ 与 $\dfrac{\partial u^-(x_0)}{\partial n}$ 中有一个存在，则另一个也存在且 $\dfrac{\partial u^+(x_0)}{\partial n}=\dfrac{\partial u^-(x_0)}{\partial n}$ 如果 $\mu\in C^{(0)}(\Gamma)$ 而 $\Gamma\in C^{(2)}$，这个结论亦真．

上述性质有各种推广 密度 μ 可以属于 $L_p(\Gamma)$，$p\geqslant 1$．这时，$\mu\in L_p(G\cup\Gamma)$，在 Γ 之外有 $u\in C^{(\infty)}$ 且满足 Laplace 方程，公式 (3) 与 (4) 对几乎所有 $x_0\in\Gamma$ 成立，同时，(3) 中的积分属于 $L_p(\Gamma)$

如果把双层位势看成是关于定义在 Γ 上的任意测度 ν 的积分

$$u(x)=\int_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial n_y}[h(r_{xy})]d\nu(y),$$

对其性质也作了研究．此时，在 Γ 之外 $u\in C^{(\infty)}$ 且满足 Laplace 方程．当 μ 被密度 ν，即 ν 关于 Lebesgue 测度的导数代替后，公式 (3) 与 (4) 对几乎所有 $x_0\in\Gamma$ 仍适用 在定义 (1) 中，Laplace 方程的基本解可以用具有变系数的二阶椭圆型算子的任意一个 Lewy 函数代替，同时 $\partial/\partial n_y$ 用关于余法线的导数来代替．这时，上述性质仍然成立 ([2])

双层位势在解椭圆型方程的边值问题中起着重要作用 第一边值问题的解的表达式可用一个待定的密度 μ 的双层位势表示出来，然后用性质 (2) 导出 Γ 上的第二类的 **Fredholm 方程** (Fredholm equation) 来确定函数 μ ([1]，[2]) 解抛物型方程的边值问题时，可利用热双层位势 (thermal double layer potential) 的概念，即积分

$$v(x,t)=\int_0^t d\tau\int_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial n_y}(G(x,t,y,\tau))\sigma(y,\tau)dy$$

其中 $G(x,t,y,\tau)$ 是 N 维空间中的热传导方程的一个基本解

$$G(x,t,y,\tau)=\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^N(t-\tau)^{N/2}}e^{-r_{xy}^2/4(t-\tau)},$$

其中，σ是位势密度．此时，函数v及其在任意二阶抛物型方程的情形的推广也有类似于上述关于u的性质（[3]，[4]，[5]）．

参考文献

[1] Günter, N M, Potential theory and its applications to basic problems of mathematical physics, F Ungar, New-York, 1967 (译自法文)

[2] Miranda, C, Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970 (译自意大利文)

[3] Тихонов, А Н, Самарский, А А, Уравнения матматической физики, 3 изд, М, 1966 (中译本 А Н 吉洪诺夫，А А 萨马尔斯基，数学物理方程，人民教育出版社，上册，1956，下册，1963)

[4] Смирнов, В И, Курс высшей математики, 5 изд т 4, М, 1958 (中译本 В И 斯米尔诺夫，高等数学教程，第四卷，高等教育出版社，1959)

[5] Friedman, A, Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, 1964

И.А Шишмарев 撰

【补注】 $\mathbf{R}^n$中更一般的开集的双层位势的介绍可见诸于[A1]．

参考文献

[A1] Král, J, Integral operators in potential theory, Springer, 1980.

吴炯圻、高琪仁 译 卫念祖 校

二重极限 [double limit, двойной предел]

1) 序列的二重极限，二重序列 (double sequence) $\{x_{mn}\}$ $(m,n=1,2,\cdots)$的极限是一个数a，定义如下 对于任何$\varepsilon>0$，存在数N_ε，使得对于一切m，$n>N_\varepsilon$，等式

$$|x_{mn}-a|<\varepsilon$$

成立 记作

$$a=\lim_{m\ n\to\infty}x_{mn}$$

如果对于任何$\varepsilon>0$，存在数N_ε，使得对于一切$m,n>N_\varepsilon$，不等式$|x_{mn}|>\varepsilon$成立，则序列x_{mn}以无穷大作为它的极限

$$\lim_{m\ n\to\infty}x_{mn}=\infty$$

同样，可以定义无穷极限

$$\lim_{m\ n\to\infty}x_{mn}=+\infty \quad 和 \quad \lim_{m\ n\to\infty}x_{mn}=-\infty$$

序列的二重极限是在一个集合上的函数的二重极限的特殊情况，即当这个集合是由平面上具有整数坐标的一些点组成时．正如在一般情况那样，序列的二重极限同它的累极限之间存在联系．

2) 函数的二重极限是二元函数的极限，定义如下 设函数$f(x,y)$定义在XY平面上的集合E上，点(x_0,y_0)是集合E的一个极限点（见**集合的极限点** (limit point of a set)）．一个数A称为函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)上或当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时的二重极限，如果对于任何$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对于一切点$(x,y)\in E$，只要这些点满足不等式

$$0<|x-x_0|<\delta,\ 0<|y-y_0|<\delta,$$

则不等式

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立．在这种情况下，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0\ y_0)}f(x,y)=A.$$

函数的二重极限也可以借助于序列的极限来表述

$$A=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y),$$

如果对于任何序列

$$(x_n,y_n)\to(x_0,y_0),$$
$$(x_0,y_0)\neq(x_n,y_n)\in E,\ n=1,2,\cdots,$$

条件

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=A$$

均满足，可以类似地给出当函数的变元趋向于无穷大时函数的二重极限的定义，以及函数的无穷二重极限的定义．

函数在点(x_0,y_0)上或在∞处的二重极限和**累极限** (repeated limit)之间存在联系．设x_0和y_0是实数子集X和Y的（有限的或无穷的）极限点，$E=X\times Y$ 如果对于函数$f(x,y)$，有限的或无穷的二重极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$$

存在，并且对于任何$y\in Y$，有限的极限

$$\varphi(y)=\lim_{x\to x_0}f(x,y)$$

存在，则累极限

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\varphi(y)$$

存在，并且等于这个函数的二重极限．

利用邻域的概念，可以给出函数的二重极限的下述形式的定义 设a是集合E的极限点(x_0,y_0)或符号∞，在后一情况下集合E是无界的，而A是一个数或符号$\infty,+\infty,-\infty$之一 这时，

$$A=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y),$$

如果对于点或符号A的任何邻域O_A，存在数或符号a的一个邻域O_a，使得对于一切$(x,y)\in E\cap O_a$，$(x,y)\neq a$，条件$f(x,y)\in O_A$成立 采用这种形式，函数的二重极限的定义可以推广应用到下述情况 函数$f(x,y)$定义在两个拓扑空间X和Y之积上，$x\in X$，$y\in Y$，而$f(x,y)$的值也属于一个拓扑空间．

Л Д.Кудрявцев 撰 张鸿林 译

二重模 [double module, двойной модуль]

1) **双模** (bimodule) 的同义词.

2) 群 G 的双陪集分解中的一对子群 H, F G 的双陪集分解是 G 分解成不相交的形如 HxF 的一些子集，其中 x 是 G 的元素 子集 HxF 称为群 G 模 (H,F) 的一个陪集 (coset) 或群 G 模 (H,F) 的双陪集 (double coset)，例如，对一个 24 阶群，H, F 为它的 Sylow 2 子群和 Sylow 3 子群，则它的模 (H,F) 的双陪集的分解由模 (H,F) 的单个陪集组成 任何双陪集 HxF 由 G 对 F 的 $|H \quad H\cap xFx^{-1}|$ 个陪集组成，同样也由 G 对 H 的 $|F \quad F\cap x^{-1}Hx|$ 个陪集组成，其中 $|U \quad V|$ 表示子群 V 对群 U 的指数.

参考文献

[1] Hall, M, The theory of groups, MacMillan, 1959

В Д Мазуров 撰

【补注】 二重模一词用在 2) 的意义下已过时了，人们已用双陪集这个词来代替了 G 的模 (H,F) 的双陪集和直积 $H\times F$ 在 G 作用下的轨道一致，这时 G 的作用定义为 $(h,f)g=hgf^{-1}$, $h\in H$, $f\in F$, $g\in G$ (亦见**轨道** (orbit)). 这些双陪集的集合记为 $H\backslash G/F$

石生明 译 许以超 校

双重否定律 [double negation, law of, двойного отрицания закон]

一条逻辑定律，依照这条定律，"如果 A 假是假的，那么 A 真" 这条定律也称为双重否定消去律 (cancellation law of double negation) 在形式逻辑语言中，该定律表示为 $\neg\neg p\supset p$ 并且通常以这种形式 (或相应的**公理模式** (axiom scheme)) 出现于形式理论的公理中. 双重否定律是传统数学中间接证明 (indirect proof) 的逻辑基础，在相容理论中依照下述方法使用间接证明 假设在给定的数学理论中命题 A 假就导出一个矛盾，由于理论是相容的，这就证明"非 A"是假的，从而 A 是真的 作为一个法则，双重否定律不适宜应用到构造性的考虑中，也包括对算法有能行性要求的数学基本命题之中不宜使用双重否定律. 上述情况的一个典型例子是形如"对任意 x 存在一个 y 使得 $B(x, y)$ 真"的命题 A 的任一间接证明，最后一步 (即应用双重否定律) 不能实行，因为命题构造的正确性必定要求算法的存在 (也就是对任意 x，给出 y 的一个构造法使得 $B(x, y)$ 真) 然而上面的讨论，包括双重否定律，不能导致任一算法的构造法，乃至根本没那样的算法可能存在 (也见**构造选择原理** (constructive selection principle))

双重否定律与**排中律** (law of the excluded middle) 密切相关，并且在某种意义下等价于它. 于是在直觉主义命题演算中，这两个定律中的每一个皆可以从另一个推演出.

参考文献

[1] Kleene, S C, Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本 S C 克林，元数学导论，科学出版社，1984, 1985)

Ф А Кабаков 撰

【补注】 间接证明也称为反证法 (proofs by contradiction) 或归谬证法 (proofs by reductio ad absurdum) (亦见**归谬法** (reductio ad absurdum))

卢景波 译

Riemann 曲面的双层 [double of a Riemann surface, дубль Римановой поверхности]

有限 **Riemann 曲面** (Riemann surface) R 的一个双叶**覆叠曲面** (covering surface) W 每个内点 $p\in R$ 对应于双层 W 的一对点 p 和 $\widetilde{p}$，换言之，两个共轭点 p 和 $\widetilde{p}$ 位于 p 上. R 的边界上的每个点 q 对应于一点 $q\in W$ 此外，点 $p, \widetilde{p}\in W$ 的两个不相交邻域位于一个内点 $p\in R$ 的每个邻域之上. 如果 z 是内点 $p\in R$ 的一个邻域中的**局部单值化参数** (local uniformizing parameter)，则它也是 W 的位于 p 上的两个共轭点之一的一个 W 邻域，例如点 $p\in W$ 的一个 W 邻域中的局部单值化参数，于是在共轭点 $\widetilde{p}$ 的一个 W 邻域中，变量 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 就是一个局部单值化参数. 如果 z 是 R 的边界点 q 处的局部单值化参数，则在 W 的一叶上等于 z 而在另一叶上等于 $\bar{z}$ 的变量就是位于该边界点之上的点 $q\in W$ 的一个局部单值化参数

在紧可定向 Riemann 曲面 R 的情形中，其双层简单地由两个紧可定向 Riemann 曲面组成，因而双层的研究不再有什么意义. 在所有其他情形中，Riemann 曲面的双层是紧可定向 Riemann 曲面. 用这一事实可把 R 上函数的研究归结为 W 上函数的研究，从而简化 R 上函数论的某些问题的探讨 W 的亏格 (见**曲面的亏格** (genus of a surface)) 是 $g+m-1$，其中 g 是 R 的亏格，m 是 R 的边界的分支 (假定它不退化) 数 例如，单连通平面区域的双层是球面，而 m 连通平面区域的双层是具有 $m-1$ 个环柄的球面

Riemann 曲面 R 上的解析微分 (见 **Riemann 曲面上的微分** (differential on a Riemann surface)) 是其双层 W 上由下述事实刻画的解析微分 它在 W 的共轭点处取共轭值而在位于 R 的边界点上的点 $q\in W$ 处取实值

参考文献

[1] Schiffer, M, Spencer, D C, Functionals of finite Riemann surfaces, Princeton Univ Press, 1954

[2] Picard, E, Traité d'analyse, 2, Gauthier-Villars, 1926

Е.Д Соломенцев 撰

【补注】 构造双层 Riemann 曲面的过程称为加倍 (duplication). 这种过程可应用于任一具有边界 (见**边界 (流形的)** (boundary (of a manifold))) 的连通**二维流形** (two-dimensional manifold) M 以作出 M 到一个连通二

维流形的正则嵌入(见[A1]，§13 H)

参考文献

[A1] Ahlfors, L V, Sario, L, Riemann surfaces, Princeton Univ Press, 1974

[A2] Farkas, H M, Kra, I, Riemann surfaces, Springer, 1980

[A3] Springer, G, Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1957

沈永欢 译

双周期函数 [double-periodic function, двоякопериодическая функция]

在整个有限复 z 平面上只有孤立奇点的单值解析函数 $f(z)$，并且存在两个其商不等于实数的数 p_1，p_2，使得 p_1，p_2 是 $f(z)$ 的周期，即使得恒等式

$$f(z+p_1)=f(z+p_2)=f(z)$$

成立．(如果 p_1/p_2 是实有理数，则 $f(z)$ 是单周期函数，如果 p_1/p_2 是实无理数，则 $f(z)\equiv$ 常数) 所有形如 mp_1+np_2，其中 m,n 是整数的数都是 $f(z)$ 的周期 一个给定的双周期函数的所有周期关于加法构成一个离散 Abel 群，称为周期群 (period group)或周期模 (period module)，它的一组基 (周期基 (period basis)) 由两个原始周期 (primitive period) $2\omega_1$，$2\omega_3$ 组成 $\operatorname{Im}(\omega_1/\omega_3)\neq 0$ 此双周期函数的所有其他周期可表示为 $2m\omega_1+2n\omega_3$，其中 m，n 为整数 除常数外，具有两个以上原始周期的单复变量解析函数是不存在的．

形如 $2m\omega_1+2n\omega_3$ (m,n 为整数) 的点构成周期格 (period lattice) (把整个 z 平面划分为周期平行四边形 (period parallelogram))．满足

$$z_1-z_2=2m\omega_1+2n\omega_3$$

的点 (数) z_1，z_2 称为关于周期模同余的 (congruent) (可比的 (comparable))．双周期函数 $f(z)$ 在同余点处取值相同，因而只须研究 $f(z)$ 在某个基本周期平行四边形 (basic period parallelogram) 中的性态 通常基本周期平行四边形是点集

$$\{z=z_0+2t_1\omega_1+2t_3\omega_3 \quad 0\leq t_1<1,\ 0\leq t_3<1\},$$

即以

$$z_0,\ z_0+2\omega_1,\ z_0+2\omega_2=z_0+2\omega_1+2\omega_3,\ z_0+2\omega_3$$

为顶点的平行四边形 在整个基本周期平行四边形中正则的非常数双周期函数是不存在的．亚纯双周期函数称为**椭圆函数** (elliptic function) 椭圆函数概念在 n (≥ 1) 个复变量函数 $f(z_1,z_2,\ \ ,z_n)$ 情形的推广称为 **Abel 函数** (Abelian function)

参考文献

[1] Маркушевич, А И, Теория аналитических функций, т 2, 2 изд, М, 1968, гл 7 (中译本 А И 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957，第 7 章)

[2] Hurwitz, A, Courant, R, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 2, Springer, 1968

[3] Whittaker, E T, Watson, G N, A course of modern analysis, 2, Cambridge Univ Press, 1952, chapt 20

[4] Ахиезер, Н И, Элементы теории эллиптических функций, 2 изд, М, 1970 (中译本· Н И 阿希耶节尔，椭圆函数论纲要，商务印书馆，1956)

Е Д Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lang, S, Elliptic functions, Addison-Wesley, 1973

沈永欢 译

二重平面 [double plane, двойная плоскость]

作为**超椭圆曲线** (hyper-elliptic curve) 的二维类似物的代数曲面 代数闭域 k 上的非奇异代数射影曲面 X 称为二重平面 (double plane)，如果它的有理函数域 $k(X)$ 是两个变量的有理函数域的二次扩域．当域的特征数异于 2 时 (以下总假设这一条件满足)，任何二重平面都双有理同构于三维仿射空间内由以下方程

$$z^2+F(x,y)=0$$

所确定的仿射曲面．这种类型的曲面有时也称为二重平面 对于每个二重平面 X，存在一个到射影平面 $P^2(k)$ 里的态射 f，它可分解为到某个正规曲面 X_1 上的一个双有理态射

$$\varphi\quad X\to X_1$$

以及一个二次有限态射

$$\varphi_1\quad X_1\to P^2(k)$$

的复合 态射 φ_1 的分支曲线 W 被称为二重平面的分支曲线 (branching curve of the double plane) (一般不是被 X 唯一确定的) 二重平面的分支曲线在二重平面的研究中起着重要作用．它可被用来计算二重平面的数值不变量 如果 W 是不可约的，则二重平面 X 的非正则性为零 如果 W 的次数 (它总是偶数) 等于 $2k$，并且 W 的所有奇点都只是通常二重点或尖点 (见代数曲线的**奇点** (singular point))，那么算术亏格 $p_a(X)$ 和 Euler 示性数 $\chi(X)$ (拓扑的或 l 进的) 可由下列公式算出

$$p_a(X)=\frac{(k-1)(k-2)}{2},\quad \chi(X)=4k^2-6k+6$$

在一般情形存在双有理态射 $F\to P^2(k)$，使得 X 和 F 在 $P^2(k)$ 上的纤维积的正规化 $\bar{X}$ 到 F 上的投影是一个 2 次的有限覆叠，其分支曲线 W 是非奇异的 (可能是可约的) 在这种情形下有以下公式

$$p_a(X)=p_a(\bar{X})=1-\frac{\chi(\bar{W})}{4}-\frac{(\bar{W})^2}{8},$$

$$\chi(\bar{X}) = 2\chi(F) - \chi(\bar{W})$$

对于射影平面上的任何偶次曲线 W，总存在一个二重平面以 W 作为分支曲线．选取适当的曲线 W 往往能解决具有给定不变量的代数曲面的构作问题（[1],[3]）．

二重平面的分类是在各个曲面类里分别地进行的．有理的和线性的二重平面已在[5]中被描述，本身是**椭圆曲面**（elliptic surface）或 **K3 曲面**（K3-surface）的二重平面已被列举在[3]中．许多基本类型的二重平面的例子已在[3]，[4]中被研究

参考文献

[1] Итоги науки Алгебра Топология Геометрия, т 12, M, 1974, 77－170

[2] Zariski, O, Algebraic surfaces, Springer, 1971

[3] Enriques, F, Le superficie algebraiche, Bologna, 1949

[4A] Campedelli, L, Sui piani doppi con curva di diramazione dell'ottavo ordine, *Atti Accad Naz Lincei Rend*, *Ser* 6, **15**(1932), 203－208

[4B] Campedelli, L, Sui piani doppi con curva di diramazione del decimo ordine, *Atti Accad Naz Lincei Rend*, *Ser* 6, **15**(1932), 358－362

[4C] Campedelli, L, Sopra alcuni piani doppi notevoli con curva di diramazione del decimo ordine, *Atti Accad Naz Lincei Rend*, *Ser* 6, **15**(1932), 536－542

[5] Jung, H W, Rationale und halbrationale Doppelebene, *J Reine Angew Math*, **184**(1942), 4, 199－237

И В Долгачев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Barth, W, Peters, C and Ven, A van de, Complex algebraic surfaces, Springer, 1984

陈志杰 译

二重点 [double point，двойная точка]

曲线 $F(x,y)=0$ 的一类**奇点**（singular point），在二重点上，函数 $F(x,y)$ 的一阶偏导数都等于零，而二阶偏导数至少有一个不等于零．在研究曲线在二重点附近的结构时，要考虑表达式

$$\Delta = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]_0 \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y}\right]_0 - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right]_0^2$$

的符号．如果 $\Delta>0$，则二重点称为孤立点（isolated point），例如，对于曲线

$$y^2 - x^4 + 4x^2 = 0,$$

坐标原点是一个孤立二重点（图 1） 如果 $\Delta<0$，则二重点称为结点（nodal point）或自交点（point of self-intersection），例如，对于曲线

$$(x^2+y^2+a^2)^2 - 4a^2x^2 - a^4 = 0,$$

坐标原点是一个结点（图 2）．如果 $\Delta=0$，则二重点或

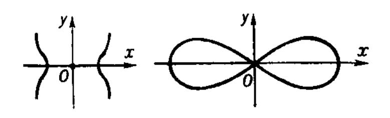


图 1　　图 2

者是孤立点，或者具有下述性质 曲线的不同分支在这一点上具有公共切线，例如，a) 在第一类尖点（cusp of the first kind）上曲线的两个分支处于公共切线的异侧、公共法线的同侧（例如见图 3 $y^2-x^3=0$），b) 在第二类尖点（cusp of the second kind）上曲线的两个分支处于公共切线的同侧、公共法线的同侧（例如见图 4．$(y-x)^2-x^5=0$），c) 在密切点（point of osculation）上曲线的两个分支相密切（例如见图 5 $y^2-x^4=0$）

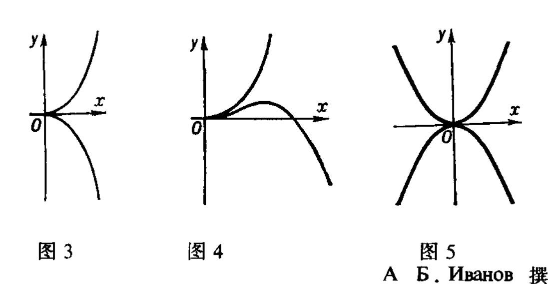


图 3　　图 4　　图 5

А Б．Иванов 撰

【补注】 代数簇上的二重点是重数为 2 的奇点（见**奇点的重数**（multiplicity of a singular point））．

参考文献

[A1] Fulton, W, Algebraic curves, Benjamin, 1969

张鸿林 译

重比 [double ratio，ангармоническое отношение]

同交比（cross ratio）．

二重序列 [double sequence，двойная последовательность]

由具有两个编号指标的元素组成的序列

$$\{a_{mn}\},\quad m,n=1,2,$$

同普通序列（即只有一个编号指标的序列）相比，二重序列具有一些显著的特点 例如，二重序列的极限具有几种不同的定义，它们彼此并不等价．

数值二重序列（numerical double sequence）的概念与数值二重级数

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}$$

的概念密切相关，这种二重级数的各项和（矩形）部分和

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} u_{kl}$$

都构成二重序列．亦见**二重级数**（double series）

Л Д Кудрявцев 撰

【补注】 二重序列的极限概念有时会产生麻烦，例如，考虑由

$$a_{mn} = \frac{m}{m+n}$$

给出的二重序列，如果首先对固定的 n，令 $m \to \infty$，然后再令 $n \to \infty$，则得到极限 1，而如果首先对固定的 m，令 $n \to \infty$，然后再令 $m \to \infty$，则得到极限 0

亦见**二重极限**（double limit），**累极限**（repeated limit）

张鸿林 译

二重级数 [double series，двойной ряд]

级数

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}, \quad (1)$$

它的项 $u_{mn}(m,n=1,2,\ldots)$ 形成二重数列 有限和

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_{ij}$$

称为二重级数 (1) 的部分和（partial sum）或者它的矩形部分和（rectangular partial sum） 它们也形成二重数列．如果数列 $\{S_{mn}\}$ 具有有限的**二重极限**（double limite）

$$S = \lim_{m,n\to\infty} S_{mn}, \quad (2)$$

则级数(1)称为收敛的（convergent），而数 S 称为它的和（sum）

$$S = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$$

如果不存在有限的极限 (2)，则级数 (1) 称为发散的（divergent） 二重级数具有通常的（简单）级数的许多性质 例如，如果二重级数

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}, \quad \sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn}$$

收敛，则对于任何两个数 λ 和 μ，二重级数

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} (\lambda a_{mn}+\mu b_{mn})$$

也收敛，并且

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} (\lambda a_{mn}+\mu b_{mn}) = \lambda \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}+\mu \sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn}$$

如果一个二重级数收敛，则有

$$\lim_{m,n\to\infty} u_{mn} = 0$$

（级数 (1) 收敛的必要条件） 为使二重级数 (1) 收敛，其必要和充分条件是 对于任何 $\varepsilon>0$，存在数 N_ε，使得当 $m,n>N_\varepsilon$ 时，

$$|S_{m+k,n+l}-S_{mn}|<\varepsilon$$

成立，其中 k 和 l 是任意非负整数 如果级数 (1) 的各项都是非负的，则其部分和 S_{mn} 的序列总是具有有限的或无限的极限，并且

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = \sup_{m,n=1,2,\ldots} S_{mn}$$

二重级数具有一些特殊性质，是由于它存在二重指标项 如果二重级数 (1) 收敛，而且对于一切 $n=1,2,\ldots$，级数

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}$$

也收敛，则累次级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}\right]$$

也收敛，其和等于给定级数的和

一个二重级数称为绝对收敛的（absolutely convergent），如果级数

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |u_{mn}|$$

收敛．如果一个二重级数是绝对收敛的，则它也是收敛的，而且，把它的各项重新排列后所得到的级数也是收敛的，这时任何这样的级数的和，都与原级数的和相同

通常的函数项级数的许多概念和性质，对于二重函数项级数来说，也都存在，其中包括一致收敛的概念，级数一致收敛的 Cauchy 准则或一致收敛的 Weierstrass 准则 但是，关于通常级数的许多定理不能直接应用于二重级数 例如，与幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

的 **Abel 定理**（Abel theorem）类似定理不能直接应用于二重幂级数，即形如

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} x^m y^n \quad (3)$$

的级数

例如，存在仅在平面的两点上收敛的二重级数 (3) 具有系数

$$c_{0n}=c_{n0}=-c_{1n}=-c_{n1}=n!,\ n=1,2,\ldots,$$
$$c_{mn}=0,\ m,n\geqslant 2$$

的级数(3)仅在两点(0，0)和(1，1)上收敛．

除了关于级数 (1) 的定义 (2) 以外，还存在另一些与它的通项的二重指标相关的二重级数收敛性及其和的定义．例如，设

$$S_p = \sum_{m+n\leqslant p} u_{mn},\ p=1,2,\ldots$$

(S_p 称为二重级数 (1) 的三角形部分和（triangular partial sum)），如果数列 $\{S_p\}$ 收敛，则二重级数 (1) 称为收敛的，它的极限

$$S=\lim_{p\to\infty} S_p$$

称为级数(1)的三角形和，如果设

$$S_r=\sum_{m^2+n^2\leqslant r^2} u_{mn},\ r>0$$

(S_r 称为圆形部分和 (circular partial sum))，这时，如果参数 r 的函数 S_r 当 $r\to +\infty$ 时具有极限，则二重级数(1)称为收敛的，这个极限

$$S=\lim_{r\to+\infty} S_r$$

称为级数(1)的圆形极限

设 $\mathcal{N}$ 表示指标对 (m, n) 的任意有限集，并且设

$$S_{\mathcal{N}}=\sum_{(m,n)\in\mathcal{N}} u_{mn}$$

这时，数 S 称为级数(1)的和(sum)，如果对于任何 $\varepsilon>0$，都存在指标对 (m, n) 的有限集 $\mathcal{N}_\varepsilon$，使得对于一切 $\mathcal{N}\supset\mathcal{N}_\varepsilon$，不等式 $|S-S_{\mathcal{N}}|<\varepsilon$ 成立．如果这样的数 S 存在，则称级数(1)是收敛的

上面列举的这些级数(1)的收敛定义彼此并不等价 但是，如果二重级数的各项是非负的，那么只要它在上述一种意义下收敛，在其他各种意义下也收敛．对于二重级数，有各种不同的求和法．

二项级数的概念可以推广到级数的项不是数而是(例如)线性赋范空间中的元素的情况

参考文献

[1] Pringsheim, A, Elementare Theorie der unendlichen Doppelreihen, *Munchener Sitzungsber der Math*, **27** (1897), 101－153

[2] Pringsheim, A, Zur Theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen, *Math Ann*, **53** (1900), 289－321

[3] Pringsheim, A, Vorlesungen über Zahlen - und Funktionenlehre, 2, Teubner, 1932

[4] Bromwich, T J, An introduction to the theory of infinite series, Macmillan, 1947

[5] Салехов, Г С, Вычисление рядов, М, 1955

[6] Whittaker, E T and Watson, G N, A course of mordern analysis, Cambridge Univ Press, 1952

Л Д Кудрявцев 撰 张鸿林 译

双搜索法[double-sweepmethod; прогонкиметод]，亦称**追赶法**

借助相应于给定方程的微分或差分方程以转换单点边界条件的一种方法 在**打靶法**(shooting method)无效时用它解边值问题

假设在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上给定线性常微分方程

$$y'(x)+A(x)y(x)=f(x), \tag{1}$$

其中 $A(x)$ 是 n 阶方阵，$f(x)=(f_1(x), \ldots, f_n(x))^T$ 是已知的连续函数向量，而可微向量函数 $y(x)=(y_1(x), \ldots, y_n(x))^T$ 是要求的．将形如

$$\varphi^T y(a)=\alpha,\ \psi^T y(b)=\beta \tag{2}$$

的边界条件加到(1)上．这里，φ 和 ψ 是已知的 $n\times k$ 维和 $n\times l$ 维的矩阵，其秩分别为 k 和 l，

$$\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)^T,\ \beta=(\beta_1, \ldots, \beta_l)^T,\ k+l=n$$

利用具有初始条件 $u(a)=\varphi$, $\gamma(a)=\alpha$ 的微分方程

$$u'(x)-A^T(x)u(x)=0,$$

$$\gamma'(x)=u^T(x)f(x),$$

其中未知的可微矩阵函数 $u(x)$ 为 $n\times k$ 维及 $\gamma(x)=(\gamma_1(x), \ldots, \gamma_k(x))^T$，能在整个区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上求出 $u(x)$ 和 $\gamma(x)$ (直接双搜索 (direct double-sweep))．如果方阵 $[u(b), \psi]$ 的秩为 n，利用方程

$$u^T(b)y(b)=\gamma(b)$$

和(2)的第二个方程能够确定 $y(b)$ 边值问题(1)－(2)的未知解现在能作为(1)的 **Cauchy 问题**(Cauchy problem)的解按 $x=b$ 到点 $x=a$ 的方向计算出来(逆双搜索 (inverse double-sweep))．当形如(2)的约束不仅在端点而且也在 $a\leqslant x\leqslant b$ 的某个内点处给出时，这个方法也适用于多点问题 关于转换与(2)不同的线性边界条件的双搜索方法，已研究出多种方案(见[1])．

双搜索方法在边值问题

$$y''(x)+Q(x)y(x)=f(x), \tag{3}$$

$$y'(a)+\varphi y(a)=\alpha, \tag{4}$$

$$y'(b)+\psi y(b)=\beta \tag{5}$$

中显出它明显的优点，其中，$Q(x)$ 是 n 阶方阵，$f(x)$ 是已知的 n 维连续函数向量，二次可微向量函数 $y(x)$ 待确定，φ 和 ψ 是已知的 n 阶方阵，$\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$ 以及 $\beta=(\beta_1, \cdots, \beta_n)^T$．利用具有初始条件 $v(a)=\varphi$，$\gamma(a)=\alpha$ 的微分方程

$$v(x)=[v(x)]^2+Q(x),$$

$$\gamma'(x)=v(x)\gamma(x)+f(x),$$

能在整个区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上求出 $v(x)$ 和 $\gamma(x)$(直接双搜索) 这里 $v(x)$ 是 n 阶可微方阵并且 $\gamma(x)=(\gamma_1(x), \ldots, \gamma_n(x))^T$．

如果矩阵 $v(b)-\psi$ 的秩为 n，则利用方程

$$y'(b)+v(b)y(b)=\gamma(b)$$

和(5)能求出

$$y(b)=(v(b)-\psi)^{-1}(\gamma(b)-\beta) \tag{6}$$

边值问题(3)－(5)所要求的解是具有初始条件(6)的方程

$$y'(x)+v(x)y(x)=\gamma(x)$$

的 Cauchy 问题的解(逆双搜索)．因此，对于(3)－(5)的双搜索方法是一个降低微分方程(3)的阶的方法

在线性代数方程的有限序列

$$a_i\varphi_{i-1}-b_i\varphi_i+c_i\varphi_{i+1}=f_i,\quad i=1,\cdots,n \tag{7}$$

的情况下，其中系数 a_i，c_i 和 b_i 是已知的 v 阶方阵，f_i，φ_i 是已知的和要求的 v 维列向量，$a_1=0$，$c_n=0$，双搜索算法可定义如下

$$\beta_{i+1}=(b_i-a_i\beta_i)^{-1}c_i, \tag{8}$$

$$z_{i+1}=(b_i-a_i\beta_i)^{-1}(a_iz_i-f_i),\ i=1,\ \ ,n, \tag{9}$$

如果满足条件 $\beta_1=0$，$z_1=0$（直接的（direct））以及

$$\varphi_i=\beta_{i+1}\varphi_{i+1}+z_{i+1},\quad i=n,\ \ ,1, \tag{10}$$

如果满足条件 $\varphi_{n+1}=0$（逆的（inverse）） 这里 β_i 是 v 阶方阵，z_i，φ_i 是 v 维列向量 上述这个方法称为右双搜索(right double-sweep) 类似于 (8)−(10)，可得到左双搜索（left double-sweep）公式 综合左和右双搜索，得到交叉双搜索（meeting double-sweep） 可应用初步双搜索法（preparatory double-sweep method）来解具有可变系数的（7）．要求具有周期系数的形式(7)的无限个方程的周期解，可使用循环双搜索（cyclic double-sweep）（见[4]）

见**正交双搜索法**(orthogonal double-sweep method)

参考文献

[1] Бахвалов, Н С, Численные методы, 2 изд, М, 1975 (英译本 Bakhvalov, N S, Numerical methods analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977)

[2] Крылов, В И, Бобков, В В, Монастырный, П И, Вычислительные методы, т 2, М, 1977

[3] Марчук, Г И, Методы вычислительной математики, 2 изд, М, 1980 (英译本 Marchuk, G I, Methods of numerical mathematics, Springer, 1982)

[4] Самарский, А А, Николаев, Е С, Методы решения сеточных уравнений, М, 1978

А Ф.Шапкин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Roberts, S M and Shipman, J S, Two point boundary value problems shooting methods, American Elsevier, 1972

[A2] Ascher, U M, Mattheij, R M M and Russel, R D, Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations, Prentice-Hall, 1988

周芝英 译 叶彦谦 校

偶极 [doublet, дублет]

在一个 n 维仿射空间中有序的一对超平面．指定一个偶极等价于指定一个**共变向量**（covariant vector） 在中心仿射几何中，有一个偶极只由唯一的超平面来定义—— 即此偶极的边界

М И Войцеховский 撰 马传渔 译 黄正中 校

Douglas 问题 [Douglas problem, Дугласа задача]

同 **Plateau 问题**（plateau problem）．

客厅对策 [drawing room game, салонная игра]

一种有几个局中人的对策，在此对策中结果不仅取决于局中人的技巧，而且也取决于随机因素（洗牌、掷骰子等） 客厅对策（主要是纸牌游戏）的研究在对策论中占有重要地位（见**对策论**（games, theory of）） 客厅对策，一方面是数学上有意义的对策模型取之不尽的源泉，另一方面，它们是较严肃的冲突—— 战争、经济等等的模型．扑克牌游戏，作为 J von Neumann 于 1928 年研究过的第一个模型(见[1])，在对策论的初始时期所起的作用类似于掷骰子游戏在概率论中的作用 嗣后，很多扑克型对策的特殊模型曾被构造和解决，并且在 20 世纪 50 年代，S Karlin 和 R Restrepo 奠定了“扑克”型二人零和对策一般理论的基础（见**二人零和对策**（two-person zero-sum game））．在他们的模型中，局中人 I（相应地，II）知道他的牌 ξ（相应地，η），它是有分布 $F(\xi)$（相应地，$G(\eta)$）的随机变量的实现．局中人 I 和 II 的策略（见**策略（对策论中）**（strategy (in game theory)）是向量 $\varphi(\xi)$ 和 $\psi(\eta)$，并且支付函数有形式

$$K(\varphi,\psi)=\iint P[\xi,\eta,\varphi(\xi),\psi(\eta)]\,dF(\xi)\,dG(\eta)$$

Karlin 与 Restrepo 找到了解与此类似的对策的十分有效的方法（见[2]）

已经有许多研究致力于桥牌 因为在桥牌中的两个搭挡，事实上是单个局中人，所以它是无完全记忆对策的一个例子．

参考文献

[1] Neumann, J von, Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Math Ann*, **100** (1928), 295−320

[2] Karlin, S, Mathematical methods and theory in games, programming and economics, Addison-Wesley, 1959

[3] Thompson, G L, Signaling strategies in n-person games, in contributions to the theory of games, Princeton Univ Press, **2** (1953), 267−277

В К Доманский 撰 胡宣达 译

漂移方程 [drift equations, дрейфовые уравнения]

荷电粒子在电磁场中运动的近似方程，由对粒子在磁场作用下的快速运动进行平均而得．如果磁场 **B** 在空间和时间上变化缓慢，而电场 **E** 与磁场相比很小：

$$\frac{1}{\omega_B B}\ \frac{\partial R}{\partial t}\sim\varepsilon,\ \frac{\rho_B}{B}\,|\nabla B|\sim\varepsilon,\ \frac{cE}{vB}\sim\varepsilon, \tag{1}$$

则漂移方程可应用 这里 ε 是一小参数，$\omega_B=eB/mc$ 是 Larmor 频率（Larmor frequency)，$\rho_B=v_{\perp}/|\omega_B|$ 是 **Larmor 半径**（Larmor radius)，v 是粒子速度，$v_{\perp}$

是在与磁场相垂直方向的速度分量 漂移方程是借助平均方法（[1]）由完整的运动方程按 ε 的幂展开而得．它们有下列形式

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = V_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B} + \mathbf{V}_{dr}, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m(V_{\perp}^2 + V_{\parallel}^2)\right] = e\mathbf{E}\frac{d\mathbf{R}}{dt} - \frac{mcV_{\perp}^2}{2B^2}\mathbf{B}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{V_{\perp}^2}{B}\right] = 0, \tag{4}$$

这里

$$\mathbf{V}_{dr} = \frac{c}{B^2}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}] + \frac{mcV_{\parallel}^2}{cB^4}[\mathbf{B}\times(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B}] + \frac{mcV_{\perp}^2}{2eB^3}[\mathbf{B}\times\nabla B]$$

方程组（2）－（4）称为漂移方程组(drift system)，是相对于按一定关系与初始变量 $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ 相联系的辅助平均变量 $\mathbf{R}$, $V_{\perp}$, $V_{\parallel}$ 写出．方程（2）中的漂移速度 $\mathbf{V}_{dr}$ 描绘在垂直于磁场的方向上沿平均轨迹的缓慢运动

$$V_{dr} \sim \varepsilon v, \quad \mathbf{V}_{dr}\mathbf{B} = 0$$

方程（3）和（4）相对 ε 有二阶精度，并在含有很多 Larmor 周期的时间间隔 $t \sim 1/\varepsilon|\omega_B|$ 内，决定量 $V_{\perp}$ 和 $V_{\parallel}$，精确到一阶项 方程（2）相对 ε 有一阶精度．

量 $\mu = V_{\perp}^2/B$ 作为漂移方程组（2）－(4）的积分，是真实运动的近似积分 它称为**浸渐不变量**(adiabatic invariant) 在静力学情况下，这时 $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0$ 和 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$，方程(3)对平均运动情况容许有能量积分

$$\frac{1}{2}m(V_{\perp}^2 + V_{\parallel}^2) + e\varphi = 常数$$

漂移方程组可推广至包括相对论的情况（[2]，[3]）

参考文献

[1] Боголюбов, Н Н , Митропольский, Ю А , Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 3 изд , М , 1963 (英译本 Bogolyubov, N N and Mitropol'skii, Yu A , Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations, Hindushtan Publ Comp , Delhi, 1961)

[2] Сивухин, Д В , в кн , Вопросы теории плазмы, в 1, М , 1963, 7 － 97

[3] Морозов, А И , Соловьев, Л С в кн Вопросы теории плазмы, в 2, М , 1963, 177 － 261

Д П Костомаров 撰 唐福林 译

du Bois-Reymond 准则 [du Bois-Reymond criterion, Дюбуа-Реймона признак]，关于级数收敛性的

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 是收敛的，其中 a_n 和 b_n 是复数，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ 绝对收敛 这个准则是 P du Bois-Reymond 建立的．

Л Д Кудрявцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Knopp, K , Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, 1964

张鸿林 译

du Bois-Reymond 引理 [du Bois-Reymond lemma, Дюбуа-Реймона лемма]

如果 $N(x)$ 是区间 $[x_1, x_2]$ 上的连续函数，并且对于一切在点 $x=x_1$, $x=x_2$ 上等于零的连续可微函数 $\eta(x)$，关系式

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta'(x)N(x)\,dx = 0$$

成立，则在 $[x_1, x_2]$ 上 $N(x)=$ 常数．这个引理是 du Bois-Reymond 提出的（[1]）

在变分法中，应用 du Bois-Reymond 引理推导积分形式的 **Euler 方程**（Euler equation)．这时，不需要假设在二次可微曲线上泛函达到极值，只要有连续可微性的假设就够了

参考文献

[1] Bois-Reymond, P du, Erlauterungen zu der Anfangsgrunden der Variationsrechnung, *Math Ann* , **15** (1879), 283－314

[2] Лаврентьев, М А , Люстерник, Л А , Курс вариационного исчисления, 2 изд , М -Л , 1950 (中译本 М А 拉夫连齐耶夫、Л А 留斯捷尔尼克，变分学教程，高等教育出版社，1955)

И. Б. Вапнярский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Alexéev, V , Tikhomirov, V and Fomine, S , Commande optimale , Mir, 1982 (译自俄文)

张鸿林 译

du Bois-Reymond 定理 [du Bois-Reymond theorem, Дюбуа-Реймона теорема]，关于将函数展开成级数的唯一性的

如果一个处处收敛的三角级数的和是 Riemann 可积的，则这个级数是它的 Fourier 级数，这是由 P. du Bois-Reymond 证明的（[1]） G Cantor ([2]) 在略早些时讨论了三角级数收敛到零这一重要的特殊情形．

du Bois-Reymond 定理在许多不同的方向上得到推广．H Lebesgue 在附加了和的有界性条件后对 Lebesgue 积分证明了类似的定理，而 Ch J de la Vallée-Poussin ([3]) 证明了在没有这一条件时定理也成立 对于 Denjoy 积分也有类似的定理（[5]）

另一方向的推广在于减弱处处收敛的条件．W H Young（见[3]）证明可以忽略一个可数集，Д·Е·Меньшов（见[3]）证明不可以忽略任意零测度集（见**零级数的 Меньшов 例子**（Men'shov example of a zero-series））有关这方面的研究见[3]，[4] 如果用可积性条件代替收敛性条件，还可得到另一类推广，M Riesz（见[4]）首先研究了这一课题．

参考文献

[1] Bois-Raymond, P du, *Abh Akad Wiss Berlin Math -Phys Kl*, **12**(1876), 1, 117－166

[2] Cantor, G, Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrische Reihen, *Math Ann*, **5** (1872), 123－132

[3] Бари Н К, Тригонометрические ряды, М, 1961（英译本 Bary, N K [N K Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964）

[4] Zygmund, A, Trigonometric series, 1－2, Cambridge Univ Press, 1979

[5] Виноградова И А, Скворцов, В А, Итоги науки Математический анализ 1970, М, 1971, 65－107

Т П．Лукашенко 撰 朱学贤 译 潘文杰 校

对偶代数［dual algebra，дуальная алгебра］

一个**拓扑代数**（topological algebra）对其中任何闭左（右）理想 I，I 的右零化子的左零化子（相应地，左零化子的右零化子）和 I 一致．最有兴趣的问题是对偶代数到算子代数的实现，以及建立零化性质和不同类的拓扑代数的对偶性之间的联系，特别是，与其对合的复 **Banach 代数**（Banach algebra），其中包括 **Hilbert 代数**（Hilbert algebra），C^*代数（C^*-algebra）的对偶性的联系

Hilbert 空间上的全连续线性算子的 C^* 代数和 Hilbert 空间上的 Hilbert-Schmidt 算子的 Hilbert 代数是对偶代数 任一个同时是 C^* 代数的对偶 Banach 代数同构于某些 Hilbert 空间上的全连续算子代数的代数直和的完全化．所有完全的 Hilbert 代数是对偶的，它们同构于某些 Hilbert 空间上的 Hilbert-Schmidt 算子的 Hilbert 代数的直接正交和 任何具有连续拟逆元的半单对偶代数是它所有的极小闭双边理想直接和的完全化，这些理想是拓扑单对偶代数 一个拓扑单对偶代数可实现为某个拓扑向量空间 E 上的连续线性算子的代数，它包含 E 上有限维连续线性算子的集合 $K(E)$，如果 A 是 Banach 代数，在这个实现中 A 的象包含于代数 $K(E)$ 的一致闭包 $F(E)$ 中 另一方面，存在自反 Banach 空间 E 使（拓扑单的，零化子）Banach 代数 $F(E)$ 不是对偶的．

参考文献

[1] Наймарк, М А, Нормированные кольца, 2 изд, М, 1968（英译本 Naimark, M A, Normed rings, Reidel, 1984）

[2] Davie, A M, A counterexample on dual Banach algebras, *Bull London Math Soc*, **5** (1973), 1, 79－80

А И Штерн 撰

【补注】 术语“对偶代数”也在余代数的对偶代数的意义下使用，见**余代数**（co-algebra）的补注

余庆余 译

对偶基［dual basis，двойственный базис］

设 E 为具有单位元的交换环 K 上的自由 K 模，f 是 E 上非退化（非奇异）双线性型，模 E 的基 $\{e_1, \quad, e_n\}$ 相对 f 的对偶基是 E 的基 $\{c_1, \quad, c_n\}$，它使

$$f(e_i, c_i) = 1, \quad f(e_i, c_j) = 0,$$
$$i \neq j, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

设 E^* 为 E 的对偶模，$\{e_1^*, \quad, e_n^*\}$ 是 E^* 中与 E 的基对偶的基 $e_i^*(e_i)=1$, $e_i^*(e_j)=0$, $i \neq j$. 对于 E 的每个双线性型 f 相应地有两个映射 φ_f, ψ_f $E \to E^*$，由下式定义

$$\varphi_f(x)(y) = f(x, y), \quad \psi_f(x)(y) = f(y, x)$$

若 f 非奇异，则 φ_f, ψ_f 是同构，反之亦成立．与 $\{e_1, \quad, e_n\}$ 对偶的基 $\{c_1, \quad, c_n\}$ 的刻画性质为

$$\psi_f(c_i) = e_i^*(i = 1, \quad, n)$$

Е Н．Кузьмин 撰

【补注】 E 上的双线性型 f 是非退化的（也称非奇异的），是指对任何 $x \in E$，若对所有 y 有 $f(x, y)=0$，则 $x=0$，对任何 $y \in E$，若对所有 x 有 $f(x,y)=0$，则 $y=0$ 有时也用术语共轭模（共轭空间）代替对偶模（对偶空间）

参考文献

[A1] Cohn, P M, Algebra, 1, Wiley, 1982

裴定一 译 赵春来 校

对偶范畴［dual category，двойственная категория］，范畴 C 的

范畴 $C°$，与 C 有同样的对象，而其态射的集合 $\mathrm{Hom}_{C°}(A, B) = \mathrm{Hom}_C(B, A)$（“箭头倒过来”）．范畴 $C°$ 中两个态射 u 与 v 的合成定义为 C 中 v 与 u 的合成 范畴 C 中的概念与陈述都换成 $C°$ 中的对偶概念与陈述．因此，满态射的概念对偶于单态射的概念，投射对象的概念对偶于内射对象的概念，直积的概念对偶于直和的概念，等等．C 上的反变函子变成 $C°$ 上的共变函子

对偶范畴（dual category）有时可以直接实现，例如，离散 Abel 群范畴等价于与紧 Abel 群范畴相对偶的范畴（**Понтрягин 对偶性**（Pontryagin duality）），而仿射概形的范畴等价于与有单位元的交换环的范畴相

对偶的范畴.　　　　　　　　　　В И Данилов 撰

【补注】 范畴 C 的对偶范畴也称为逆范畴(opposite category),也用记号 C^{op} 来表示(见范畴(category)).

周伯埙 译

对偶函数 [dual functions, двойственные функции]

在 Young 意义下互余的函数,即由 **Legendre 变换**(Legendre transform)联系的严格凸函数(见**凸函数(实变量的)**(convex function (of a real variable)))

【补注】 对某些定义在正半轴(包含零点)上的非减实值函数有自然的逆的概念.如果 φ 和 ψ 是这种相互的逆,由

$$\Phi(u)=\int_0^u \varphi(t)\,dt,\ \Psi(v)=\int_0^v \psi(s)\,ds$$

(在正半轴上)定义的函数 Φ 和 Ψ 称为在 Young 意义下或 Young 共轭意义下互余的(complementary) 对它们有 Young 不等式(Young inequality)成立

$$uv\leqslant \Phi(u)+\Psi(v),\ u,\ v\geqslant 0$$

设 Φ, Ψ 是在 Young 意义下互余的非零函数对,存在一对与这函数对以及一个 σ 有限测度相联系的完全赋范空间 L_Φ 和 L_Ψ 这些空间由 μ 可测函数(的等价类)组成,称为 **Orlicz 空间**(Orlicz space). **Lebesgue 空间**(Lebesgue space) L_p 是 Orlicz 空间的特殊情形,见[A4]

在更抽象的背景下,对偶函数(dual function)的名字使人联想起**对偶性**(duality)理论中的**对偶对**(dual pair)以及**凸规划**(convex programming)和最优控制中的对偶问题(dual problem)(见**最优控制的数学理论**(optimal control, mathematical theory of)) 但是在英语中这个名词很少用,最常用的名字是(凸)共轭函数(见**共轭函数**(conjugate function))

设 X, Y 是两个关于双线性型〈·,·〉分离对偶的实向量空间(如果 $X=Y=\mathbf{R}^n$ 则是通常的情形), f 是从 X 到 $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 的映射(如 f 仅在 X 的子集 D 上有定义,在 D 的补集 CD 上令 $f=+\infty$) 如果 $\{f<+\infty\}$ 非空, f 的对偶(dual),或极(polar),或伴随(adjoint),或共轭(conjugate)函数是指由

$$f^*(y)=\sup_{x\in X}\{\langle x,y\rangle-f(x)\}$$

定义的 Y 上的凸函数 f^*. 如下结果是几何 **Hahn-Banach 定理**(Hahn-Banach theorem)在集合的双极上的推广 f 的双共轭函数(biconjugate function) f^{**} 是以 f 为上界的下半连续凸函数中的最大者.所以,当且仅当 f 是下半连续凸函数时, $f^{**}=f$(此时 $\{f,f^*\}$ 称为共轭函数对(pair of conjugate functions)) 在 $X=\mathbf{R}$ 时,共轭函数的概念是由 W Young 引进的,在 $X=\mathbf{R}^n$ 的情形是由 W Fenchel 引进的 这个概念在凸分析中非常重要,它和**次微分**(subdifferential)的概念密切相关 如果 f 凸, ∂f 是 f 的次微分,那么对 $y\in Y$ 和 $x\in X$ 有

$$y\in\partial f(x)\Leftrightarrow\langle x,y\rangle=f(x)+f^*(y)$$

如果 f 下半连续,这可以写成

$$y\in\partial f(x)\Leftrightarrow x\in\partial f^*(y)$$

映射 $f\mapsto f^*$ 通常称作 Fenchel 变换(Fenchel transform),有时还加上 Young 或 Legendre,或两者的名字 当 $X=Y=\mathbf{R}^n$ 和 f 是完全光滑的凸函数时,它是 **Legendre 变换**(Legendre transform)的特殊情形,另一方面,它也是 **Galois 对应**(Galois correspondence)的特殊情形 这些事实在凸分析中也是重要的.在凸优化中共轭函数的概念起着基本的作用.它也用于定义某些问题以及相应对偶问题的 Lagrange 算子(Lagrangian)

当 $X=Y=\mathbf{R}$ 时,函数 f $\mathbf{R}_+\mapsto\mathbf{R}_+$ 称作 Young 函数(Young function),如果它是非减凸函数且 $f(0)=0$, $\lim_{t\to+\infty}f(t)/t=+\infty$ Young 函数 f 的共轭函数 f^* 仍是 $\mathbf{R}_+$ 上的 Young 函数 例如,当 $f(x)=x^p/p$, $1<p<+\infty$ 时, $f^*(y)=y^q/q$,其中 q 是 p 的共轭指数(conjugate exponent),即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ Young 函数用于定义 **Orlicz 空间**(Orlicz space),共轭 Young 函数对用于研究它们间的对偶性,更一般些,借助于不难证明但是基本的 Young 不等式(Young inequality)

$$\langle x,y\rangle\geqslant f(x)+f^*(y),$$

它们帮助建立测度论中的各种不等式(鞅论中的 Burkholder 不等式,经典概率论中的 Chernov 不等式,统计学中的 Kullback 不等式等).上面的 Young 不等式使 Young 解决了一个与 Fourier 变换有关的问题

参考文献

[A1] Rockafellar, R T, Conjugate duality and optimization, Reg, Conf Ser Appl Math, SIAM, 1974

[A2] Neveu, J, Martingales à temps discret, Masson, 1972

[A3] Dellacherie, C and Meyer, P A, Probabilities and potential, 2, Theory of martingales, North-Holland, 1982(译自法文)

[A4] Zaanen, A C, Linear analysis, North-Holland, 1956

余庆余 译

对偶对 [dual pair, дуальная пара]

同一域上的向量空间对 (E, E') 连同 $E\times E'$ 上的非退化双线性型 (x, x') 见拓扑向量空间理论中的**对偶性**(duality)

М И Войцеховский 撰　余庆余 译

对偶性 [**duality**, **двойственность**]

1)代数几何学中的对偶性 代数簇上不同上同调空间之间的对偶性

凝聚层的上同调 (cohomology of coherent sheaves). 设 X 是代数闭域 k 上的 n 维非奇异**代数簇** (algebraic variety), $\mathscr{F}$ 是 X 上局部自由层 Serre 对偶定理 (Serre duality theorem) 断言有限维上同调 (向量) 空间 $H^i(X,\mathscr{F})$ 和 $H^{n-i}(X,\mathscr{F}^\vee\otimes\omega_X)$ 是互相对偶的 这里 $\omega_X=\Omega_X^n$ 是 X 上 n 次正则微分形式的芽层 (sheaf of germs), $\mathscr{F}^\vee=\mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{O}_X)$ 是与 $\mathscr{F}$ 对偶的局部自由层 当 $\mathscr{F}=\mathscr{O}_X(D)$ 是与 X 上**除子** (divisor) D 对应的可逆层时, 这个定理建立了等式

$$\dim H^i(X,\mathscr{O}_X(D))=\dim H^{n-i}(X,\mathscr{O}_X(K-D)),$$

其中 K 是 X 上典范除子. 当 $n=1$ 时, 与上式等价的一个关系式已在 19 世纪即被发现. Serre 定理可被推广到完全代数簇上任意的凝聚层的上同调的情形([1], [4]) 特别当 X 是非奇异射影簇 Y 里的余维数 d 的 Cohen-Macauley 子簇时 (例如局部完全交), 在 k 空间 $H^i(X,\mathscr{F})$ 与整体 Ext 的空间

$$\mathrm{Ext}^{n-i}(X,\mathscr{F},\widetilde{\omega}_X)$$

之间存在对偶性, 这里 $\mathscr{F}$ 是 X 上凝聚层, $\widetilde{\omega}_X=\mathrm{Ext}^d_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{O}_X,\omega_Y)$ (Grothendieck 对偶化层 (Grothendieck dualizing sheaf)), $n=\dim X$ 这里的层 $\widetilde{\omega}_X$ 是可逆层, 当且仅当 X 是 Gorenstein 概形 (见 **Gorenstein 环** (Gorenstein ring)).

艾达尔上同调 (étale cohomology). 设 X 是代数闭域 k 上的 d 维连通非奇异完全代数簇, n 是与域 k 的特征数互素的整数, $\mathscr{F}$ 是 X 上 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 模的局部自由层 (在艾达尔拓扑下), μ_n 是 n 次单位根的层, 则存在 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 模的非退化配对([6])

$$H^i(X,\mathscr{F})\times H^{2d-i}(X,\mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mu_n^{\otimes d}))\to\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$$

关于光滑而不一定完全的簇有一个更一般的对偶定理([5]) 存在 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 模的非退化配对

$$H_c^i(X,\mathscr{F})\times H^{2d-i}(X,\mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mu_n^{\otimes d}))\to\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$$

这里的左边是带紧支集的上同调 当域 k 是域 k' 的代数闭包, $X=X'\otimes_k k$, $\mathscr{F}=\mathscr{F}'\otimes_k k$ 时, **Galois 群** (Galois group) $\mathrm{Gal}(K/K')$ 作用在 $H^i(X,\mathscr{F})$ 上, 而且上述配对是 $\mathrm{Gal}(k/k')$ 模的配对

Poincaré 对偶定理 (Poincaré duality theorem) 是在 l 进上同调下与上述第一个定理类似的定理 存在 $\mathbf{Z}_l$ 模的非退化配对

$$H^i(X,\mathbf{Z}_l)\times H^{2d-i}(X,\mathbf{Z}_l[d])\to\mathbf{Z}_l,$$

其中 $\mathbf{Z}_l[d]$ 是 Tate 层, 它非典范地同构于层 $\mathbf{Z}_l$ (见 **l 进上同调** (l-adic cohomology)) 从而有 $\mathbf{Q}_l$ 空间的同构

$$H^i(X,\mathbf{Q}_l)\simeq\mathrm{Hom}(H^{2d-i}(X,\mathbf{Q}_l)(d),\mathbf{Z}_l),$$

作为其特例, 有 Betti 数间的等式

$$b_i(X,l)=b_{2d-i}(X,l)$$

如同凝聚层上同调的情形一样, 上述结果可被推广到真概形态射的相对情形, 用导出范畴的语言加以叙述([6])

其他上同调理论 在晶体上同调理论([7])和特征为零的域上的 de Rham 上同调的理论([8])中也有类似于 Poincaré 定理的结论 算术概形的平坦 Grothendieck 拓扑上的层上同调在数论应用中起重要作用. 对偶定理([9])可被应用于这样的上同调理论的特殊情形.

参考文献

[1] Grothendieck, A, The cohomology theory of abstract algebraic varieties, in Proc Internat congress mathematicians Edinburgh 1958, Cambridge Univ Press, 1960, 103-118

[2] Итоги науки и техники Алгебра Топология Геометрия, т 10, М, 1972, 47-112

[3] Serre, J-P, Faisceaux algebriques coherents, *Ann of Math*, **61** (1955), 197-258

[4] Hartshorne, R, Residues and duality, Springer, 1966

[5] Artin, M, Grothendieck, A and Verdier, J-L (eds), Théorie des topos et cohomologie étale des schemas, in Sem Géom Alg., Vol 3, Springer, 1973

[6] Verdier, J L, A duality theorem in the etale cohomology of schemes, in Proc Conf on local fields, Springer, 1967, 184-198

[7] Berthelot, P, Cohomologie cristalline des schemas de caracteristique $p>0$, Springer, 1974

[8] Hartshorne, R, Ample subvarieties of algebraic varieties, Springer, 1970

[9] Mazur, B, Local flat duality, *Amer J Math*, **92**(1970), 343-361

[10] Altman, A and Kleiman, S, Introduction to Grothendieck duality theory, Springer, 1970

И В Долгачев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Milne, J, Arithmetic duality theorems, Acad Press, 1987

2)代数拓扑学里的对偶性. 在这种情形下某些拓扑不变量的值可以确定其他不变量的值 在代数拓扑学里, 对偶性出现在 具有对偶的系数群以及相同维数的同调群和上同调群间的对偶性 (在特征标理论的意义下), 一个簇的具有互补维数的同调群和上同调群间的同构 (**Poincaré 对偶性** (Poincaré duality)), 一个空间的互补集的同调群和上同调群间的同构 (**Alexander**

对偶性 (Alexander duality)), 也出现在某些情形下同伦群和上同伦群以及同调群和上同调群的相互可交换性, 在缺乏对空间维数的附加限制条件时, 这个性质只是对 S 同伦群和 S 上同伦群而言的 (见 S **对偶性** (S-duality))

同调和上同调间的对偶性 (duality between homology and cohomology) 设 $\{H_r(X,A), f_*, \partial\}$ 是在空间对和其映射的某个容许范畴上的任意**同调论** (homology theory), 即一个系统, 它满足具有离散或紧 Abel 群 $H_r(X,A)$ 的同调论的 **Steenrod - Eilenberg 公理** (Steenrod-Eilenberg axioms), 那么系统 $\{H^r(X,A), f^*, \delta\}$ (这里 $H^r(X,A)$ 是 $H_r(X,A)$ 的特征标群, f^* 和 δ 是分别与 f_* 和 ∂ 共轭的同态) 满足上同调论的 Steenrod - Eilenberg 公理, 并且是在同一范畴上的具有紧或离散群 $H^r(X,A)$ 的上同调论. 按这种方式对任何上同调论也可构造对偶的同调论 因此同调论和上同调论是对偶对 (dual pairs), 从一个理论到另一个理论的交换是在相差一个自然等价的意义下的一个对合. 对于同调论的任意一个定理, 也就是关于系统 $\{H_r(X,A), f_*, \partial\}$ 的定理, 存在一个关于系统 $\{H^r(X,A), f^*, \delta\}$ 的对偶命题, 即上同调论的一个定理, 反之亦对 在过渡到对偶命题时, 群被特征标群代替, 同态要改变方向, 子群被商群取代, 反之亦对. Steenrod - Eilenberg 公理本身就能作为例子 对于特定的范畴或理论, 这个对偶性的构造可用如下方式来实现 设 $K=\{t^r\}$ 是一个 (有限) **复形** (complex). 数

$$(c_r, c^r) = \sum_{t^r \in K} c_r(t^r) c^r(t^r) \mod 1$$

被取作为 K 在离散或紧系数群 X 上的一个 r 维链 c_r 与 K 在系数群 X^* 上的一个 r 维上链 c^r 之间的乘积, 这里的 X^* 是在特征标理论的意义下 X 的对偶群 这个乘积定义了同调类与上同调类间的乘法, 并把 r 维同调群和上同调群转换成相互的特征标群. 在无限复形的情形下有两种类型的同调群——射影的和谱的 谱同调群 (spectral homology group) 是以包含关系为序的、闭有限子复形的同调群的直谱极限, 而射影同调群 (projective homology group) 则是这些有限子复形的链群的直谱极限的同调群. 上同调群则用类似方式取相应的逆谱极限而得到. 对于离散的系数群, 两个同调群是一致的, 且导致有限闭链的同调群. 如果群是紧的, 则上同调群互相重合并且给出无限上闭链的上同调群. 有限复形里存在的对偶性引出了无限复形中射影群的相互对偶性及谱群的相互对偶性, 并且后面的两种对偶性 (借助于奇异复形、覆盖的神经等) 就是在离散或紧系数群 X 上的空间 R 的在任何理论 (**奇异同调** (singular homology) 和上同调理论, **Александров - Čech 同调和上同调** (Aleksandrov - Čech homology and cohomology) 理论, **Vietoris 同调** (Vietoris homology) 和上同调理论等) 中的 r 维射影 (或谱) 同调群 $H_r(R,X)$ 与在 X 的对偶群 X^* 上的在同一理论中的 r 维射影 (或谱) 上同调群 $H^r(R,X^*)$ 之间的对偶性 ([1], [3], [6], [9])

$$H_r(R,X) \mid H^r(R,X^*), \text{ 对 } X \mid X^*$$

反映出一个流形的互补维数连通性的不变量间的关系式是由 H Poincaré 在对代数拓扑学的首次研究中建立的 (1895). 他证明了对一个 n 维可定向流形, 它的 p 维和 $(n-p)$ 维 Betti 数相等, p 维与 $(n-p-1)$ 维挠系数也相等 O Veblen (1923) 加强了这个定理, 将它表达为同调基的形式, 其中利用了上同调群, 使它可表达成对偶的形式 为了得出这种形式, 必须使每一个在离散或紧系数群 X 里取值的、在一个 n 维定向**同调流形** (homology manifold) M^n 的任何三角剖分 K 上给出的 r 维链 c_r, 对应 K 的重心星形的胞腔复形 K^* 的一个 $(n-p)$ 维上链 c^{n-p}, 这个上链在任何星形上取的值就是 c_p 在与此星形相对应的单形上所取的值 由于复形 K 与 K^* 的群是等同的, 这个对应确定了 M^n 的有互补维数的同调群与上同调群间的一个同构

$$H_r(M^n, X) \sim H^{n-r}(M^n, X)$$

这里 X 可以是一个模. 如果流形是不可定向的, 则定理在 mod 2 之下仍然正确 把群 $H^{n-r}(M^n, X)$ 换成它的对偶群 $H_{n-r}(M^n, X^*)$, 即可得到对偶性 ([1])

$$H_r(M^n, X) \mid H_{n-r}(M^n, X^*), \text{ 对 } X \mid X^*,$$

这也是有意义的, 因为它的乘积就是从两个相乘的类中任意选取的闭链的相交指数 ([1], [11], [12], [13], [15], [16])

在寻求能被集合的补集的拓扑性质所确定的集合的拓扑性质方面, J Alexander 定理 (1922) 是一个重大的进展 (起先是在集合理论里). 定理断言位于 n 维球面里的一个多面体的 r 维模 2 Betti 数等于它的补集的 $(n-r-1)$ 维模 2 Betti 数 (见 **Alexander 对偶性** (Alexander duality)).

这个定理成为许多研究工作的基础, 从而极大地影响了代数拓扑学的发展. 这些研究是从下列各方面展开的 推广能应用 Alexander 对偶性的空间类 (平面、Euclid 空间、任意维数的球面和流形、局部紧空间等), 它们的子集 (多面体、闭子集、任意子集) 以及系数的范围 (模 2 整数、整数群、有理数域、其他特定的群与域、任意 Abel 群、拓扑 (主要是紧的) Abel 群等), 也设法加强联系互补集的关系式 (Betti 数的等式、群同构、拓扑群的对偶性、自然和连接同态等). 这样得到的有些结果可以表示成以下的图式 ([1], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [11])

$$\frac{H_r(A,X)}{H^r(A,X^*)} \quad \asymp \quad \frac{H_{n-r-1}(B,X^*)}{H^{n-r-1}(B,X)},$$

这里的X是离散或紧的系数群，$X^*|X$，A和B是n维球面流形M^n的互补集合，$H_r(A,X)$和$H^r(A,X^*)$分别是集合A在X或X^*上的（带紧支集的）r维Александров-Čech同调和上同调群，$H_{n-r-1}(B,X^*)$和$H^{n-r-1}(B,X)$分别是集合B在X^*或X上的$(n-r-1)$维Александров-Čech谱同调群和谱上同调群 图上所标出的关系是由不同的作者用不同的方法得到的，其含义是 在同构映射下的对应元素都代表了与之成垂直或水平对偶性的群的同一个特征标 因此它们是同一个**对偶定理**（duality theorem）的不同表示形式 上部的**对偶性**是连接对偶性，也就是说，它的元素的乘积是从相乘的类中任意选取的闭链的**环绕系数**（linking coefficient），而在紧群X^*的情形下则是由闭链的环绕的连续性来定义的 在上图中，左边一列的群可用具有紧支集的$(r+1)$维Steenrod同调和上同调群取代，而右边一列的群可用$(n-r-1)$维射影Александров-Čech同调和上同调群取代 这样，对于紧集A，主对角线的同构给出了Steenrod对偶定理的原始形式，只需按照Poincaré定理把集合B的上同调群换成无限闭链的$(r+1)$维同调群．如果群X是紧的，则图是同构的，如果集合A又是紧的，那么图的顶上一行的对偶性就是 Л С Понтрягин（[1]）在1934年得到的定理（见**Понтрягин对偶性**（Pontryagin duality）） 关于其他的推广及研究方向可参见[2]，[10]，[14]，[15]，[16]

Alexander对偶性的一个重要形式，它涉及到连接同态和正合性公理，就是具有相邻维数的同调群之间的同构以及上同调群之间的同构 由П.С.Александров和А Н Колмогоров确定的这些同构断定系数取在紧（或离散）群X上的、在维数r和$r+1$处零调的、正规局部紧空间R的闭子集A的r维同调（或上同调）群同构于它的补集的$(r+1)$维同调（或上同调）群

$$H_r(A,X) \sim H_{r+1}(R\backslash A, X)$$

及

$$H^r(A,X) \sim H^{r+1}(R\backslash A, X)$$

Понтрягин定理是从这些同构推导出来的 Александров（[2]）从一般对偶性关系得到了这些同构，这些对偶关系联系了互补集合和空间的同调群和上同调群以及在嵌入和切除同态之下的各种核、象及商群 这些关系式也提供了大量有关集合在空间中的位置的其他重要信息 П.С Александров（[2]）得到这些关系式是借助于关于所谓的神经的奇异子复形的谱同调及上同调群，构成这些复形的单形的顶点的闭包是非紧的 А Н.Колмогоров利用他的泛函同调和上同调群证明了上述对偶同构（见**Колмогоров对偶性**（Kolmogorov duality）） 上面提到的对偶性及其他的对偶性（例如**Lefschetz对偶性**（Lefschetz duality））被各种关系式联系着 它们也可被看作某个一般对偶性的推论，其中涉及到所谓集合的外群，它是这个集合的邻域的上同调群以嵌入关系为序的有向极限（[3]，[4]，[5]，[6]，[7]，[12]，[13]）．如果以**层论**（sheaf theory）的观点来观察，那么各种对偶性之间的联系就会出现新的面貌

参考文献

[1] Понтрягин, Л С, 《Успехи матем наук》, **2**(1947), 2, 21－44

[2] Александров, П С, 《Изв АН СССР, Сер матем》, **6**(1942), 227－282

[3] Александров, П С, 《Матем сб》, **21**(1947), 2, 161－232

[4A] Александров, П С, 《Тр Матем ин-та АР СССР》, **48**(1955), 1－108

[4B] Александров, П С, 《Тр матем ин-та АР СССР》, **54**(1959), 1－136

[5] Чогошвили, Г С, 《Докл АН СССР》, **51**(1946), 2, 87－90

[6A] Chogoshvili, G S, On homology theory for non-closed sets, in General topology and its relation to modern analysis and algebra Proc Symp Prague, Acad Press, 1961, 123－132

[6B] Чогошвили, Г С, 《Успехи матем наук》, **21**(1966), 4, 23－34

[7] Kaplan, S, Homology properties of arbitrary subsets of Euclidean spaces, *Trans Amer Math Soc*, **62**(1947), 248－271

[8A] Ситников К А, 《Матем сб》, **34**(1954), 3－54

[8B] Ситников, К А, 《Матем сб》, **37**(1955), 385－434

[8C] Ситников, К А, 《Матем сб》, **48**(1959), 213－226

[9] Берикашвили, Н А, 《Тр Тбил матем ин-та》, **24**(1957), 409－484

[10] Баладзе, Д С, 《Тр Тбил матем ин-та》, **41**(1972), 41－83

[11] Bourgin, D, Modern algebraic topology, Macmillan, 1963

[12] Spanier, E, Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966

[13] Switzer, R M, Algebraic topology, homotopy and homology, Springer, 1975

[14] Скляренко, Е Г, 《Изв АН СССР Сер матем》, **35**(1971), 4, 831－843

[15] Borel, A and Moore, J C, Homology theory for locally compact spaces, *Mich Math J*, **7**(1960), 137－160

[16] Bredon, G, Sheaf theory, McGraw-Hill, 1967

Г С Чогошвили 撰

3) 解析空间理论中的对偶性 在复空间的各种拓扑向量上同调空间之间的对偶性 有三种类型的对偶定理，它们对应于拓扑学中的 Poincaré、Lefschetz 和 Александров - Понтрягин 对偶性，涉及到**复空间** (complex space) X 的上同调空间 $H_{\Phi}^{p}(X, \mathscr{F})$，其值取在**凝聚解析层** (coherent analytic sheaf) $\mathscr{F}$ 里，支集取在族 Φ 内或它的一个商空间内（见在层内取值的**上同调** (cohomology)）.

Serre 对偶定理 (Serre duality theorem)（[1]）属于第一种类型 设 X 是具有可数基的 n 维复流形，Ω 是 n 次全纯微分形式的层，$\mathscr{F}$ 是 X 上局部自由**解析层** (analytic sheaf) 对于每个整数 $p(0 \leqslant p \leqslant n)$ 可以定义一个双线性映射

$$H^{p}(X,\mathscr{F}) \times H_{c}^{n-p}(X, \operatorname{Hom}(\mathscr{F},\Omega)) \to \mathbf{C}, \qquad (*)$$

它可以看成是一个 $\cup$ 乘法

$$H^{p}(X,\mathscr{F}) \times H_{c}^{n-p}(X, \operatorname{Hom}(\mathscr{F},\Omega)) \to H_{c}^{n}(X,\Omega)$$

(c 表示紧支集的族)以及 $H_{c}^{n}(X,\Omega)$ 上的一个形如

$$s(\hat{\omega}) = (-1)^{n} \int_{X} \omega$$

的线性形式 s (称为迹)的复合，这里的 ω 是具有紧支集的 (n,n) 形式，它通过 Dolbeault 定理对应于一个类 $\hat{\omega}$ (见**微分形式** (differential form))．Serre 对偶定理断言如果上同调空间被赋予典范的局部凸拓扑（见**凝聚解析层** (coherent analytic sheaf))，那么映射 (*) 关于第一个变量连续，而且当空间 $H^{p+1}(X, \mathscr{F})$ 是分离空间时，它定义了向量空间的同构

$$(H^{p}(X,\mathscr{F}))' \cong H_{c}^{n-p}(X, \operatorname{Hom}(\mathscr{F},\Omega)).$$

层 $\mathscr{F}$ 和 $\operatorname{Hom}(\mathscr{F},\Omega)$ 的位置可以互相交换，因为运算 $\operatorname{Hom}(\cdot,\Omega)$ 在局部自由层上是对合的

特别当流形 X 是紧的，K 是 X 上的典范除子，且 D 是 X 上任意的**除子** (divisor) 时，Serre 定理蕴含了空间 $H^{p}(X,\mathscr{O}_X(D))$ 与 $H^{n-p}(X,\mathscr{O}_X(K-D))$ 的维数是相等的，这常被用于上同调的计算 对于任意域上的非奇异射影代数簇也有类似的对偶定理（见代数几何学里的**对偶性** (duality)）.

当 $\mathscr{F}$ 是流形 X 上的任意的凝聚解析层时，与拓扑向量空间 $H_{\Phi}^{p}(X,\mathscr{F})$ 和 $\operatorname{Ext}_{\Psi}^{n-p}(X,\mathscr{F},\Omega)$ 相关联的分离 (Hausdorff) 空间之间存在一个自然的拓扑对偶性，这里的 Φ 是闭支集的族，Ψ 是紧支集的族，或者与此相反，而 $\operatorname{Ext}_{\Psi}^{n-p}(X,\mathscr{F})$ 则表示函子 $\operatorname{Hom}_{\Psi}(X,\mathscr{F},\cdot)$ 的**导出函子** (derived functor) 空间 $H_{\Phi}^{p}(X,\mathscr{F})$ 为分离的，当且仅当 $\operatorname{Ext}_{\Psi}^{n-p+1}(X,\mathscr{F},\Omega)$ 为分离的（[2]，[3]）．对于紧流形 X，这蕴涵有限维空间的同构

$$(H^{p}(X,\mathscr{F}))' \simeq \operatorname{Ext}^{n-p}(X,\mathscr{F},\Omega)$$

当 X 是 **Stein 流形** (Stein manifold) 时，就可得到 $H^{0}(X,\mathscr{F})$ 与 $\operatorname{Ext}_{c}^{n}(X,\mathscr{F},\Omega)$ 之间以及 $H_{c}^{p}(X,\mathscr{F})$ 和 $\operatorname{Ext}^{n-p}(X,\mathscr{F},\Omega)$ 之间的拓扑对偶性

与代数几何学中的相应的对偶定理相类似，这些结果也可推广到具有奇点的复空间的情形（[4]）以及相对的情形（[5]）

以下的对偶定理是 Lefschetz 定理的类似（[3]）设 X 是具有可数基的 n 维复流形，K 是 X 里的 Stein 紧统 对于 X 上任何凝聚解析层 $\mathscr{F}$ 及任何整数 $p \geqslant 0$，空间 $\operatorname{Ext}^{n-p}(K,\mathscr{F},\Omega)$ 有一个 DFS 型（强对偶于 Fréchet-Schwartz 空间）拓扑，并且它的对偶空间代数同构于 $H_{K}^{p}(X,\mathscr{F})$ 根据另一个同类型的定理（[6]），在同样假设之下，当 $Y \subset X$ 为开集时，空间 $H_{Y}^{p}(X,\mathscr{F})$ 有一个 QFS 型 (Fréchet-Schwarz 商空间) 拓扑，$\operatorname{Ext}_{c}^{n-p}(Y,\mathscr{F},\Omega)$ 有一个 QDFS 型 (DFS 型的商空间) 拓扑，而与它们关联的分离空间是拓扑对偶的 空间 $H_{Y}^{p}(X,\mathscr{F})$ 是分离的，当且仅当 $\operatorname{Ext}_{c}^{n-p+1}(Y,\mathscr{F},\Omega)$ 是分离的

第三种类型的对偶定理表现为以下的定理（[8]）对于任何开子集 $Y \subset X = \mathbf{C}P^{1}$，空间 $\Gamma(Y,\mathscr{O}_X/\Gamma(X,\mathscr{O}_X))$ 的强对偶空间同构于 $\Gamma(X \setminus Y, \mathscr{O}_X)$．这个定理可推广如下（[7]） 设 X 是 n 维复流形，在无穷远处可数，$Y \subset X$ 是开子集，$\mathscr{F}$ 是 X 上凝聚解析层，$p \geqslant 0$ 是一个整数．考虑拓扑向量空间的典范映射

$$\alpha . H^{p}(X,\mathscr{F}) \to H^{p}(Y,\mathscr{F}),$$

$$\gamma \quad H_{X \setminus Y}^{p+1}(X,\mathscr{F}) \to H^{p+1}(X,\mathscr{F}),$$

$$\beta \quad \operatorname{Ext}_{c}^{n-p-1}(X,\mathscr{F},\Omega) \to \operatorname{Ext}_{c}^{n-p-1}(X \setminus Y,\mathscr{F},\Omega)$$

要使与 $\operatorname{Coker}\beta$ 相关联的分离空间同构于 $\operatorname{Coker}\alpha$ 的强对偶空间的充要条件是 $\operatorname{Ker}\gamma$ 是闭的．(已经知道有 $\operatorname{Ker}\gamma$ 不闭的例) 特别当层 $\mathscr{F}$ 是局部自由的且

$$H^{p}(X,\mathscr{F}) = H^{p+1}(X,\mathscr{F}) = 0$$

时，则与 $H^{p}(Y,\mathscr{F})$ 以及 $H_{c}^{n-p-1}(X \setminus Y, \operatorname{Hom}(\mathscr{F},\Omega))$ 相关联的分离空间是对偶的

参考文献

[1] Serre, J - P, Une théorème de dualite, *Comm Math Helv*, **29** (1955), 9－26

[2] Malgrange, B, Systèmes differentiels à coefficients constants, in Sem Bourbaki, Vol 246, Benjamin, 1962－1963

[3] Banica, C and Stanasila, O, Metode algebrice in teoria globala a spatiilor complexe, Ed Acad Republ Soc Romania, 1974

[4] Ramis, J P and Ruget, G, Complexe dualisantet théorèmes de dualité en geométrie algebrique complexe,

Publ Math IHES, **38** (1970), 77–91

[5] Ramis, J P and Ruget, G, Résidus et dualite, *Invent Math*, **26** (1974), 2, 89–131

[6] Головин, В Д, 《Функциональный анализ》, **5** (1971), 4, 66

[7] Головин, В Д, 《Матем заметки》, **13** (1973), 4, 561–564

[8] Grothendieck, A, Sur certains espaces de fonctions holomorphes, *J Reine Angew Math*, **192** (1953), 35–64

В П Паламодов 撰

4) 解析函数论中的对偶性

a) Borel 变换 (Borel transform) 下述变换的思想应归属于 E Borel (1895) 把级数

$$a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^{n+1}}$$

变换成级数

$$A(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n$$

及其逆变换，条件为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|^{1/n}=\sigma<+\infty$$

这是在无穷远的一个邻域 $|z|>\sigma$ 内解析的函数和指数型 σ 的整函数之间的一个对偶关系 例如 Pólya 定理 (Pólya theorem) 是这样得到的 设 $K(\varphi)$ 是函数 $a(z)$ (它被解析开拓到形如 $\mathrm{Re}(ze^{-i\varphi})>c$ 的半平面) 的奇点集的凸包络的支撑函数，设

$$h(\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|A(re^{i\varphi})|}{r}$$

是整函数 $A(z)$ 的增长指数，则

$$h(\varphi)=k(-\varphi),\ \sigma\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$$

由于这个对偶关系，函数 $a(z)$ 向圆盘 $|z|<\sigma$ 的解析开拓问题等价于相应的整函数 $A(z)$ 在不同方向上的增长性的研究．

b) 解析函数空间中的对偶性．设 G 是在扩充复平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 里的开集，$A(G)$ 是 G 内解析函数的空间，其拓扑由范数系

$$p_n(f)=\max_{z\in K_n}|f(z)|,\ f\in A(G)$$

定义，这里 $\{K_n\}$ 是含在 G 内的紧集的递增系，并且穷尽 G，那么在 $A(G)$ 里的收敛 $f_n\to f$ 意味着在 G 的所有紧子集上一致收敛 $f_n(z)\to f(z)$ 设 $\infty\in G$，$A_0(G)$ 是 $A(G)$ 的子空间，由使 $f(\infty)=0$ 的函数组成，又设 F 是 $\overline{\mathbf{C}}$ 的紧子集．考虑所有开集 $G\supset F$ 的系统 $\mathscr{C}^F$ 以及函数的集合 $\bigcup_{G\in\mathscr{C}^F}A(G)$ 这个集合里的两个函数 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 被认为是等价的，如果它们在某个集合 $G\in\mathscr{C}^F$ 上的限制相等 这个等价关系把被研究的集合分成类 $\bar{f}$ 每个类被称为 F 上的局部解析函数 (local analytic function)，用 $A(F)$ 记这种函数的集合 类 $A(F)$ 很自然地成为一个线性空间，再在其上引入赋范空间 B_n 的序列的归纳极限拓扑．这些空间 B_n 可如下构作 设 $\{G_n\}$ 是 $\mathscr{C}^F$ 内递降序列使得 $G_{n+1}\subset G_n$ 以及 $\forall\, G\in\mathscr{C}^F$

$$\exists n_0\quad n\geqslant n_0\Rightarrow G_n\subset G$$

则 B_n 是 G_n 内有界解析函数的空间，带有范数

$$\|f\|=\max_{\in G_n}|f(z)|$$

关于解析函数空间的对偶性的最简单的事实如下．设 G 是一个开集，设 (为确定起见) $\infty\in G$，$F=\overline{\mathbf{C}}\backslash G$ 空间 $A(F)$ 在线性拓扑空间理论的意义下对偶 (共轭) 于空间 $A_0(G)$ 这个对偶性建立如下 如果 $\Lambda(f)$ 是 $A_0(G)$ 上的一个连续线性泛函，那么存在唯一的元素 $\bar{g}\in A(F)$，使得

$$\Lambda(f)=\int_\gamma f(z)g(z)dz,$$

其中 γ 是 G 内某个包围 F 的 (合成的) 围道，$g\in\bar{g}$，$\Lambda(f)$ 不依赖于 $g\in\bar{g}$ 空间 $A(E)$ 可对任意的集合 $E\subseteq\mathbf{C}$ 定义，而并非仅限于这里所考虑的 $E=G$ 是一个开集以及 $E=F$ 是一个紧集的情形．其他的推广包括考虑 Riemann 曲面上的集合、多复变函数的空间及向量值解析函数的空间 (在线性拓扑空间内取值)．

解析函数空间对偶理论的发展受到了线性拓扑空间的一般对偶理论的发展的促进，而反过来，这个理论本身又通过揭示更深入具体的关系而推动一般对偶理论的发展．解析函数空间对偶理论的应用是很多的，包括插值与逼近问题 (见下面)、解析开拓、奇点集的细分与消去以及各类函数的积分表示．

c) 完全性与唯一性定理间的对偶性．一个局部凸空间 X 的元素系 $\{f_n\}$ 是完全的，当且仅当对于在 X 上连续的任意线性泛函 Λ，从 $\Lambda(f_n)=0\ (n=1,2,\cdots)$ 可以得出 $\Lambda\equiv 0$ 这一事实使得解析函数空间里的完全性问题与解析函数的各种唯一性定理之间产生了联系 对一个泛函 Λ 可以联系某个解析函数 $F(z)$ (见上面的 b)) 条件 $\Lambda(f_n)=0\ (n=1,2,\ )$ 使得 $F(z)$ 在某些点上等于零，或者使 $F(z)$ 的系数等于零．唯一性定理可推导出结论 $F(z)\equiv 0$，从而也有 $\Lambda\equiv 0$. 对于圆盘内的解析函数空间已经形成了唯一性和完全性问题的下述对偶原理 (duality principle) 设 A_R 和 A_P 分别是在圆盘 $|z|<R$ 和 $|\zeta|<P$ 内解析的函数的空间，这里 $0<R$, $P\leqslant\infty$, 又设 $F(z,\zeta)$ 是在双柱体 $|z|<R,|\zeta|<P$ 内的解析函数 设 L_z 和 Λ_ζ 分别是定义在 A_R 和 A_P 上的

线性泛函，又设 $\mathscr{O}\subset A_R$ 和 $\Omega\subset A_P$ 分别是可以表示成 $\Lambda_\zeta F(z,\zeta)$ 和 $L_z F(z,\zeta)$ 的函数的子集 函数序列 $\Lambda_{\zeta\ n}F(z,\zeta)$ 在 $\mathscr{O}$ 内完全，当且仅当对于每个 $\varphi\in\Omega$，从 $\Lambda_{\zeta\ n}\varphi=0\,(n=1,2,\ \ )$ 可以得到 $\varphi(\zeta)\equiv 0$ 特别当 $R=P=\infty$ 和 $F(z,\zeta)=e^{z\zeta}$ 时，集合 $\mathscr{O}$ 和 Ω 都与所有指数型整函数的集合重合．

d) 函数论极值问题里的对偶性 已经知道赋范空间里的最佳逼近问题是对偶地与某些线性极值问题相联系的 因此当 E 是赋范空间 X 的子空间，ω 是 X 的任意元素时，有

$$\sup_{\substack{l\in E^{\perp}\\ \|l\|\leqslant 1}} |l(\omega)| = \inf_{x\in E}\|\omega-x\|, \tag{1}$$

其中 $E^{\perp}$ 是 E 的零化子 (annihilator)，即在 E 的元素上取零值的线性泛函 l 的全体 关系式 (1) 是以 **Hahn-Banach 定理** (Hahn-Banach theorem) 为基础的，以后被证实是数学规划的极值问题里的对偶关系的特殊情形．设 G 是一个 n 连通区域，它的边界 ∂G 是由可求长周线构成的，设 B^1 是 G 内解析函数 $f(z)\,(|f(z)|\leqslant 1)$ 的类，E^1 是 G 内可表示成它的边界值的 Cauchy 积分的解析函数的类，又设 $\omega(\zeta)$ 是 ∂G 上某个可积函数，则

$$\sup_{f\in B^1}\left|\int_{\partial G} f(\zeta)\omega(\zeta)d\zeta\right| = \inf_{\varphi\in E^1}\int_{\partial G}|\omega(\zeta)-\varphi(\zeta)|\,|d\zeta| \tag{2}$$

等式左边是有界函数的线性极值问题（例如当 $\omega(z)=1/\{2\pi i(\zeta-z_0)^2\}$ 时，问题归结为 $\sup_{f\in B^1}|f'(z_0)|$，就是多连通区域内 Schwarz 引理的问题） 等式的右边就是 ∂G 上任意函数 $\omega(\zeta)$ 用解析函数的边界值作最佳逼近问题（在积分度量下） 关系式 (2) 可被用作深入研究上述两个极值问题中每一个的出发点 它被用来建立极值函数 $f^*(z)\in B^1$ 和 $\varphi^*(z)\in E^1$ 的特征性质以及它们的唯一性问题等 函数 $F^*(z)$ 确实有重要的几何性质 在 Schwarz 引理问题中，它把 g 映到 n 叶圆盘上，在其他涉及 ∂G 上解析函数 $\omega(\zeta)$ 的问题中，函数 $f^*(z)$ 把 G 映入一个 $m(\geqslant n)$ 叶圆盘（[1]－[6]）．

参考文献

[1] Маркушевич, А И，Избранные главы теории аналитических функций, М，1976

[2] Итоги науки Математический анализ 1964, М，1966, 76－164

[3] Итоги науки Математический анализ 1967, М，1969, 75－132

[4] Итоги науки Математический анализ 1963, М，1965, 5－80

[5] Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, М，1960, 77－95

[6] Khavinson, S Ya, Two papers on extremal problems in complex analysis, *Transl Amer Math Soc*, (2) **129** (1986)

А И Маркушевич, С Я Хавинсон 撰

5) 拓扑向量空间理论中的对偶性．对偶对是一个三元组 $\{F,G,f\}$，其中 F,G 是域 k 上向量空间，f 是 $F\times G$ 上的双线性泛函（型），并且是非退化的 (non-degenerate)（或分离的 (separating)） 如果对每个 $y\in G$，$f(x,y)=0$，则 $x=\mathscr{O}$，如果对于每个 $x\in F$，$f(x,y)=0$，则 $y=\mathscr{O}$ 人们也说 f 实现了对偶性并且 F,G 构成对偶对 (dual pair) 如果 f 是固定的，则记 $f(x,y)=(x,y)$ 最重要的例子是自然对偶性 (natural duality) $F=(F,\tau)$ 是带有拓扑 τ 的局部凸拓扑向量空间，$G=((F,\tau))'$ 是 F 上所有 τ 连续线性泛函构成的对偶空间（见**伴随空间** (adjoint space))，并且 $(x,x')=x'(x)$ 对 $x\in F, x'\in G$ 这个型是非退化的这一事实可从拓扑 τ 的局部凸性推出（**Hahn-Banach 定理** (Hahn-Banach theorem) 的一个推论） 对偶理论的主要研究课题为 F 或 G 内的对象的构造方法，使得它们关于型（·，·）对偶于已给的对象，互相对偶对象的性质间的对应关系，以及由对偶生成的拓扑．上述研究的主要工具是极集的构架，当 $k=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时，集合 $A\subset F$ 的极集 (polar) 是集合

$$A^{\circ}=\{y\in G\ \ \mathrm{Re}(x,y)\leqslant 1,\ \ \forall x\in A\}$$

对偶性能产生 F 上（以及 G 上）的各种局部凸拓扑 例如（由给定的对偶性生成的）弱拓扑 (weak topology) $\sigma(F,G)$ 是由半范数族 $\{|(\cdot,y)|\,(y\in G)\}$ 所给出的，它是使所有映射 $(\cdot,y)$ 都连续的最弱拓扑，Mackey 拓扑 (Mackey topology) $\mu(F,G)$ 的零的一个邻域基是由 G 内绝对凸 $\sigma(G,F)$ 紧子集 A 的极集 A° 构成，强拓扑 (strong topology) $\beta(F,G)$ 的一个基是由 $(G,\sigma(G,F))$ 内有界子集 A 的极集所构成．对任意的 $A\subset F$，集 $A^{\circ\circ}$ 是集 $A\cup\{\mathscr{O}\}$ 的凸 $\sigma(F,G)$ 闭包（双极定理 (bipolar theorem)） 空间 G 等同于 $(F,\sigma(F,G))'$（对偶理论基本定理 (basic theorem of duality theory)，它证明了任何对偶性都可被理解为自然对偶） 空间 $(F',\sigma(F',F))$ 称为 F 的弱共轭 (weak conjugate)（或对偶 (dual)）空间．

设 F 是 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 上局部凸空间．下述条件中的任何一个都是使集合 $A\subset F$ 成为有界的充要条件 a) A 在弱拓扑下有界，b) A° 是吸收集 当 A 是零的邻域时，A° 是 $\sigma(F',F)$ 紧的．度量空间 F 为完全的，当且仅当集合 $A\subset F'$ 在 $\sigma(F',F)$ 拓扑内为闭集等价于所有的交 $A\cap U^{\circ}$ 在同一拓扑里闭，这里 U 取遍 F 内零的邻域集 (Крейн-Шмульян 定理 (Kreĭn-Shmulyan theorem)) 如果 F 是一个完全可分空间，f 是 F' 上的线性泛函，那么 $f\in(F',\sigma(F',F))'$ 当且仅当从 $\lim_n x_n=\mathscr{O}$（在拓扑 $\sigma(F',F)$ 之下）可以推出 $\lim_n f(x_n)=0$ (Grothendieck 定理 (Grothendieck theorem)) 完全空间 F 的子集 A 是

相对$\sigma(F,F')$紧的，如果它是相对$\sigma(F,F')$序列紧（Эберлейн定理（Eberlein theorem））R上Fréchet空间的一个凸子集A是$\sigma(F,F')$紧的，当且仅当对任意的$f\in F'$存在$a\in A$，使得$\sup_A f=f(a)$（James定理（James theorem））．在使得$(F,\tau)'=G$的拓扑τ中间，$\mu(F,G)$是最细的，$\sigma(F,G)$是最粗糙的（Mackey-Arens定理（Mackey-Arens theorem），它对应用上很重要的保对偶拓扑作了描述）．下面所述的关于空间(F,τ)的每一个条件都能使拓扑τ与Mackey拓扑重合 a）F是**桶型空间**（barrelled space），b）F是囿空间（度量空间为其特例） 一般地说强拓扑$\beta(F,G)$不保持对偶性 如果$X=G$是局部凸的且$X'=F$，则空间$X^*=(X',\beta(X',X))$称为X的强对偶（strong dual）空间，如果再加上$\beta(X',X)$保持对偶性（即$X^*=X$），则空间X称为半自反的（semi-reflexive）（X是**自反空间**（reflexive space），如果$X^{**}=X$）

设H是F的子空间，则$\{H,G/H^0\}$和$\{F/H,H^0\}$关于型$(\cdot,\cdot)$的自然分解成为对偶对，当一族对偶$\{F_\alpha,G_\alpha,(\cdot,\cdot)_\alpha\}$被给定后，积空间$F=\prod_\alpha F_\alpha$及子空间$G=\oplus_\alpha G_\alpha=\{(g_\alpha)\in\prod_\alpha G_\alpha\cdot\{\alpha\ \ g_\alpha\neq 0\}$为有限集$\}$的对偶性是由型

$$(f,g)=\sum_\alpha (f_\alpha,g_\alpha)_\alpha$$

实现的，其中

$$f=\{f_\alpha\}\in\prod_\alpha F_\alpha,\ g=\{g_\alpha\}\in\bigoplus_\alpha G_\alpha$$

归纳极限$\lim_\alpha \operatorname{ind} F_\alpha$和射影极限$\lim_\alpha \operatorname{pr} F_\alpha$的对偶性可用类似方式来描述．空间$F$，$F_\alpha$内保对偶拓扑的存在就能把上述断言理解为对下列空间的自然对偶性的描述 $\prod_\alpha F_\alpha$（Тихонов拓扑） F/H（商拓扑），H（诱导拓扑），$\lim_\alpha \operatorname{ind} F_\alpha$和$\lim_\alpha \operatorname{pr} F_\alpha$ 在赋范空间F的情形下，H^*与F^*/H^0的自然同构是一个等距同构

$$\|f|H\|=\operatorname{dist}(f,H^0),\ f\in F^*$$

对偶性在线性分析的特定问题中的应用是与线性（连续）泛函在这些问题中所起的作用成比例的 在分析的下列分支里，对偶理论的思想特别重要（甚至是决定性的） 局部凸空间的线性拓扑（度量）性质的研究，尤其是对给定空间的自然对偶性的描述（[1],[2],[3],[5]），广义函数论（[11]），极值问题理论（[6],[7]），线性算子的谱及结构理论（[1],[2]），解析函数论中的完全性与唯一性定理，解析泛函的Fantappiè理论（[8]），亦见解析函数论中的**对偶性**（duality）．

参考文献

[1] Bourbaki, N, Elements of mathematics Topological vector spaces, Addison-Wesley, 1977（译自法文）

[2] Robertson, A P and Robertson, W J, Topological vector spaces, Cambridge Univ Press, 1964

[3] Schaefer, H H, Topological vector spaces, Macmillan, 1966

[4] Dunford, N and Schwartz, J T, Linear operators, 1–3, Interscience, 1958–1971

[5] Day, M M, Normed linear spaces, Springer, 1958

[6] Иоффе, А Д, Тихомиров, В М, Теория экстремальных задач, М, 1974（英译本 Ioffe, A D and Tikhomirov, V M, Theory of extremal problems, North-Holland, 1979)

[7] Rockafellar, R T, Convex analysis, Princeton Univ Press, 1970

[8] Хавин, В П, Итоги науки Математический анализ 1964, М, 1966, 76–164

[9] Хавинсон, С Я,《Успехи матем наук》, **18** (1963), 2, 25–98

[10] Diestel, J, Geometry of Banach spaces-selected topics, Springer, 1975

Н К Никольский 撰

【补注】 在拓扑向量空间E的对偶空间E^*上有一个使用得很多的拓扑 弱*拓扑（weak-*-topology）．它是E^*上使得所有映射$x\ \ f\to f(x)\ (x\in E)$都连续的最弱拓扑

6）极值问题与凸分析中的对偶性．这是凸集、凸函数和凸极值问题的一个特性，即它们能用对偶的方式表达出来——在基本空间或在对偶（共轭）空间里．局部凸拓扑向量空间里的闭凸集可用对偶的方式描述 它们等同于包含它们的闭半空间的交．因此对向量空间X里的凸集A都可以联系共轭空间里的一个对偶对象——它的极$A^\circ=\{x^*\in X^*\ \ \langle x^*,x\rangle\leq 1,\ x\in A\}$ 局部凸拓扑向量空间里的闭凸函数（即具有凸、闭上境图的函数）也允许有对偶描述（亦见**对偶函数**（dual functions），**共轭函数**（conjugate function）），这些函数是不超过它们的仿射函数的按点最小上界 这样的对偶性使得对每个凸函数$f\ \ X\to\overline{\mathbf{R}}$可以联系一个对偶对象——在共轭空间$X^*$上给出的共轭函数，且由下式定义

$$f^*(x^*)=\sup_{x\in X}(\langle x^*,x\rangle-f(x))$$

局部凸拓扑向量空间里的线性函数的按点最小上界是凸闭齐次函数 这个事实成为凸集与凸齐次函数间对偶性的基础 刚才叙述的对偶性又是关于线性泛函的扩张的**Hahn-Banach定理**（Hahn-Banach theorem）以及凸集分离定理的基础

凸集和凸函数的对偶问题的实质反映在极算子$A^{\circ\circ}=A$和共轭算子$f^{**}=f$的对合性上，含零的凸闭集和处处大于$-\infty$的凸闭函数均有此性质．上面最后一个关于函数的结果（Fenchel-Moreau定理（Fenchel-Moreau theorem））产生了线性规划和凸规划的极值问

题的许多对偶定理．线性规划里的一对对偶问题的例子是．

$$\text{I}\quad (c,x)\to \inf \qquad \text{II}.\ (b,y)\to \sup \qquad (1)$$
$$Ax\geqslant b,\ x\geqslant 0 \qquad A^{*}y\leqslant c, y\geqslant 0,$$

这里

$$x,c\in \mathbf{R}^{n},\quad (c,x)=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i,\qquad y,b\in \mathbf{R}^{m},$$

$$(b,y)=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i,\qquad A\quad \mathbf{R}^{n}\to \mathbf{R}^{m}$$

对于线性规划的一对对偶问题来说，下面两者之一成立 或者问题的值为有限、相等，并且两个问题都有解，或者两个问题中的一个问题的容许值集合是空的或其解等于无穷大

通常的构造对偶问题的方法如下所示．极小化问题

$$f(x)\to \inf,\quad x\in X, \qquad (2)$$

其中 X 是线性空间，$f\ X\to \overline{\mathbf{R}}$ 包含在一类依赖于一个参数的类似问题之中

$$F(x,y)\to \inf,\ x\in X,$$

其中 Y 是另一个线性空间，$F\ X\times Y\to \overline{\mathbf{R}}$，$F(x,0)=f(x)$（函数 F 称为 f 的扰动 (perturbation)） 通常假设 F 是凸的．原问题关于所给扰动的对偶问题就是

$$-F^{*}(0,y^{*})\to \sup,\quad y^{*}\in Y^{*}, \qquad (2^{*})$$

这里 F^{*} 是在 Legendre-Young-Fenchel 意义下与 F 对偶（共轭）的函数（见**对偶函数** (dual functions)）．对于凸规划中的最简单问题，其类型为

$$f_0(x)\to \inf,\ f_i(x)\leqslant 0,\ i=1,\quad ,m,\ x\in B, \qquad (3)$$

其中 X 是线性空间，$f_i\ X\to \overline{\mathbf{R}}$ 是 X 上凸函数，B 是 X 内凸集（线性规划问题是 (3) 的特殊情形），通常使用以下的标准扰动，它依赖于参数 $y\in\overline{\mathbf{R}}^{m}$，$y=(y_1,\cdot\ ,y_m)$，$f_0(x)\to \inf,\ f_i(x)\leqslant y_i,\ i=1,\quad ,m,\ x\in B$ 对于一般类的凸规划问题的对偶定理 (duality theorems) 断言，如果对扰动 F 作某些假设，那么问题 (2) 和 (2^{*}) 的值相等，而且其中一个问题的解是另一个的 Lagrange 乘子

参考文献

[1] Minkowski, H, Geometrie der Zahlen, Chelsea, reprint, 1953

[2] Minkowski, H, Gesammelte Abhandlungen, Vol 1-2, Teubner, 1911

[3] Fenchel, W, On conjugate convex functions, *Canad J Math*, **1** (1949), 73-77

[4] Rockafellar, R T, Convex analysis, Princeton Univ Press, 1970

[5] Ekeland, I and Teman, R, Analyse convexe et problèmes variationnels, Dunod, 1974

[6] Иоффе, А Д, Тихомиров, В М, Теория экстремальных задач, М, 1974（英译本 Ioffe, A D and Tikhomirov, V M, Theory of extremal problems, North-Holland, 1979)

В М Тихомиров 撰

7) 有限 Abel 群的对偶性．一般 **Понтрягин 对偶性** (Pontryagin duality) 及其各种改进的古典原型．它涉及到有限 Abel 群 A 与它的在乘法群 k^{*} 中取值的特征标群 $\hat{A}=\mathrm{Hom}(A,k^{*})$ 之间的同构对应性质，其中 k^{*} 是特征数不能整除 A 的阶的代数闭域 k 的乘法群（见**特征标群** (character group)）. 自然映射

$$f\ A\to \hat{\hat{A}}$$

由规则

$$f(a)(\chi)=\chi(a)$$

定义，其中 $a\in A$，$\chi\in\hat{A}$，这是一个同构．对任意的子群 $B\subseteq A$ 有 $f(B)=(B^{\perp})^{\perp}$，这里

$$B^{\perp}=\{\chi\in\hat{A}\ \ \chi(b)=1\ \text{对所有}\ b\in B\}\cong\widehat{A/B}$$

对应 $B\to B^{\perp}$ 建立 A 与 $\hat{A}$ 的子群格间的对偶性．这是一一对应，而且有性质

$$(BC)^{\perp}=B^{\perp}\cap C^{\perp},\ (B\cap C)^{\perp}=B^{\perp}C^{\perp}$$

参考文献

[1] Понтрягин, Л С, Непрерывные группы, 3 изд, М, 1973, гл 6（中译本 Л С 邦德列雅金，连续群，科学出版社，1978)

[2] Huppert, B, Endliche Gruppen, 1, Springer, 1979, 482-490

А И Кострикин 撰

【补注】 对偶性是遍布于（现代）数学中一个重要概念．除了上面提到的各种条目如 **Alexander 对偶性** (Alexander duality)，**Колмогоров 对偶性** (Kolmogorov duality)，**Lefschetz 对偶性** (Lefschetz duality)，**S 对偶性** (S-duality) 外，还有许多属于对偶类型的材料可在以下条目中找到 **超图** (hypergraph)（对偶图），**逻辑代数** (algebra of logic)（逻辑中的对偶原理，对偶运算），**诱导表示** (induced representation)（Frobenius 互反性或对偶性），**射影平面** (projective plane) 和**射影空间** (projective space)（射影几何学中的对偶原理），（几何学与逻辑学中的）**对偶原理** (duality principle)，**线性规划** (linear programming)（对偶线性规划与对偶单纯形法），**酉表示** (unitary representation)（群的不可约表示的对偶空间），**偏序集** (partially ordered set)（带相反序的同一个集合），**Thom 空间** (Thom space)

(Atiyah 的 S 对偶定理)，**对偶范畴** (dual category)，**Понтрягин 对偶性** (Pontryagin duality) (也关于田中-Крейн 对偶)，**拓扑向量空间** (topological vector space) (关于局部凸空间的对偶性的更多内容)，**对称空间** (symmetric space) (在非紧型和紧型对称 Riemann 齐性空间之间的对偶性)，**形式群** (formal group) (在形式群与交换幂幺代数群之间的 Cartier 对偶性)，(上同调的) **Steenrod 对偶性** (Steenrod duality)，**凸集** (convex set) (凸体的对偶性)，**算术误差校正码** (code with correction of arithmetical errors) (关于对偶码的思想)，**向量空间** (vector space) (对偶向量空间和对偶线性算子)，**伴随模** (adjoint module)

设 $\hat{A}$ 表示 Abel 簇 A 的 (线性除子类的) Picard 簇，则 Abel 簇的对偶定理 (duality theorem for Abelian varieties) 断言 $\hat{\hat{A}} = A$ 陈志杰 译

对偶原理 [duality principle，двойственности принцип]

1) 数理逻辑中的对偶原理是关于逻辑运算 (在某种意义下) 可以互相替换的一条定理，这些逻辑运算是指出现在形式逻辑及逻辑对象语言的公式中的　设 A 为命题逻辑或谓词逻辑语言中的一个公式，它不含有蕴含符号 $\supset$，公式 A^* 称为公式 A 的一个对偶，是指它可以由把 A 中的符号 $\&, \vee, \forall, \exists$ 的每个出现 (见**嵌入字** (imbedded word)) 分别由它们的对偶运算，即符号 $\vee, \&, \exists, \forall$ 替代而得　对偶原理陈述为，如果 $A \supset B$ 真，则 $B^* \supset A^*$ 也真，特别地，如果两个公式 A 和 B 是等价的，则它们的对偶公式 A^* 和 B^* 也等价．对偶原理对古典系统是有效的，在其表述中所包含的等价性及正确性可以用解释来理解，也可以在对应的古典演算中推出的意义下来理解．但是，如果一个公式是从构造性的意义下来理解的，那么，对偶原理便不再有效了　例如，在命题逻辑的语言中，蕴涵式 $\neg A \& \neg B \supset \neg (A \vee B)$ 是构造性地真的，它甚至是在 **Heyting 形式系统** (Heyting formal system) 中可推出的，但是，作为对偶公式的逆蕴涵式 $\neg(A \& B) \supset \neg A \vee \neg B$ 是构造性地不真的 (它不是 Kleene 可实现的)

下面的定理与对偶原理有紧密的联系　设 $F(A_1, \ldots, A_n)$ 为一个命题或谓词公式，它是从基本命题 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 出发不使用蕴涵式而构成的．再设 $F^*(A_1, \ldots, A_n)$ 是其对偶公式，则在古典的命题演算和谓词演算中，公式 $\neg F(A_1, \ldots, A_n)$ 与公式 $F^*(\neg A_1, \ldots, \neg A_n)$ 等价．

参考文献

[1] Новиков, П С, Элементы математической логики, М, 1959 (英译本 Novikov, P S, Elements of mathematical logic, Addison-Wesley, 1964)

[2] Kleene, S C, Introduction to matemathematics, North-Holland, 1951 (中译本 S C 克林，元数学导论，科学出版社，1985)

Ф А Кабаков 撰

2) 几何学中的对偶原理是在某些几何领域中所表述的一种原理　依照这个原理，在任何真的命题中，把所有出现的概念用与之对偶的概念替代后，可得到另一个真的命题，它与原命题相对偶．

在射影几何中对偶原理的有效性可由下列事实推出　射影几何的每一条公理的对偶命题，或者是公理，或者是定理

平面上射影几何的下列概念也相对偶的

点	**直线**
点，与一条直线关联	直线，与一个点关联
n 阶的代数曲线	n 类的代数直线束
一条曲线的直切线	一个线束的特征点

如果把一个点作为一条二阶曲线的一部分这件事看成是这个点与曲线的一种关联关系，而一条直线相切于一条二次曲线看成是这条直线与曲线间的关联关系，那么，二阶曲线的概念与第二类曲线的概念便是相对偶的．**Brianchon 定理** (Brianchon theorem) 和 **Pascal 定理** (Pascal theorem) 就是一对对偶命题的例子　在射影几何中，三维空间中的点和平面是对偶的，而直线的概念与其自身相对偶．

在椭圆几何学中，对偶原理也是有效的．此时，除了射影几何中的对偶关系外，线段和角也是对偶的概念　例如，以下就是在椭圆几何中相对偶的两个语句

如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边分别相等，则这两个三角形是合同的	如果一个三角形的三个角与另一个三角形的三个角分别相等，则这两个三角形是合同的．

参考文献

[1] Ефимов, Н В, Высшая геометрия, 5 изд, М, 1971

А С Пархоменко 撰

【补注】 在上面正文中关于椭圆几何中三角形的两个语句照字面上说都是错的　但如果再要求两个三角形具有相同的拓扑型，则它们便变成真的，见 [A3].

参考文献

[A1] Artin, E, Geometric algebra, Interscience, 1957

[A2] Pedoe, D, A course of geometry, Cambridge Univ Press, 1970

[A3] Berger, M, Geometry, I－II, Springer, 1987

3) 射影几何学中的对偶原理是指，对每一个关于**射影空间** (projective space) Π_n 的子空间 $S_a, S_b, \ldots$，及其交 (intersections) 其和 (sums) 的定理，总对应于另一个定理，它是关于子空间 $S_{n-a-1}, S_{n-b-1}, \ldots$ 以及它们的和及交的　对偶原理是由射影几何的公理以及由它们导出的定理的对偶性质所决定的　对于非交换域 K 上的射影空间 $\Pi_n(K)$ 来说，对偶原理是有效的，

当且仅当 K 允许一个反自同构（anti-automorphism）. 在一般情形下，如果 K 与 K^* 是反同构和非交换域，那么，在射影空间 $\Pi_n(K)$ 和 $\Pi_n(K^*)$ 之间有一种对偶性 例如在 K 上的射影空间 $P_n^1(K)$ 和 $P_n^r(K)$（见**射影代数**(projective algebra)，**对射变换**（correlation）），它们之间的对应，即 S_k 和 S_{n-k-1} 之间的对应可由在 $\Pi_n(K)$ 和 $\Pi_n(K^*)$ 中一对坐标系的选取所确定 对偶原理也可以基于在非交换域上线性空间 $V_{n+1}(K)$ 的一个对偶映射，这可用于对射影空间的解释

М И Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Veblen, O and Young J W, Projective geometry Ginn, 1938

4) 偏序集中的对偶原理是指，如果某个关于偏序集的定理是真的，且该定理是由一般的逻辑术语和序的术语表述的，那么其对偶定理也真 为了要得到一个给定的定理的对偶定理，要把关于序的所有命题和概念都用其对偶的命题和概念来替代（即所有序的记号 ≤ 要由 ≥ 来替代，反之亦然），而一般的逻辑符号则保持不变．关于一个给定的偏序集（或给定的有序集类）的给定命题的正确性，并不能保证其关于这个集（类）的对偶命题的正确性 例如，一个偏序集可以有最小元而无最大元，它可满足极小性条件而不满足极大性条件，对偶原理的正确性源于这样的事实 一个偏序的逆关系本身也是一个偏序，对偶原理本身有时就理解成这个命题

Т С Фофанова 撰

【补注】 一个经典的例子是一个集合的子集族，以包含关系为偏序

还有另一个对偶原理，它推广了关于偏序集的对偶原理

5) 在范畴论中的对偶原理是指，如果某个关于范畴和函子的一般的断言是真的，那么，其对偶断言也真 其中对偶断言是在原断言中把所含每个范畴中的和各个射的方向倒转而得（不改变函子的方向） 例如，左伴函子是一一的，当且仅当其附益单位是首一的，这是一个定理，与之相对偶的是下列定理 一个右伴函子是一一的，当且仅当它的余单位是宏的（亦见**范畴**（category））

郑锡忠 译 莫绍揆 校

决斗 [duel, дуэль]

一种涉及时刻选择的对策（game involving the choice of the moment of time），它描述如下类型的冲突．两个对手在一定的时间期限内可以互相射击，然而供他们使用的武器仅有限定数目的子弹 局中人的策略是开火时刻的选择 支付函数定义为某个取有限多个值的随机变量的数学期望，这有限多个值对应于决斗的结果 根据是否掌握有关对手行动的信息，决斗可分为有噪声和无噪声的（寂静的）. 例如，每个局中人可以发射一发子弹，并且这一发务必在区间 [0, 1] 内发射，而准确度函数（即局中人 Ⅰ 和 Ⅱ 的击中概率）分别为 $p(x)$ 和 $q(y)$，那么，若局中人 Ⅰ 击毙 Ⅱ，则他得到1点，若他自己被击毙，则失去 1 点，在所有其他情形下，他得到的均为 0，这时支付函数 $K(x,y)$ 为.

在有噪声的决斗中

$$K(x,y)=\begin{cases} p(x)-(1-p(x))\sup\limits_{y>x} q(y), & x<y, \\ p(x)-q(x), & x=y, \\ -q(y)+(1-q(y))\sup\limits_{x>y} p(x), & x>y, \end{cases}$$

在寂静的决斗中

$$K(x,y)=\begin{cases} p(x)-(1-p(x))\,q(y), & x<y, \\ p(x)-q(x), & x=y, \\ -q(y)+(1-q(y))\,p(x), & x>y. \end{cases}$$

正在研究中的包括这样一些决斗 在这些决斗中对手都有几次射击任凭他们安排，或者是容许以连续的方式去消耗可采用的装备

参考文献

[1] Karlin, S, Mathematical method in the theory of games, Programming and economics, Addison-Wesley, 1959

Е Б Яновская 撰 胡宣达 译

Duffing 方程 [Duffing equation, Дуффинга уравнение]

二阶常微分方程

$$x''+kx'+\omega_0^2x+\alpha x^3=F\cos\omega t, \qquad (*)$$

其中 $k>0$, ω_0, α, F, ω 都是常数 这个方程是具有非线性恢复力 $f(x)=-\omega_0^2x-\alpha x^3$ 和阻尼的、在谐和外力 $F(t)=F\cos\omega t$ 作用下进行受迫振动的单自由度系统的重要例子 如果 $\alpha>0$，则称存在刚性弹性力，而如果 $\alpha<0$，则称存在柔性力 G Duffing ([1]) 首先研究了这个方程的解．

对于 Duffing 方程，不能得到封闭形式的解 已经证明，这个方程具有大量不同的周期解 在方程（*）中，可能发生的谐振动是 $x=A\cos\omega t$，其振幅 $A=A(\omega)$ 是频率的函数（振幅曲线），对于某些频率 ω 的值，可能发生多种类型的具有不同振幅的振动．在某些条件下，Duffing 方程给出频率为 ω/n 的子谐和振动，其中 n 为整数 方程（*）的解常常用小参数方法来研究

参考文献

[1] Duffing, G, Erzwungene Schwingungen bei veranderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung, Vieweg, 1918

[2] Storker, J J, Nonlinear vibrations in mechanical and elec-

trical systems Interscience, 1950

[3] Hayashi, C, Nonlinear oscillations in physical systems, McGraw-Hill, 1964 H X Розов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Guckenheimer, J and Holmes, Ph, Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields, Springer, 1983 张鸿林 译

Duhamel 积分 [Duhamel integral, Дюамеля интеграл]

具有齐次边界条件的非齐次线性偏微分方程的 **Cauchy 问题** (Cauchy problem) (或混合问题) 的解，利用齐次方程对应问题的解的表达式 考虑方程

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}+L[u(t,x)]=f(t,x),t>0,\ x\in\mathbf{R}^n, \quad (1)$$

其中 L 是一个系数不依赖 t 的线性微分算子，它包含有不超过一阶的对 t 的导数 对 (1) 提出具有初始条件

$$u(t,x)|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \quad (2)$$

的 Cauchy 问题 设充分光滑的函数 $v(t,x,\tau)(t\geqslant\tau,\ \tau\geqslant 0,\ x\in\mathbf{R}^n)$ 是齐次方程

$$\frac{\partial^2 v(t,x,\tau)}{\partial t^2}+L[v(t,x,\tau)]=0$$

当 $t>\tau$ 时的一个解，当 $t=\tau$ 时，它满足初始条件

$$v(t,x,\tau)|_{t=\tau}=0,\quad \left.\frac{\partial v(t,x,\tau)}{\partial t}\right|_{t=\tau}=f(\tau,x).$$

于是 Cauchy 问题 (1)，(2) 的解可用 Duhamel 积分表示出来

$$u(t,x)=\int_0^t v(t,x,\tau)\,d\tau$$

上述结论被称作 Duhamel 原理 (Duhamel principle)，它类似于常数变易法

类似的构造可用于方程

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+M[u(t,x)]=f(t,x),\quad t>0,\quad x\in\mathbf{R}^n$$

的具有齐次初始条件的 Cauchy 问题的情形，其中 M 是一个系数不依赖于 t 的线性微分算子，它只包含有关于变量 x 的导数.

具有齐次初始条件的非齐次热传导方程的 Cauchy 问题的解可表为 Duhamel 积分

$$u(t,x)=\int_0^t\int_{\mathbf{R}^n}[4\pi(t-\tau)]^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau,$$

而对于波动方程，当 $n=1$ 时，则有

$$u(t,x)=\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau.$$

Duhamel 积分是用 J Duhamel 的名字命名的

参考文献

[1] Тихонов, А Н, Самарский, А А, Уравнения математической физики, 3 изд, М, 1966 (中译本 А Н 吉洪诺夫，А А 萨马尔斯基，数学物理方程，上、下册，高等教育出版社，1956)

[2] John, F, Planar waves and spherical means as applied to partial differential equations, Interscience, 1955

А К Гущин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Carslaw, H S and Jaeger, J C, Conduction of heat in solids, Clarendon Press, 1959

孙和生 译 陆柱家 校

Dupin 圆纹曲面 [Dupin cyclide, Дюпена циклида]

一个曲面，它的两族曲率线都是圆，因此它是**管道曲面** (canal surface) 的特殊情况 Dupin 圆纹曲面焦集的两叶退化为曲线 Γ_1 和 Γ_2，它们是二次曲线 有三种类型的 Dupin 圆纹曲面

1) 渐屈线是圆和双曲线，相应的 Dupin 圆纹曲面的向径是

$$x=\frac{Vb\sin u}{U+V},\quad y=\frac{Ub\sinh v}{U+V},$$

$$z=\frac{Va\cos u+Uc\cosh v}{U+V},$$

其中

$$U=c\cos u+d,\ V=-a\cosh v-d,\ d=\text{常数}$$

2) 渐屈线是焦点抛物线，向径是

$$x=\frac{Vu}{U+V},\quad y=\frac{Uv}{U+V},$$

$$z=\frac{V(2u^2-p^2)-U(2v^2-p^2)}{Up(U+V)},$$

其中

$$U=\frac{2u^2+p+q}{up},\quad V=\frac{2v^2+p^2-q^2}{up},\quad q=\text{常数}.$$

3) 渐屈线是圆和直线，相应的 Dupin 圆纹曲面是**环面** (torus)

在上述情况 1) 和 3) 中 Dupin 圆纹曲面是四次代数曲面，在情况 2) 中是三次代数曲面

参考文献

[1] Dupin, Ch, Développements de géométrie, Paris, 1813

[2] Klein, F, Vorlesungen uber hohere Geometrie, Springer, 1926

[3] Hilbert, D and Cohn-Vossen, S E, Anschauliche Geometrie, Springer, 1932 И Х Сабитов 撰

【补注】 最初，Dupin 圆纹曲面在几何上定义为与三个固定球面相切的一个球面族的**包络** (envelope) 每个 Dupin 圆纹曲面都能从下列三个例子在一个适当球面中进行反演而得到：旋转环面、圆柱面和圆锥面

在五球坐标中，Dupin 圆纹曲面是二次曲面，并且具有两个相等的轴．关于 Dupin 圆纹曲面详见 [A2] 和 [A3] 圆纹曲面的一个值得注意的性质是 它们包含四族圆．

Dupin 圆纹曲面向高维的自然推广是所谓 Dupin 超曲面 (Dupin-hypersurface) (见 [A1])

参考文献

[A1] Cecil, T E and Pyan, P J, Tight and taut immersions of manifolds, Pitman, 1985

[A2] Berger, M, Geometry, 2, Springer, 1987(中译本 M 贝尔热，几何，科学出版社，1989)

[A3] Berger, M and Gostiaux, B, Differential geometry, Springer, 1988

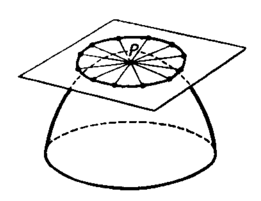
[A4] Blaschke, W and Leichtweiss, K, Elementare Differential-geometrie, Springer, 1973 张鸿林 译

Dupin 标形 [Dupin indicatrix, Дюпена индикатриса], 曲率标形 (curvature indicatrix)

表明曲面在一点的法曲率状况的平面曲线．Dupin 标形位于曲面 S 在点 P 的切平面中，它由长度为 $1/\sqrt{|K_r|}$ 的径向量 r 所描绘，其中 K_r 是 S 在点 P 沿 r 方向的法曲率 设 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v)$ 是 S 在 P 的邻域中的参数化．在 P 的 S 的切平面上引入坐标系，取 P 为坐标原点，向量 $\mathbf{r}_u$ 和 $\mathbf{r}_v$ 为这坐标系的基向量 那么，Dupin 标形的方程将是

$$|Lx^2+2Mxy+Ny^2|=1,$$

其中 x 和 y 是 Dupin 标形上点的坐标，L, M 和 N 是 S 的第二基本形式系数在 P 的值．Dupin 标形是．a) 椭圆，若 P 是**椭圆点** (elliptic point) (若 P 是**脐点** (umbilical point)，则它是圆)，b) 一对共轭双曲线，若 P 是**双曲点** (hyperbolic point)，以及 c) 一对平行直线，若 P 是**抛物点** (parabolic point)．Ch Dupin (1813) 在研究曲面时最先应用了这曲线，故以他的名字命名．



参考文献

[1] Каган, В Ф, Основы теории поверхностей в тензорном изложении, 2, М-Л, 1948 Е В Шикин 撰

【补注】 在**平坦点** (flat point) 处 Dupin 标形不存在．

在 P 的 Dupin 标形可作为曲面 S 与平行于 S 在 P 的切平面的平面的交线在适当法化之后当这个平行平面趋向切平面时的极限 见 [A1], p 370, [A2], p 363 − 365．

参考文献

[A1] Berger, M and Gostiaux, B, Differential geometry, Springer, 1988

[A2] Coxter, H S M, Introduction to geometry, Wiley, 1961

[A3] Hsiung, C C, A first course in differential geometry, Wiley, 1981 沈一兵 译

Dupin 定理 [Dupin theorem, Дюпена теорема]

已知三族曲面构成**三重正交曲面系** (triorthogonal system of surfaces)，那么不同曲面族中任两张曲面的交线必是它们中每张的曲率线 例如，共焦二阶有心曲面沿曲率线相交 Ch Dupin 最先给出这个定理的证明 ([1])，故定理以他的名字命名．

参考文献

[1] Dupin, Ch, Developpements de geometrie, Paris, 1813

[2] Каган, В Ф, Основы теории повархностей в тензорном изложении, 1, М-Л, 1947 Е В Шикин 撰

【补注】 对于历史，可见 [A2], p 398，或 [A3], p 361

参考文献

[A1] Hsiung, C C, A first course in differential geometry, Wiley, 1981

[A2] Berger, M and Gostiaux, B, Differential geometry, Springer, 1988

[A3] Coxeter, H S M, Introduction to geometry, Wiley, 1961

[A4] Laugwitz, D, Differentialgeometrie, Teubner, 1960

[A5] Blaschke, W and Leichtweiss, K, Elementare Differentialgeometrie, Springer, 1973 沈一兵 译

倍立方体问题 [duplication of the cube 或 doubling the cube, удвоение куба]

下述问题 作一立方体，使其体积等于已知立方体体积的二倍．它是关于用直尺和圆规精确作图的古代三大经典难题之一．如果已知立方体的边长为 1，则所求立方体的边长 x 等于 $2^{1/3}$，由三次方程 $x^3-2=0$ 来确定．但是，由于这个三次方程不能用平方根求解，所以不能用直尺和圆规精确作出线段 $2^{1/3}$ 倍立方问题用直尺和圆规的不可解性的第一个严格证明，是 P. Wantzell 于 1837 年给出的

参考文献

[1] Энциклопедия элементарной математики, кн 4, Геометрия, М , 1963, 205－227 Е Г Соболевская 撰

【补注】 古希腊数学家已认识到(但是没有证明)这个问题用直尺和圆规是不可解的(即不能用这种方式作出所求的立方体) 自古以来，已有许多利用其他工具的解法

同另外两个著名问题——**化圆为方问题**(quadrature of the circle)和**三等分角问题**(trisection of an angle)一样，倍立方问题属于**几何作图**(geometric constructions)分支，而在 **Galois 理论**(Galois theory)中则以代数表述形式进行讨论

倍立方问题也称为 Delian 问题(Delian problem). 关于某些细节，例如"Delian 问题"这个名称的来源以及 Menaechmus 的"解法"(使一抛物线同一双曲线相交)，见[A2], pp, 154－158

参考文献

[A1] Stewart, I , Galois theory, Chapman & Hall, 1973, Chapt 5

[A2] Kramer, E E , The nature and growth of moden mathematics, Princeton Univ Press, 1982

张鸿林 译

并向量 [dyad, диада]

一个 Hilbert 空间上的**线性变换**(linear transformation)

$$x \mapsto (a,x)b,$$

这里 a 和 b 是常向量，$(\cdot,\cdot)$ 是内积 并向量的重要性在于以下事实，例如，在一个 n 维空间里，任意一个线性变换 A 可以表成至多 n 个并向量的和

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} (a_i, x)b^i$$

(在任意 Hilbert 空间里，对于特殊的线性算子类，例如，自伴算子类，类似的分解也成立，这里 a_i, b^i 可以选取使其构成一个**双正交系**(biorthogonal system).) 在 19 世纪曾试图把线性算子的理论建立在并向量概念的基础上——所谓"并向量计算"，然而，并向量这个词现在很少被采用

参考文献

[1] Дубнов, Я С , Основы векторного исчисления, 4 изд , ч 1, 2, М -Л , 1950－1952

[2] Lagally, M , Vorlesungen über Vektor-vechnung, Becker & Erler, 1944

[3] Chapman, S and Cowling, T G , The mathematical theory of non-uniform gases, Cambridge Univ Press, 1939

М И Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Spiegel, M R , Vector analysis and an introduction to tensor analysis, McGraw-Hill, 1959

郝钢新 译

二进紧统 [dyadic compactum, диадический бикомпакт]

它是广义 Cantor 不连续统的连续象的一个紧统．二进紧统是 П С Александров 引进的，他作了一个自然的尝试，将任意度量紧统都是 Cantor 集的连续象这一定理推广到任意紧统 二进紧统类是包含所有度量紧统，并且关于 Тихонов 积及连续映射封闭的最小紧统类．二进紧统的性质是 任何紧拓扑群是二进的 二进紧统满足 **Суслин 条件** (Suslin condition)，而且，任何正则**基数** (cardinal number) $\mathfrak{m}\geq\aleph_0$ 都是一个二进紧统的**口径** (calibre) 由此推知存在非二进紧统．例如，它包含所有不可数基数的 Александров 紧统(无穷离散空间的单点紧化)．二进紧统中所有正则闭集以及所有 G_δ 型闭集都是二进紧统 二进紧统的任一非孤立点都是 κ 点 而且，如果点 $x\in X$ 的特征是 $\mathfrak{m}\geq\aleph_0$，则 X 包含一个基数为 $\mathfrak{m}$ 的 Александров 紧统，其顶点与 x 重合 无穷二进紧统的权等于点的特征的上确界，而二进紧统的 π 权等于它的权．任一极不连通二进紧统是有穷的 对于二进紧统有许多可度量化准则．特别地，如果具备下列条件之一，二进紧统 X 是可度量化的 X 满足第一可数性公理，X 是一个有序紧统的连续象，X 是遗传正规的，X 是遗传二进的，X 是 Fréchet-Урысон 空间，X 是遗传可分的，X 是一个度量空间的商空间．

参考文献

[1] Engelking, R , General topolgy, PWN, 1977

[2] Kelley, J L , General Topology, Springer, 1975 (中译本 J L 凯莱，一般拓扑学，科学出版社，1985)

[3] Ефимов, Б А , 《Тр Моск матем о-ва》, 14(1965), 211－247

А В Архангельский, Б А Ефимов 撰

【补注】 正则闭集 (regular closed set) (有时称为典范闭集 (canonically closed set)) 是一个开集的闭包

拓扑空间中的点，如果它是一个 (非平凡) 收敛序列的极限，则称为 κ 点 (κ-point)．

罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

二进不连续统 [dyadic discontinuum, двойчный дисконтинуум]

简单冒号(colon)，即由两点组成的离散空间的拓扑积．

【补注】 这种积也称为 Cantor 立方体 (Cantor cube) 它们拓扑地包含每个**零维空间** (zero-dimensional

space)．而且，每个**紧空间**（compact space）都是 Cantor 立方的一闭子空间的连续象

这一术语有些含混 **二进空间**（dyadic space）是 Cantor 立方的连续象，因此“二进不连续统”也可以理解为“全不连通二进空间”（参见**全不连通空间**（totally disconnected space））．

罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

二进空间［dyadic space，диадическое пространство］

有**二进紧统**（dyadic compactum）为其紧化的 **Тихонов 空间**（Tikhonov space） 二进空间类包含所有可分度量空间，并且关于 Тихонов 积是封闭的．二进空间显示了二进紧统的许多性质 例如，所有伪紧群都是二进的，但存在非二进的终紧群．二进空间满足 **Суслин 条件**（Suslin condition）．但并非每个正则基数 $\mathfrak{n}\geqslant\aleph_0$ 都是一个二进空间的口径．二进空间中任意正则闭集都是二进的，但并非所有闭 G_δ 集都是二进的 满足第一可数性公理的二进空间是可度量化的，但也存在不可度量化的遗传正规及遗传可分的二进空间

参考文献

[1] Пономарев, В И,《*Fundam math*》, **52** (1963), 3, 351－354

[2] Ефимов, Б А,《Докл АН СССР》, **15** (1963), 5, 1021－1024

Б А Ефимов 撰

【补注】 在西方，终紧常称之为 Lindelöf 的，见 **Lindelöf 空间**（Lindelöf space） 正则闭集见**二进紧统**（dyadic compactum）

罗嵩龄、许依群、徐定宥 译

动态对策［dynamic game，динамичекая игра］

位置对策（positional game）的一种变形 它是以局中人控制状态空间 X 中“点的运动”为特征的。令 $I=\{\imath\}$ 为局中人的集合 对于每个点 $x\in X$，对应局中人 $\imath\in I$ 在该点的一个基本策略（elementary strategies）集 $S_\imath^{(x)}$，从而也对应在 x 的基本局势（elementary situations）集 $S^{(x)}=\prod_\imath S_\imath^{(x)}$ 表示受控点运动规律的周期分布函数（periodic distribution function）

$$F(x_k\,|\,x_1,s^{(x_1)},\quad,x_{k-1},s^{(x_{k-1})}),\ x_\imath\in X,\ s^{(x_\imath)}\in S^{(x_\imath)},$$

定义在 X 上，它对于所有局中人而言均为已知的．如果 x_k 固定，则函数 F 关于所有其余变量是可测的．一个逐次状态和基本局势的序列 $P\ \ x_1,s^{(x_1)},\quad,x_k,s^{(x_k)},\quad,$ 是一般动态对策的一局（play） 它可归纳定义如下 设局的 段（开局）$x_1,s^{(x_1)},\quad,x_{k-1}\,(k\geqslant2)$ 给定，并设每个局中人 $\imath$ 选择他的基本策略 $s_\imath^{(x_{k-1})}\in S_\imath^{(x_{k-1})}$，使得基本局势 $s^{(x_{k-1})}$ 出现，那么此对策按照分布 $F(\cdot\,|\,x_1,s^{(x_1)},\quad,x_{k-1},s^{(x_{k-1})})$ 随机地继续进入状态 x_k 在每一局 P 中，局中人 $\imath$ 的支付 $h_\imath(P)$ 是确定的．如果所有局的集合记为 $\mathfrak{P}$，那么此动态对策由系统

$$\Gamma=\langle I,X,\{S_\imath^{(x)}\}_{\imath\in I,x\in X},\ F,\{h_\imath(P)\}_{\imath\in I,P\in\mathfrak{P}}\rangle$$

表征．在动态对策中，通常假设在逐次选择基本策略的时刻，局中人知悉前面的开局．在这种情形下，局中人 $\imath$ 的一个纯策略 $s_\imath$ 是函数 $s_\imath^{(x)}(x_1,s^{(x_1)},\ \cdot\ ,s^{(x_{k-1})},x)$ 的一种选择，它把结束于 x 的开局与基本策略 $s_\imath^{(x)}\in S_\imath^{(x)}$ 相对应．对于局中人仅仅部分知道前面开局情况的动态对策（例如，具有“信息滞后”的对策）也已被研究

为了一个对策是确定的，每一个局势 $s=\{s_\imath\}$，必须在所有局的集合上引进一个概率测度 μ_s，并且关于该测度 μ_s 的数学期望 $\mathrm{E}h_\imath(P)$ 务必存在 这一数学期望也是局中人 $\imath$ 处于局势 s 中的支付．

一般地，函数 $h_\imath(P)$ 是任意的，但最经常研究的动态对策是那些具有终止支付（terminal pay-off）的对策（这种对策，一旦 x_k 出现于终止集（terminal set）$X^T\subset X$ 并且 $h_\imath(P)=h_\imath(x_k)$ 时，对策即被终止，其中 x_k 为此对策中的最后局势）和那些具有累积支付（integral pay-off） $h_\imath(P)=\sum_{k=1}^{\infty}h_\imath(x_k,s^{(x_k)})$ 的对策．

动态对策可看作具有离散时间最优控制问题的对策式变形 事实上，如果局中人个数为 1，那么它就归结为最优控制问题 在动态对策中，如果 $X\subset R^n$，离散时间以连续时间替代，并且随机因素消失，那么得到的是一个**微分对策**（differential games），于是微分对策可看作动态对策的一种变形

随机对策（stochastic game），**递归对策**（recursive game）和**生存对策**（game of survival）均为动态对策的特殊类

参考文献

[1] Воробьев, Н Н,《Успехи матем. наук》, **25** (1970), 2, 81－140

В К Доманский 撰 胡宣达 译

弹性理论的动力学问题［dynamic problems of elasticity theory，динамические задачи теории упругости］

关于弹性介质内振动传播或稳态振动状态的一类弹性理论问题 在最简单的也是在实际应用中最重要的情况下，即在均匀各向同性弹性体的线性理论中，这种问题可以化为寻求下列 Lamé 方程（Lamé equation）的解

$$\mu\Delta u(x,t)+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}u(x,t)+F(x,t)=$$

$$=\rho\frac{\partial^2u(x,\ t)}{\partial t^2},\tag{1}$$

在给定的范围内，应满足特定的初值条件和边值条件 其中 $u(k,\ t)=(u_1,\ u_2,\ u_3)$ 是点 $x=(x_1,x_2,x_3)$ 在时刻 t 的位移向量，$F(x,\ t)$ 是体积力，λ，μ

是 **Lamé 常数**（Lamé constants），ρ 是密度．

由于是双曲型的方程，方程（1）就允许存在一个实特征曲面 $\omega(x_1, x_2, x_3, t)=0$，在它上面，解的导数（通常为高于一阶的）是不连续的（弱间断的）．这个间断面在空间中以下列速率传播

$$v=-\frac{\partial\omega}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2\right]^{1/2},$$

因此在任意时刻都将两个解分离．此曲面的方程可由下述事实得到 如果在某些点上一阶导数是已知的，并不能由方程（1）唯一地确定其所有各阶导数 由间断面方程

$$\left[\mu\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2-\rho\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2\right]\times$$
$$\times\left[(\lambda+2\mu)\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2-\rho\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2\right]=0$$

可知，存在这个曲面上的两个位移速率

$$a=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\quad 和\quad b=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

这两个速率是各向同性线弹性体中的两种形变的位移速率 a 是纵向扰动的传播速率，b 是横向扰动的传播速率．另外也可表明，在某些情况下，表面波可以沿界面传播，而且它们具有自己的特征传播速率（在自由表面上是 Rayleigh 波，在弹性介质的边界上是 Stoneley 波）．

沿特征面出现位移一阶导数间断的情况（强间断性（strong discontinuity））也已被研究过 如果沿特征面的跳跃仅仅影响到法向分量 grad u，而此向量的切向分量和位移本身保持连续，则这个间断性就被称为是正则强间断性（regular strong discontinuity） 在这种情况下，运动学协调条件和动力学协调条件在特征面上得以满足．这些条件在用特征方法解动力学问题时起重要作用

如果弹性体具有一个有限的边界，那么它的动力形变效应就变得更复杂了 在这样一个边界上的每个点，一旦与前面传来的任何扰动接触（这本身是一个很复杂的问题），就至少会产生两种新的形变

方程（1）有一些重要的特殊情况 场不随时间变化（静态的）的情况，以及场随时间按下列规律变化的情况

$$u(x,t)=\mathrm{Re}[u(x)e^{-i\omega t}].$$

其中 $u(x)$ 是与时间无关的复矢量（振幅），ω 是所发生的振动频率 在后一种情况下，方程（1）化为关于振幅的椭圆方程组

$$\left.\begin{aligned}\mu\Delta u(x)+(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,u(x)+\omega^2u(x)=F(x),\\ F(x,t)=\mathrm{Re}[F(x)e^{-i\omega t}]\end{aligned}\right\}\quad(1')$$

如果被研究的振动传播区域 D 占据整个无限空间 $\mathbf{R}^3$，那么具有初值条件

$$u(x,t)\Big|_{t=0}=\varphi^0(x),\quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi^{(1)}(x)\quad(2)$$

的 Cauchy 问题对方程（1）是适定的

方程（1）的特解起着重要的作用，它表示一个无限大弹性体在单独的一点 $x^0=(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ 处受到大小等于 $\delta(t)$（其中 $\delta(t)$ 是 Dirac δ 函数）的集中力作用时的位移（基本解（fundamental solution））

如果作用力沿轴 $x_k(k=1,2,3)$ 的方向，那么它的位移分量 $u_j^{(k)}(x,t)=\Gamma_{kj}(k,j=1,2,3)$ 具有如下的值

$$\Gamma_{kj}(x-x^0,t)=\frac{1}{4\pi\rho}\left[\frac{1}{a^2r}\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{\partial r}{\partial x_j}\delta(\gamma_a)+\right.$$
$$+\left[\frac{r}{a}\varepsilon(\gamma_a)-\frac{r}{b}\varepsilon(\gamma_b)+\gamma_a\varepsilon(\gamma_a)-\gamma_b\varepsilon(\gamma_b)\right]+$$
$$\left.+\left[\delta_{kj}-\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right]\frac{\delta(\gamma_b)}{b^2r}\right],$$

其中

$$r=|x-x_0|,\ \gamma_a=t-\frac{r}{a},\quad \gamma_b=t-\frac{r}{b},$$

$$\varepsilon(c)=\begin{cases}1, & c\geqslant 0,\\ 0, & c<0,\end{cases}\qquad \delta_{ij}=\begin{cases}1, & k=j,\\ 0, & k\neq j\end{cases}$$

维数为 3×3 的基本解矩阵 $\Gamma(x-x^0,t)=\|\Gamma_{kj}(x-x^0,t)\|$ 表示一个对称张量，方程（1）的 Cauchy 问题的解可用 Volterra 公式（Volterra formula）表示

$$u(x_0,t_0)=\frac{\partial}{\partial t_0}\int_{r\leqslant at_0}\Gamma(x^0-x,t_0)\varphi^{(0)}(x)dx+$$
$$+\int_{r\leqslant at_0}\Gamma(x^0-x,t_0)\varphi^{(1)}(x)dx+\quad(3)$$
$$+\int_0^{t_0}\int_{r\leqslant a(t_0-t)}\Gamma(x^0-x,t_0)F(x,t)dxdt$$

对于齐次系统（1′），Γ_{kj} 取下列形式

$$\Gamma_{kj}=(x-x^0)=\quad(4)$$
$$=\frac{1}{2\pi\mu}\delta_{kj}\frac{e^{ik_2r}}{r}-\frac{1}{2\pi\rho\omega^2}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}\frac{e^{ik_1r}-e^{ik_2r}}{r},$$
$$k_1^2=\frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu},\quad k_2^2=\frac{\rho\omega^2}{\mu}$$

对方程（1）不仅可以提出 Cauchy 问题，也可提出混合问题 如果区域 D 在空间的有限部分中具有边

界 S，就需要研究混合问题 S 上的边界条件，在此处具有重要的作用，必须与条件（2）同时被满足．

下面几种类型的边界值问题是最基本的 第一类边值问题给定位移，第二种类边值问题给定张力，第三类边值问题给定位移与张力的线性组合，第四类边值问题给定位移的法向分量和张力的切向分量，第五类边值问题给定位移的切向分量和面力的法向分量，第六类边值问题在 S 的一部分上给定位移，其余部分给定张力．

不像 Cauchy 问题那样用公式（3）可完全得到解的一般形式，混合问题的解仅在某些特殊情况下才已得到．最重要的几种情况是 半平面或半空间的第一类和第二类基本混合问题的封闭形式解可由复波方法和一种广义的特征方法得到，在一个球形区域内波动方程的解可用泛函不变量积分的方法求得，利用这种方法的推广还可得到一些弹性理论问题的解和许多绕射问题的解 一般情况下不可能获得封闭形式的解，然而，用位势理论和奇异积分方程理论的方法可获得非常一般的结果

类似调和位势理论，利用基本解（4），可以引入单层势、双层势和体积-质量弹性位势的概念，它们允许用下列公式表示方程（1′）的正则解

$$\varepsilon(x)u(x)=\int_S (T\Gamma(x-y))^* u(y)d_y S- \quad (5)$$
$$-\int_S \Gamma(x-y)Tu(y)d_y S-\int_D \Gamma(x-y)F(y)dy,$$

其中 T 是张力算子，$*$ 是矩阵转置符号，当 $x\in D$ 时，$\varepsilon(x)=1$，当 $x\notin \overline{D}$ 时，$\varepsilon(x)=0$ 以上规定的前五个边界条件使人们能够在封闭曲面 S 上藉助位势把相应问题写成二维奇异积分方程的形式 已经证明，在区域外部的情况下，对任何一个振动频率 ω，所有的问题都是可解的，而对内部问题，存在一个离散的非负实特征频谱 其解可用藉助（4）构造的某个完全向量系中的 Fourier 级数来表示，Fourier 系数可以用显式确定．

设 S 上的位移 $u|_S=f(y)$ 为给定值，S_1 是包含 S 的任意光滑封闭曲面，与 S 不相交，并设 $\{x^k\}_1^\infty$ 是 S_1 上的点集，其分布是处处密集的 矩阵 $\Gamma(x-x_0)$ 的各列用 $\Gamma^i(x-x_0)(i=1,2,3)$ 表示．可以证明，向量集 $\{\Gamma^i(x^k-y)\}_{k=1}^\infty$ $(i=1,2,3,y\in S)$ 是线性无关的，并且在 $L_2(S)$ 中是完全的

这个集合中的元素可如下编号

$$\overset{k}{\psi}(y)=\Gamma^{e_k}[x^{[(k+2)/3]}-y],$$
$$e_k=k-3\left[\frac{k-1}{3}\right],\quad k=1,2,\quad ,$$

其中 $[n]$ 是数 n 的最大整数部分，另外还引入一个正交集

$$\overset{k}{\varphi}(y)=\sum_{s=1}^{k}a_{ks}\overset{s}{\psi}(y),$$

其中 a_{ks} 是已知数 由此，在任意一个内部点问题的解可用下列一致收敛的级数表示

$$u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{k}h_k a_{ks}\Gamma^{e_s}(x^{[(s+2)/s]}-x),\quad (6)$$

其中

$$h(y)=f(y)-\int_D \Gamma(y-x)F(x)dx,$$
$$h_k=\int_S h(y)\overset{k}{\varphi}(y)dS$$

此级数的有限初始部分之和可以用来计算解的近似值

利用对方程（1′）所取得的结果，有可能藉助 Laplace 变换，得到方程（1）的混合问题的解

在研究对分层介质的 Lame 方程的解时，考虑单个波的传播或者所有生成波的干扰．在前一种方法中，用到了弹性波的有限传播速率，并相继研究层内的波传播过程和从边界来的反射及折射过程．在构造 Lamé 方程的干扰解时，边界上的边界条件必须同时满足，由此产生一个代数方程组 为了决定分层系统中的适当过程，必须找到这个方程组行列式的根，这个运算可以化为决定某些算子的本征值．这些本征值（根）既可能是实数，也可能是复数，这取决于算子的特性 实特征值对应于 Rayleigh 和 Love 干涉波，它们沿各层传播，没有指数衰减 在分片连续速度的条件下，这些波的各种特征可在电子计算机上算出，其结果可用于构作理论上的地震波曲线

阻尼干涉波对应于非自伴算子的复本征值．地震学中同时考虑了这两种类型的干涉波，以解释在实际工作中观察到的地震波

为解决几个有关均匀介质的振动问题，用到了泛函不变量的方法 特别是，研究了在具有一个平面界面的两个弹性半空间中，由一个点源产生的波动场，此精确解得出描述邻近波前区波动场的渐近公式

一个既能用于平稳变化，又能用于非平稳变化的几何近似法，在弹性波理论中具有首要的意义 可用下列级数表达式得到位移向量 $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u}(M,t)=\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{u}_j(M)f_j(t-\tau(M)),\ f_j'=f_{j-1},\quad (7)$$

其中，在非平稳情况下 f_j 表示在零点处有奇异点的函数，而在平稳情况下

$$f_j(s)=\frac{e^{-i\omega s}}{(-i\omega)^{j+\gamma}},\quad \gamma=\text{常数}.$$

与标量情况不同，类型（7）的两种在形式上满足弹性理论方程的级数都是可能的 这些也包括纵波的情况，此时下式成立

$$(\Delta\tau)^2 = \frac{1}{a^2}, \quad a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad \mathbf{u}_0 \parallel \Delta\tau,$$

其中 a 是纵波的速度，也包括横波的情况，此时，

$$(\Delta\tau)^2 = \frac{1}{b^2}, \quad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \mathbf{u}_0 \perp \Delta\tau,$$

其中 b 是横波的速度

向量 $\mathbf{u}_j$ 满足递推关系 具有物理意义的大量问题都涉及到类型（7）的展开式，这种类型的“波”可以被反射和折射，由此得到的反射“波”或折射“波”又可用类型（7）的级数式表示出来

几何光学方法也适用于表面波的情况 在表面上的零张力边界条件可用叠加含有复光程函数的类型(7)那样的纵波和横波来满足．这样就得到了一大类表面波，而 Rayleigh 波是其中的一个特例

对于不同类型的表面波，像类似于 Love 波的表面波和所谓保持在表面上的波，也可以发展一种几何光学理论 与所论 Love 波相类似的是相速度接近于横波速度的平稳高频波，而位移向量的方向，当取一阶近似时，是表面的法向频率和波的传播方向 被表面保持的波也有着一个接近于横波速度的表面速度，但它们的偏振是不同的——位移向量处于由表面法线和波的传播方向所形成的平面内

参考文献

[1] Frank F and Mises, R von, Die Differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 2, Rosenberg, 1943, Chapt 12

[2] Огурцов, К И Петрашень, Г И, 《Уч зап ЛГУ Сер матем наук》, **24**(1951), 149, 3 – 249

[3] Бабич, В М, и др, Линейные уравнения математической физики, М, 1964

[4] Ладыженская, О А, Смешанная задача для гиперболического уравнения, М, 1953

[5] Ильин, В А, 《Успехи матем наук》, **15**(1960), 2, 97 – 154

[6] Купрадзе, В Д, и др, Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости, М, 1976 (英译本 Kupradze, V D, et al, Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity, North-Holland, 1979)

[7] Петрашень, Г И, 《Уч зап ЛГУ》, **30**(1956), 208, 5 – 57

[8] Алексеев, А С, Бабич, В М, Гельчинский, Б Я, в кн Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, сб 5, Л, 1961

[9] Бабич В М, 《Докл АН СССР》, **137**(1961), 6, 1263 – 1266

[10] Бабич, В М, Молотков, И А, 《Изв АН СССР Физика Земли》, 1966, 6, 34 – 38

[11] Мухина, И В, Молотков, И А, 《Изв АН СССР Физика Земли》, 1967, 4, 3 – 8

[12] Зволинский, Н В, 《Изв АН СССР Сер Геофиз》, 1957, 10, 1201 – 1218, 1958, 1, 3 – 16, 2, 165 – 174

[13] Итоги науки и техники Механика твердых деформируемых тел, т 10, М, 1977

В Д Купрадзе, В М Бабич, И А Молтков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Eringen, A C and Suhubi, E S, Elastodynamics, 1–2, Acad Press, 1974 – 1975

韩耀新、赵金平 译

动态规划 [**dynamic programming**, **динамическое программирование**]

研究多阶段最优控制问题求解的理论与方法的一个数学分支

在受控过程的动态规划中，目的是在所有可能的控制中寻求一个给出目标函数（过程的某个数字特征）极值（极大的或极小的）的一个控制．一个**多阶段过程**（multi-stage process）是一种由几个阶段组成的结构，或者是这样的一个过程，在此过程中控制被细分为相继阶段（步）的一个序列，通常它对应于不同的时刻．在许多问题中，多阶段性质是由过程本身表明的（例如，在多级火箭各级最优尺寸的确定中，或在寻求一架飞机的最经济的飞行方式中），但为了能够应用动态规划方法也可以人为地引进．于是，在动态规划中“规划”的意义是作决策与制订计划，而“动态”这个词表明时间的重要性和在所研究的过程与方法中运算执行序列的重要性

动态规划方法是**运筹学**（operations research）方法的一部分，并被使用于最优计划问题（例如，有效资源的最优分配、库存管理理论、设备更新等等问题），以及解决大量的技术问题（例如，逐级化学过程的控制、公路敷设的最优设计等等）

现在我们来阐明它的基本观念 假设控制所给系统 X 的过程由 m 个阶段构成，在第 i 步，让控制 y_i 变换此系统从第 $(i-1)$ 步所达到的状态 x_{i-1} 到新的状态 x_i 这一转换过程由已知函数 $f_i(x, y)$ 来实现，并且此新状态取决于值 x_{i-1}, y_i

$$x_i = f_i(x_{i-1}, y_i)$$

于是，控制运算 $y_1, \ldots, y_m$ 变换此系统从它的初始状态 $x_0 \in X_0$ 到最终状态 $x_m \in X_m$，这里 X_0 与 X_m 为 X 的初始与最终状态的可行集 极值问题的一种可能表述方式给出如下 已知初始状态 x_0，任务是选择控制 $y_1, \ldots, y_m$，使得系统 X 转换到一个可行的最终状态，同时，使目标函数 $F(x_0, y_1, \ldots, x_{m-1}, y_m, x_m)$ 达到它的最大值 F^*，即

$$F^* = \max_{y_1 \ldots y_m} F(x_0, y_1, \ldots, x_{m-1}, y_m, x_m)$$

动态规划的一个重要特点是它仅可应用于加性目标函数 在上面的例子中，这意味着

$$F=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(x_{i-1},y_i).$$

此方法的另一个要求是问题中无“后效”，即对给定阶段所选择的解（控制）只能影响系统在时刻 i 的状态 x_i 换言之，不考虑

$$x_i=f_i(x_{i-1},y_i,\quad ,y_1,x_0)$$

类型的过程，这两种限制可以减弱，但仅仅使此方法过于复杂化．

常规的数学分析方法完全不能应用于动态规划问题，否则就要涉及非常艰巨的计算 动态规划方法是基于由 R Bellman 阐明的最优性原理 (optimality principle) 在控制一个离散系统 X 中，假设关于此离散系统的某些控制 $y_1,\quad ,y_k$，从而状态 $x_0,\quad ,x_k$ 的轨道 (trajectory) 已被选择，并设想我们需要去终止此过程，即选择 $y_{k+1},\quad ,y_m$ (从而 $x_{k+1}\quad ,x_m$)；此时，如果此过程的终止部分不是最优的，即如果通过此选择，函数

$$F_k=\sum_{i=k+1}^{m}\varphi_i(x_{i-1},y_i),$$

的最大值没有达到，那么此过程作为一个整体将不是最优的．

通过利用最优性原理，容易得到基本的函数关系．我们确定变量 x 的函数序列

$$\omega_m(x)=0,\ \omega_{k-1}(x)=\max_y[\varphi_k(x,y)+\omega_k(f_k(x,y))],$$

$k=1,\quad ,m$ 这里，最大值是对在阶段 k 可行的所有控制运算来取的．此确定 ω_{k-1} 对 ω_k 的相依性的关系式称为 **Bellman 方程** (Bellman equation)．函数 $\omega_{k-1}(x)$ 的意义是显然的 如果在阶段 $k-1$ 中，系统处于状态 x，那么 $\omega_{k-1}(x)$ 就是函数 F 的最大可能值 同时利用函数 $\omega_{k-1}(x)$ 的结构，我们还求得在每一阶段的条件最优控制 (conditional optimal controls) $y_k(x)$ (即在阶段 $k-1$ 系统处于状态 x 的假设下的最优控制值) 通过逐步计算值

$$\omega_0(x_0)=F^*,\ y_1,x_1,\quad ,y_m,x_m,$$

就求得最后的最优控制 由上所述，动态规划方法的如下性质是显然的 对给定的 x_0，它不只是解一个特定的问题，而是对所有初始状态，解所有这种类型的问题．因为动态规划方法的数值实现是艰巨的，即需要计算机具有大容量存贮器，所以必须在大量次数解某些典型问题时，这个方法才被适得其所地采用（例如，在改变气候的条件下，飞机的最优飞行条件）．虽然动态规划方法是对离散过程表述的，但此方法通常可成功地被使用于解具有连续参数的问题

动态规划对**变分学** (variational calculus) 的很多问题提供了一种新颖的方法．

动态规划的一个重要分支是由**随机问题** (stochastic problems) 构成的，其中系统的状态和目标函数均受随机因素影响 这种问题包括例如具有随机库存补充容许量的最优库存控制 受控 Markov 过程是动态规划在此情形中最自然的应用领域．

动态规划方法是 Bellman 首先提出来的，Л С Понтрягин 和他的研究控制过程数学理论（见**最优控制的数学理论** (optimal control, mathematical theory of)）的学派奠定了此方法的严格基础．

虽然动态规划方法相当大地简化了最初的问题，但它的直接利用通常是非常艰巨的．曾尝试过以发展近似方法来克服这一困难

参考文献

[1] Bellman, R, Dynamic programming, princeton Univ Press, 1957

[2] Болтянский, В Г, Математические методы оптимального управления, М, 1966 (英译本 Boltyanskii, V G, Mathematical methods of optimal control, Holt, Rinehart & Winston, 1971)

[3] Hadley, G, Nonlinear and dynamic programming, Addison-Wesley, 1964

[4] Hadley, G and Whitin, T, Analysis of inventory systems, prentice-Hall, 1963

[5] Howard, R A, Dynamic programming and Markov processes, MIT 1960 (中译本 R A.霍华特，动态规划与马尔柯夫过程，上海科学技术出版社，1963)

C A Ашманов, В Г Карманов 撰

【补注】 如果以微分方程替代差分方程来描述上面所考虑的受控过程，那么存在一种“连续”型式的 Bellman 方程，但它通常被称为 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程 (Hamilton-Jacobi-Bellman equation) (HJB 方程 (HJB-equation)) HJB 方程是一个偏微分方程．对于此偏微分方程利用所谓“**特征线法**” (method of characteristics) 的解法导致如同包含在 **Понтрягин 最大值原理** (Pontryagin maximum principle) 中一样的微分方程 通过 HJB 方程推导出此原理时仅在苛刻的限制下是正确的．存在另一种利用变分原理的推导，它在较弱的条件下是正确的．关于动态规划方法与 Понтрягин 原理的比较见 [A1], [A2]

按照**自动控制理论** (automatic control theory) 中的术语，我们可以说动态规划方法导致最优控制的闭环解，而 Понтрягин 原理导致开环解

对于随机动态规划 (stochastic dynamic programming) 的某些讨论，见**受控随机过程** (controlled stochastic process) 的补注

参考文献

[A1] Bryson, A E, and Ho, Y-C, Applied optimal control,

Ginn & Co , 1969

[A2] Fleming, W H and Rishel, R W , Deterministic and stochastic optimal control, Springer, 1975

胡宣达 译

动力系统[dynamical system, динамическая система]

术语动力系统最初指的是具有有限自由度的力学系统 这样一个系统的状态通常用它的位置（格局，定位）和该位置的变化率表示，而运动定律描述这个系统状态的变化率．

在最简单的情况下，状态可用量 $w_1, \quad w_m$ 表征，这些量可取任意（实）值，两个不同的量 $w_1, \quad , w_m$ 和 w_1' $, w_m'$ 对应于不同的状态，反之亦然，同时，如果对所有 i，w_i' 和 w_i 的值是接近的，那么系统的状态也是接近的 在这种情况下，运动定律能描述为常微分方程的**自治系统**（autonomous system）

$$\dot{w}_i = f_i(w_1, \quad , w_m), \quad i=1, \quad , m \tag{1}$$

如果将量 $w_1, \quad , w_m$ 考虑为 m 维空间中的点 w 的坐标，那么动力系统的对应状态可用这个点 w 表示 它称为相点(phase point)(有时称为表示点（representing point)），而这个空间称为系统的相空间（phase space）．(使用形容词“相”的原因是因为系统的状态以往常称为“相”．）状态随时间的改变表示为相点沿相空间的某一条曲线(所谓相轨道（phase trajectory)，常简称轨道）运动 在这个空间中一个向量场可用与每个点 w 有关的具有分量

$$(f_1(w_1, \quad , w_m), \quad , f_m(w_1, \quad , w_m)) \tag{2}$$

的向量 $f(w)$ 来定义 使用上面引进的术语，微分方程(1)可写成缩写形式

$$\dot{w} = f(w). \tag{3}$$

这表示，在任何瞬间相点运动的速度向量（或通常所说的相速度向量（phase velocity vector)，不要将它与光学中和各种波动过程研究中一般用的同一术语相混）等于从在该瞬时被运动相点占据的相空间中的点 w 处出发的向量 $f(w)$ 这是所谓的微分方程组(1)的动力学解释（kinematic interpretation)

例如，不具有内自由度的粒子（或者在力学中称为质点）在具有势能 $U(x_1, x_2, x_3)$ 的位势场中的运动状态由它的位置 $x=(x_1, x_2, x_3)$ 和速度 $\dot{x}$ 表征，最后一个量可用（线性）动量 $p=m\dot{x}$ 代替，其中 m 是粒子的质量 运动定律可写成

$$\dot{x} = \frac{1}{m} p, \quad \dot{p} = -\operatorname{grad} U(x) \tag{4}$$

的形式 公式(4)是六个一阶常微分方程的方程组的缩写．这里，相空间是六维 Euclid 空间，相速度的六个分量是通常速度和力的分量，而相轨道在空间 x_i 上的投影（平行于动量空间）是在通常词义下粒子的轨道．

在若干情形中，一个动力系统的所有状态与有所需性质的 Euclid 空间中的点之间不可能建立对应，然而，这种对应可局部地，即对相互充分接近的状态建立起来 如果要对动力系统的所有状态的总体保留“相空间”这一术语，则一般情况下可以说这个相空间不是 Euclid 空间，而是一个**微分流形**（differentiable manifold）W^m 局部地，即在 W^m 的任何**坐标卡**（chart）(局部坐标系）中，动力系统的运动用类似（1）的微分方程描述 另一方面，运动的总体的（即对动力系统所有状态合适的）和不变的（即不依赖坐标卡的选择的）描述由（3）给出，其中 f 是在 W^m 上定义的向量场，它将每个点 w 与流形在这一点的切空间中的一个向量 $f(w)$ 联系起来，方程（3）意味着，在运动过程中，在给定的瞬时与点 $w \in W^m$ 重合的相点在此瞬时有速度 $f(w)$ 在局部坐标中向量 $f(w)$ 用它的分量（2）表示，而（3）则还原为（1）

甚至在相空间是 Euclid 空间的许多情况下，所研究的动力系统的部分运动也可以用在某个不变流形(invariant manifold) W 上的向量场，即相空间的一个子流形来描述，使得经过任意点 $w \in W$ 的整个轨道落在 W 中．因此，在前面的例子中，如果所讨论的是具有确定能量值 E 的运动，则系统（4）不应通过变量（x, p）的六维 Euclid 空间来研究，而是在由方程

$$\frac{p^2}{2m} + U(x) = E$$

定义的五维子流形中研究，其中 $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ 流形的不变性反映这样一个事实，即在势场中运动的粒子的能量是守恒的，即 $p^2/2m + U(x)$ 是系统（4）的第一积分（所谓的能量积分（energy integral)）．许多类似的例子与**循环坐标**（cyclic coordinates）有关

具有非 Euclid 相空间的动力系统的一个例子是具有平衡点 O 的固体 如果引进两个以 O 为原点的正交坐标系，其中一个是固定的，而另一个坚固地依附于该物体，那么很清楚，固体的位置将可用第二坐标系相对于第一坐标系的位置——用行列式为 1 的一个三阶正交矩阵来描述（或某个另外的等价方法，见 **Euler 角**（Euler angles)，**Cayley-Klein 参数**（Cayley-Klein parameters)）相应地，给定力学系统（或它的构形空间（configuration space)）的所有可能位置的全体是三阶特殊正交群 SO(3) 相空间 W^6 是 SO(3) 的**切丛**(tangent bundle)，因为位置的变化率可用 SO(3)的切

线向量描述 对SO(3)中的局部坐标（它的选择自动地确定某个在 W^6 中的局部坐标）通常取Euler角，在这种情况下，此运动方程称为（固体运动的）**Euler方程**（Euler equation）

在上面对常微分方程自治系统（1）的动力学解释（或者适合方程（3）的相点在相流形中的运动图象）中，没有涉及这些方程是否描述了某力学系统 因此，术语“动力系统”开始对于像微分方程（1）或（3）所描述的一个任意物理系统（例如一个电路），后来又简单地，对那种形式的微分方程组，在更广泛的意义上被使用，而不管它的来源 力学动力系统根据某些特定性质，有别于这一广泛意义下的动力系统 即它们中的大多数属于**Hamilton系统**（Hamiltonian system）的特殊类型 （但是，在力学中亦考虑不属于这一类的系统，例如大多数**非完整系统**（non-holonomic systems）．反过来，在物理学的一些问题中也遇到Hamilton系统）

在这个意义上，动力系统的概念等价于形如（1）或（3）的微分方程自治系统的概念 可是在实用上，当研究相空间（整体理论）或至少它的一部分（局部理论）中所有轨道的行为的定性图形时才谈到动力系统 在动力系统理论中很关心当时间无限增加时相轨道的行为 在动力系统理论中最有兴趣研究的轨道是具有这种性质的轨道，它们在很大程度上能决定定性的（甚至仅仅是局部的）图形．这包含一个**平衡位置**(equilibrium position)(或奇点)，一个**周期轨道**(periodic trajectory)(亦见**极限环**(limit cycle))，以及**分界线**（separatrix）

对于形（1）($m=2$）的两个方程的系统，动力学的解释提供了说明性的和有效的研究方法，因为向量场 $f(w)$ 和相轨道事实上能映射到相平面上去 如果方程个数是 $3(m=3)$，则相应的结构必须在三维空间中完成，这是一件困难的事，而如果 $m>3$，这样的途径是完全不可行的 相应地，如果 $m\geqslant 3$ 以及甚至许多 $m=2$ 的情形，动力学的解释使得人们去运用几何学的概念、方法和语言，这就将通常的几何概念推广到微分方程的研究中去

即使对向量场 $f(w)$ 作出比较弱的假设（例如它是可微的），对每个点 $w_0\in W^m$ 也严格存在一个（3）的具有初值 w_0 $w(0)=w_0$ 的解 $w(t)$ 这个结果的物理意义为，如果运动规律（3）是给定的，则系统在任何瞬时的状态完全由它的初始状态决定 一般地，这个解不一定对所有的 t 定义，而仅仅定义在某个时间区间上 在动力系统的整体理论中，人们附加上这样的假设 对于任何初值，相应的解对所有的 t 有定义，而在局部问题中，通常不必要对在离开所研究的相空间区域后的轨道的特性作任何假设

如果上面的假设满足，则对每一个 $w_0\in W^m$ 规定在 $t=0$ 从 w_0 出发根据（3）移动的相点，在时间 t 以后的状态 $w(t)$，并得到相空间 W^m 到自身的映射 S_t

$$S_t w_0 = w(t),$$

其中 $w(t)$ 是（3）的解，并且 $w(0)=w_0$ 映射 S_t 构成相流形 W^m 的**微分同胚**（diffeomorphism）的一个连续单参数群（群的性质 $S_t S_s=S_{t+s}$ 由系统（3）是自治的这个事实推得） 作为解释，文献中常常模拟一个在日常生活中熟悉的并在科学中首次被研究的例子．在这个例子中出现一个类似的空间变换族．这个例子是 一个液态或气态平稳流，其中一个液态粒子在时间 t 内从点 w_0 流到 $S_t w_0$ （关于这一点应注意到，这种模拟是相当肤浅的，因为在相空间中“流动的”“相液体”不同于真实的连续介质，其中的邻近粒子之间没有相互作用 ）因此，术语**流**（flow）(**连续时间动力系统**(continuous-time dynamical system))作为“动力系统”的同义词被采用

在物理文献中习惯谈论动力系统的总体（ensembles of dynamical system） 这意味着，每一个可能给定的物理系统（即在这个相空间中的每一个点）可看作用方程（3）描述的那种状态的物理系统，无相互作用的而且仅在给定的瞬间在状态上有差别的相同类型的系统的最终集合被认为是一个“总体” 用这样的语言来说，相空间的变换 S_t 相当于“总体”的演变，由它的组成系统的状态改变构成

在动力系统整体理论的发展中，这种系统的概念进一步被推广 动力系统（dynamical system）这个字的最广泛的意义被理解为在某个称为“相空间”的集合 W 上的任意一个群（或甚至是半群）G 的作用（action of a group)，这就是说，对每一个 $g\in G$，定义一个映射 S_g $W\to W$ 使得 $S_{g_1}S_{g_2}=S_{g_1g_2}$，而且，如果 e 是 G 中的单位元，那么 S_e 是恒等变换（即对所有 w，$Se(w)=w$）．点 $S_g(w_0)$ 的集合称为通过点 w_0 的轨道，或简单地称这点的轨道(trajectory 或 orbit)，其中 w_0 是固定的，而 g 跑遍 G 群 G 通常考虑为拓扑群，相空间考虑为拓扑空间或测度空间，而映射

$$G\times W\to W,\quad (g,\ w)\to S_g(w) \qquad (5)$$

分别假设为连续的或可测的．在后一种情况，通常还假设映射 S_g 保持测度（即相空间的一个可测子集的原象是可测的且有相同的测度） 在动力系统理论中，相应的分支称为**拓扑动力学**（topological dynamics）([6]，[11]）和**遍历理论**（ergodic theory）([4],[5],[7],[12])．如果 G 是Lie群且 W 为光滑流形，同时映射（5）是光滑的，则称为光滑动力系统（smooth dynamical system）

在所有这三种研究途径中，主要的情形是以下这几种 G 或是实数群 $\mathbf{R}$，此时动力系统被称为一个"流"（虽然这一名词在广义上有时用作术语"动力系统"的同义词），G 或者是整数群 $\mathbf{Z}$（或另一个形式非负整数的可加半群），此时，采用名字**瀑布**(cascade)（也称为具有离散时间的动力系统 (dynamical system with discrete time)，但是这个术语亦可仅仅意指在 G 上采用离散拓扑） 光滑向量场，即

$$f(w)=\frac{d}{dt}S_t(w)|_{t=0}$$

定义一个使映射 (5) 是 C^2 类的光滑流，当 t 变化时，点 $w=S_t(w_0)$ 按照 (3) 移动 在瀑布的情形时，映射 S_n 由变换 S_1 以及它的逆的迭代（或者仅仅是映射 S_1 的迭代）得到，对光滑的瀑布，所有 S_n 都是微分同胚（或者 连续可微映射）

在上面所说的动力系统理论的三种研究途径中，拓扑动力学具有清楚的集合论的特征，而且首先它的作用是更为辅助性的．这是因为一些概念（**非游荡点** (non-wandering point)，**轨道的极限集** (limit set of a trajectory)，**极小集** (minimal set)，殆周期性，远距性，**Lagrange 稳定性** (Lagrange stability)，**Poisson 稳定性** (Poisson stability)，等等）及它们的内在联系，在较为抽象的情况下研究起来较为方便，而不需要借助微分同胚或方程 (3) 来规定这个动力系统，它们的内在联系在处理像光滑动力系统那样较为具体的对象时很重要 实际上这正是拓扑动力学中所做的 随后，在拓扑动力学中产生了一些重要的进展，主要与某些极小集及其推广的研究有关（见 [13], [14], [15] 以及**远距动力系统** (distal dynamical system)）

遍历理论的由来与经典（量子物理学之前的）统计物理学有关 它的基础包含如下的问题．是否可能不去解描述所研究的构成宏观物体的粒子运动的 Hamilton 微分方程组，甚至没有关于解的初值的信息（这意味着规定所有这些粒子的瞬时位置和速度），而找到当 $t\to\infty$ 时所有或几乎所有的相轨道特性的统计性质？例如，是否对几乎所有的 w 有关于时间平均的极限

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T g(S_tw)\,dt \tag{6}$$

存在（其中 $g(w)$ 是定义在相空间上的函数），并且这个极限是否依赖于 w？上面给出的并在遍历理论中被采纳的动力系统的定义是从统计物理系统的具体起源中，特别是从它们的 Hamilton 结构中抽象的结果，对这个结构仅仅保留了一个结果——关于变换 S_t 的测度守恒 在这种情况下，这样的抽象不仅是概念的逻辑分析的一个工具，而且产生许多更一般的理论，其中包括与概率论、泛函分析、数论以及拓扑代数有关的内容 由于和各种不同数学领域的联系，遍历理论有充分广阔的内容保证它作为一个独立的科学学科而发展．这个理论不但包括对 $t\to\infty$ 时解的统计学研究，这包括证明极限 (6) 对几乎所有 w 的存在性以及推导不依赖于 w 的条件，而且还包括其他一些性质（例如**混合** (mixing)），动力系统的同构问题在遍历理论中起了重要作用，它的研究产生了动力系统一些不变性的建立和某些具有有趣性质的动力系统类的识别

光滑动力系统的理论（[7], [8], [10]）在相当大的程度上与**微分方程定性理论** (qualitative theory of differential equations) 合为一体，特别地，如果正在研究一个具体指定的系统 (1)，或是如果（不管所研究的动力系统是按何种方式规定的）这个研究含有与或多或少写成显式微分方程有关的概念 对光滑动力系统已进行了局部和整体的研究 局部性质包括平衡位置研究和上面提到的流的轨道的特殊类型以及它们的瀑布模拟，**拟周期运动** (quasi-periodic motion) 和它们的及其他类型的运动的不变流形，还有若干类**不变集** (invariant set) 这些对象的研究包括了它们的探测和定位，以及动力系统的其他轨道在它们的邻域中的特性的研究 分析和拓扑两种方法 ([2], [3], [9]) 都用于研究瀑布的不动点、流的平衡位置和周期解，分析方法基本上用于其他内容（见 [17]） 这些方法中许多与下面的问题有关系 定义流或瀑布的向量场或微分同胚的微小变化对于具有指定局部或整体性质的流或瀑布产生什么影响？这样的探讨途径还与整体理论的某些结果和概念有关，特别是和目的在于寻找在某种意义上有代表性的各类动力系统的性质的那些概念有关（例如见**粗系统** (rough system)） 具有整体性质的其他结果涉及在有关学科中频繁出现的某些类的动力系统

对于流在二维曲面上的这种特殊情形，可以获得相当令人满意的信息来了解可能出现的相轨道特性的各种可能性 这尤其适用于 $m=2$ 的系统 (1)（两个方程）(Poincare-Bendixson 理论（[1], [2], [3], [9]））以及在没有平衡点的环面上的流 ([2], [9], [10])．然而，这个理论不能回答在一个具体系统中轨道的精确行为如何的问题 大量的有关各种类型方程的研究都涉及到这个问题 流在二维曲面上的特点在于轨道又局部地细分了相空间 因此，有关理论向更高维的自然推广并不涉及动力系统，而是余 1 维的叶状理论

参考文献

[1] Немыцкий В В , Степанов В В , Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд , М -Л , 1949 (中译本 В В 尼梅茨基, В В 斯捷巴诺夫, 微分方程定性论, 科学出版社, 1956)

[2] Coddington, E A and Levinson, N , Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955, Chapts 13–

17

[3] Lefschetz, S , Differential equations geometric theory, Interscience, 1957

[4] Halmos, P R , Lectures on ergodic theory, Math Soc of Japan, 1956

[5] 《Успехи матем наук》, **22** (1967), 5, 3 − 172

[6] Gottschalk, W H and Hedlund, G A , Topological dynamics, Amer Math Soc , 1955

[7] Arnold, V I and Avez, A , Ergodic problems of classical mechanics, Benjamin, 1968

[8] Smale, S , Differentiable dynamical systems, *Bull Amer Math Soc* , **88** (1966), 741 − 817

[9] Hartman, P, Ordinary differential equations, Birkhäuser 1982

[10] Nitecki, Z , Differentiable dynamics An introduction to the orbit structure of diffeomorphisms, M I T , 1971

[11] Сибирский, К С , Введение в топологическую динамику, Киш , 1970 (英译本 Sibirskii, K S , Introduction to topological dynamics, Noordhoff, 1975)

[12] Sinaĭ, Ya G , Introduction to ergodic theory, Princeton Univ Press, 1976

[13] Бронштейн, И У , Расширения минимальных групп преобразований, Киш , 1975 (英译本 Bronshtein, N U , Extensions of minimal transformation groups, Sythoff & Noordhoff, 1979)

[14] Ellis, R , Lectures on topological dynamics, Benjamin, 1969

[15] Veech, W A , Topological dynamics, *Bull Amer Math Soc* , **83** (1977), 775 − 830

[16] Dynamical systems, I − V, Encyclopaedia of Math Sciences, Springer, 1987 − 1988

[17] Conley, Ch , Isolated invariant sets and the Morse index, Amer Math Soc , 1978

Д В Аносов 撰

【补注】 **粗系统**有时称为结构稳定系统 (structurally stable system) 或鲁棒系统 (robust system)

亦见**拓扑动力系统** (topological dynamical system), ***Y*系统** (*Y*-system); **Bendixson准则** (Bendixson criterion)(闭轨道不存在), **Poincaré-Bendixson理论** (Poincaré-Bendixson theory)

文献[A1]搜集了关于动力系统 (主要是可微的) 的大量文献并做了评论．文献[16]的各卷讨论了许多新近的发展

参考文献

[A1] Hirsch, M W , The dynamical systems approach to differential equations, *Bull Amer Math Soc* , **11** (1984), 1 − 64

[A2] Abraham, R and Marsden, J , Foundations of mechanics, Benjamin Cummings, 1978

[A3] Comfeld, I [I Komfel'd], Fomin, S and Sinal, Ya , Ergodic theory, Springer, 1982 (译自俄文)

周芝英 译 叶彦谦 校

动力系统的度量理论 [**denamical systems, metric theory of, метрическая теория динамических систем**]

同**遍历理论** (ergodic theory)．

动力学 [**dynamics, динамика**]

一个力学分支，研究物体在一些作用力的影响下发生的运动，这些作用力引起或改变物体的运动，称为加速力

在17世纪，G Galileo奠定了动力学的基础，他首先研究了物体在重力影响下的运动，并建立了惯性定律 I Newton正式提出了动力学的基本原理，他得到了动力学的三个基本定律以及它们所产生的某些推论 后来动力学定律的发展和改进则应归功于L Euler, J. d'Alembert和J L Lagrange，他们给出了建立动力学方程的一般方法 Lagrange, W Hamilton和C G J Jacobi奠定了研究动力学方程的分析方法的基础.这些方法的继续发展,成为C F Gauss, M B Остроградский, H Poincaré, C A Чаплыгин, H Г Четаев等人的研究课题

建立在Galileo和Newton提出的基本原理的基础上的动力学称为经典动力学或Newton动力学，以区别于以其他原理为基础的研究方向 (量子动力学、相对论动力学等) 经典动力学包括以Galileo和Newton的基本原理为出发点而进行的数学推导和所得结论的总合．其中，公理化的概念包括静止空间 (绝对静止 (或惯性) 参考系) 和对于空间中一切点都相同的绝对时间，并且假设绝对空间具有Euclid空间的一切性质．Newton定律是针对绝对空间和绝对时间表述的．它们在惯性参考系中仍然成立．在动力学中，通过建立模型 (质点、完全刚体、连续介质等模型) 得到关于物体运动的结论

根据所研究的问题的性质，动力学可以分为质点动力学和质点系动力学 质点的概念是动力学中的一个基本概念．如果一个物体的质量是有限的，在研究其运动时其几何尺度可以忽略不计，则将这个物体称为一个质点．动力学中的Newton第一定律和第二定律仅仅是对质点表述的．动力学也考虑绝对刚体模型，其各点之间的距离在运动过程中保持不变 利用这些基本动力学模型可以成功地解决关于真实物体运动的一系列具体问题

质点系动力学研究彼此之间相互联系着的一些物体的运动．其中包括刚体动力学、变质量系统动力学、弹性体和可塑性变形体动力学、流体和气体动力学等

质点系运动的性质决定于施加在系统上的作用力 (主动力) 和系统各点所受的约束 (constraint)，后者可由反作用力 (被动力) 来代替 作用在质点系上的

力是各个质点相互作用力的合力，这些质点既可能是系统的构成部分，也可能不是系统的构成部分 因此，可以把作用力分为内力和外力，这些力可以表示为质点的位置和速度以及时间的函数

在动力学中要解决的两个基本问题是 1)决定产生给定的质点或质点系运动的力，2)决定质点或质点系在给定的力的作用下所产生的运动．动力学问题可以借助于运动微分方程来解决 在单个质点的情况下，这些方程表示Newton第二定律，可以写成下列形式

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{F}+\mathbf{N},$$

其中$\mathbf{r}$是该质点在所考虑的参考系中的向径，$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$是质点的加速度，$\mathbf{F}$是作用在质点上的主动力，$\mathbf{N}$是约束的反作用力 为了确定质点的运动规律，必须求出在任何时刻的$\mathbf{r}$的值 可以利用动力学的一般定理(关于动量、动量矩和主动力变化的一些定理) 来实现运动方程的积分，这些定理决定了运动的基本动力学特征和物体的相互作用之间的关系，在许多情况下，动力学方程的积分过程可以大大简化 此外，这些一般定理使得研究所考虑的运动的各别方面成为可能 关于质点系的一般定律可以作为适用于单个质点的一般定理的直接推广而得到．如果是根据 **d'Alembert-Lagrange 原理** (d'Alembert-Lagrange principle)证明的，则这些定理变得更加圆满，这时，它们不含约束反力，而建立了描述系统运动的动力学量和作用在系统上的主动力之间的直接联系 具有完全理想约束的系统是最普遍的 这种系统的运动能够由第二类 **Lagrange方程（力学中的）**(Lagrange equations (in mechanics)) 来描述 这些方程是由 d'Alembert-Lagrange 原理推出的，它们对于研究质点系的运动最方便 对于具有不完全理想约束的质点系来说，**Appell 方程** (Appell equations)是最一般的不含约束反力的运动方程

分析动力学研究力学系统运动方程的、由这些方程的特殊形式所决定的性质 其研究范围包括动力学的一般原理、由这些原理推导运动微分方程和这些方程的积分方法 分析动力学的方法广泛的用于解决动力学和其他物理学领域中的各种问题 典范的 **Hamilton方程** (Hamilton equations)对于研究力学系统运动的性质具有最重要的意义，利用这些方程可以给出解决动力学问题的一系列有效方法

除了研究受加速力作用的物体的运动方程的建立和积分的一般方法以外，动力学还研究许多特殊问题，其中包括 刚体动力学、陀螺系统动力学、力学系统的振动理论、运动稳定性理论、冲激波理论等等

参考文献

[1] Galileo, G , Unterredungen und mathematische Demonstration über zwei neue Wissenschaftszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend, 1－2, Engelmann, 1891 (译自意大利文和拉丁文)

[2] Галилей, Г , Диалог о двух главнейших системах мира, птолемеевой и коперниковой, М -Л , 1948 (译自意大利文)

[3] Newton, I , Philosophiae naturalis principia mathematica, London, 1687 (英译本 Mathematical principles of natural philosophy (A Motte译，1729), Univ of California Press, 1934，中译本 自然哲学之数学原理(郑太朴译)，商务印书馆，1931)

[4] Эйлер, Л , Основы динамики точки, М -Л , 1938 (译自拉丁文)

[5] d'Alembert, J , Abhandlung über die Dynamik, Ostwald Klassiker, 106 (译自法文)

[6] Lagrange, J , Mecanique analytique, 1－2, Paris, 1788

[7] Jacobi, C G J, Vorlesungen über Dynamik, G Reimer, 1884

[8] Гамильтон, У, Об общем методе в динамике , в кн Вариационные принципы механики, М , 1959

[9] Hertz, H , Prinzipien der Mechanik, in Gesammelte Werke, Vol 3, J Barh, 1894

[10] Остроградский, М В , Лекции по аналитической механике, в кн Остроградский, М В , Полн собр трудов, т 2, К , 1961

[11] Жуковский, Н Е , Теоретическая механика, 2 изд , М -Л , 1952

[12] Чаплыгин, С А , Курсы лекций по теоретической механике Собр соч , т 4, М -Л , 1949

[13] Четаев, Н Г , Устойчивость движения —— Работы по аналитической механике, М , 1962

Е Н Березкин 撰

【补注】 动力系统中存在的约束可能具有多种类型．(为确定起见，)考虑在三维空间中运动的 N 个质点的系统 这时，可能有下述三种形式的约束方程

i) $3N$个Descartes位置坐标的某些函数等于零，

ii) 这些坐标的某些函数的不等式，

iii) 这些坐标的微分之间的(线性)不可积关系式．

类型i)的约束称为完整的(holonomic)，类型ii)，iii)的约束称为非完整的(non-holonomic)．"理想完全约束"中"理想"一词指的是理想化的约束性质．例如，如果能把约束看成连接两个质点的一根绳，则认为这根绳的重量为零并且是完全柔韧的，如果把一个质点约束在一个曲面的一侧上，则认为这个曲面是完全刚性的

参考文献

[A1] Whittaker, E T, Analytical dynamics of particles and rigid bodies, Dover, reprint, 1944

[A2] Arnol'd, V I, Mathematical methods of classical me-

chanics, Springer, 1978 (译自俄文)

[A3] Sudarshan, E C G and Mukunda, N, Classical dynamics a modern perspective, Wiley (Interscience), 1974

张鸿林 译

吸着动力学 [dynamics of sorption, динамика сорбции]

固体对被吸附物（蒸气，气体或溶质）的吸着过程，这过程伴有吸附和吸收，即表面吸收和体积吸收．吸着动力学决定于吸附速度，决定于被吸附物的外部和内部扩散，并由考虑吸附运动论时物质的扩散输运微分方程组来描述．在大多数情况下，吸着作用在非等温条件发生，因为它伴有吸附热的释放和毛细管凝结，以致传质（扩散）的过程伴有传热（热交换），也就是说，它要由一组传质和传热的微分方程来描述．假如气体和蒸汽混合物或溶质混合物组成吸附剂，则物质的分子传质和传热由 Onsager 方程组（[2]）来描述．

在双组分混合物情况下，传热和传质微分方程组——其解在相应的边界条件下决定吸着动力学——的形式为

$$\rho\frac{d\rho_{10}}{d\tau}=\operatorname{div}[D\rho\nabla\rho_{10}+\frac{K_T}{T}\nabla T]+vI_1(\rho_{10},T),\quad(1)$$

$$C_p\rho\frac{dT}{d\tau}=\operatorname{div}(\lambda\nabla T)+\operatorname{div}(D\rho Q^*\nabla\rho_{10})+$$
$$+(h_1-h_2)I_1+(C_{p1}+C_{p2})j_1\nabla T,\quad(2)$$

这里 ρ_{10} 是组分“1”的相对密度，$\rho_{10}=\rho_1/\rho$，$\rho=\rho_1+\rho_2$，D 是扩散系数，T 是温度，τ 是时间，c_p 是等压比热，λ 是导热系数，Q^* 是等温传递热，k_T 是热扩散系数，h 是比焓，j_1 是组分“1”的扩散质量流，$d/d\tau$ 是全导数或物质导数，它等于

$$\frac{d}{d^{\tau}}=\frac{\partial}{\partial\tau}+v\cdot\nabla\rho$$

（这里 v 是被吸附物流动的重心的运动速度），$I_1(\rho_{10},T)$ 是物质质量源的强度，它依赖于吸附运动论和相变（这些又通常是浓度 ρ_{10} 和温度 T 的函数）．

被吸附物流动的运动速度 v 由解 **Navier-Stokes 方程**（Navier-Stokes equations）得到 边界条件决定于固体表面与周围介质（被吸附物）间相互作用的性质与物理机制 这里质量交换的速度决定于被吸附物向物体表面的外部扩散和吸附运动论．通常考虑两种极端情况

1）质量交换决定于扩散，

2）固体表面的浓度只决定于吸附速度．

当蒸汽被有毛细孔的物体吸着时，对物体形状十分简单的情况下，微分方程组（1)，(2) 的解已获得（[1]）

水蒸汽被多孔物体的解吸过程组成干燥过程的一部分．这时，吸着动力学借助下述质量与热的交换方程近似地加以计算

$$q(\tau)=\rho_0R_vr\frac{d\bar{u}}{d\tau}(1+\mathrm{Rb}),$$

$$-\frac{d\bar{u}}{d\tau}=\kappa N(\bar{u}-\bar{u}_p),$$

这里 $d\bar{u}/d\tau$ 是解吸速度，r 是比吸着热，ρ_0 是干燥物体的密度，$q(\tau)$ 是物体表面的比热流，R_v 是物体的水力半径，$\bar{u}$ 是物体的平均湿度（相对于浓度），$\bar{u}_p$ 是平衡湿度，κ 是相对干燥系数，N 是在第一阶段（常速阶段）的干燥速度，Rb 是 Rehbinder 数

参考文献

[1] Лыков, А В, Михайлов, Ю А, Теория тепло-и массопереноса, М - Л, 1963

[2] Groot, S de and Mazur, P, Non-equilibrium thermodynamics, Moscow, 1968

[3] Лыков, А В, Теория сушки, 2 изд, М, 1968

[4] Франк-Каменецкий, Д А, Диффузия и теплопередача в химической кинематике, 2 изд, М, 1967

[5] Тихонов, А Н, Самарский, А А, Уравнения математической физики, 3 изд, М, 1966

А В Лыков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Aris, R, The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts, Oxford Univ Press, 1975

[A2] Jacob, M, Heat transfer, Ⅰ－Ⅱ, Wiley, 1955

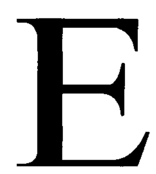
[A3] Carslaw, H S, Introduction to the mathematical theory of the conduction of heat in solids, Macmillan, 1921

唐福林 译

Дынкин 图形 [Dynkin diagram; диаграмма Дынкина]

【补注】 与单 Lie 代数（及其他一些对象）相联系的某种图形，用以分类 详见**根系**（root system）及**半单 Lie 代数**（Lie algebra, semi-simple）．

许永华 译



ε 熵 [ε-**entropy**, ε-**энтропия**]，度量空间中集合的

该集合的点数最少的 ε 网中，其点的个数以 2 为底的对数 换句话说，度量空间 (X,ρ) 中集合 C 的 ε 熵 $\mathscr{H}_\varepsilon(C,X)$ 是

$$\mathscr{H}_\varepsilon(C,X)=\log_2 N_\varepsilon(C,X),$$

其中

$$N_\varepsilon(C,X)=\inf\{n\ \exists x_1,\quad ,x_n,\ x_i\in X\ \ C\subset\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i,\varepsilon)\},$$

而 $B(\zeta,\alpha)=\{x\in X\ \ \rho(x,\zeta)\leqslant\alpha\}$ 是以 ζ 为中心，α 为半径的球 受信息论的思想及定义的启发（见**信息论** (information, theory of)，А Н Колмогоров 在 [1] 中给出了 $\mathscr{H}_\varepsilon(C,X)$ 的定义 $\mathscr{H}_\varepsilon(C,X)$ 也称为相对 ε 熵 (relative ε-entropy)，它依赖于 C 所在的空间 X，即 C 的度量扩张．量

$$\mathscr{H}_\varepsilon(C)=\inf\mathscr{H}_\varepsilon(C,X)$$

称为 C 的绝对 ε 熵 (absolute ε-entropy)，其中下确界对 C 的一切度量扩张 X 而取．它也可以直接定义 (Колмогоров, [1]) 对于度量空间 C, 设 $N_\varepsilon(C)$ 是 C 的最经济的（就集合个数而言）2ε 覆盖的基数，那么 $\mathscr{H}_\varepsilon(C)$ 就是 $N_\varepsilon(C)$ 的以 2 为底的对数 这里集合族 $\{C_i\}$ 称为 C 的 2ε 覆盖，如果 $C_i\subset C,\bigcup_{i=1}^{n}C_i=C$，而且每个 C_i 的直径不超过 2ε [2] 中证明了绝对 ε 熵是相对 ε 熵的最小值 量 $N_\varepsilon(C)$ 和 $N_\varepsilon(C,X)$ 是**宽度** (width) $\varepsilon^N(C)$ 和 $\varepsilon_N(C,X)$ 的逆 这些宽度刻画了用 N 元素来恢复 C 的元素以及用 N 点集合来逼近 C 的元素的可能性

关于不同函数类 ε 熵的渐近性质的研究是逼近论中一个特殊分支

参考文献

[1] Колмогоров, А Н ,《Докл АН СССР》, **108** (1956), 3, 385 – 388

[2] Витушкин, А Г , Оценка сложности задачи табулирования, М , 1959 (英译本 Vitushkin, A G , Theory of transmission and processing of information, Pergamon, 1961)

[3] Колмогоров, А Н , Тихомиров, В М ,《Успехи матем наук》, **14** (1959), 2, 3 – 86 .

В М Тихомиров 撰

【补注】 Колмогоров 的原始定义是为了研究下述问题而陈述的 $n(\geqslant 3)$ 元函数是否可以由 $r\,(r<n)$ 元函数复合而成? 这与 Hilbert 的第十三问题紧密相关，见 [2] 和 [A1]

ε 熵的概念在概率论中也是有用的，见 [A2]．它也被称为度量熵 (metric entropy)．

从 C 的 ε 球覆盖出发可以定义 ε 熵 $\mathscr{H}_\varepsilon(C,X)$. C 的 ε 填装 (ε-packing) $\mathscr{S}=\{B(y_i,\varepsilon)\}$ 是一族 ε 球，它们满足 $B(y_i,\varepsilon)\cap B(y_j,\varepsilon)=\phi$，若 $i\neq j$，且 $B(x_j,\varepsilon)\subset C$ 记 $M(C,\varepsilon)$ 是 C 的所有 ε 存储的基数中最大者，称 $\log M(C,\varepsilon)$ 为 C 在 X 中的 ε 容量 (ε-capacity)

在随机变量和随机过程中还有另一些（并非无关的）ε 熵的概念．它们是如下定义的 设 ξ 是在度量空间 (X,ρ) 取值的随机变量．设 W_ε 是所有取值于 X 且使得 $E(\rho^2(\xi,\xi'))\leqslant\varepsilon^2$ 的随机变量 ξ' 的集合，这里 E 表示数学期望 这时 ξ 的 ε 熵是 ([A3])

$$\mathscr{H}_\varepsilon(\xi)=\inf\{I(\xi,\xi')\ \ \xi'\in W_\varepsilon\},$$

其中 $I(\xi,\xi')$ 是通常的关于一对随机变量的信息函数（见**信息** (information)） 这种想法容易推广到随机过程 $\{\xi(t)\}_{t\in[a\ b]}$，只需把这样的过程看成是一个随机变量，譬如说，在 $L_2([a,b])$ 中取值 [A4] 中有一些 $\mathscr{H}_\varepsilon'(\xi)$ 的渐近估计

现在设 (X,ρ,μ) 是概率度量空间 (probabilistic

metric space)，即 (X,ρ) 是度量空间而 (X,μ) 是概率空间．对 $\varepsilon>0$，设 $\mathscr{V}_\varepsilon$ 是所有将 X 分为直径 $\leqslant\varepsilon$ 的可测集的分划（见**分解**（decomposition）） 定义

$$\mathscr{H}_\varepsilon''(X)=\inf\{H(\mathscr{U}) \quad \mathscr{U}\in\mathscr{V}_\varepsilon\},$$

其中 $H(\mathscr{U})$ 表示分划 $\mathscr{U}$ 的通常熵（[A5]） 定义

$$I_\varepsilon(X)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathscr{H}_\varepsilon''(X^n),$$

其中 $X^n=X\times \quad \times X$($n$ 个因子)赋予乘积测度和乘积距离．(此极限存在) 若 $X\times X$ 上测度 π 满足对任何可测集 $A\subset X$，成立 $\pi(A\times X)=\pi(X\times A)=\mu(A)$，记

$$I(\rho)=\frac{d\rho}{d(\mu\times\mu)}$$

为 Radon-Nikodým 导数．设 $R_\varepsilon(X)$ 是所有在测度空间 $X\times X$ 上满足下述条件的测度 π 组成的集合 对任何可测集 A，$\pi(A\times X)=\pi(X\times A)=\mu(A)$，而且

$$\pi\{(x,y) \quad \rho(x,y)\leqslant\varepsilon/2\}=1.$$

这时

$$I_\varepsilon=\inf_{\rho\in R_\varepsilon(Z)} I(\rho),$$

它是一个有噪信道编码定理，见[A6]．也有从两个方面联系 $\mathscr{H}_\varepsilon''(X)$ 和 $I_\varepsilon(X)$ 的估计，见[A6]．关于 $\mathscr{H}_\varepsilon''$ 和 Shannon 熵（的推广概念）之间（更多）的关系也可见[A7]．

可利用由 Borel 集构成的 (X,ρ) 的 ε 分划来定义绝对 ε 熵 $\mathscr{H}_\varepsilon''(C)$(如上面条目的正文) 那么

$$\mathscr{H}_\varepsilon''\leqslant\mathscr{H}_{\varepsilon/2},$$

然而对于 (X,ρ) 上变化的 μ，$\mathscr{H}_\varepsilon''$ 的上确界不一定等于 $\mathscr{H}_{\varepsilon/2}$，见[A5]．

现在再设 $\xi(t)$ $(t\in[0,1])$ 是（实值的）随机 Gauss 过程，设 $K(\cdot,\cdot)$ 是它的协方差函数，而 T 是以 $K(\cdot,\cdot)$ 为核的积分算子，即

$$(Tf)(t)=\int_0^1 K(s,t)f(s)\,ds.$$

记 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant \quad \geqslant0$ 是 T 的本征值，对 $\varepsilon\in[0,(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i)^{1/2}]$，由以下等式定义函数 $f(\varepsilon)$

$$\varepsilon^2=\sum_{i=1}^{\infty}\min\{\lambda_i,f(\varepsilon)\}.$$

那么 Pinsker 定理的结论是

$$\mathscr{H}_\varepsilon'(\xi)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\log\max\{\frac{\lambda_i}{f(\varepsilon)},1\}$$

(log 表示以 2 为底的对数) 对所有 $a>0$，还有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{S(T^k,af(\varepsilon)^k)}{k}=2\mathscr{H}_\varepsilon'(\xi),$$

其中对于 Hilbert 空间上适当的算子 $T \quad H\to H$，熵 $S(T,\alpha)$ 定义为集合 $\{Tx \quad \|x\|\leqslant1\}\subset H$ 的度量熵

$$S(T,\alpha)=\mathscr{H}_\alpha(T(B(0,1)),H),$$

见[A8]

参考文献

[A1] Lorentz, G G, The 13-th problem of Hilbert, in F E Browder (ed) Mathematical developments arising from Hilbert's problems, Amer Math Soc, 1976, 419－430

[A2] Dudley, R M, Metric entropy and the central limit theorem in $C(S)$, *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, **24** (1974), 49－60

[A3] Kolmogorov, A N, Theory of transmission of information, *Amer Math Soc Transl Ser* 2, **33** (1963), 291－321 (*Acad R P Romine An Romino-Sov*, **13** (1959), 1, 5－33)

[A4] Bina, J, Zakai, M and Ziv, J, On the ε-entropy and the rate distortion function of certain non-Gaussian processes, *IEEE Trans Inform Theory*, **20** (1974), 517－524

[A5] Posner, E C, Rodemich, E R and Rumsey, H, ε-Entropy of stochastic processes, *Ann Math Stat*, **38** (1967), 1000－1020

[A6] Posner, E C and Rodemich, E R, Epsilon entropy and deta compression, *Ann Math Stat*, **42** (1971), 2079－2125

[A7] Katětov, M, On extended Shannon entropies and the epsilon entropy, *Comm Math Univ Carolinae*, **27** (1986), 519－534

[A8] Akashi, S, On operator theoretical characterization of epsilon-entropy in Gaussian processes, *Kodai Math J*, **9** (1986), 58－67.

陈迪荣 译 葛显良 校

e(数)[e(number), e(число)]

表达式 $(1+1/n)^n$ 当 $n\to\infty$ 时的极限

$$e=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n}\right]^n=2.718\,281\,828\,459\,045 \quad ,$$

它是自然对数的底 C Hermite 于 1873 年最先证明 e 是一个超越数 有时把 e 称为 Napier 数（Napier number），这并没有什么道理 C A Степанов 撰

【补注】 亦见**指数函数**（exponential function），**实指数函数**（exponential function, real），**数的对数**（logarithm of a number），**对数函数**（logarithmic function），**超越数**（transcendental number）． 张鸿林 译

Eberlein 紧统[Eberlein compactum, Эберлейна компакт]

【补注】 Eberlein 紧统是和 **Banach 空间** (Banach space) 的一个子集在**弱拓扑** (weak topology) 下同胚的**紧统** (compactum) X([A3])

W A Eberlein 指出([A1]) 这样的空间是序列紧的，且是 Fréchet-Урысон 空间(见**序列紧空间** (sequentially-compact space)，**Fréchet 空间** (Fréchet space))

对 Eberlein 紧统有如下的结构定理 对紧统 X 以下命题等价 i) X 是 Eberlein 紧统，ii) 对某个集合 I，X 按弱拓扑(或等价地，点态拓扑)同胚于 $c_0(I)$ 的一个子集，iii) X 有开 F_σ 集族 $\mathscr{A}=\bigcup_{n<\omega}\mathscr{A}_n$，使得每个族 $\mathscr{A}_n$ 是点有限的，且对一切 $x\neq y$，存在 $B\in\mathscr{A}$ 只含 x，y 中的一个

这里 $c_0(I)$ 是 Banach 空间 $\{f\in R^I$ 对一切 $\varepsilon>0$，集合 $\{i\ |f(i)|>\varepsilon\}$ 有限$\}$

Eberlein 紧空间类在取闭子空间，连续映射和可数积的运算下封闭 Eberlein 紧空间的最新特征如下([A2]) X 是 Eberlein 紧空间，当且仅当 X^2 的每一子空间是 σ 亚紧的 (σ-metacompact)，其中 σ 亚紧性意指每一个开覆盖有一个开的加细，它是可数多个点有限族 ι 并.

在[A4]中可找到一个很好的综述.

参考文献

[A1] Eberlein, W A, Weak compactness in Banach spaces, *Proc Nat Acad Sci USA*, **33** (1947), 51–53

[A2] Gruenhage, G, Games, covering properties and Eberlein compacts, *Topology Appl*, **23** (1986), 291–297

[A3] Lindenstrauss, J, Weakly compact sets-their topological properties and the Banach spaces they generate, in Symp infinite-dimensional topology, Ann Math Studies, Vol 69, Princeton Univ Press, 1972, 235–276

[A4] Negrepontis, S, Banach spaces and topology, in K Kunen and J E Vaughan (eds) Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, 1984, 1054–1142

余庆余 译

离心率 [eccentricity, эксцентриситет]

圆锥曲线 (conic sections) 上任何一点与一给定点(焦点)之间的距离和同一点与一给定直线(准线)之间的距离的比值 具有相同离心率的两圆锥曲线是相似的 对于椭圆，离心率 $e<1$(对于圆，$e=0$)，对于双曲线，$e>1$，对于抛物线，$e=1$ 对于椭圆和双曲线，离心率也可定义为两焦点的距离和长轴的长度之比.

А Б Иванов 撰

【补注】 上述正文中定义的量常常称为**数值离心率** (numerical eccentricity) **线性离心率** (linear eccentricity) 等于**两焦点** (focus) 距离的一半 见[A1]，[A2]

对于分别由方程 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$，$y^2=2px$ 和 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 给出的"标准"椭圆、抛物线和双曲线，离心率分别等于 $a^{-1}\sqrt{a^2-b^2}$ (如果 $a>b$)，1 和 $a^{-1}\sqrt{a^2+b^2}$ 对于这三种情况，焦点 f 和相应的准线 D 分别为 $f=(\sqrt{a^2-b^2},0)$，D $x=a^2(a^2-b^2)^{-1/2}$ (如果 $a>b$)，$f=(-p/2,0)$，D $x=p/2$，$f=(\sqrt{a^2+b^2},0)$，D $x=a^2(a^2+b^2)^{-1/2}$ 对于椭圆和双曲线，存在两个焦点，对于抛物线，存在一个焦点

参考文献

[A1] Berger, M, Geometry, II, Springer, 1987 (中译本 M 贝尔热，几何，第二册，科学出版社，1989)

[A2] Coxeter, H S M, Introduction to geometry, Wiley, 1963

张鸿林 译

计量经济学 [econometrics, эконометрия]

在经济学研究中应用数学方法的一个方向，其目的是在经济对象和过程的最重要的决定因素的理论表示基础上，通过数学模型和数据处理的统计方法来定量地描述它们的规律性和相互关系．计量经济学的特征是，假设在次要的随机因素和从属现象的作用背景下，有关这种可计量且可应用于经济统计和预测的经济指标存在内含的规律性，目的在于探求与表示它们的具体形式的同时选择有关的理论上的可预测关系

经济变量之间相互关系的定量描述已在 19 世纪作了个别的尝试 由于计量经济学的理论基础是在资本主义经济科学的框架内发展起来的，因此借助于计量经济模型对社会经济过程的科学分析和预测就有其局限性 同时，研究所有经济层次(从国家到私人的厂商)上的现象的实际需要，促进了经济数学模型和数学方法的一套典型表述的发展与多方面的应用，它们能揭示和分析统计数据中的定量相互关系，并能在对可采纳的数据和所关心的关系式作某些假设下得到论证

社会主义国家经济中的定量规律性与相互关系的探索和研究服从于经济理论发展的任务和制订计划与控制的需要．比起资本主义经济科学中计量经济的趋势，在苏联和社会主义国家中所遵循的科学方向，按其任务和应用的方法更为普遍，它是在马列主义政治经济学和国家经济及其成分的控制理论的基础上研究经济中的定量规律性与相互关系．它以术语"经济数学方法"标明于文献中 它不仅包括通过统计数据构造定量定义的模型，而且也包括所有涉及最优经济解的预备与基础的问题，它们的有效实现的必要条件的分析，物质与信息相互影响同时存在的复杂社会经济系统运行过程的建模，以及各种层次计划与控制解的精心制订与实施，包括对过去已发展的相当稳固的关系与倾向进行主动的根本改变的条件的创立

计量经济学使用来自许多数学领域的概念、论述

和解决问题的方法，包括**数理统计**（mathematical statistics），**概率论**（probability theory），**数学规划**（mathematical programming），解**线性代数**（linear algebra）中的问题和解非线性方程组的数值方法，以及求映射不动点的数值方法，在很多情形中，它必须处理随机表述中的逆问题与不适定问题 同时，计量经济学利用数学方法不仅是要确定适合统计研究的关系式（例如，作为一个具有非随机因子自变量的回归方程，它关于有待于估值的参数是线性的），而且还要确定更复杂的能使经济研究中典型问题形式化的数学模型．这种通过计量经济方法可以构造和研究的典型的经济数学模型有 生成函数，它表示各种层次经济系统生产活动的费用和效果之间的稳定规律性关系，生产率的因素模型，消费者群体的需求函数系统与消费者偏好的目标函数，部门间的产品生产、分配与消费的静态与动态模型，部门间和地域间资源的分配与再分配的特殊模型，一般经济均衡模型，国家集团间的对外贸易模型，等等

由于实际的需要，计量经济学放宽了统计数据中关于随机因素的一套原始假设，因而能表述对应用统计分析来说是非传统的问题，并产生它们的解法．因此，许多计量经济模型将独立变量与参数不作为确定性变量而作为随机变量来处理，它们包含变量的时间分布的相互依存性，使用不直接可观察的隐变量，考虑对有关参数的先验限制，假设被研究的关系式在时间和因子空间中的变化，并求出这种变化的时刻或发生变化的因子值集 除了关于探求关系式问题陈述的一般化外，计量经济学的特征是对一类问题不同解法的性质和相对有效性的理论和经验（例如，通过**蒙特卡罗方法**（Monte-Carlo method））的研究，同时也倾向于阐述一个推荐系统，利用这个系统，对所研究的现象与对象的模型的假设可以不断得到验证与改进．

利用应用数学方法宝库的经济数学方向的发展，以及对收集、存储与处理数据使用计算技术工具的可能性，导致一类模型以及它们的制作与分析方法的更精确的定义，它们由所采用的研究方法的共同原则统一起来 特别地，在大量用于发展经济数学模型的计量经济方法中可以区分出一类专门的计量经济模型它们的一般表述(在许多方向中可作具体的表述)如下

设 $X_i(i=1,\quad,n)$ 为变量（经济指标）的全体，并设 X_i^t 为它们在时间 t 的一个区间中相应的可量测值．假设这些变量满足关系式组

$$F_k(X^t,\quad,X^{t-\tau},t,a,\varepsilon_k^t)=0,\ k=1,\quad,m,\qquad(1)$$

这里 X^t 是所考虑的系统在期间 t 的状态向量，$X_i^t(i=1,\quad,n)$ 均为它的坐标，F_k 是一个由向量 a 所代表的参数值规定的函数，ε_k^t 为随机变量 $\xi_k^t(k=1,\quad,m)$ 的实现．对于固定的向量值 $\varepsilon^{t-1}=\{\varepsilon_k^{t-1}\}$，$\varepsilon^{t-2}=\{\varepsilon_k^{t-2}\}$，，以

$$\mathsf{P}(\varepsilon^t\mid\varepsilon^{t-1},\quad,b)\qquad(2)$$

表示的这种随机变量 $\xi_k^t(k=1,\quad m)$ 的条件概率分布，除了某个参数向量 b 的值之外是假设为已知的

对于计量经济模型（1）-(2)，考虑如下的基本问题

通过已知的数据总体 $X^{T-Q},\quad,X^T$，使得这些数据满足在某种特殊确定意义下的关系（1）来决定参数 a 与 b 的值

通过剩下的 $n-m$ 个变量 $X_i^t(i=1,\quad,n,i\neq i_1,\quad,i_m)$ 的指定值，对于 $t=T+1,\quad,T+\tau$ 来构造 m 个变量 $X_j^t(j=i_1,\quad,i_m)$ 的条件预测值．

相应于现有的数据和关于所探求的关系式性质的定性论证，比较几个形为（1）-(2)的不同的模型，它们的区别在于对于确定的参数值选用了不同的函数 F_k 与律 $\mathsf{P}(\varepsilon^t\mid\varepsilon^{t-1},\quad,b)$，并且判定它们是否包含了本质上更好（更坏）的模型

这些计量经济模型的参数估计问题的定性表述，借助于它们作出预测以及这些模型间的比较，在计量经济学中是这样被确定的 它们使得对于某类函数 F_k 和律 P 提出解法是可能的，并且它们可以用恰当的计算机程序形式来实现

在实际的研究中，计量经济方法不仅应用于建立专门的计量经济模型，而且也应用于创造更一般和更通用的模型，其中也使用规范、优化以及仿真的方法，并以此来模拟和克服计量经济研究中所特有的描述性

参考文献

[1] Канторович, Л В, Математические методы организации и планирования производства, Л, 1939 (中译本 Л В 康特洛维奇，生产组织与计划中的数学方法，科学出版社，1959)

[2] Канторович, Л В, Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, М, 1959

[3] Tintner, G, Econometrics, Wiley, 1952

[4] Михалевский, Б Н, Система моделей среднесрочного народнохозяйственного планирования, М, 1972

[5] Эконометрические модели и прогнозы, новосиб, 1975

[6] Колек, Ю, Шуян, И, Эконометрические модели в социалистических странах, пер со словац, М, 1978

[7] Fisher, F, The identification problem in econometrics, McGraw-Hill, 1966

[8] Пирогов, Г Г, Федоровский, Ю П, Проблемы структурного оценивания в эконометрии, М, 1979

[9] Johnston, J, Econometric methods, McGraw-Hill, 1963

[10] Zellner, A, An introduction to Bayesian inference in econometrics, Wiley, 1971

[11] Poirier, D J, The econometrics of structural changes,

North-Holland 1976

[12] Vinn R and Holden, K, Introduction to applied econometric analysis Moscow 1981

[13] Dhrymes P, Distributed lags Problems of estimation and formulation Oliver & Boyd, 1947

[14] Межотраслевые эконометрические модели Новосиб 1983

Л В Канторович, Э Б Ершов 撰

【补注】 在经济科学中存在着各种学派，上面所作的某些论述，看重反映了苏联学派的意识形态 增选的计量经济学中的著名的教科书为 [A1]−[A10] 上文既讨论了计量经济学，又讨论了**数学经济学** (mathematical economics) 后一主题涉及内容的精辟论述可从 [A11]−[A13] 中找到

参考文献

[A1] Malinvaud A, Statistical methods of econometrics, North-Holland, 1980(译自法文)

[A2] Leeflang, P H S, Mathematical models in marketing, S Kroese 1974

[A3] Theil, H Principles of econometrics, North-Holland, 1971

[A4] Klein, L R, An introduction to econometrics, Prentice-Hall 1962

[A5] Christ, C F, Econometric models and methods, Wiley, 1966

[A6] Dhrymes Ph J, Econometrics, Harper & Row, 1970

[A7] Goldberger, A S, Econometric theory, Wiley, 1964

[A8] Dhrymes, Ph J, Introductory econometrics, Springer, 1978

[A9] Walkers, A A, An introduction to econometrics, Macmillan, 1968

[A10] Intrilligator M D, Econometric models, techniques, and applications, North-Holland, 1978

[A11] Rieter S (ed), Studies in mathematical economics, Math Assoc Amer, 1986

[A12] Sato, R, Theory of technical change and economic invariance Application of Lie groups, Acad Press, 1981

[A13] Newman P (ed), Readings in mathematical economics, I−II, Johns Hopkins, 1968

胡宣达 译 钟瑚绵 校

脊线 [**edge of regression**, **возврата ребро**], 回归棱

一种由流形到 Euclid 空间的**可微映射**的**奇异性** (singularity of differentiable mappings) 在由曲面 M 到三维 Euclid 空间 E^3 的映射 f 这一最简单情形，脊线指的是 M 中的一条光滑曲线 L，具有光滑象 $f(L)\subset E^3$，使对任何 $p\in f(L)$，M 与过 p 且垂直于 $f(L)$ 的平面 π 的交是一**尖点** (cusp) 脊线出现于伪球面中.

М И Войцеховский 撰

【补注】 亦见**可展曲面** (developable surface) 的脊线

脊线也称为尖棱(cuspidal edge) 它是 A_3 型稳定**焦散线** (caustic)，见 [A1]，331 页

参考文献

[A1] Arnol'd, V I, Gusein-Zade, S M and Varchenko, A N, Singularities of differentiable maps, 1, Birkhauser, 1985(译自俄文)

郑维行 译 沈永欢 校

Edgeworth 级数 [**Edgeworth series**, **эджворта ряд**]

由

$$f(x)=\varphi(x)+ \qquad (*)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{b_{k\,k+2}\varphi^{(k+2)}(x)+b_{k\,k+4}\varphi^{(k+4)}(x)+\cdots+b_{k\,3k}\varphi^{(3k)}(x)}{n^{k/2}}$$

所定义的级数 这里 f 是随机变量

$$\frac{s_n-\mathrm{E}s_n}{\sqrt{Ds_n}}$$

的分布密度 ($s_n=\xi_1+\cdots+\xi_n$，其中 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是独立且等分布的)，

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

是标准**正态分布** (normal distribution) 密度，且

$$\varphi^{(k)}(x)=\frac{d^k\varphi(x)}{dx^k}$$

这些系数 $b_{k\,k+2l}(l=1,\cdots,k)$ 与 n 无关且是 $\lambda_3,\cdots,\lambda_{k-l+3}$ 的多项式，其中 $\lambda_j=\kappa_j/\sigma^j$，$\sigma^2$ 是方差且 κ_j 是 ξ_1 的 j 阶**半不变量** (semi-invariant) 特别地，该展式的前几项的形式是

$$f(x)=\varphi(x)-\frac{1}{n^{1/2}}\frac{1}{3!}\lambda_3\varphi^{(3)}(x)-\left[\frac{1}{4!}\lambda_4\varphi^{(4)}(x)\right.$$

$$\left.+\frac{10}{6!}\lambda_3^2\varphi^{(6)}(x)\right]-\frac{1}{n^{3/2}}\left[\frac{1}{5!}\lambda_5\varphi^{(5)}(x)\right.$$

$$\left.+\frac{35}{7!}\lambda_3\lambda_4\varphi^{(7)}(x)+\frac{280}{9!}\lambda_3^3\varphi^{(9)}(x)\right]+\cdots$$

系数 $b_{k,k+2l}$ 也可用中心矩表出

级数 (*) 是由 F Y Edgeworth ([1]) 引进的 H Cramér 已经研究了它们的渐近性质，他指出在相当一般的条件下，级数 (*) 是 f 的渐近展式，在这个展式中其余项具有第一舍弃项的阶

参考文献

[1] Edgeworth, F Y, The law of error I, *Proc Cambridge Philos Soc*, **20** (1905), 36−65

[2] Cramer, H, Mathematical methods of statistics, Princeton Univ Press, 1946

В Г Ушаков 撰

【补注】 上面的讨论省略了许多技术细节，也省略了

现代的发展.

在[A1]中给出了用于独立随机变量之和的 Edgeworth 展开理论的一个极好的说明 在[A2]的第16章中也可看到对 Edgeworth 展开 (Edgeworth expansions) 理论的一个简短而流畅的介绍.在[A3]中处理了独立随机变量和的情形 该展开理论到具有更复杂结构的统计方法的开拓，如在统计理论中尤为有趣的一种统计方法—— U 统计法 (U-statistics)，在最近15年 (到1988年止) 里由许多作者作了研究 在这个领域里，最近的一个重要贡献是[A4]

参考文献

[A1] Petrov, V V, Sums of independent random variables, Springer, 1975

[A2] Feller, W, An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1971 (中译本 W 费勒, 概率论及其应用, 上 下册, 科学出版社, 1964, 1979).

[A3] Bhattacharya, R N and Rao, R R, Normal approximation and asymptotic expansions, Wiley, 1976

[A4] Bickel, P J, Gotze, F and Zwet, W R van The Edgeworth expansion for U-statistics of degree two, *Ann Statist*, **14** (1986), 1463－1484

刘永平 译 葛显良 校

渐近效率 [efficiency, asymptotic, эффективность асимтотическая критерия], 检验的

可用来在大样本情况下对某个统计假设的两个不同的统计检验作定量比较的概念 19世纪30年代和40年代出现了一些简单 (从计算的观点) 而 “效率低” 的秩方法，从而需要对检验的效率加以度量

对于检验的渐近效率，有几种不同的定义方法 假定观测值的分布由实参数 θ 确定，要检验假设 H_0 $\theta=\theta_0$，其对立假设为 H_1 $\theta\neq\theta_0$ 又假定对于显著水平为 α 的某个检验，使它在给定 $\theta(\neq\theta_0)$ 处的功效达到 β 所需的观测数为 N_1，而对于另一同样水平的检验，达到同一目的所需的观测数为 N_2 那么，第一个检验对于第二个检验的相对效率 (relative efficiency) 可定义为 $e_{12}=N_2/N_1$ 对于检验的比较来说，相对效率的概念给出了详尽的信息，但因 e_{12} 是三个变量 α,β 和 θ 的函数，且通常都没有显式可供计算，所以相对效率不便于应用.为了克服这个困难，人们将其过渡到极限

对于固定的 α 和 β，称 $\lim_{\theta\to\theta_0}e_{12}(\alpha,\beta,\theta)$ (当极限存在时) 为 Pitman 意义下的渐近相对效率 (asymptotic relative efficiency). 类似地，对于固定的 β 和 θ，称 $\lim_{\alpha\to 0}e_{12}(\alpha,\beta,\theta)$ 为 Bahadur 意义下的渐近相对效率，对于固定的 α 和 θ，称 $\lim_{\beta\to 1}e_{12}(\alpha,\beta,\theta)$ 为 Hodges 和 Lehmann 意义下的渐近相对效率

上述每种定义都有其优缺点 例如，一般来说，Pitman 效率比 Bahadur 效率容易计算 (后者的计算涉及研究检验统计的大偏差的渐近概率这个重大问题)，然而在许多情况下，Pitman 效率对于两个检验的比较不太敏感

又如，假定观测值遵从均值为 θ 方差为1的正态分布，要检验假设 H_0 $\theta=0$，其对立假设为 H_1 $\theta>0$ 且假定只考虑基于样本均值 $\bar{X}$ 和 Student 比 t 的显著性检验.因为 t 检验没有利用方差的信息，所以最优检验一定是基于 $\bar{X}$ 的检验.但根据 Pitman 效率的观点，这些检验是等价的 另一方面，对任何 $\theta>0$，t 检验相对于 $\bar{X}$ 的 Bahadur 效率小于1

在更复杂的情况下，Pitman 效率可能依赖 α 或 β，且它的计算冗长乏味.此时，人们计算当 $\beta\to 1$ 或 $\alpha\to 0$ 时，Pitman 效率的极限 通常，后者和 $\theta\to\theta_0$ 时 Bahadur 效率的极限是相同的 ([8]).

关于检验的渐近效率的其他定义方法，见[2]－[5] 文献[6]和[7]对序贯检验引入了类似的概念 选择哪一种渐近效率的定义，应该根据它们之中哪一个更精确地接近于相对效率 e_{12} 而定 然而，目前 (1988) 在这方面所知甚少 ([9])

参考文献

[1] Kendall, M C and Stewart, A, The advanced theory of statistics Inference and relationship, 2, Griffin, 1973

[2] Bahadur, R, Rates of convergence of estimates and test statistics, *Ann Math Stat*, **38** (1967), 2, 303－324

[3] Hodges, J and Lehmann, E, The efficiency of some nonparametric competitors of the t-test, *Ann Math Stat*, **27** (1956), 2, 324－335

[4] Rao, C R, Linear statistical inference and its applications, Wiley, 1965

[5] Kallenberg, W, Chernoff efficiency and deficiency, *Ann Statist*, **10** (1982), 2, 583－594

[6] Berk, R and Brown, L, Sequential Bahadur efficiency, *Ann Statist*, **6** (1978), 3, 567－581

[7] Berk, R, Asymptotic efficiencies of sequential tests, *Ann Statist*, **4** (1976), 5, 891－911

[8] Wieland, H, A condition under which the Pitman and Bahadur approaches to efficiency coincide, *Ann Statist*, **4** (1976), 5, 1003－1011

[9] Groeneboom, P and Oosterhoff, J, Bahadur efficiency and small-sample efficiency, *Internat Stat Rev*, **49** (1981), 2, 127－141

Я Ю Никитин 撰

【补注】 参考文献[A1] (和其他著作) 提出，在实用上重要的小样本情形下，Pitman 方法一般地比 Bahadur 方法给出更好的近似.

参考文献

[A1] Groeneboom P and Oosterhoff, J, Bahadur efficiencies and probabilities of large deviations, *Stat Neerlandica*, **31** (1977), 1－24

吴启光 译 陶 波 校

统计方法的效率 [efficiency of a statistical procedure; эффективность статистической процедуры]

用来把一特定类中的统计方法与最优方法作比较的概念．在数理统计中，统计方法的最优性概念通常是根据该方法的风险（函数）来表述，而风险又直接依赖于损失函数的选择 因此，可能出现这样的情况 同一统计方法在某种意义下是很有效的，甚至是最优的，而在另一种意义下的效率却较低

统计方法的效率是一个不太明确的概念．在诸如统计假设检验、统计估计的特定的数理统计问题中，它有更明确的含义

M C Никулин 撰 吴启光 译 陶 波 校

有效估计量 [**efficient estimator**, **эффективная оценка**]，亦称有效估计

方差为 **Rao-Cramér 不等式**（Rao-Cramér inequality）中下界的无偏统计估计量．有效估计量对于被估计的参数来说是充分统计量（sufficient statistic）．若存在有效估计量，则它可由极大似然方法获得．因为在许多情况下 Rao-Cramér 不等式中的下界不可能达到，所以在数理统计中常常把有效估计量定义为待估参数的**无偏估计量**（unbiased estimator）类中具有最小方差的估计量

参考文献

[1] Cramer, H, Mathematical methods of statistics, Princeton Univ Press, 1946（中译本 H 克拉美，统计数学方法，上海科学技术出版社，1966）

[2] Ибрагимов, И А, Хасьминский, Р З, Асимптотическая теория оценивания, М, 1979（英译本 Ibragimov, I A and Has'minskii, R Z, Statistical estimation asymptotic theory, Springer, 1981）

[3] Rao, C R, Linear statistical inference and its applications, Wiley, 1965（中译本 C R 劳，线性统计推断及其应用，科学出版社，1987）

M C Никулин 撰 吴启光 译 陶 波 校

有效检验 [**efficient test**, **эффективный критерий**]

在具有同一**显著性水平**（significance level）的适当统计检验类中的**最大功效检验**（most-powerful test）．

M C Никулин 撰

【补注】 亦见**统计检验的功效**（power of a statistical test）

吴启光 译 陶 波 校

Егоров 曲面系 [**Egorov system of surfaces**, **Егорова система поверхностей**]

由所谓位势曲面（见**位势网**（potential net））组成的三重正交系 Σ，以 Д Ф Егоров 的名字命名，他在 1901 年（见 [1]）详细地考虑了这种系统的一般理论（在位势系的名称下）并且给出了许多这种系统的例子 Егоров 系 Σ 可定义为容有（单参数）变换群的曲面系，其中每个变换把 Σ 变到自身，使得在 Σ 的对应点法线保持平行．这个群的一种力学解释是传送 Егоров 系曲面的具速度势之流体的平稳流．

设

$$u^i(x,y,z)=\text{常数},\ i=1,2,3$$

是构成 Егоров 系 Σ 的曲面方程；并设 H_i 是在曲线坐标系 $\{u^i\}$ 下空间线素平方的表达式中出现的 **Lamé 系数**（Lamé coefficients）

$$ds^2=\sum_{i=1}^{3} H_i^2(du^i)^2,$$

令 P_i 是原点与 Σ 的三个切平面的距离，R_{ik} 是曲面 $u^i=$常数 的对应于主方向 $H_k du^k$ 的主曲率半径，$\beta_{ik}=-H_k/R_{ik}$ 是曲面球面象（见**球面映射**（spherical map））的线素 $d\sigma_i$ 表达式中出现的量．

$$(d\sigma_i)^2=\beta_{ik}^2(du^k)^2+\beta_{il}^2(du^l)^2,\ i\neq k\neq l.$$

函数 P_i 和 H_i 满足同一方程组

$$\frac{\partial\theta_i}{\partial u^k}=\beta_{ik}\theta_k.$$

这些方程的解确定了另外两个具有相同球面象的 Егоров 系 Σ_1 和 Σ_{-1}，对于它们

$$P_i^{(1)}=H_i,\ H_i^{(-1)}=P_i.$$

沿双向继续这种递推变换，可给出一列 Егоров 系（Егоров 序列（Egorov series））

$$\cdots,\Sigma_{-2},\Sigma_{-1},\Sigma,\Sigma_1,\Sigma_2,$$

它们有相同的球面象，每个 Σ_{k+1} 可按公式

$$P_i^{(k+1)}=H_i^{(k)}$$

从前面的 Σ_k 得来．一般而言，寻求 Егоров 系 Σ 的球面象可化为球面上位势系的研究 任一这样的位势系都可取作构成 Σ 的其中一族曲面的球面象．

Егоров 系 Σ 由下列关系式刻画

$$H_i^2=\frac{\partial\omega}{\partial u^i},$$

其中 ω 是一个函数，具有对应的流的速度势的意义，即 $u^i=$常数是位势面 因此，对于任何位势面 S，存在包含 S 的 Егоров 系 对于任何曲面 $\omega=$常数与曲面 $u^i=$常数的交线，其上任一点的切线平行于射线 l^i，它连接曲面 $u^i=$常数之曲率线的测地曲率中心，在空间每点，三条射线 l^1,l^2,l^3 平行于一公共平面——曲面 $\omega=$常数的切平面，并且坐标曲线的密切平面通过一公共直线．Егоров 系的量 β_{ik} 和 R_{ik} 满足关系

$$R_{12}R_{23}R_{31}=R_{13}R_{32}R_{21},\ \beta_{ik}=\beta_{ki}$$

(β_{ik} 的对称性也是一个三重正交系为 Егоров 系的充要条件）.

参考文献

[1] Егоров, Д Ф , Работы по дифференциальной геометрии, М , 1970

М И Войцеховский 撰 沈一兵 译

Егоров 定理 [Egorov theorem, Егорова теорема]

关于函数列的几乎处处收敛与一致收敛概念之间的关系的一条定理　设 μ 为定义在 σ 代数 $\mathfrak{S}_\mu$ 上的 σ 可加测度，$E\in\mathfrak{S}_\mu$, $\mu(E)<\infty$, 且 $f_k(x)$, $x\in E$, $k=1,2,\cdots$, 为几乎处处有限的 μ 可测函数序列，并几乎处处收敛于函数 $f(x)$，则对每个 $\varepsilon>0$，存在可测集 $E_\varepsilon\subset E$，满足 $\mu(E\setminus E_\varepsilon)<\varepsilon$, 且在 E_ε 上序列 $f_k(x)$ 一致收敛于 $f(x)$．对于 μ 是直线上 Lebesgue 测度情形，此定理为 Д Ф Егоров（[1]）所证明

Егоров 定理有各种推广，扩大了其应用范围　例如，设 $f_k(x)$ 为由局部紧空间 X 到可度量化空间 Y 中的可测映射序列且极限 $\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)$ 在 X 上关于 **Radon 测度** (Radon measure) $\mu\geqslant 0$ 局部几乎处处成立．那么，f　$X\to Y$ 关于 μ 是可测的，且对任何紧集 $K\subset X$ 与 $\varepsilon>0$，存在紧集 $K_1\subset K$，满足 $\mu(K\setminus K_1)<\varepsilon$，使得 f_k 在 K_1 上的限制为连续的并在 K_1 上一致收敛于 f　若 Y 不是可度量化空间，Егоров 定理的结论未必成立．

参考文献

[1] Egorov, D F, Sur les suites de fonctions mesurables, *C R Acad Sci Paris*, **152** (1911), 244－246

[2] Колмогоров, А Н, Фомин, С В, Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд, М, 1976 (中译本　А. Н 柯尔莫果洛夫，С В 佛明，函数论与泛函分析初步，高等教育出版社，1992)

[3] Bourbaki, N, Elements of mathematics. Integration, Addison-Wesley, 1975, Chapt 6, 7, 8 (译自法文)

Л Д Кудрявцев 撰

【补注】 1970 年 G Mokobodzki 得到了 Егоров 定理的一个很好推广（见 [A2], [A3]）　设 μ, $\mathfrak{S}_\mu$ 与 E 如上述．令 U 为由 μ 可测有限函数的某一集合且在**点态收敛** (pointwise convergence) 拓扑下是紧的　那么存在属于 $\mathfrak{S}_\mu$ 的互不相交集合序列 $\{A_n\}$，使 μ 的支集含于 $\bigcup A_n$ 并使对每个 n, U 中元素在 A_n 上的限制组成的集合 U_n 在一**致收敛**（uniform convergence）拓扑下是紧的．

Егоров 定理与 **Лузин C 性质**（Luzin C-property）有关．

参考文献

[A1] Halmos, P R, Measure theory, v Nostrand, 1950 (中译本　哈尔摩斯，测度论，科学出版社，1958　英文新版　Springer-Verlag, 1974)

[A2] Dellacherie, C and Meyer, P A, Probabilities and potential, C, North-Holland, 1988 (译自法文)

[A3] Revuz, D, Markov chains, North-Holland, 1975

郑世骏 译

本征函数 [eigen function; собственная функция]

函数空间上的一个算子的**本征向量**（eigen vector）

В С Шульман 撰　王声望 译

本征振动 [eigen oscillation, собственные колебания]，自由振动（free oscillation），亦称固有振动

一个**动力系统**（dynamical system）在初始时刻因“外部作用”的干扰而偏离平衡状态后不再存在“外部作用”时其中所发生的振动．本征振动的特点是由系统的物理结构产生的内力决定的．系统运动所需要的能量是在运动的初始时刻由“外部作用”输入系统的．

n 个自由度的保守系统在稳定平衡状态附近的微小振动就是本征振动的一个例子　其运动方程具有下列形式

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{si}\ddot{q}_i+c_{si}q_i)=0,\ s=1,2,\ \ ,n, \tag{1}$$

其中 q_i 是广义坐标，a_{si}, c_{si} 是常系数．(1) 的通解是 n 个谐振动之和

$$q_i=\sum_{j=1}^{n}A_j\Delta_i(k_j^2)\sin(k_jt+\beta_j),\ i=1,2,\ \ ,n,$$

其中 A_j, B_j 是积分常数，k_j 是本征频率（eigen frequency）（亦称固有频率），即特征方程

$$\det\begin{vmatrix} c_{11}-a_{11}k^2 & & c_{1n}-a_{1n}k^2 \\ & & \\ c_{n1}-a_{n1}k^2 & & c_{nn}-a_{nn}k^2 \end{vmatrix}=0 \tag{2}$$

的根（这里假设没有等于零的或多重的频率），而 $\Delta_i(k_j^2)$ 是对应于行列式 (2) 的第 i 列、最后一行的子式　变量 $A_j\Delta_i(k_j^2)$, $k_jt+\beta_j$ 和 β_j 分别是第 j 个谐振动的振幅、相位和初始相位　由这个例子可以看出，对于一切坐标来说，具有相同频率的谐振动发生在同相或反相，具有给定本征频率的振动的振幅按坐标的分布取决于系统的物理结构．

参考文献

[1] Бабаков, И М, Теория колебания, 2 изд, М, 1965

[2] Бутенин, Н В, Теория колебаний, М, 1963

[3] Стрелков, С П, Введение в теорию колебаний, 2 изд, М, 1964

[4] Андронов, А А, Витт, А А, Хайкин, С Э, Теория колебаний, 2 изд, М, 1959 (中译本　А А 安德罗诺夫，А А 维特，С Э 哈依金，振动理论，科学出版社，上册 1973，下册 1974)

张鸿林 译

本征值 [eigen value, собственное значение]，域 k 上的向量空间 L 的算子(变换) A 的

k 中一个具有以下性质的元素 λ　存在非零向量 $x\in L$，使得

$$Ax=\lambda x,$$

向量 x 称为 A 的对应于本征值 λ 的一个**本征向量**(eigen vector). 在 A 是线性算子的情形，本征值就是这样的一个元素 $\lambda \in k$，使得 $A-\lambda I$ 不是单射，这里 I 是恒等算子 如果 L 是有限维空间，那么本征值就是**特征多项式**(characteristic polynomial) $\det\|\widetilde{A}-\lambda E\|$ (在 k 内)的根，这里 $\widetilde{A}$ 是 A 在某个基下的矩阵，E 是单位矩阵 作为这个多项式的一个根的本征值的重数称为它的代数重数(algebraic multiplicity) 对于一个代数闭域 k 上有限维向量空间的任意一个线性变换来说，本征值的集合是非空的 这两个条件，即维数有限和代数闭域，都是必要的 例如，Euclid 平面的一个旋转(这里 $k=\mathbf{R}$)，如果旋转的角度不能被 π 整除，就没有本征值 另外，对于一个 Hilbert 空间上与(单侧)移位共轭的算子来说，开单位圆盘的每一点都是本征值

有限维空间的一个线性变换的所有本征值的集合称为这个线性变换的谱(spectrum of the linear transformation). n 维空间的一个线性变换可以对角化(即存在一个基，使得对应的矩阵是对角形)，当且仅当每一个本征值的代数重数等于它的几何重数(geometric multiplicity)，即等于对应于这个本征值的本征空间的维数(见**本征向量**(eigen vector)) 特别，如果一个线性变换有 n 个互不相同的本征值，那么它是可对角化的

域 k 上一个方阵 A 的本征值(eigen value of a square matrix)(即 a 的特征根)是它的特征多项式的一个根

参考文献见**线性变换**(linear transformation)，**矩阵**(matrix) Т С Пиголкина, В С Шульман 撰

【补注】 另外的参考文献见**本征向量**(eigen vector)

郝钢新 译

微分算子的本征值，数值方法 [eigen values of differential operators, numerical methods, собственные значения дифференциальных операторов]

计算微分算子的本征值及对应的本征函数的方法 有界弹性体的振动由方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = L\varphi \tag{1}$$

来描述，其中 $L\varphi$ 是某个微分表示式 如果我们寻求(1)的形如

$$\varphi = T(t)u(x)$$

的解，那么在一个有界域内，在边界上一定的齐次条件下，得到以下关于 u 的方程

$$L(u) + \lambda u = 0 \tag{2}$$

对于参数 λ 的一些值，若(2)存在满足齐次边界条件的非零解，则这些值称为本征值(eigen values)，而对应的解称为本征函数(eigen functions) 于是所述微分算子的本征值问题，便由确定本征值 λ 以及与之相应的本征函数构成(见[1]，[2])

这个问题的数值解分三步进行

1) 将问题化为较简单的情形，例如，化为代数(离散的)问题(见[7]，[16])，

2) 该离散问题精确的描述，

3) 该离散问题本征值的计算(见[3]，[6] 及**线性代数中的数值方法**(linear algebra, numerical method in))

化为离散问题 将问题(2)化为一个离散模型，通常运用**网格法**(grid method)及**投影法**(projection methods)来进行 自然要求在离散的模拟中能保留原问题的基本性质，如算子的自共轭性

约化的一个方法是积分插值法(integro-interpolation method) 例如，考虑问题

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{p(x)}\frac{du}{dx}\right] + \lambda u = 0,\ 0 < x < 1, \tag{3}$$

$$u(0) = 0,\ u(1) = 0 \tag{4}$$

这个问题，例如说，是在研究非均匀弦的横向振动以及非均匀杆的纵向振动中出现的.

在区间 $[0,1]$ 上，我们引进具有结点 $x_i = ih$，$i = 0, \ \ , N$，$h = 1/N$ 的均匀网格 $\overline{\omega}$ 对于每个结点 x_i，$i = 1, \ \ , N-1$，指定一个基本域 $S_i = \{x \ \ x_i - h/2 \leqslant x \leqslant x_i + h/2\}$ 在 S_i 上方程(3)的积分导致

$$\left.\begin{aligned} &\frac{w_{i-1/2} - w_{i+1/2}}{h} = \lambda \frac{1}{h}\int_{x_i - h/2}^{x_i + h/2} u\,dx, \\ &w_{i\pm 1/2} = \left[\frac{1}{p}\frac{du}{dx}\right]_{x = x_i \pm h/2} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

令

$$u = \text{常数} = u_i,\ x_i - h/2 \leqslant x \leqslant x_i + h/2\ ,$$

$$w = \text{常数} = w_{i-1/2},\ x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$$

那么

$$w_{i-1/2} = \frac{u_i - u_{i-1}}{ha_i}\ ,\ a_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)dx \tag{6}$$

将(6)代入(5)，得到

$$-\frac{1}{h}\left[\frac{v_{i+1} - v_i}{a_{i+1}h} - \frac{v_i - v_{i-1}}{a_i h}\right] = \lambda^h v_i,$$

$$i = 1, \ \ , N-1,$$

这里 v 是所述网格函数 边界条件 $v_0 = 0$，$v_N = 0$ 归结为一个代数本征值问题

$$Av=\lambda^h v, \tag{7}$$

其中 A 是一个 $n=N-1$ 阶的三对角对称矩阵．

当本征值问题能用变分问题描述时，则用**变分-差分法**（variational-difference method）将问题离散化．例如，问题（3),（4)的本征值是泛函

$$\frac{D[u]}{H[u]}, \quad D[u]=\int_0^1 \frac{1}{p(x)}\left[\frac{du}{dx}\right]^2 dx,$$

$$H[u]=\int_0^1 u^2 dx$$

的平稳值．将积分换成积分和而将导数换成差分关系，该泛函的离散模拟具有形式

$$\frac{D^h[v]}{H^h[v]}, \quad D^h[v]=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{a_i}\left[\frac{v_i-v_{i-1}}{h}\right]^2 h,$$

$$H^h[v]=\sum_{i=0}^{N} v_i^2 h,$$

其中 a_i 是系数 $p(x)$的差分模拟，它可用公式（6)来计算．问题（3),（4)的离散模拟由关于极值的必要条件得到

$$\frac{\partial}{\partial v_i}\left(D^h[v]-\lambda^h H^h[v]\right)=0, \quad i=1, \quad , N-1$$

再一次微分导至问题（7)（见[9])

化为离散问题的**投影差分法**（projection-difference method）构成如下．选择坐标函数的一个线性独立系 $\alpha_i (i=1, \quad ,n)$ 以及投影函数的一个线性独立系 $\beta_j (j=1, \quad ,n)$ 我们寻找形如

$$\widetilde{u}=\sum_{i=1}^{n} v_i \alpha_i$$

的近似本征函数．系数 v_i 以及近似本征值由条件

$$(L\widetilde{u}+\widetilde{\lambda}\widetilde{u}, \beta_j)=0, \quad j=1, \quad , n \tag{8}$$

决定，其中（,）是 Hilbert 空间中的标量积．当坐标系与投影系重合时，我们应谈到 Бубнов-Галеркин 法．此外，如果微分问题中的算子是自共轭的，则此方法称为 Raleigh-Ritz 法 特别地，对于问题（3),（4)，如果所有的 $\alpha_i=\beta_i$ 满足（4)，则条件（8)取如下形式

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^1\left[\frac{1}{p(x)}\frac{d\alpha_i}{dx}\frac{d\alpha_j}{dx}-\widetilde{\lambda}\alpha_i\alpha_j\right]dx=0, \tag{9}$$

为了简化代数问题的求导，我们选择一个几乎正交的函数系 α_i

通过取形如

$$\alpha_i(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant x_{i-1},\\ \dfrac{x-x_{i-1}}{h}, & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\\ \dfrac{x_{i+1}-x}{h}, & x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1},\\ 0, & x_{i+1}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

的函数作为坐标系及投影系，其中 $x_i=ih$，由（9）可得

$$\frac{v_i-v_{i-1}}{a_i h}-\frac{v_{i+1}-v_i}{a_{i+1}h}$$
$$-\lambda^h[(\rho v)_{i-1}+(\rho^* v)_i+(\rho v)_{i+1}]=0,$$

其中

$$a_i=\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{p(x)},$$

$$\rho^i=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\alpha_i\alpha_{i+1}dx, \quad \rho_i^*=\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\alpha_i^2 dx$$

这样，连同边界条件一起，我们得到一个广义本征值问题

$$Av=\lambda^h Dv, \quad h=\frac{1}{N}$$

其中 A 及 D 是 $n=N-1$ 阶的三对角对称矩阵

这些方法也产生了其他方程的离散模型 例如，对于一根杆有

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[k\frac{d^2u}{dx^2}\right]=\lambda ru,$$

对于一张薄膜有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k_1\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[k_2\frac{\partial u}{\partial y}\right]+\lambda ru=0,$$

而对于一张平板则有

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[k_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+k_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[k_{33}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right]+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[k_{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+k_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]=\lambda ru,$$

对应于 λ_k^h 的本征向量满足齐次代数方程组:

$$(A-\lambda_k^h E)v_k=0$$

寻找矩阵 A 的所有本征值及本征向量问题称为**本征值的完全问题**（complete problem of eigen values)，而寻找 A 的某些本征值的问题称为**本征值的部分问题**（partial problem of eigen values)

在对应于一个给定问题的代数组这一情形中，后一个问题出现最为频繁 由于 A 的本征值之间难以区分，应用传统解法就需要相当大的计算量．这种情形

下使用具有谱等价算子的修正梯度法(见[17]-[19])以及多重网格法是更加有效的(见[20])

参考文献

[1] Gould, S, Variational methods for eigenvalue problems, Univ Toronto Press, 1957

[2] Collatz, L, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Geest & Portig, 1949

[3] Фаддеев, Д К, Фаддеева, В Н, Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд, М - Л, 1963 (英译本 Faddeev, D K and Faddeeva, V N Computational methods of linear algebra, Freeman, 1963)

[4] Воеводин, В В, Численные методы алгебры Теории и алгорифмы, М, 1966

[5] Wilkinson, J H, The algebraic eigenvalue problem, Oxford Univ Press, 1969

[6] Parlett, B N, The symmetric eigenvalue problem, Prentice Hall, 1980

[7] Саульев, В К, 《Вычисл Математика》, 1 (1957), 87 - 115

[8] Тихонов, А Н, Самарский, А А, 《Ж вычисл матем и матем физ》, 1 (1961), 5, 784 - 805

[9] Самарский, А А, Введение в теорию разностных схем, М, 1971

[10] Хао Шоу, 《Ж вычисл матем и матем физ》, 3 (1963), 6, 1014 - 1031

[11] Приказчиков, В Г, 《Ж вычисл матем и матем физ,》 9 (1969), 2, 315 - 336

[12] Prikazchikov, V G, A difference eigenvalue problem for a second-order operator with mixed boundary conditions, USSR Comput Math Math Phys, 22 (1982), 3, 165 - 172

[13] Prikazchikov, V G and Khimich, A N, The eigenvalue difference problem for the fourth order elliptic operator with mixed boundary conditions, USSR comput Math Math Phys, 25 (1985), 5, 137 - 144

[14] Бублик, Б Н., Численное решение задач динамики пластин и оболочек, К, 1969

[15] Strang, G and Fix, G J, An analysis of the finite element method, Prentice Hall, 1973

[16] Ciarlet, Ph, The finite element method for elliptic problems, North-Holland, 1978

[17] Самокиш, Б А, 《Изв высш учебн заведений, Математика》, 5 (1958), 6, 105 - 114

[18] Дьяконов, Е Г, Орехов, М Ю, 《Матем заметки》, 27 (1980), 5, 795 - 812

[19] Prikazchikov, V G, Differentsial'nye Uravn, 22 (1986), 1268 - 1271

[20] Hackbusch, W, On the computation of approximate eigen values and eigen functions of elliptic operators of means of a multi-grid method, *SIAM J Num Anal* 16 (1979), 2, 201 - 215

В Г Приказчиков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bailey, P B, Gordon, M K and Shampine, L F, Automatic solution of the sturm-Liouville problem, *ACM Trans Math Software*, 4 (1978), 193-208

[A2] Kreiss, H O, Difference approximation for boundary and eigen values problems for ordinary differential equations, *Math Comp*, 26 (1972), 605 - 624

[A3] Bramley, J S and Dennis, S C R, The calculation of eigen-values for the stationary perturbation of Poiseuille flow using initial value methods, *Math Anal Appl*, 101 (1984), 30 - 38

王声望 译 郑维行 校

积分算子的本征值, 数值方法[eigen values of integral operators, numerical methods, собственные значения интегральных операторов, численные методы нахождения]

计算一个积分算子的完全谱或它的一部分(通常要求找出一个或两个具有最小或最大模的本征值)的数值方法

它常和寻找一个给定的积分算子的相应于所求本征值的本征函数,或更一般地根函数的数值逼近问题联系在一起,最重要的问题是寻找一个 Fredholm 线性积分算子(见 **Fredholm 算子** (Fredholm operator))的本征值(和本征函数)

确定 Fredholm 积分算子本征值的数值方法. 关于一个 Fredholm 积分算子的本征值和本征函数问题是求复数 λ 使积分方程

$$\lambda A\varphi=\lambda\int_D K(x,s)\varphi(s)ds=\varphi(x) \quad (1)$$

有一个非平凡解(在一给定的函数类中). 这里 $K(x,s)$ 是变量 x 和 s 的一个函数(或矩阵函数), 使以 K 为核的积分算子在给定的函数类上是一个 Fredholm 算子, 而 D 是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^m$ 中的一个区域. 这函数类可以是 D 上的连续函数空间 $C(D)$, D 上的平方可积函数空间 $L_2(D)$ 或其他的函数空间.

解本征值问题(1)的基本近似方法如下 取(1)中积分算子的一个近似(见 **Fredholm 方程, 数值方法** (Fredholm equation, numerical methods)), 例如, 把积分用下面的求积公式来代替

$$\int_D K(x,s)\varphi(s)ds \approx \sum_{i=1}^N a_i^{(N)}K(x,s_i)\varphi(s_i)=\widetilde{A}\varphi, \quad (2)$$

其中 s_i 是求积公式的结点而 $a_i^{(N)}$ 是它的权(见[3]-[5]).

代替(1), 考虑寻找某个与近似(2)有关的矩阵的本征值和对应的根空间, 即

$$\lambda\sum_{i=1}^N a_i^{(N)}K(s_j,s_i)\widetilde{\varphi}(s_i)=\widetilde{\varphi}(s_j),\ j=1,\ \ ,N. \quad (3)$$

为了解(3),能用任一种线性代数的方法去求本征值和本征向量，或更一般地，去求根空间（见**线性代数中的数值方法** (linear algebra, numerical methods in)）. 如果算子 A 和 $\widetilde{A}$ 在某种意义下相接近，那么代数问题 (3) 所得出的本征值和本征向量将接近于问题 (1) 的本征值和本征向量．代替 (2)，积分算子的其他近似也可应用，于是原先的问题 (1) 就化为类似于 (3) 的一个代数问题．问题 (1) 的解和问题 (3) 的解之间的距离的研究是用泛函分析的方法，它属于逼近方法的一般理论范畴．于是本征值问题 (1) 就成为寻找某一个作用在 Banach 空间 Φ 上的全连续算子 A 的本征值问题

$$\lambda A\varphi=\varphi \tag{4}$$

问题 (3) 是作为一个算子 $\widetilde{A}$ 的本征值问题来看待的，$\widetilde{A}$ 接近于 A，但一般而言它作用在另一个空间 $\widetilde{\Phi}$ 上 ($\widetilde{\Phi}$ 与 Φ 有关)

$$\lambda\widetilde{A}\widetilde{\varphi}=\widetilde{\varphi} \tag{5}$$

在逼近方法的一般理论中，能证明关于问题 (4) 和 (5) 的解的距离的各种定理．作为这样的例子，指出下列陈述．令 A_n 是作用在 Φ 上的一个算子序列且

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n-A\|=0,$$

则

$$\overline{\bigcup_n\sigma(A_n)}\supseteq\sigma(A),$$

其中 $\sigma(\cdot)$ 是对应的算子的谱．在这种情形每一个 $\widetilde{\Phi}$ 和 Φ 重合

关于逼近问题 (5) 和 (4) 的本征值和本征向量之间距离的大多数一般估计不是有效的　它们包含一些通常是未知的常量．这时为了控制精度，人们用一个逼近 (1) (或 (4)) 中所求的本征值 (向量) 的本征值 (向量) 序列. 这个序列的构造不宜直接用 (5) 中 $\widetilde{A}$ 的逐次改进来得到，因为这一过程会导致繁重的计算．人们代之以各种加细算法 (例如，用**扰动理论** (perturbation theory))．

广义本征值问题 (generalized eigen value problems)．在应用中也遇到比 (4) 更一般的问题，即寻找本征值型的临界参数．这样的问题能用以下抽象的形式来叙述．

人们必须去寻找使方程

$$A(\lambda,\varphi)=\varphi \tag{6}$$

关于 φ 有多于一个解的参数 λ 的值(其中 A 是 Banach 空间 Φ 上的一个非线性积分算子. 它依赖于复参数 λ)

在问题 (6) 中对 $\|\varphi\|$ 和 λ 可有进一步的限制(例如，仅要求满足条件 $|\lambda|\leqslant R$ 的那些 λ，其中 R 是给定的，且 $\|\varphi\|\leqslant R$)

问题 (6) 和非线性积分方程中关于分支点的各种问题密切相关．一个有趣的情形是 $A(\lambda,\varphi)$ 关于 φ 是线性的而 λ 不以数乘形式出现在这方程中．关于分支点的一般问题能化为这种情形．而且，线性算子 (1) 在圆盘 $|\lambda|\leqslant R$ 中 (R 固定) 的本征值问题可化为更一般的问题 (6)，其中算子 $A(\lambda,\varphi)$ 关于 φ 是线性的且有有限维的值域　实际上，令 $\hat{A}$ 是一个有退化核的积分算子且按范数接近于 A　$\|\hat{A}-A\|\leqslant\delta$　方程 (1) 能改写为

$$[E+\lambda(\hat{A}-A)]\varphi=\lambda\hat{A}\varphi$$

如果 $|\lambda|<1/\delta$，那么 $E+\lambda(\hat{A}-A)$ 是可逆的，且满足 $|\lambda|<1/\delta$ 的本征值能从关系式

$$Z=\lambda\hat{A}(E+\lambda(\hat{A}-A))^{-1}Z \tag{7}$$

中求出，其中 $Z=[E+\lambda(\hat{A}-A)]\varphi$．方程 (7) 等价于 (对 Z) 一个线性代数方程组．令其行列式等于零就获得一个以积分算子 (1) 的本征值为根的方程．如果 A 是 Banach 空间 Φ 上的一个全连续算子，它能用有有限维值域的算子按范数来逼近，那么以上的论述一般是成立的．构造 (7) 也可用来获得一个近似本征值 (和本征函数) 的改进．

一般问题 (6) 能用逼近 A 化为形如 (6) 的有限维问题，对此类型的更复杂问题可应用蒙特卡罗方法 (见 [7])．

参考文献

[1] Канторович, Л В , Крылов, В И , Приближенные методы высшего анализа, 5 изд , М -Л , 1962 (英译本 Kantorovich, L V and Krylov, V I , Approximate methods of higher analysis, Noordhoff, 1958)

[2] Красносельский, М А [и др], Приближенное решение операторных уравнений, М , 1969

[3] Березин, И С , Жидков, Н П , Методы вычислений, 2 изд , т 2, М , 1962 (英译本 Berezin, I S and Zhidkov, N P , Computing methods, Pergamon, 1973)

[4] Крылов, В И , Бобков, В В , Монастырный, П И , Вычислительные методы, т 2, М , 1977

[5] Мысовских, И П , 《Методы вычислений》, 1973, 8, 3－10

[6] Марчук, Г И , Лебедев, В И , Численные методы в теории переноса нейтронов, 2 изд , М , 1981 (英译本 Marchuk, G I and Lebedev, V I , Numerical methods in the theory of neutron transport, Harwood, 1986)

[7] Владимиров, В С , Соболь, И Н , 《Вычислительная математика》, 1958, 3, 130－137

А Б Бакушинский 撰

【补注】 "广义本征值问题" 也常称为 "非线性本征值问题" (non-linear eigen value problem)．此外，英文 "eigen value" 在文章中也称为 "characteristic va-

lue",然而"eigen value"常用于使方程 $A\varphi=\mu\varphi$ 有非平凡解的复数 μ

在很多用 A_n 逼近 A 的具体方法中，以上用的条件 $\lim_{n\to\infty}\|A_n-A\|=0$ 太强　代替这个条件可用条件 A_n 点态收敛于 A 且 $\{A_n\}$ 是集体紧的 (collectively compact)(即对所有的有界集 B, $\overline{\bigcup_{n\in N}A_n(B)}$ 是紧的)．在这格式中关于 A_n 的本征值收敛于 A 的本征值的结果可见 [A1] 的第 4 章

在西方文献中，关于这方面的文章的详目，例如，在 [A2] 的第 3 章和 [A3] 中给出

参考文献

[A1] Anselone, P M , Collectively compact operator approximation theory, Prentice Hall, 1971

[A2] Baker, C T H , The numerical treatment of integral equations, Clarendon Press, 1977

[A3] Chatelin, F , Spectral approximation of linear operators, Acad Press, 1983　　　陈一元 译　郑维行 校

本征向量 [eigen vector, собственный вектор]

域 k 上向量空间 L 的一个非零向量 x，它被作用在 L 上的算子 A 映成一个与它成比例的向量，即

$$Ax=\lambda x,\ \lambda\in k$$

系数 $\lambda\in k$ 称为 A 的一个**本征值** (eigen value)．

如果 A 是一个线性算子，则对应于一个本征值 λ 的一切本征向量连同零向量所组成的集合 L_λ 是一个线性子空间　它称为 A 的对应于本征值 λ 的本征空间 (eigen space)，并且与算子 $A-\lambda I$ 的核 $\ker(A-\lambda I)$ (即被这个算子映成 0 的向量的集合) 重合．如果 L 是一个拓扑向量空间而 A 是一个连续算子，则对于任意 λ 来说，L_λ 都是闭的．一般来说，本征空间不一定是有限维的，然而如果 A 是全连续的 (紧的)，则对任意非零的 λ 来说，L_λ 都是有限维的

实际上，对于无限维空间的算子来说，存在本征向量的情形是相当少的，虽然某些在应用上是重要的特殊算子 (例如，积分算子和微分算子) 常有一大族本征向量．

本征向量和本征空间概念的推广是所谓**根向量** (root vector) 和根子空间的概念．在 Hilbert 空间上的正规算子 (特别是自伴算子或酉算子) 的情形，每一个根向量都是一个本征向量，并且对应于不同的本征值的本征空间彼此正交

参考文献

[1] Yosida, K , Functional analysis, Springer, 1980, Chap 8, §1 (中译本　吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1981)

[2] Люстерник, Л А , Соболев, В И , Элементы функционального анализа, 2 изд , М , 1965 (中译本　Л А 刘斯铁尔尼克，В И 索伯列夫，泛函数分析概要，第二版，科学出版社，1985)

[3] Канторович, Л В , Акилов, Г П , Функциональный анализ, 2 изд , М , 1977 (中译本　Л В Канторович, Г П Акилов，泛函分析，上　下册，高等教育出版社，1982)　　Т С Пиголкина, В С Шульман 撰

【补注】 本征向量有时也称为特征向量 (characteristic vector)，本征元 (eigen element)，本征函数 (eigen function)，或固有向量 (proper vector)，根向量在西方文献里也常称为主向量 (principal vector)．[A1] 和 [A2] 是好的普通西文参考书．

在文献里存在广义本征向量 (generalized eigen vectors) (或非正常本征函数) 的各种多样的概念，例如，广义本征向量和本征函数展开 (eigen function expansion) 见 [A3] 和 [A4] 关于**装备 Hilbert 空间** (rigged Hilbert space) (Гельфанд 三元组 (Gelfand triple)) 的有关章节

参考文献

[A1] Dunford, N and Schwartz, J T , Linear operators, Spectral theory, 2, Interscience, 1963, Chap 10, §3

[A2] Tayler, A E and Lay, D C , Introduction to functional analysis, Wiley, 1980, Chap, 5

[A3] Gelfand, I M and Vilenkin, N Ya , Generalized functions, 4 Acad Press, 1944, Chap 1, §4 (译自俄文　中译本　И М 盖勒范德等，广义函数Ⅳ，科学出版社，1965)

[A4] Berezanskiĭ, Ju M , Expansion in eigen functions of selfadjoint operators, Amer Math Soc , 1968, Chapt 5, §2 (译自俄文)

[A5] Lang, S , Linear algebra, Addison - Wesley, 1973

郝钢新 译

程函方程 [eikonal equation, эйконала уравнение]

下面形式的偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x^i}\right)^2=\frac{1}{c^2(x^1,\ \ ,x^m)}$$

这里 m 是空间维数，c 是恒不为零的光滑函数　在应用中 c 是波传播的速度，而曲面 $\tau(x^1,\cdot,x^m)=$ 常数是波前集．射线 (见 **Fermat 原理** (Fermat principle)) 是程函方程的特征线．程函方程有一系列推广和类似．特别地，程函方程的一个推广是方程

$$H\left(x^1,\ \ ,x^m,\frac{\partial\tau}{\partial x^1},\ \ ,\frac{\partial\tau}{\partial x^m}\right)=1,$$

其中 H 是关于 $\frac{\partial\tau}{\partial x^1},\ \ ,\frac{\partial\tau}{\partial x^m}$ 的一次齐次函数，并满足某些附加的限制．程函方程的非定常类似

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+c(t,x^1,\ \ ,x^m)\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x^i}\right)^2}=0$$

有着重要意义．上面的方程是波动现象理论中所出现的弥散方程

$$-\frac{\partial\theta}{\partial t}=\omega(t,x^1,\quad,x^m,\theta_{x^1},\quad,\theta_{x^m})$$

的特殊情形．这里ω是一个给定的函数．

几何光学的数学理论可以看作程函方程理论．程函方程的所有形式都是一阶偏微分方程．程函方程的解可以有奇性　它们的理论是**可微映射的奇异性** (singularities of differentiable mappings) 理论的一部分 (亦见 **Hamilton-Jacobi理论** (Hamilton-Jacobi theory), **几何近似** (geometric approximation) 和**射线法** (ray method))

参考文献

[1] Бабич, В М, Булдырев, В С, Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М, 1972.

[2] Whitham, G B, Linear and nonlinear waves, Wiley, 1974 (中译本　G B 惠瑟姆，线性与非线性波，科学出版社，1986).

В М Бабич 撰

【补注】 几何光学理论的一个良好的叙述见 [A3]，几何光学和**伪微分算子** (pseudo-differential operator) 理论在 [A2] 中论述

参考文献

[A1] Garabedian, P R, Partial differential equations, Wiley, 1964

[A2] Taylor, M, Pseudodifferential operators, Princeton Univ Press, 1981

[A3] Kline, M and Kay, I W, Electromagnetic theory and geometrical optics, Interscience, 1965

[A4] Felsen, L B and Marcuvitz, N, Radiation and scattering of waves, Prentice Hall, 1973, sect 1 7

孙和生 译　陆柱家 校

Eilenberg-MacLane 空间 [Eilenberg-MacLane space, Эйленберга-Маклейна пространство]

空间 $K(\pi, n)$，它表示了函子 $X\to H^n(X;\pi)$，其中 n 为非负整数，π 是一个群，当 $n>1$ 时为交换群，$H^n(X,\pi)$ 为胞腔空间 X 的以 π 为系数的 n 维上同调群．对任何这样的 n 与 π，$K(\pi, n)$ 存在．

Eilenberg-MacLane 空间也可用下列条件刻画：当 $i=n$ 时，$\pi_i(K(\pi, n))=\pi$，当 $i\neq n$ 时，$\pi_i(K(\pi, n))=0$，其中 π_i 是第 i 个**同伦群** (homotopy group) 这样，$K(\pi, n)$ 就模于弱同伦等价而唯一确定．任何拓扑空间模于弱同伦等价可以分解为 Eilenberg-MacLane 空间的扭积 (见 **Постников 系统** (Postnikov system)) $K(\pi, 1)$ 的上同调群即群 π 的上同调群．Eilenberg-MacLane 空间为 Eilenberg-MacLane ([1]) 所引进

参考文献

[1A] Eilenberg, S and MacLane, S, Relations between homology and homotopy groups of spaces, *Ann of Math*, **46** (1945), 480-509

[1B] Eilenberg, S and MacLane, S, Relations between homology and homotopy groups of spaces II, *Ann of Math*, **51** (1950), 514-533

[2] Mosher, R E and Tangora, M C, Cohomology operations and applications in homotopy theory, Harper & Row, 1968

[3] Spanier, E H, Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966

Ю Б Рудяк 撰　孙以丰 译

Einstein方程 [Einstein equations, Эйнштейна уравнения], *引力场的*

广义相对论的基本方程　它们把描述引力场的时空连续统的度量张量和利用能量-动量张量描述的物质不同形式的物理特征联系起来

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=\frac{8\pi}{c^4}GT_{ik}.$$

这里 R_{ik} 是 **Ricci 张量** (Ricci tensor)，它可用度量张量 g_{ik} 来表示，$R=R_i^i$，T_{ik} 是能量-动量张量，c 是真空中光速，G 是引力常数

参考文献

[1] Ландау, Л Д и Лифшиц, Е М, Теория поля, 6 изд, М, 1973 (中译本　Л Д 朗道，Е М 栗弗席兹，场论，人民教育出版社，北京，1959).

Д Д Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Weinberg, S, Gravitation and cosmology, Wiley, 1972, Chapt 7

[A2] Wald, R M, General relativity, Univ Chicago Press, 1984, Chapt 4.

沈一兵 译

Einstein 法则 [Einstein rule, Эйнштейна правило]

以简略形式 (不带求和符号 Σ) 书写有限和的一种约定，其中每项包含求和指标两次·一次作为上指标，一次作为下指标　因此，和式 $\sum_{i=1}^n x^i e_i$ 和 $\sum_{i,j=1}^n x^i \cdot y^j a_{ij}$ 可分别写成 $x^i e_i$ 和 $x^i y^j a_{ij}$，这里 $1\leqslant i, j\leqslant n$　有时也不要求指标必须写在上、下不同的位置上．

这个法则是由 A Einstein (1916) 提出的．

Л П Купцов 撰

【补注】 也称为 Einstein 求和约定 (Einstein summation convention)，或简称求和约定 (summation convention) 这主要用在物理学和微分几何学中．　沈一兵 译

Einstein-Смолуховский 方程 [Einstein-Smoluchowski equation, Эйнштейна-Смолуховского уравнение]

一个关于转移概率密度函数 $P(t_0, x_0|t, x)$ 的积分方程

$$P(t_0, x_0|t, x) = \int P(t_0, x_0|t', x')P(t', x'|t, x)dx',$$

$$t_0 < t' < t, \int p(t_0, x_0|t, x)dx = 1$$

函数 $P(t_0, x_0 \mid t, x)$ 表示从时刻 t_0 处在 x_0 到时刻 t 处在点 x 的密度

函数 p 描述了一种无后效随机过程（**Марков 过程**（Markov process)） 它的一个特点是系统从 t_0 到 t 的演化与 t_0 时刻以前所经历的状态无关．这个方程是 Смолуховский 于 1906 年在用随机过程表示 **Brown 运动**（Brownian motion）时建立的，后经他本人和 A Einstein 发展 在文献中 Einstein-Смолуховский 方程被称为 **Колмогоров-Chapman 方程**（Kolmogorov-Chapman equation）

Brown 运动型过程的物理分析表明可以用时间间隔 $\Delta t = t - t_0$ 的函数 P 来描述此过程，Δt 大大地大于随机过程的相关时间（即使 $\Delta t \to 0$）而用此函数计算的矩

$$\overline{(x - x_0)^k} = M_k$$

必满足

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{M_k}{\Delta t} = 0, \ k \geqslant 3, \ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M_2}{\Delta t} \neq 0$$

在这种情形下，Einstein-Смолуховский方程化为一个抛物型线性微分方程，称为 **Fokker-Planck 方程**（Fokker-Planck equation）（见 **Колмогоров 方程**(Kolmogorov equation)，**扩散过程**（diffusion process)，其初始条件和边界条件根据所研究的特殊问题来选择

参考文献

[1] Эйнштейн, А, Смолуховский, М, броуновское движение, пер с нем, М-Л, 1936

[2] Chandrasekhar, S, Stochastic problems in physics and astronomy, *Rev Modern Physics*, **15** (1943), 1-89

[3] Kac, M, Probability and related topics in physical sciences, in *Proc summer sem Boulder, Col*, 1957, Interscience, **1** (1959), Chapt 4

И А Квасников 撰

【补注】 在英文文献中，关于 Марков 过程转移密度的链式方程通常称为 Chapman-Колмогоров 方程 它由 L Bachelier 于 1900 年引入，见 [A1] Einstein 和 Смолуховский 的最初工作和参考文献见 [A2] 中所转载的文集 Fokker-Planck 方程相应于 Колмогоров 向前微分方程，见 [A3]，§5 26 存在非 Марков 过程满足 Chapman-Колмогоров 方程，见 [A4]，第 15 章，13

参考文献

[A1] Levy, P, Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthier-Villars, 1965

[A2] Wax N (ed), Selected papers on noise and stochastic processes, Dover, reprint, 1954

[A3] Dynkin, E B, Markov processes, 1, Springer, 1965

[A4] Feller, W, An introduction to probability theory and its applications, 1, Wiley, 1966

[A5] Gihman, I I and Skorohod, A V, The theory of stochastic processes, II, Springer, 1975（中译本 И И 基赫曼和 А В 斯科罗霍德，随机过程论，第二卷，科学出版社，1986）

刘秀芳 译

弹性的数学理论 [**elasticity, mathematical theory of, упругости математическая теория**]

力学的一个分支，它研究在载荷作用下，处于静止或运动中的弹性体所产生的位移、形变和应力

物体中任一点处的应力用六个量即应力分量表示 正应力 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ 及切向应力 $\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$，其中 $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$，等等．物体中任一点处的变形也用 6 个量即变形分量表示 相对伸长 $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ 和相对错动 $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$，其中 $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$，等等

在线性弹性理论中，基本物理定律是广义 Hooke 定律（Hooke law)，根据此定律，正应力与变形成线性关系 对于各向同性物质而言，此关系取如下形式

$$\sigma_{xx} = 3\lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{xx}, \quad \sigma_{yy} = 3\lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{yy},$$

$$\sigma_{zz} = 3\lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{zz}, \tag{1}$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}, \ \sigma_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz}, \ \sigma_{zx} = 2\mu\varepsilon_{zx},$$

式中 $\varepsilon = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})/3$ 是（静水压力）变形的平均值，而 λ 和 $\mu = G$ 为 Lamé 常数（Lamé constants)．方程（1）可写为如下形式

$$\sigma_{xx} - \sigma = 2\mu(\varepsilon_{xx} - \varepsilon), \quad , \sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}, \quad , \tag{2}$$

$$\sigma = 3K\varepsilon,$$

式中 $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ 是（静水压力）应力的平均值，而 K 为整体压缩模量

对于各向异性材料来说，应力和变形分量之间的六个关系式取如下形式

$$\sigma_{xx} = c_{11}\varepsilon_{xx} + c_{12}\varepsilon_{yy} + c_{13}\varepsilon_{zz} + c_{14}\varepsilon_{xy} + c_{15}\varepsilon_{yz} + c_{16}\varepsilon_{zx},$$

上式中的 36 个系数 c_{ij} 称为弹性模量，其中 21 个是独立的，它们表示各向异性物质的弹性性质

关于平衡状态的弹性数学理论的要点是，已知外作用力（载荷）及所谓边界条件，就能够确定物体每一点处的应力分量，形变分量以及物体每一点处的位移向量分量 u_x, u_y, u_z，即确定这 15 个量作为物体上点的坐标 x, y, z 的函数 对此问题的求解从平衡微分方程开始

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} + \rho X = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}+\rho Y=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\rho Z=0,$$

式中 ρ 为材料密度，而 X, Y, Z 为作用在物体某一部分上的质量力（即重力）沿坐标轴的投影除以该部分的质量

与这三个平衡方程一起，在各向同性体的情况下，还有式 (1)的六个方程，以及在线性理论中取如下形式的六个方程

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x},\quad ,2\varepsilon_{xy}=\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x},\quad ,\qquad (4)$$

它们表示了形变与位移之间的依从关系

若在物体的一部分边界面 S_1 上给出面力（例如接触作用力），其在单位面积的坐标投影值为 F_x, F_y, F_z，而在 S_2 那部分表面上有给定的位移 $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$，那么边界条件有如下形式

$$\sigma_{xx}l_1+\sigma_{xy}l_2+\sigma_{xz}l_3=F_x \text{（在 } S_1 \text{ 上）},\qquad (5)$$

$$u_x=\varphi_x,\ u_y=\varphi_y,\ u_z=\varphi_z \text{（在 } S_2 \text{ 上）},\qquad (6)$$

式中 l_1, l_2, l_3 为表面法线和坐标轴之间夹角的余弦．第一个条件意味着欲求的应力必须满足边界 S_1 上的三个方程（5），而第二个条件是欲求的位移必须满足边界 S_2上的方程式（6），在特殊情况下，可有 $\varphi_x=\varphi_y=\varphi_z=0$（表示 S_2 部分是固定的）

在一般情况下，这里所提出的问题表现为空间问题，求解是很困难的　只有对某些问题才找到了精确的解析解，梁的弯曲和扭转，两个物体互相接触，应力集中，锥形体顶点有作用力的情况以及其他　因为弹性数学理论的方程是线性的，所以要解决两个力系同时作用的问题时，可用每个力系分别作用时的解答之和（线性叠加原理）．特别是，如果对某个物体，已经找到了在物体任意一点上作用一个集中力的解，那么通过求和（积分）就可求解任何分布载荷的问题．这样一个解，被称为 Green 函数，此解仅对少量物体可以得到（无界空间，半空间，有界平面以及其他一些）．对于求解空间数学弹性理论问题已经提出了若干解析方法　变分法（**Галеркин 法**（Galerkin method），**Ritz 法**（Ritz method）等），弹性**位势法**（potentials, method of）等　数值计算方法已经得到广泛发展（有限差分，有限元素法等等）．

对于平面问题的解（当位移分量中一个为零而其他两个只取决于两个坐标时），复变函数理论的方法得到了广泛应用　对于在工程技术中常用的杆、板和壳，在简化假设的基础上，已经找到了许多有重要实际意义问题的近似解（见**弹性理论的平面问题**（elasticity theory, planar problem of），**壳体理论**（shell theory））

在热弹性问题中，应力和变形的确定起源于温度的非均匀分布　为了陈述这一问题，在（1)式的前三个方程式右边增加附加项一（$3\lambda+2\mu)\alpha T$，此处 α 为线性热膨胀系数，而 $T(x_1, x_2, x_3)$ 为给定的温度场　以类似的方式，可以建立一个电磁 - 弹性理论和承受辐射的弹性理论．最有实际兴趣的在于非均匀体的数学弹性理论问题　对于这样的物体，(1) 式中的系数 λ 和 μ 不再是常数，而是决定物体弹性性质场坐标的函数，此弹性性质场有时根据统计给出（以某种分布函数的形式）　与这些问题相关，数学弹性理论的统计方法也得到了发展，反映出了用统计方法确定多晶体性质的途径

在弹性理论的动力学方程式中，应力和位移是坐标和时间的函数　为了得到这些问题的数学解，先要建立运动微分方程，此方程式的右边不同于方程式(3)，包含惯性项等而不是零

线性弹性数学理论（在形式上）只产生无限小的位移和变形，它可被推广到非线性弹性理论，其中式(1) 和 / 或者式 (4)是非线性的　此理论建立了求解有限（大）弹性变形的方法

参考文献

[1] Love, A E H , A treatise on the mathematical theory of elasticity, Dover, reprint, 1944
[2] Лейбензон, Л С , Курс теории упругости, 2 изд , М -Л , 1947
[3] Мусхелишвили, Н И , Некоторые основные задачи математической теории упругости, 5 изд , М , 1966 (中译本 Н И 穆斯赫利什维里，数学弹性力学的几个基本问题，科学出版社，1958)
[4] Трехмерные задачи математической теории упругости, Тб , 1968
[5] Лурье, А И , Теория упругости, М , 1970
[6] Strutt, J W [Lord Rayleigh], The theory of sound, Dover, reprint, 1945
[7] The theory of temperature displacement, Moscow, 1964 (译自英文)
[8] Sneddon, I N and Berry, D S , Classical theory of elasticity, Handbuch der Physik, 6, Springer, 1958
[9] Timoshenko, S P and Goodier, J N , Theory of elasticity, McGraw-Hill, 1970

取自 БС Э-3 的相应条目

【补注】

参考文献

[A1] Szabo, I , Hohere Technische Mechanik, Springer, 1964
[A2] Fung, Y C , Foundations of solid mechanics, Prentice-Hall, 1965
[A3] Pearson, C E , Theoretical elasticity, Harvard Univ Press, 1959

[A4] Sokolnikoff, V V , Mathematical theory of elasticity, McGraw-Hill, 1956
[A5] Solomon L , Elasticite lineaire, Masson, 1968
[A6] Green A E and Zerna, W , Theoretical elasticity, Clarendon Press, 1968
韩耀新 译

弹性理论的平面问题 [elasticity theory, planar problem of, плоская задача теории упругости]

下述一类问题的总称 对这类问题来说，在弹性体内与一个确定平面(例如 Descartes 坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 中的 Ox_1x_2 平面) 相平行的所有平面上，物理现象都是相同的 这类平面问题的数学理论通常也描述具有空间特性的问题 (例如，薄板的弯曲)

弹性理论中的平面问题主要是靠把解答表达为含单复变量的解析函数而发展起来的 这些公式首先是由 Г К Колосов ([1]) 在 1909 年导出的，但从 19 世纪 20 年代之后 Н И Мусхелишвили 的论文为这些公式奠定了基础．它们被用于发展求解弹性理论中的许多边值问题及平面接触问题的理论 在平面问题中所得到的理论结果已被应用于实际中

位移场和应力场的复数表达式 如果存在一个 Descartes 坐标系 $Ox_1x_2x_3$，相对于此坐标系的位移矢量的分量取如下形式

$$u_\alpha = u_\alpha(x_1, x_2, t),\ \alpha = 1, 2,\quad u_3 = 0,$$

此处 t 为时间，那么就说此弹性介质处于平面形变状态 其应力向量的分量为

$$X_{\alpha\beta} = \lambda\theta\delta_{\alpha\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta},\ X_{\alpha 3} = 0,\ X_{33} = \lambda\theta,$$

其中 λ 和 μ 为 Lame 常数 (Lamé constants)，$\delta_{\alpha\beta}$ 为 Kronecker 符号，而 $e_{\alpha\beta}$ 为形变张量分量 $e_{\alpha\beta} = \partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha$，$\theta = e_{\alpha\alpha} = \partial_\alpha u_\alpha$ 为体积膨胀 ($\alpha, \beta = 1, 2$，两个相同下标的出现表示求和)

一个弹性圆柱，其母线垂直于 Ox_1x_2 平面，若其体积力分量为 $X_\alpha = X_\alpha(x_1, x_2, t)$, $X_3 = 0$，且横向力与 x_3 坐标无关且位于垂直于圆柱轴线的平面内，则可能发生平面形变 为了使弹性圆柱产生平面形变，必须在其两端施加法向力 $\pm\lambda\theta$

在这些假设前提下，用位移向量的分量表示的弹性体的动力学方程如下

$$\mu\Delta u_\alpha + (\lambda + \mu)\partial_\alpha\theta + X_\alpha = \rho u_\alpha,\ \alpha = 1, 2,$$

式中 ρ 为质量密度，ρu_α 为惯性力，而 Δ 为 Laplace 算子 (Laplace operator) 如果使用复数微分算子 $2\partial_{\bar z} = \partial_1 + i\partial_2$, $2\partial_z = \partial_1 - i\partial_2$ ($\partial_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$)，那么在无惯性力 (静力学问题) 的情况下，此系统可写为单个的 (复变) 方程

$$(\lambda + 3\mu)\partial_{z\bar z} u + (\lambda + \mu)\partial_{\bar z\bar z}\bar u + X = 0,$$

其中

$$u = u_1 + iu_2,\quad X = 2^{-1}(X_1 + iX_2)$$

令弹性体所占据的区域 S 为 Ox_1x_2 平面的一个连通域，它由一条或多条没有公共点的轮廓线 L_0, , L_m 所围成，令 $L = L_0 + \quad + L_m$ 为 S 的边界，点 $z = 0$ 属于 S

平衡方程的解用 $u = u_0 + TX$ 表示，此处 TX 为某个特解，可表为如下形式

$$TX = -\kappa\frac{1}{\mu\pi(1+\kappa)}\iint X(\zeta)\ln|\zeta - Z|d\zeta_1 d\zeta_2| +$$

$$+\frac{1}{2\mu\pi(1+\kappa)}\iint\overline{X}(\zeta - z)\frac{1}{\bar\zeta - \bar z}d\zeta_1\zeta_2,$$

u_0 为齐次方程 ($X = 0$) 的一般解，表示为

$$u_0 = K(\varphi, \psi, \kappa) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)},$$

式中 φ 和 ψ 为 S 内 $z = x_1 + ix_2$ 的任意解析函数 ($\kappa = 3 - 4\sigma$，此处 σ 为 Poisson 常数, $0 < \sigma < 0\ 5$) 如果 X 为 x 和 y 的多项式，那么就可能以显式表示 TX

如果函数 φ 和 ψ 受到条件 $\varphi(0) = 0$ 或 $\psi(0) = 0$ 的限制，那么算子 $K(\varphi, \psi, \kappa)$ 并不改变 如果其中一个条件得到满足，那么就能给出在 S 内相应于一对确定的解析函数 φ 和 ψ 的位移场 $u = u_1 + iu_2$

如果用 $\kappa^* = (3 - \sigma)/(1 + \sigma)$ 取代上式中的常数 κ，那么就得到广义平面应力状态的一个位移场公式

应力张量分量的复数形式为

$$x_{\alpha\alpha} = 2(\lambda + \mu)(\partial_z u + \partial_{\bar z} u),$$

$$X_{11} - X_{22} + 2iX_{12} = 4\mu\partial_{\bar z} u,$$

根据等式

$$u = K(\varphi, \psi, \kappa) + Tx,$$

它取为如下形式

$$X_{\alpha\alpha} = 4\operatorname{Re}\Phi(z) + T_0 X,$$

$$T_{11} - T_{22} + 2iX_{12} = -2(z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}) + T_1 X,$$

其中

$$T_0 = 4(\lambda + \mu)\operatorname{Re}\partial_z TX,\ T_1 X = 4\mu\partial_{\bar z} TX,$$

$$\Phi(z) = \varphi'(z),\ \Psi(z) = \psi'(z)$$

使弹性体经受连续的形变，那么可以假设，在 S 内应力和位移矢量分量是连续单值函数，Φ 和 Ψ 在 S 内是解析的，其中 Φ 受到 $\Phi'(0) = \overline{\Phi'(0)}$ 的限制

如果 S 为一个有界的单连通域，并且形变是连续的，那么函数 φ 和 ψ 在 S 内是解析的 在有界的多连通域的情况下，一般来说，φ 和 ψ 将是某种特定形式的多值函数

弹性平面理论中的基本问题

1) 第一类基本问题 当给定边界力时，确定物体的弹性平衡

作用在法线为 n 的一小段周线 L 上的应力 (X_n, Y_n) 可以写为复数形式

$$(X_n + iY_n)ds = -2i\mu d(\varphi(z) + \overline{z\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}),$$

第一类问题边界条件取如下形式

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) + c(t),\ t \in L, \quad (1)$$

其中

$$f(t) = \frac{i}{2\mu}\int_L (X_n + iY_n)ds,$$

此外，在每条 L_k 上，弧段 s 从某个固定点 $z_k \in L_k$ 沿其正方向计算，在 L_k 上，$c(t) = c_k =$ 常数 总是可以假定 $c_0 = 0$，而其他常数 c_k 则在解题过程中来确定 如果 $m = 0$，φ 和 ψ 就是 S 上的解析函数．于是方程 $\varphi(0) = 0$ 和 $\mathrm{Im}\,\varphi'(0) = 0$ 就保证了(1)式解的唯一性 而解存在的必要与充分条件

$$\int_L (X_n + iY_n)ds = 0,$$

$$2\mu\int_L (x_1 Y_n + x_2 X_n)ds - \mathrm{Re}\int_L f\overline{dt} = 0,$$

也就是绝对刚体静力平衡条件

如果 $m > 0$，那么正如已经指出的那样，φ 和 ψ 为一特殊形式的多值函数，它们可用新的未知函数 φ^* 和 ψ^* 表示，φ^* 和 ψ^* 在 S 内是解析的

2) 第二类基本问题 根据边界点上的给定位移来确定物体的弹性平衡

这类问题用如下的边界条件

$$\kappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = f(t), \quad t \in L,$$

其中 $f = u_1 + iu_2$ 为在 L 上的给定函数

3) 混合基本问题 令 S 为由封闭周线围成的有限单连域，使 $L = L' + L''$，其中 L' 由 L 的有限个弧段 $L_1, \quad, L_m$ 所组成，它们当中的任何两个都没有公共点，在 L' 上给出外力，而在 L'' 上给定位移 相应的边界条件可写为

$$\gamma(t)\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) + c(t),\ t \in L,$$

其中 f 为点 $t \in L$ 的给定函数，如果 $t \in L'$，$\gamma(t) = 1$，如果 $t \in L''$，$\gamma(t) = -\kappa$，如果 $t \in L'$，$c(t) = c_k =$ 常数，如果 $t \in L'$，$c(t) = 0$ 常数 c_k 不可以任意选择，预先并不给出，而是在问题解决的过程中才能确定

4) 第三类基本问题 在域边界上给定位移矢量的法向分量和外力矢量的切向分量

举例来说，这类问题出现在弹性体与给定形状的刚性轮廓线相接触时．此时，弹性体和刚体在整个边界上发生接触 其他类型的接触问题也遇到过．所有这些问题均导致解析函数的边值问题．

5) 薄板弯曲的边值问题 在薄板弯曲时出现类似的边值条件 当一块均匀弹性薄板受到沿其表面作用的强度为 q 的法向分布载荷时，其中面挠度 w 满足下列非齐次双调和方程

$$\Delta\Delta w = \frac{q}{D},$$

式中 $D = Eh^3/12(1-\sigma^2)$ 为圆柱刚度，h 为板厚，而 E 为 Young 模量，这个方程的通解为

$$w = w_0 + \widetilde{T}q,$$

式中 $\widetilde{T}q$ 为一特解，可用下式表示，

$$\widetilde{T}q = \frac{1}{8\pi D}\iint q(\zeta)|\zeta - t|^2 \ln|\zeta - z|d\zeta_1 d\zeta_2|,$$

而 w_0 为齐次双调和方程

$$\Delta\Delta w_0 = 0$$

的通解

$$w_0 = \mathrm{Re}(\bar{z}\,\Phi(z) + \Psi(z)),$$

此处 Φ 和 Ψ 均为 S 内的任意解析函数．

如果 q 为 x_1 和 x_2 的多项式，那么 $\widetilde{T}q$ 可以表示为显式 如果 $\Phi(0) = 0$, $\Psi(0) = 0$, $\Phi'(0) = \overline{\Phi'(0)}$，那么 Φ 和 Ψ 可用给定的双调和函数 w_0 唯一地表示出来

方程 $\Delta\Delta w = q/D$ 的解 w，依赖于由板边界特定的夹持方式所对应的边界条件 在板边界夹紧的情况下，在中面所占据的域 S 的边界 L 上，应满足 $w = dw/dn = 0$ 的条件，此处 n 为 L 的外法向 这两个条件可并入单个的方程 $\partial_{\bar{z}} w = 0$（在 L 上） 后者引出式(1)

这个问题的解总是存在的，解是唯一的，并由下式给出

$$w(x_1, x_2) = = \frac{1}{D}\iint_S G(x_1, x_2, \zeta_1, \zeta_2)q(\zeta_1, \zeta_2)d\zeta_1 d\zeta_2,$$

式中 G 为 Green 函数 对于圆盘，$|z| < 1$，

$$G(x_1, x_2, \zeta_1, \zeta_2) = 2|\zeta - z|^2 \ln\frac{|1 - z\bar{\zeta}|}{|\zeta - z|} - -(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2),$$

$$Z = x + ix_2,\ \zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$$

在板是自由的情况下，边界条件取如下形式

$$\left.\begin{aligned}&\sigma\Delta w+(1-\sigma)(w_{x_1x_2}\cos^2 v+w_{x_2x_2}\sin^2 v+\\&\qquad+w_{x_1x_2}\sin 2v)=0,\\&\frac{d\Delta w}{dn}+(1-\sigma)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}(w_{x_1x_2}-w_{x_1x_1})\sin 2v+\right.\\&\qquad\left.+w_{x_1x_2}\cos 2v\right)=0,\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

式中 v 为外法线 n 与 x_1 轴构成的角度 (2)式的左边分别为单位长度的弯矩和广义剪力，它们作用在法向为 n 的板的侧向微元上 边界条件 (2)可以写为

$$d\left[\frac{3+\sigma}{1-\sigma}\Phi-z\overline{\Phi'}-\overline{\Psi'}\right]=g,$$

式中 g 为 L 上的一个给定函数．

6) 平面稳态弹性振动 此时要求寻找形如下式的弹性体动力学方程的解

$$u=v(x_1, x_2)e^{i\nu t},\quad u_3=0,$$

式中 ν 为振荡频率，得出它的公式为

$$v=\partial_{\bar z}(w_1+iw_2)$$

(假设外力为零，$X_\alpha=0$)，式中 w_1 和 w_2 为下述方程的任意解

$$\Delta w_1+a^2\nu^2 w_1=0,\ \Delta w_2+b^2\nu^2 w_2=0,$$

$$a^2=\rho\frac{1}{\lambda+2\mu},\quad b^2=\frac{\rho}{\mu}$$

应力场表示为

$$X_{11}+X_{22}=-(\lambda+\mu)a^2\nu^2 w_1,$$

$$X_{11}-X_{22}+2iX_{12}=4\mu\partial_{\bar z}^2(w_1+iw_2),$$

$$X_{33}=-2^{-1}a^2\nu^2 w_1$$

对方程

$$\Delta w+k^2w=0,\ k^2=\text{常数}$$

的一般解为

$$w=A_0J_0(k|z|)+$$
$$+\int_0^1\mathrm{Re}[z\Phi(zt)]J_0(k|z|\sqrt{1-t})dt,\qquad(3)$$

式中 A_0 为一个实常数，Φ 为一个任意函数，而 J_0 为零阶的第一类 Bessel 函数 从 (3)式可以导出弹性体平面稳态振动的位移场和应力场 这些可用于考查边值问题，还可以构造特解的种种完整系统，能够逼近任意的位移场和应力场．尤其是，这些完整系统可用来构造边值问题的近似解

7) 在各向异性或各向同性的板中确定孔边应力集中问题．求解这类问题的近似方法的基础仍然是引入一个复变函数，它具有幂级数这样的特殊结构，再加上**扰动理论** (perturbation theory) 的各种修正，并使用附加圆柱函数与球函数的原理，而后将边值问题减缩为代数方程的无穷系统

求解边值问题的方法．利用解析函数表示位移和应力场的公式用来证明一般边值问题解的存在和唯一性，并构造对具有特定形式的某类问题显式解答．

幂级数法再加上保角映射可以用来求解一些域上的基本平面问题，这些域可以用有理函数保角地映射为一个圆盘．然后，此问题被简化为线性代数方程组和求积分 若用有理函数作近似保角映射将域变为圆盘，则此方法可用来求解任何单连域上的基本边值问题 对弹性理论中的平面问题和对板的弯曲而言，当使用计算机时，此技术对构造基本边值问题的解是有效的．

Cauchy 型积分理论已被用于将平面问题简化为已充分研究过的积分方程

保角映射和 Cauchy 型积分相结合的方法也是有用的．

还有另外一些方法能把弹性平面理论中的边值问题简化为积分方程，从而能够考察存在和唯一性．

势能法也用于弹性平面理论的边值问题，而不需要引入解析函数 φ 和 ψ

参考文献

[1] Колосов, Г В, Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости, Юрьев, 1909

[2] Колосов, Г В, Применение комплексных диаграмм и теории функций комплексной переменной к теории упругости, Л -М, 1935

[3] Мусхелишвили, Н И, Некоторые основные задачи математической теории упругости, 5 изд, М, 1968 (中译本 Н И 穆斯赫利什维里，数学弹性力学的几个基本问题，科学出版社，1958)

[4] Мусхелишвили, Н И, Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд, М, 1968 (中译本 Н И 穆斯海里什维里，奇异积分方程，上海科学技术出版社，1966)

[5] Векуа, И Н, Мусхелишвили, Н И, Методы теории аналитических функций в теории упругости, в кн Тр Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике (1960), М -Л, 1962

[6] Векуа, И Н, Новые методы решения эллиптических уравнений, М -Л, 1948 (英译本 Vekua, I N, New methods for solving elliptic equations, North-Holland, 1967)

[7] Савин, Г Н, Концентрация напряжений около отверстий, М -Л, 1951 (中译本 Г Н 萨文，孔附近的应力集中，科学出版社，1958)

[8] Галин, Л А, Контактные задачи теории упругости, М, 1953 (中译本 Л А 加林，弹性理论的接触问题，

科学出版社，1958)
[9] Штаерман, И Я, Контактная задача теории упругости М -Л, 1949
[10] Каландия, А И, Математические методы двумерной упругости, М, 1973
[11] Sokolnikoff, I S (I S Sokolnikov), Mathematical theory of elasticity McGraw-Hill, 1946
[12] Трехмерные задачи математической теории упругости, Т6, 1968
И Н Векуа, Р А Кордзадзе 撰

【补注】

参考文献

[A1] England, A H Complex variable methods in elasticity, Wiley (Interscience), 1971
[A2] Milne-Thomson, J M, Plane elastic systems, Springer, 1960
[A3] Milne-Thomson, J M, Antiplane elastic systems, Springer, 1962
韩耀新 译

最佳逼近元素 [element of best approximation, наилучшего приближения элемент]

一个给定集合 F 内的元素 u_0 若满足

$$\rho(x,u_0)=\inf\{\rho(x,u)\ u\in F\},$$

就称为度量空间 X 内元素 x 的**最佳逼近** (best approximation) 元素

这是**最佳逼近多项式** (polynomial of best approximation) 这一经典概念的一种推广 涉及最佳逼近元素的主要问题是 它们的存在性及唯一性，它们的特征性质 (见 **Чебышев 定理** (Chebyshev theorem))，使每个元素 $x\in X$ 对应于最佳逼近元素集合的算子的性质 (见**度量射影** (metric projection)，**逼近紧集** (approximately-compact set))，以及构作最佳逼近元素的数值方法

Ю Н Субботин 撰 孙永生 译 葛显良 校

初等 Abel 群 [elementary Abelian group, элементарная Абелева группа]

一个**Abel 群** (Abelian group)，其所有非平凡元素都是同一素数 p 阶的

О А Иванова 撰 石生明 译 许以超 校

初等算术 [elementary arithmetic, элементарная арифметика]

同形式算术 (arithmetic, formal)

初等公理系统 [elementary axiom system, элементарная система аксиом]

仅用狭义谓词演算的语言 (即一阶语言) 写出的公理系统．初等公理系统的例子有**形式算术** (arithmetic, formal)，集合论的 Zermelo-Fraenkel 系统 (见**公理集合论** (axiomatic set theory))，以及类型论系统 (见**类型论** (types, theory of))．

В Н Гришин 撰 卢景波 译

初等因子 [elementary divisors, элементарные делители]，多项式环 $k[x]$ 上的矩阵 $F(x)$ 的

由 $F(x)$ 的不变因子在域 k 上分解出的首一不可约多项式的幂 $k[x]$ 上两个具有相同的秩的 $m\times n$ 矩阵是等价的 (即彼此可以通过初等变换得到)，当且仅当它们具有相同的初等因子组

域 k 上一个 $n\times n$ 矩阵 A 的*初等因子*定义为它的特征矩阵 $\|xE_n-A\|$ 的初等因子．它们可以按以下方式得到 令 $D_l(x)$ 是矩阵 $\|xE_n-A\|$ 的 l 阶子式的最大公因子，$1\leqslant l\leqslant n$，并且令 $D_0(x)=1$ 那么 $\|xE_n-A\|$ 的不变因子是

$$\iota_l(x)=\frac{D_l(x)}{D_{l-1}(x)},\quad l=1,\quad ,n$$

那些不等于 1 的因子 $\iota_l(x)$ 在 $k[x]\backslash k$ 内 它们中的每一个都可以表示成

$$\iota_l(x)=(p_1(x))^{m_1}\quad (p_t(x))^{m_t},$$

这里 $p_i(x)$ 是 k 上首一不可约多项式，$m_i>0$，并且当 $i\neq j$ 时 $p_i(x)\neq p_j(x)$ 如此得到的所有多项式 $(p(x))^m$ 组成 A 的初等因子组 一个域上两个方阵相似，当且仅当它们具有相同的初等因子组 域上一个方阵所有初等因子的乘积就是它的特征多项式，而它们的最小公倍式是它的极小多项式 任何一组形如 $l_i(x)=g_i(x)^{m_i}$ 的多项式，这里 $g_i(x)$ 是 k 上首一不可约多项式，都是 k 上唯一一个 n 阶相似矩阵类的初等因子组，这里 n 是这些 $l_i(x)$ 的乘积的次数．

如果 k 是 A 的特征多项式的一个分裂域，那么初等因子就有形状 $(x-\lambda)^m$，它们的个数等于 A 的 Jordan 形式中 Jordan 块的个数，初等因子 $(x-\lambda)^m$ 对应于一个 m 阶 Jordan 块 $J_m(\lambda)$ (见 **Jordan 矩阵** (Jordan matrix)) 域 k 上一个方阵与一个对角形矩阵相似，当且仅当它的每一个初等因子都有形状 $x-\lambda$，这里 $\lambda\in k$

Д А Супруненко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Jacobson, N, Lectures in abstract algebra, II Linear algebra, v Nostrand, 1953 (中译本 N 贾柯勃逊，抽象代数学，第二卷，科学出版社，1987)
[A2] Jacobson, N, Basic algebra, I, Freeman, 1974 (中译本 N 贾柯勃逊，基础代数 I，高等教育出版社，一分册，1987)
郝钠新 译

基本事件 [elementary events, элементарное событие]

概率模型的一个最初的概念 在概率空间（Ω，𝒜，P）的定义中，非空集Ω被称为基本事件空间，任意点 $\omega \in \Omega$ 是一个基本事件（elementary event） 以非形式的观点，Ω表示某一随机试验所有结果的集合，而一个基本事件 ω 对应于一个基本结果 试验以一个且只有一个结果结束，这些结果是不可分解且互相排斥的 在基本事件 ω(Ω 中的一个点）和事件 $\{\omega\}$（某一事件类 𝒜 的元）之间有着基本的区别 见**概率论**（probability theory），**概率空间**（probability space），**随机事件**（random event） А В Прохоров 撰 刘秀芳 译

基本流 [**elementary flow，простейший поток**]

一个随机时刻序列 $0<\tau_1<\tau_2<\cdots$，在每个时刻，事件流的事件发生（例如，电话交换台收到的呼叫流），差 $\tau_{i+1}-\tau_i$ 满足独立性条件且具有同样的指数分布．具有分布

$$F(x)=\mathrm{P}(\tau_{i+1}-\tau_i\leqslant x)=1-e^{-\lambda x},\ x\geqslant 0 \quad (*)$$

的基本流是更新过程（见**更新理论**（renewal theory）的特殊情形．对应一个基本流，有一个 **Poisson 过程**（Poisson process）$\xi(t)$，它等于在时间间隔（0，t]内流的事件数．一个基本流及其相应的 Poisson 过程满足下述条件

平稳性（stationarity） 对任意 $0<t_0$，$0<t_1<\cdots<t_k$，随机变量

$$\xi(t_l+t_0)-\xi(t_{l-1}+t_0),\ l=2,\ \cdots,k,$$

的分布不依赖于 t_0

有秩序性（orderliness） 当 $t\to 0$ 时，在时间间隔（t，$t+\Delta t$]内发生两个或两个以上流的事件的概率等于 $o(\Delta t)$

无记忆性（lack of memory） 对于 $0\leqslant t_1<\cdots<t_n$，随机变量 $\xi(t_i)-\xi(t_{i-1})$（$i=1,\ \cdots,n$）是独立的．

在这些情况和条件

$$\mathrm{P}\{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)=1\}=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

下，这个流是具有指数分布（*）的基本流

参考文献

[1] Хинчин, А Я , Работы по математической теории массового обслуживания, М 1963（中译本 А Я 欣钦，公用事业理论的数学方法，科学出版社，1958）

Б А Севастьянов 撰 刘秀芳 译

初等函数 [**elementary functions，элементарные функции**]

由**多项式**（polynomial）、指数函数（见**实指数函数**（exponential function，real））、**对数函数**（logarithmic function）、**三角函数**（trigonometric functions）、**反三角函数**（inverse trigonometric functions）、以及由这些函数进行有限次算术四则运算和叠加（即构成**复合函数**（composite function））所得到的函数组成的函数类 初等函数类已被充分研究，并在数学中最常出现．但是，在许多问题中需要考察的函数并不是初等函数（例如，见**特殊函数**（special functions）） 初等函数的导数也是初等函数，初等函数的不定积分不总能用初等函数来表示 在研究非初等函数时，可以借助于无穷级数或无穷乘积等把它们用初等函数来表示．

БСЭ-3 张鸿林 译

基本区间 [**elementary interval，простой интервал**]，偏序集的

两个元素 $a\leqslant b$ 所组成的一个子集，使得在此偏序集中不再有其他元素位于它们之间，即

$$a\leqslant x\leqslant b\Rightarrow a=x \text{ 或 } b=x$$

О А Иванова 撰

【补注】 基本区间也称为间隙（gaps）或原子区间（atomic intervals）

关于 **R** 内的基本区间见**区间和线段**（interval and segment），**闭区间**（interval，closed），**开区间**（interval，open） 盛以中 译

初等数论 [**elementary number theory，элементарная теория чисел**]

数论（number theory）的一个分支，用初等方法研究整数的性质 这些方法包括利用整除性质，各种形式的归纳公理，以及组合论证等 有时，初等方法的含义可以扩展为一些最简单的数学分析知识 习惯上，涉及复数的证明被认为是非初等的。

通常，人们将产生于数论的这样一些部分的问题归事于初等数论，例如，整除理论，同余理论，算术函数理论，不定方程，分拆理论，加性表示，有理逼近及连分数．解决这些问题常常会超出初等方法的范围．但有时在发现了某个问题的非初等解法之后，也找到了它的初等解法

初等数论中的问题的历史总是可以追溯到好多个世纪以前，而且它们经常是数论和代数的近代发展方向的源泉

从保存下来的古代巴比伦楔形文字泥板，可以推断巴比伦人已经能够熟练地把自然数分解成素因数的乘积 在公元前5世纪，Pythagoras 学派建立了所谓奇偶数原则并证明了命题 两个自然数的乘积是偶数，当且仅当其中至少有一个是偶数．整除的一般理论本质上是由 Euclid 建立的 在《原本》（Elements）（公元前3世纪）一书中，Euclid 给出了求两个整数的最大公约数的算法，并在此基础上，他证明了关于整数的

算术的主要定理 每个自然数可以用唯一的方式表为若干个素因数的乘积。

自C F Gauss 于19世纪初创立了复整数的整除理论之后，人们才清楚地认识到，任意环（ring）的研究必须从建立它的整除理论开始

整数的所有性质总是以这种或那种方式与**素数**（prime number）相联系 因此，素数在自然数列中的分布问题引起了学者们的兴趣 Euclid 第一个证明素数集合是无限的 只是到了19世纪中叶，П Л Чебышев 才在对函数 $\pi(x)$——不超过 x 的素数个数——的研究中跨出了有意义的下一步 他成功地用初等方法证明了不等式

$$0\ 92129\frac{x}{\ln x}<\pi(x)<1\ 10555\quad\frac{x}{\ln x}$$

对所有充分大的 x 成立．事实上，$\pi(x)\sim x/\ln x$，但是，这一结论直到19世纪末才被用复分析方法所证明．在很长的一段时间里，都认为这一结论是不能用初等方法得到的 然而，1949年 A Selberg 给出了这个定理的一个初等证明 Чебышев 也证明了 对 $n\geqslant 2$，在区间 $(n, 2n)$内至少有一个素数 对这种至少包含一个素数的区间的进一步改进，需要对函数 $\pi(x)$ 的性质作更为深刻的研究．

在公元前3世纪，就曾利用 **Eratosthenes 筛法**（Eratosthenes, sieve of ）从自然数集合中挑选出素数．1918年 V Brun 指出 这个方法的一种变形能够作为研究由"殆素数（almost prime numbers）"组成的集合的基础 他证明了关于孪生素数的 **Brun 定理**（Brun theorem） **Brun 筛法**（Brun sieve）是一般**筛法**（sieve method）的一种特殊情形，筛法是用以给出不超过 x 且属于一个整数列 $\{a_n\}$ 的殆素数的个数估计的一类方法 能够利用筛法的条件，是要求属于这个整数列的 $a_n\leqslant x$ 在算术级数中的分布在（对公差的）平均的意义下（其公差的取值范围随 x 的增长而增长）有一个"好的"逼近．在 Brun 之后发展起来的筛法中，**Selberg 筛法**（Selberg sieve）具有特别重要的意义 最强的结果是由筛法和分析方法相结合而得到的 筛法与 **Шнирельман 法**（Shnirel'man method）相结合就能够有效地求出正整数 k，使得每个自然数 $n\geqslant 4$ 可表为不超过 k 个素数的和．

两个整数 a 和 b 称为同余于模 $m(\geqslant 1)$，如果它们被 m 除后有相同的余数 Gauss（在1801年）引进了同余符号 $a\equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ 这种写法的形式导致同余与相等在形式上的相似性 事实证明，在同余理论的发展中这是合适与有帮助的．（见**同余式**（congruence））

利用同余理论的语言可以简洁地表述和证明早先由 P Fermat，L Euler，J L Lagrange 及其他人所得到的许多结果，以及**孙子剩余定理**（Chinese remainder theorem） 这一理论的最有趣的结果之一是**二次互反律**（quadratic reciprocity law）

古巴比伦人就知道许多"Pythagoras 三元数组"．显然，他们已经知道去寻求不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 的任意多组整数解的某种方法 Pythagoras 学派利用公式 $x=(a^2-1)/2$, $y=a$, $z=(a^2+1)/2$ 去求这个不定方程的解 Euclid 指出了一个方法可用以依次求出不定方程 $x^2-2y^2=1$（**Pell 方程**（Pell equation）的一个特例）的整数解 Diophantus（公元前3世纪）在他的《算术（Arithmetika）》一书中企图去建立一个不定方程的理论（见 **Diophantus 方程**（Diophantine equations）） 特别地，对于解二次和某些高次方程，他系统地利用一种方法，能够从给定的方程的一组有理解出发去求出它的另一组有理解．Fermat（17世纪）发现了另一种方法——"下降法（method of descent）"，并利用这种方法解出了一些不定方程．但是，他所宣称已经解决的 **Fermat 大定理**（Fermat great theorem）已经超越初等方法所能解决的范围。

Fermat 解决了表自然数为两个整数的平方和的问题．作为 Lagrange（1773）和 Gauss（1801）的研究工作的一个结果，解决了用正定**二元二次型**（binary quadratic form）表示整数的问题．Gauss 发展了二元二次型的一般理论 用高次型表整数（例如 **Waring 问题**（Waring problem））及用多元二次型表整数等问题的解决通常是超出了初等方法的范围．只是这些问题中的某些特殊情形才能够用初等方法来解决．这样的一个例子是 Lagrange 定理（Lagrange theorem） 每个自然数是四个整数的平方和 应该指出的是，Diophantus 在他的《算术》（Arithmetika）一书中反复利用了表自然数为四个整数的平方和的可能性．

分拆理论也属于初等数论，它的基础由 Euler（在1751年）奠定．分拆理论的基本问题之一是研究函数 $P(n)$ 自然数 n 表为若干个自然数之和的所有可能的表法（不计被加项的次序）的个数 在分拆理论中也讨论其他类似形式的函数 **连分数**（continued fraction）的出现与近似计算有关（求自然数的平方根，寻找小分母的普通分数来近似实数） 连分数可以用来求解一次和二次不定方程 J. Lambert（1766）第一个用连分数证明了 π 是无理数．除了连分数之外，在初等数论中也利用 **Dirichlet 原理**（Dirichlet principle）来解决用有理数逼近实数的各种问题

在数论中容易提出许多可以初等地表述的问题，但至今还不能解决．例如 偶完满数组成的集合是有限的还是无限的？有没有奇完满数？Fermat 素数组成的集合是有限的还是无限的？Mersenne 素数（见 **Mersenne 数**（Mersenne number））组成的集合是有限的还是无限的？形如 n_2+1 的素数组成的集合是有限的还是

无限的？两个相邻的自然数的平方之间至少有一个素数这一结论正确吗？由 $2^{1/3}$ 的连分数展开式的不完全分数组成的集合是有界的还是无界的？

参考文献

[1] Венков, Б А, Элементарная теория чисел, М - Л, 1937（英译本 Venkóv, B A, Elementary number theory, Wolters-Noodhoff, 1970）

[2] Виноградов, И М, Основы теория чисел, 9 изд, М, 1981（中译本 И М 维诺格拉陀夫，数论基础，商务印书馆，1952）

[3] Гельфонд, А О, Линник, Ю В, Элементарные методы в аналитической теории чисел, М, 1962.（英译本 Gel'fond, A O, Linnik, Yu V, Elementary methods in the analytic theory of numbers, M I T, 1966）

[4] Хинчин, А Я, Цепные дроби, 4 изд, М, 1978.

[5] Gauss, C F, Disquisitiones arithmeticae, Teubner, 1801（英译本 Gauss, C F, Disquitiones arithmeticae, Yale Univ Press, 1966）

[6] Davenport, H, The higher arithmetic, Hutchinson, 1952

[7] Трост, Э, Простые числа, М, 1959（译自德文）.

[8] Andrews, G, Theory of partitions, Addison-Wesley, 1976

[9] История математики, т 1-3, М, 1970-1972

[10] Wieleitner, H, Geschichte der Mathematik, De Gruyter, 1923

[11] Dickson, L E, History of the theory of numbers, 1-3, Chelsea, reprint, 1971

[12] Hardy, G H, Wright, E M, An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ Press, 1979

[13] Sierpiński, W, Elementary theory of numbers, PWN, 1964（译自波兰文）

[14] Ireland, K and Rosen, M, A classical introduction to modern number theory, Springer, 1982

А А Бухштаб В И Нечаев 撰

【补注】 文献[5]的英译本见[A1].

上面提到的 Чебышев 的结果亦见 **Чебышев 定理（关于素数的）**(Chebyshev theorems (on prime numbers))

Pythagoras 三元组（Pythagorean triple）是指满足 $a^2+b^2=c^2$ 的自然数组成的三元组 (a, b, c)（亦见 **Pythagoras 数**（Pythagorean numbers）.

关于用特殊的（二次）型表自然数的问题亦见**二次型**（quadratic form），**Goldbach 问题**（Goldbach problem） 更多形式的分拆可在**组合分析**（combinatorial analysis）中找到

关于在本条目结尾所提出的那些问题亦见**完满数**（perfect number），**素数**（prime number），**孪生素数**（twins）

Fermat 数（Fermat number）是 **Mersenne 数**（Mersenne number）的特殊情况，它们具有形式 2^n-1，其中 n 本身具有形式 2^m，这里 n, m 是自然数.

参考文献

[A1] Gauss, C F, Disquisitiones arithmeticae, Yale Univ Press, 1966（译自拉丁文）

[A2] Shanks, D, Solved and unsolved problem in number theory, Chelsea, reprint, 1978

[A3] Weil, A, Number theory, Birkhauser, 1984

潘承彪 译 戚鸣皋 校

初等理论 [**elementary theory**, **элементарная теория**]

一阶谓词逻辑的一集闭公式 符号集 Ω 上代数系统（algebraic system）的一个类 K 的初等理论 $\mathrm{Th}(K)$ 定义为在 K 的所有系统中都真的，符号集 Ω 上的一阶逻辑的全体闭公式的集．如果 K 由单个系统 A 组成，则 K 这个类的初等理论就是系统 A 的初等理论 同一符号集的两个代数系统称为初等等价的（elementarily equivalent），如果它们的初等理论相同．符号集 Ω 的一个代数系统 A 称为 Ω 上初等理论 T 的模型（model of an elementary theory）如果 T 的所有公式在 A 中都真．一个初等理论称为相容的（consistent），如果它有模型 一个相容理论称为完全的（complete），如果它的任意两个模型都初等等价．一个初等理论 T 的所有模型的类记作 $\mathrm{Mod}(T)$ 一个初等理论 T 称为可解的（或可判定的），如果公式集 $\mathrm{ThMod}(T)$（即 T 的所有逻辑推论的集合）是递归的．符号集 Ω 的代数系统的类 K 称为可公理化的（axiomatizable），如果存在 Ω 的一个初等理论 T 使 $K=\mathrm{Mod}(T)$ 这时 T 称为 K 的一个公理集（collection of axioms） 类 K 是可公理化的，当且仅当 $K=\mathrm{Mod\,Th}(K)$ 例如，没有最小元或最大元的稠密线性序的类是可公理化的，它的初等理论是可解的，并且这个类的任意两个系统都是初等等价的，因为这个类的初等理论是完全的，此外，它的初等理论还是有限可公理化的．有限循环群的类不是可公理化的，然而，它的初等理论倒是可解的，因此是递归可公理化的．存在有限可公理化而不可解的初等理论的例子．其中包括群、环、域等的初等理论．不过，完全的递归可公理化的初等理论必定是可解的 因此，要证明一个递归可公理化的初等理论是可解的，只要证明它是完全的．

已经知道有几种方法可以证明完全性．一个初等理论称为对基数 α 范畴性（见**对于基数的范畴性**（categoricity in cardinality）） 如果它的基数为 α 的所有模型都同构．对某个无穷基数范畴并且没有有限模型的初等理论必定是完全的 例如，特征一定的代数闭域的初等理论是递归可公理化的，且对每个不可数基数范畴，它没有有限模型，从而它是完全的，可解的．特别，复数域的初等理论是可解的 与理论 T 同属一个符号集的两个公式称为对理论 T 等价的．如果这两个公式含有相同的变元，并且对 T 的任意一个模型 A，以 A 的任意元素作公式中自由变元的指派时，这两个

公式都同真或同假 有限或可数符号集的一个完全初等理论是可数地范畴的当且仅当对每个 n 都存在有限多个含有 n 个自由变元 v_1, , v_n 的公式，使这个符号集中以 v_1, , v_n 为自由变元的每个公式都对 T 等价于这有限多个公式中的一个 有限或可数符号集的一个完全理论对一个不可数基数范畴也就对其他任意一个不可数基数范畴 符号集 Ω 的一个系统 A 称为这一符号集的另一系统 B 的初等子系统 (elementary subsystem)，如果 A 是 B 的子系统并且对 Ω 的以 v_1, , v_n 为自由变元的每个一阶谓词逻辑公式 $\Phi(v_1, \quad, v_n)$ 以及任意的 $a_1, \quad, a_n \in A$, $\Phi(a_1, \quad, a_n)$ 在 A 中真就在 B 中真. 一个初等理论 T 称为模型完全的 (model complete) 如果对 T 的任意两个模型 A 和 B，只要 A 是 B 的子系统就是初等子系统 由此可得出，一个模型完全的理论，如果它有一个模型可以同构嵌入它的每个模型，则这个理论就是完全的 同一符号集的两个系统，若满足同样的不含存在量词的前束公式，就称为全称等价的 (universally equivalent) 所有模型都全称等价的模型完全理论是完全理论 运用模型完全性的技巧可以证明实闭域，特别是实数域，具有完全的可解的初等理论. 其他可解初等理论中还有自然数和整数加法的理论，Abel 群的理论，p 进数域，有限域，剩余类域，Abel序群以及 Bool 代数等的初等理论.

A Tarski 于 20 世纪 40 年代开始对不可解初等理论进行全面的研究 但更早些，1936 年，A Church 就证明了一阶谓词逻辑的不可解性 也是在 1936 年，J Rosser 证明了自然数的算术的不可解性 同一符号集 Ω 的代数系统的一个类 K 的初等理论 Th (K) 称为不可分的 (inseparable)，如果不存在一个递归公式集只包含 Th(K) 而不包含在 K 的所有系统中都假的任何闭公式. 只有一个二元关系谓词组成的符号集 $\langle P^{(2)} \rangle$ 的系统类 K_1 的初等理论称为在符号集 Ω_2 的系统类 K_2 的初等理论中相对可定义的 (relatively definable)，如果存在 Ω_2 的公式 $\Phi(v_0, u_1, \quad, u_s)$ 和 $\psi(v_1, v_2, u_1, \quad, u_s)$ 使得对 K_1 中每个系统 A_1 都可以找到 K_2 中一个系统 A_2 以及 A_2 的元素 $b_1, \quad, b_s$，使集合 $X = \{x \in A_2 \quad \Phi(x, b_1, \quad, b_s)$ 在 A_2 中真$\}$，连同谓词 $P^{(2)}$ 在 X 上所作的如下解释，定义 $P^{(2)}(x, y)$ 真当且仅当 $\Psi(x, y, b_1, \quad, b_s)$ 在 A_2 中真，构成的代数系统与 A_1 同构. 这个定义可以自然地推广到任意的符号集的类 K_1 的理论. 如果一个类 K_1 的初等理论是不可分的并且在类 K_2 的初等理论中相对可定义，则 K_2 也是不可分的 这就使得有可能证明许多代数系统类的初等理论是不可分的. 这时，为了方便，可以取一切有限二元关系的初等理论，或一切有限对称关系的初等理论，或类似的初等理论作为 Th (K_1) 不可分初等理论是不可解的. 有理数域的初等理论，以及许多类环和域的初等理论都是不可解的 有限群的初等理论的不可解性是 A И Мальцев 的一个重要结果.

参考文献

[1] Ершов, Ю Л, [идр] 《Успехи матем наук》, 1965, т 20, в 4, с, 37 – 108

[2] Ершов, Ю Л, Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М, 1980

Ю Л М А Тайцлин 撰

【补注】 比较更一般地，人们宁愿定义一对理论的递归可分性和不可分性，而不是定义单个理论的可分性和不可分性. 两个不相交的自然数集 A, B 称为递归可分的 (recursively separable)，如果存在一个递归集 A_1，A_1 包含 A 而与 B 不相交. 这当然是一个对称的概念. 称集合 A 和 B(递归) 不可分 ((recursively) inseparable)，如果它们不是递归可分的. 把这个定义应用到可驳和可证公式集 R 和 T，或更准确地说是应用到它们的 Godel 配数集 R^* 和 T^* 就得到单个理论的不可分性的定义

参考文献

[A1] Chang, C C and Keisler, H J, Model theory, North Holland, 1973, 2nd ed 1977, 3rd ed, 1989

[A2] Smullyan, R M, Theory of formal systems, Princeton Univ Press, 1961, Chapt, III

沈复兴 译

Euclid 的《几何原本》[Elements of Euclid，《Начала》Евклида]

写于公元前三世纪的一本科学著作，它囊括古代数学的基础 初等几何、数论、代数、比例的一般理论，以及计算面积和体积的方法，其中含有初等的极限理论. Euclid 的《几何原本》构成一个典型的演绎系统 其中含有几何的最初命题与其他一些数学分支. 在此基础上，整个理论严密地、逻辑地发展起来.

《几何原本》采用的格式在 Euclid 以前已经形成，并曾在 Aristotle 的文章中扼要阐述 首先引入定义、公设和公理，然后叙述定理的正文及其证明. 《几何原本》除定理外，还含有用作图法和算术方法解决的问题. 在定义基本的几何概念和对象后，Euclid 利用作图法证明其他对象 (例如等边三角形) 的存在，他提出这些是以五条公设为基础 这些公设说明下面的初等作图法是可行的 1) 过两点可画一条直线，2) 直线段可无限延伸，3) 以一已知点为圆心，可作一个给定半径的圆，4) 所有的直角皆相等 (藉此保证一条直线的延长是唯一的)，5) 若同一平面上的两条直线都与第三条直线相交，并在第三条直线的一侧两内角之和小于两直角之和，则前面两条直线无限延长后，将在该侧相交 除第四公设已被过两点只有一条直线代替外，所有这些公设都在现代几何基础教程中作为公理保留下来. 第五公设的命运特别有趣. 古代就有证明它的企图 直到 И Лобачевский 造出第

一个非 Euclid 几何系统，这个企图才终止 在此系统里，第五公设不成立（见 **Лобачевский 几何学**（Lobachevskiĭ geometry）） 继这些公设之后，Euclid 又列出了几条公理——等量和不等量相互关系的命题 1）等于同量的量恒相等，2）等量加等量仍为等量，3）等量减等量其余量仍相等，4）彼此间可重合的量是相等的，5）整体大于它的任何部分（在《几何原本》的有些版本内，还外加4条公理）

Euclid 的《几何原本》由十三册（节或部分）组成 第一册讨论三角形、矩形与平行四边形的基本性质，并比较它们的面积 这一册以 Pythagoras 定理作为末尾．第二册介绍的或许可称为几何代数，即将能化为二次方程的问题以几何作图为手段来解决 具体做法是用线段表示量，用面积表示两个量的乘积．《几何原本》内没有代数符号 第三册讨论圆的性质，圆的切线和弦（在公元前5世纪后半叶，希俄斯岛的 Hippocrates 已经研究过这些问题） 第四册研究正多边形．在第五册内，Euclid 介绍比例的一般理论，它是公元前4世纪尼多斯城的 Eudoxus 创建的 然而在逻辑完全性方面 Euclid 的描述不同于前人，并且基本上与 Dedekind 分割理论等价，而后者是通向严密的实数定义的途径之一 比例的一般理论为相似理论（第六册）和穷举法（第十二册）提供了基础，这两者可追溯到 Eudoxus 的工作 第七、八、九册介绍数论初步，是以算术中求最大公约数的算法为基础 在这几册书中，人们会发现整除性的理论，其中包括整数分解成素因子的唯一性定理，素数有无穷多的事实（见 **Euclid 素数定理**（Euclidean prime number theorem））以及整数的商的构造理论，这本质上等价于有理数论 在此基础上，第十册给出二次无理性和四次无理性的分类，以及处理它们的某些规则的根据 第十册的结果用在第十三册中借以确定五个正则多面体的棱．第十册和第十三册(也许还有第七册)相当多的一部分是 Theaetetus 在公元前4世纪初写成的 第十一册包含立体几何初步 第十二册利用**穷竭法**(exhaustion, method of)确定两个圆盘面积之比，以及两个棱锥、两个棱柱、两个圆锥和两个圆柱各自体积之比 这些定理是 Eudoxus 最先证明的 最后，在第十三册内，Euclid 确定两个球的体积之比．构造五种正多面体，并且证明只有这五种**正多面体**（regular polyhedra） 第十四、十五两册不是 Euclid 写的，而是后来的希腊数学家添写的．尽管直到今天，这两册常与《几何原本》的基本内容印在一起，可是其内容无多大科学价值

在古代，Euclid 的《几何原本》就很著名 Archimedes、佩尔格的 Appollonius，以及其他学者在他们自己的数学和力学研究工作中均以此书为依据 大约在第8世纪末和第9世纪初，它的阿拉伯文译本就已出现 它最初的拉丁文本是12世纪初从阿拉伯文译来的．古代《几何原本》的各次教学用版本都出现不少更改，并非照印原书 Euclid 的《几何原本》的拉丁文译本是1482年第一次出版的，并在页边上绘有插图．J L Heiberg 的5卷版本（1883—1888）堪称为最好的版本，其中既有希腊原文，又有拉丁译文 下列俄文译本是可找到的 И Асторов 译的《Euclid 原本》，由 А Фархварсон 教授删节（8册，1739年译自拉丁文），Н Курганов 译的《Euclid 几何原本》（8册，1769年译自法文），П Суворов 和 В Никитин 合译的《Euclid 原本》（8册，1－6，11，12，1784年译自希腊文），Ф Петрушевский 译的《Euclid 几何原本 8册，前六册，第十一册，和包含有几何基础的第十二册》（1819年译自希腊文），Ф Петрушевский 译的《Euclid 原本 3册 第七、八、九册，包括古几何学家关于数的一般理论》（1835年译自希腊文），М Е Ващенко-Захарченко 译的《Euclid 原本》（1880），Д Д Мордухай-Болговский 译的《Euclid 原本》（3卷，1948－1950，译自希腊文）

БСЭ-2

【补注】 亦见**几何基础**（foundations of geometry）

现在人们认识到《几何原本》并不真正是一个演绎系统．实际上，该书本来就无此意图

Pythagoras 定理（Pythagoras théorem）当然是众所周知的 一个平面直角三角形斜边长的平方等于此三角形另两边长度的平方和（亦见 **Pythagoras 数**（Pythagoras numbers））

求两个自然数最大公约数的算法也称为 **Euclid 算法**（Euclidean algorithm） 关于 Euclid **第五公设**（fifth postulate）的历史，亦可参看[A5]．

参考文献

[A1] Heath, Sir Th L, The elements of Euclid, Dent, 1933

[A2] Heath, Th L, The thirteen books of Euclid s elements, Cambrige Univ Press, 1926, Dover, reprint, 1956

[A3] Greenberg, M, Euclidean and non-Euclidean geometry, Freeman, 1974

[A4] Choquet, G Geometry in a modern setting, Kershaw, 1969

[A5] Bonola, R, Non-Euclidean geometry, Dover, reprint, 1955（译自意大利文） 马传渔 译 黄正中 校

消元理论 [elimination theory, исключения теория]

由代数方程组消去未知量的理论．更确切地说，设给定一个方程组

$$f_i(x_1, \cdots, x_n)=0, \quad i=1, \cdots, m, \tag{1}$$

这里 f_i 是系数在一个给定域 P 内的多项式 由（1）消去 $x_1, \cdots, x_k$ 的问题（消元理论中的非齐次问题）可

以陈述如下．求 (1) 的解集在 x_{k+1}， ，x_n 的坐标空间上的投影 如果所有方程关于变量 x_1， ，x_k 都是齐次的，也可以考虑消元理论中的齐次问题（在这一情形非齐次问题是平凡的） 求 (1) 的未知量 x_1， ，x_k 不全为零的解集在 x_{k+1}， ，x_n 的坐标空间上的投影

非齐次问题也可以看作寻求代数方程组的系数所满足的条件以保证这个方程组是相容的，而齐次问题就是寻求齐次代数方程组的系数所满足的条件以保证这个方程组有非零解．

消元理论的基本结果是 如果 P 是一个代数闭域，那么齐次问题的解是一个代数集（algebraic set），即是一个代数方程组的解集，而非齐次问题的解是一个在代数几何学意义下的**可构造集**（constructible set），即是有限个形如 $M\backslash N$ 的集合的并集，这里 M 和 N 都是代数集．在某些最简单的情形，消元理论中问题的显式解已经知道

1) 考虑关于 x_1， ，x_k 是线性齐次的方程组，即如下形式的方程组

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j=0,\ i=1,\ \ ,m, \tag{2}$$

这里 a_{ij} 是 x_{k+1}， ，x_n 的多项式 对于 x_{k+1}， ，x_n 给定的值来说，方程组 (2) 有非零解，当且仅当矩阵 $A=(a_{ij})$ 的秩小于 k（见**线性方程**（linear equation）） 这时齐次问题的解是 x_{k+1}， ，x_n 的坐标空间中由 A 的一切 k 阶子式等于 0 所刻画的集

2) 考虑关于 x_1， ，x_k 是线性的方程组 即如下形式的方程组

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j=b_i,\ i=1,\ \ ,m, \tag{3}$$

这里 a_{ij}，b_i 都是 x_{k+1}， ，x_n 的多项式 令 $\widetilde{A}$ 是由 $A=(a_{ij})$ 增加一列 (b_i) 所得到的矩阵 对于 x_{k+1}， ，x_n 给定的值，方程组 (3) 相容，当且仅当 $\widetilde{A}$ 的秩等于 A 的秩 因此由 (3) 消去 x_1， ，x_k 的结果是

$$\bigcup_{r=0}^{k} M_r\backslash N_r,$$

这里 M_r 是这样的点（x_{k+1}， ，x_n）的集合，在这些点上 $\widetilde{A}$ 的秩至多等于 r，而 N_r 是这样的点的集合，在这些点上 A 的秩小于 r（M_r 和 N_r 都是代数集）

3) 设 $k=2$ 令 P 是一个代数闭域 考虑关于 x_1, x_2 是齐次的两个方程的方程组

$$\begin{aligned} a_0x_1^n+a_1x_1^{n-1}x_2+\ \ +a_nx_2^n=0,\\ b_0x_1^m+b_1x_1^{m-1}x_2+\ \ +b_mx_2^m=0, \end{aligned} \tag{4}$$

这里 a_0， ，a_n，b_0， ，b_m 是 x_3， ，x_n 的多项式 对于 x_3， ，x_n 的给定的值，方程组 (4) 有非零解，当且仅当**结式**（resultant）R 等于零 这里 R 由

$$R(a_0,\ \ ,a_n,b_0,\ \ ,b_m)=$$

$$=\begin{vmatrix} a_0 & & a_{n-1} & a_n & & \\ & & & & & \\ & & a_0 & & a_{n-1} & a_n \\ b_0 & & b_{m-1} & b_m & & \\ & & & & & \\ & & b_0 & & b_{m-1} & b_m \end{vmatrix}$$

给出（a_0， ，a_n 有 m 行，b_0， ，b_m 有 n 行） 这也给出齐次问题在所考虑的情形的一个解．

4) 设 $k=1$，令 P 是一个代数闭域 考虑两个方程的方程组

$$\begin{aligned} a_0x_1^n+a_1x_1^{n-1}+\ \ +a_n=0,\\ b_0x_1^m+b_1x_1^{m-1}+\ \ +b_m=0, \end{aligned} \tag{5}$$

这里 a_0， ，a_n，b_0， ，b_m 是 x_2， ，x_n 的多项式 对于 x_2， ，x_n 的给定的值，且在这些值上 a_0 或 b_0 不为零，(5) 是相容组，当且仅当

$$R(a_0,\cdot\ ,a_n,b_0,\ \cdot,b_m)=0$$

如果 $a_0=b_0=0$，就必须考虑

$$R(a_1,\ \ ,a_n,b_1,\ \ ,b_m),$$

等等，这就使得由 (5) 消去 x_1 的结果可以明显地描述出来

由任意代数方程组消去未知量可以利用下述“初等变换”逐步地进行（即先消去一个未知量，再消去第二个，等等）．因为消去一个未知量以后得到的是一个可构造集而不一定是代数集，所以必须考虑将 P^n 中任意一个可构造集投射到 x_2， ，x_n 的坐标空间上的问题．

每一个可构造集 $X\subset P^n$ 可以表示成为若干代数方程组和代数不等式组的解集的并（一个代数不等式具有形式 $f(x_1,\ \ ,x_n)\neq 0$，这里 f 是一个多项式）．这样一些方程组和不等式组的集合的初等变换是下列变换之一 在一个组里，用一个多项式乘一个方程加到另一个方程上，在含有一个不等式 $f\neq 0$ 的组里，用 f 去乘一个方程，在一个组里，用一个多项式乘一个方程加到一个不等式上，把一个组分成两个组，分别是由加进方程 $f=0$ 和加进不等式 $f\neq 0$ 而确定的（f 是任意一个多项式），或者，在一个组里，将两个不等式代以它们的乘积

初等变换不改变原来那些方程与不等式组的解集的并集 通过施行初等变换，任何一个关于未知量 x_1， ，x_n 的代数方程组和不等式组的集合都可以化简为如下形式，在其中每一组至多包含一个含有 x_1 的方程或不等式，而且，与方程 $f=0$ 或不等式 $f\neq 0$ 一起，不等式 $f_0\neq 0$ 也包含在内，这里 f_0 是一个关于 x_2， ，x_n 的多项式，它是把 f 展成关于 x_1 的多项式的首项系数 如

果 P 是一个代数闭域，那么在这些组里，去掉如此得到的关于 x_1 的方程和不等式，就得到一个关于 x_2, ，x_n 的代数方程组和代数不等式组的集合．这就给出集合 X 在 x_2, ，x_n 的坐标空间上的投影．

利用初等变换依次消去未知量，在原则上可以把解 n 个未知量的任意代数方程组简化为解若干个一个未知量的代数方程

参考文献

[1] Hodge, W V D and Pedoe, D , Methods of algebraic geometry, I, Cambridge Univ Press, 1947

[2] Waerden, B L van der, Algebra, 1－2, Springer, 1967－1971(中译本 B L 范德瓦尔登，代数学，科学出版社，Ⅰ，1963，Ⅱ，1976)

) Б Винберг 撰

【补注】 关于消元理论的一种非构造性的处理见 [A1]，§2C

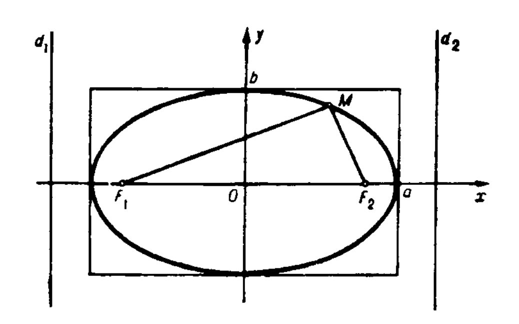
参考文献

[A1] Mumford, D , Algebraic geometry, 1 Complex projective varieties, Springer, 1976

郝钠新 译

椭圆 [**ellipse**, **эллипс**] (实的)

一个圆锥与不过其顶点且与其所有母线交于同一叶上的一个平面相截而得到的平面曲线 椭圆是平面上点 M 的集合（见图），由其中每一点到两个给定点 F_1 和 F_2（焦点（foci））的距离之和为常数，等于 $2a > F_1F_2$



两个焦点之间的距离称为焦距（focal distance），通常记为 $2c$ 线段 F_1F_2 的中点称为椭圆的中心（centre of an ellipse） 过椭圆两个焦点的直线称为第一轴（first axis）或焦轴（focal axis） 过椭圆的中心且垂直于第一轴的直线称为第二轴（second axis） 椭圆的两个轴是它的对称轴 椭圆与对称轴的交点称为它的顶点（vertices）. 椭圆的长轴（major axis）是第一轴界于两顶点之间的线段（也指它的长度 $2a$），椭圆的短轴（minor axis）是第二轴界于两顶点之间的线段（也指它的长度 $2b$）数 $e=c/a<1$ 称为椭圆的**离心率**（eccentricity）. 椭圆的直径（diameter）是通过中心的任何直线，也可把直径定义为通过相互平行的弦的中点的直线 椭圆的对应于一给定的焦点 F 的**准线**（directrix）或称相伴准线（associated directrix）是垂直于第一轴、与中心的距离为 a/e 的直线 d 椭圆一般具有两条准线．椭圆是一有心**二次曲线**(second-order curve)，其典范方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

椭圆的在点 (x_0, y_0) 上的切线的方程是

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$$

椭圆的焦参数（focal parameter）（通过一个焦点且垂直于第一轴的弦（称为通径（latus rectum））的长度之半）p 是 b^2/a 借助于焦参数可以把椭圆方程写成下列形式

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\varphi},$$

其中 ρ 和 φ 是极坐标，$0\leqslant\varphi<2\pi$

如果 $a=b$，则椭圆变成圆，$F_1\equiv F_2=0$ 是它的中心，a 是它的半径，不存在准线

椭圆具有下述光学性质（optical property） 从一个焦点发出的光线经椭圆镜面反射后通过另一焦点．

具有下列典则方程的二次曲线称为虚椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,$$

其中 a 和 b 是实数 　　A B Иванов 撰

【补注】 虚椭圆没有实点

椭圆的另一些特征如下所述

一个椭圆是一个**圆**(circle)的仿射象，椭圆是不具有无穷远实点的非退化**二次曲线**(conic)，椭圆是这样一些点的集合，它们到一给定点（焦点(focus)）的距离与到一给定直线（相伴准线(associated directrix)）的距离成定比，并且椭圆是平面紧非奇异二次**代数曲线**(algebraic curve)

关于椭圆性质的全面阐述，见 [A1] 和 [A2]

参考文献

[A1] Berger, M , Geometry, Ⅱ, Springer, 1987(中译本 M 贝尔热，几何，第二册，科学出版社，1989)

[A2] Coolidge, J , A history of the conic sections and quadric surfaces, Dover, reprint, 1968

张鸿林 译

法曲率椭圆 [**ellipse of normal curvature**, **нормальной кривизны эллипс**]

刻画 n 维 Euclid 空间 E^n 中正则曲面 M^2 上某点处曲率分布的一种几何构造．设 P 是曲面 M^2 上一点，并设 $N_Ⅰ$ 是包含 M^2 在 P 的法空间 N 和 M^2 在 P 的切方向Ⅰ的 $(n-1)$ 维子空间．M^2 被 $N_Ⅰ$ 相截的截线 $\gamma_Ⅰ$ 称为 P 处的法截线（normal section） 位于 N 中的向量 $d^2\gamma_Ⅰ/ds^2$ 称为 M^2 沿方向Ⅰ的法曲率向量（vector of normal curvature)，这里 s 是 $\gamma_Ⅰ$ 的自然参数 各法曲率向量的端点构

成法曲率椭圆 (ellipse of normal curvature) .

E^n 中 Gauss 曲率非零的二维曲面 M^2 位于某个三维子空间 E^3 中的充要条件是它在每一点 P 的法曲率椭圆蜕化为过 P 的线段 (见 [2]) .

对于任意维数 m 的子流形 M^m 可类似地定义曲率标形 . 这是一个 2^{m-1} 阶的 $(m-1)$ 维代数曲面 . 法曲率向量构成一个锥, 它和 M^m 的切空间一起决定了一个子空间 E^{m_1}, 即所谓 M^m 在 P 的曲率域 (domain of curvature) . 这个子空间的维数 m_1 满足

$$m_1 \leqslant \frac{m(m+3)}{2} , \quad m_1 \leqslant n .$$

使 $m_1=m+1$ 的点称为轴向的 (axial), 使 $m_1=m+2$ 的点称为平面的 (planar), 而使 $m_1=m+3$ 的点称为空间的 (spatial) . 对于高余维的子流形有时也考虑 **Dupin 标形** (Dupin indicatrix), 它的构造完全类似于三维空间中曲面的 Dupin 标形

参考文献

[1] Schouten, J A and Struik, D J, Einfuhrung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, 2, Noordhoff, 1935

[2] Аминов, Ю А ,《Укр геометр сб》, 17 (1975), 3-14, 15-22

Д Д Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Do Carmo, M P, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, 1976 (中译本 M P 多卡模, 曲线和曲面的微分几何学, 上海科学技术出版社, 1988)

[A2] O'Neill, B , Elementary differential geometry, Acad Press, 1966 .

[A3] Kobayashi, S and Nomizu, K , Foundations of differential geometry, Wiley, 1969, Chapt 7

[A4] Spivak, M , A comprehensive introduction to differential geometry, 3, Publish or Perish, 1979

沈一兵 译

椭球面 [ellipsoid , эллипсоид] (实的)

一个闭中心二次曲面 (surface of the second order) (见图) 椭球面的典范方程具有下列形式.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

正数 a, b, c, 以及相应长度的线段称为椭球面的半轴 (semi-axes of an ellipsoid) . 椭球面被任何平面所截, 其截口均为椭圆.

如果一个椭球的两个半轴相等, 则这个椭球称为回转椭球面 (ellipsoid of revolution), 回转椭球面被与两相等半轴的平面平行的平面所截, 其截口为圆 . 当 $a=b=c$ 时, 椭球成为球 椭球面的对称中心称为椭球面的中心 (centre of an ellipsoid).

具有典则方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

的二次曲面, 称为虚椭球面 (imaginary ellipsoid) .

А Б Иванов 撰

【补注】 虚椭球面没有实点 .

椭球面的另一些特征如下所述

一个椭球面是一个**球面** (sphere) 的仿射象, 椭球面是不具有无穷远实点的非退化**二次曲面** (quadric) .

关于椭球面的系统论述, 见 [A1], 第 15 章, 以及 [A2] 更深入的研究, 见 [A3]

参考文献

[A1] Berger, M , Geometry , II, Springer, 1987 (中译本 M 贝尔热, 几何, 第二册, 科学出版社, 1989).

[A2] Coolidge, J , A history of the conic sections and quadric surfaces, Dover, reprint, 1968

[A3] Petty, C M , Ellipsoids, in P M Gruber and J M Wills (eds) , Convexity and its applications, Birkhäuser, 1983, 264-278

张鸿林 译

椭球坐标 [ellipsoidal coordinates ; эллипсоидальные координаты], 空间椭圆坐标 (spatial elliptic coordinates)

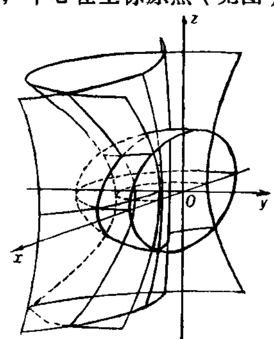
三数组 λ, μ 和 ν, 与 Descartes 直角坐标 x, y 和 z 由下列公式相联系

$$x^2 = \frac{(\lambda+a^2)(\mu+a^2)(\nu+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)} ,$$

$$y^2 = \frac{(\lambda+b^2)(\mu+b^2)(\nu+b^2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)} ,$$

$$z^2 = \frac{(\lambda+c^2)(\mu+c^2)(\nu+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)} ,$$

其中 $-a^2<\nu<-b^2<\mu<-c^2<\lambda<\infty$. 坐标曲面是 椭球面 ($\lambda=$常数)、单叶双曲面 ($\mu=$常数) 和双叶双曲面 ($\nu=$常数), 中心在坐标原点 (见图).



椭球坐标系是正交的．每个三数组 λ,μ 和 v，对应于 8 个点（每个挂限中一个点），它们关于坐标系 $Oxyz$ 的坐标平面是彼此对称的

Lamé 系数（Lamé coefficients）是

$$L_\lambda=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\mu)(\mu-v)}{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)}},$$

$$L_\mu=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\mu-v)(v-\lambda)}{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)}},$$

$$L_v=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(v-\lambda)(\lambda-\mu)}{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)}}$$

如果把椭球坐标定义中的条件 $a^2>b^2>c^2>0$ 之一换成等式，则得到退化椭球坐标系．

Д Д Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Darboux, G , Leçons sur la theorie générale des surfaces et ses applications géometriques du calcul infinitesimal, 1, Gauthier-Villars, 1887 张鸿林 译

椭球调和函数［ellipsoidal harmonic，эллипсоидальная гармоника］

椭球上点的函数，在**椭球坐标**（ellipsoidal coordinates）中用变量分离法解 **Laplace 方程**（Laplace equation）时出现．

令 (x,y,z) 为 Euclid 空间 $\mathbf{R}^3$ 中的 Descartes 坐标，它与椭球坐标 (ξ_1,ξ_2,ξ_3) 的关系由同一形式

$$\frac{x^2}{\xi_1^2-a^2}+\frac{y^2}{\xi_2^2-b^2}+\frac{z^2}{\xi_3^2-c^2}=1,\quad a>b>c>0$$

的三个公式相关联，其中 $a<\xi_1<+\infty$，$b<\xi_2<a$ 且 $c<\xi_3<b$．令 $\xi_1=\xi_1^0$，可得椭球形式的坐标曲面 一个调和函数 $h=h(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ —— Laplace 方程的一个解可写成表达式

$$E_1(\xi_1)E_2(\xi_2)E_3(\xi_3) \qquad (*)$$

的线性组合，其中因子 $E_j(\xi_j)$ $(j=1,2,3)$ 是 **Lamé 方程**（Lamé equation）的解．对于 $\xi_1=\xi_1^0$，形如 (*) 的表达式与它们的线性组合称为椭球调和函数或更好地称为曲面椭球调和函数（surface ellipsoidal harmonics），而依赖于三个变量 (ξ_1,ξ_2,ξ_3) 的表达式 (*) 的组合，则有时称为空间椭球调和函数（spatial ellipsoidal harmonics）．

参考文献

[1] Тихонов, А Н , Самарский, А А , Уравнения математической физики, 5 изд , М , 1977（中译本 А Н 吉洪诺夫，А А 萨马尔斯基，数学物理方程，上、下册，高等教育出版社，1957）

[2] Morse, P M and Feshbach, H , Methods of theoretical physics, 1－2, McGraw-Hill, 1953．

Е Д Соломенцев 撰 杨吟林 译 郑维行 校

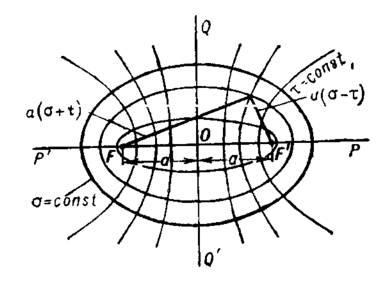
椭圆坐标［elliptic coordinates；эллиптические координаты］

两个数 σ 和 τ，与 Descartes 直角坐标 x 和 y 由下列公式相联系：

$$x^2=\frac{(\sigma+a^2)(\tau+a^2)}{a^2-b^2},$$

$$y^2=\frac{(\sigma+b^2)(\tau+b^2)}{b^2-a^2},$$

其中 $-a^2<\tau<-b^2<\sigma<\infty$．坐标线是（见图）：共焦椭



圆（$\sigma=$ 常数）和共焦双曲线，其焦点为 $(-\sqrt{a^2-b^2},0)$ 和 $(\sqrt{a^2+b^2},0)$．椭圆坐标系是正交的．每一对数 σ 和 τ 对应于 xy 平面上的四个点，每个象限一个点．

Lamé 系数（Lamé coefficients）是

$$L_\sigma=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma-\tau}{(\sigma+a^2)(\tau+b^2)}},$$

$$L_\tau=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau-\sigma}{(\sigma-a^2)(\tau+b^2)}}.$$

在椭圆坐标中 Laplace 方程可以分离变量．

退化椭圆坐标（degenerate elliptic coordinates）是两个数 $\tilde{\sigma}$ 和 $\tilde{\tau}$，与 σ 和 τ 由下列公式相联系（当 $a=1$，$b=0$ 时）·

$$\sigma=\sinh^2\tilde{\sigma},\quad \tau=-\sin^2\tilde{\tau},$$

与 Descartes 坐标 x 和 y 由下列公式相联系

$$x=\cosh\tilde{\sigma}\cos\tilde{\tau},\quad y=\sinh\tilde{\sigma}\sin\tilde{\tau},$$

其中 $0\leqslant\tilde{\sigma}<\infty$，$0\leqslant\tilde{\tau}<2\pi$ 有时，这些坐标也称为椭圆坐标．

Lamé 系数是

$$L_{\tilde{\sigma}}=L_{\tilde{\tau}}=\sqrt{\cosh^2\tilde{\sigma}-\cos^2\tilde{\tau}}.$$

面积元素是

$$ds=(\cosh^2\tilde{\sigma}-\cos^2\tilde{\tau})\,d\tilde{\sigma}\,d\tilde{\tau}$$

Laplace 算子是

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\cosh^2\tilde{\sigma} - \cos^2\tilde{\tau}}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tilde{\sigma}^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tilde{\tau}^2}\right].$$

Д Д Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Darboux, G , Lecons sur la theorie generale des surfaces et ses applications géometriques du calcul infinitesimal, 1, Gauthier-Villars, 1887

张鸿林 译

椭圆曲线 [elliptic curve, эллиптическая кривая]

亏格为1的非奇异完全**代数曲线** (algebraic curve). 椭圆曲线理论是很大一部分现代代数几何学的源泉. 但是从历史上来看，椭圆曲线理论则是作为分析的一部分，作为**椭圆积分** (elliptic integral) 和**椭圆函数** (elliptic function) 的理论而兴起的

例. 非奇异平面三次射影曲线，三维射影空间里两个非奇异二次曲面的交，射影直线的恰有四个分歧点的双叶覆叠以及一维 Abel 簇都是椭圆曲线

椭圆曲线的几何学 设 X 是代数闭域 k 上的一条椭圆曲线，则 X 双正则同构于平面三次曲线（见 [1], [9], [13]）. 当 $\operatorname{char} k \neq 2, 3$ 时，在射影平面 P^2 中有一个仿射坐标系，使得 X 的方程成为 Weierstrass 正规形式 (Weierstrass normal form)

$$y^2 = x^3 + ax + b \tag{1}$$

曲线 X 为非奇异，当且仅当多项式 x^3+ax+b 没有多重零点，即判别式 $\Delta = -16(4a^3+27b^2) \neq 0$ 曲线 (1) 在 P^2 中只有一个点在无穷远，记为 P_0，P_0 是 (1) 的拐点，而且 P_0 处的切线是无穷远直线 椭圆曲线 X 的 j 不变量 (j-invariant)

$$j(X) = 1728\,\frac{4a^3}{4a^3+27b^2} \in k$$

与坐标系的选取无关. 两条椭圆曲线有相同的 j 不变量，当且仅当它们双正则同构 对于任何的 $j \in k$，有一条 k 上椭圆曲线 X 满足 $j(X) = j$

椭圆曲线上的群结构 设 $P_0 \in X$ 是椭圆曲线 X 上一个取定的点. 把点 $P \in X$ 对应到 X 上**除子** (divisor) $P - P_0$ 的映射 $P \mapsto P - P_0$ 建立了 X 与 X 上 0 次除子类群，即 X 的 **Picard 簇** (Picard variety) $\operatorname{Pic}^0 X$ 之间的一个一一对应. 这个对应对 X 赋予 Abel 群的结构，这个群结构与代数簇结构是相容的并且把 X 转化为一个一维 Abel 簇 (X, P_0)，这里 P_0 是群的零元. 这个群的结构有以下的几何描述 设 $X \subset P^2$ 是一条光滑平面三次曲线. 那么两个点 P 与 Q 的和定义为 $P+Q = P_0 \circ (P \circ Q)$，这里 $P \circ Q$ 表示过 P 和 Q 的直线与 X 的第三个交点. 换句话说，X 上三点之和等于零，当且仅当这三点共线.

作为一维 Abel 簇的椭圆曲线. 设 n_X 表示 (X, P_0) 内用 $n \in \mathbf{Z}$ 相乘的自同态 当 (Y, Q_0) 是具有特定点 Q_0 的椭圆曲线时，任何有理映射 $f\ X \to Y$ 都是形如 $f(P) = h(P) + Q_1$ 的，其中 $Q_1 = f(P_0) \in Y$，$h\ (X, P_0) \to (Y, Q_0)$ 是 Abel 簇的同态 这里的 h 或是映到 Q_0 的常值映射或是一个**同源** (isogeny)，即有 Abel 簇的同态 $g\ (Y, Q_0) \to (X, P_0)$，使得对于某个 n 有 $gh = n_X$ 以及 $hg = n_Y$（见 [1], [6]）

椭圆曲线 X 的自同构群传递地作用于 X 上，而且它的使 P_0 固定的自同构子群 $G = \operatorname{Aut}(X, P_0)$ 是非平凡有限群 假定 $\operatorname{char} k$ 不等于 2 或 3，当 $j(X)$ 不是 0 和 1728 时，G 只含两个元素 1_X 和 $(-1)_X$，当 $j(X) = 1728$ 时，G 的阶是 4，当 $j(X) = 0$ 时，G 的阶是 6（见 [1], [6], [13]）

椭圆曲线的一个重要不变量是 Abel 簇 (X, P_0) 的自同态环 $R = \operatorname{End}(X, P_0)$ 映射 $n \mapsto n_X$ 定义了 $\mathbf{Z}$ 到 R 里的嵌入 如果 $R \neq \mathbf{Z}$，则称 X 为具有复乘法的椭圆曲线 (elliptic curve with complex multiplication). 环 R 可能是以下几种类型之一（见 [1], [9], [13]） Ⅰ) $R = \mathbf{Z}$，Ⅱ) $R = \mathbf{Z} + f\mathcal{O} \subset \mathcal{O}$，这里 $\mathcal{O}$ 是虚二次域 k 的代数整数环，且 $f \in \mathbf{N}$，或Ⅲ) R 是不含零因子的、秩为 4 的非交换 $\mathbf{Z}$ 代数 在这种情形下，$p = \operatorname{char} k > 0$，并且 R 是 $\mathbf{Q}$ 上仅在 p 和 ∞ 上分歧的四元数代数里的极大序模. 这样的椭圆曲线对所有的 p 都存在，称为超奇异的 (supersingular)，不是超奇异的特征 p 椭圆曲线称为通常的 (ordinary)

椭圆曲线 X 上的、阶整除 n 的点所成的群 $X_n = \operatorname{Ker} n_X$ 具有以下结构 当 $(n, \operatorname{char} k) = 1$ 时，$X_n \approx (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^2$ 对于 $\operatorname{char} k = p > 0$ 以及通常椭圆曲线，有 $X_p \simeq \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$，而对于超奇异椭圆曲线，则 $X_p \simeq \{0\}$. 对于素数 $l \neq \operatorname{char} k$，**Tate 模** (Tate module) $T_l(X)$ 同构于 $\mathbf{Z}_l^2$

非闭域上的椭圆曲线. 设 X 是任意域 k 上的椭圆曲线 如果 X 的 k 有理点集 $X(k)$ 非空，则 X 双正则同构于平面三次曲线 (1)，其中 $a, b \in k\,(\operatorname{char} k \neq 2, 3)$ (1) 的无穷远点 P_0 定义在 k 上 如前所述，可在 (1) 上引入群结构，使 X 成为 k 上一维 Abel 簇，使集合 $X(k)$ 成为以 P_0 作为零元的 Abel 群. 如果 k 是在它的素子域上有限生成的，则 $X(k)$ 是有限生成群 (Mordell-Weil 定理 (Mordell-Weil theorem)).

对于任何椭圆曲线 X，可以定义 **Jacobi 簇** (Jacobi variety) $J(X)$，这是 k 上的一维 Abel 簇，且 X 是 $J(X)$ 上的**主齐性空间** (principal homogeneous space) 如果 $X(k)$ 非空，则选取一个 $P_0 \in X(k)$ 就可确定一个同构 $X \simeq J(X)$，使得在此同构下 P_0 变成 $J(X)$ 的零元 一般地说，X 和 $J(X)$ 在 k 的一个有限扩域上同构（见 [1], [4], [13]）

复数域上的椭圆曲线 $\mathbf{C}$ 上椭圆曲线是亏格 1 的

紧 **Riemann 曲面** (Riemann surface)，反之亦对．群结构使得 X 成为一个复 Lie 群，它是一维复环面 $\mathbf{C}/\Lambda$，其中 Λ 是复平面 $\mathbf{C}$ 内的格．反之，任何一维复环面都是椭圆曲线（见[3]）．从拓扑的观点看，椭圆曲线是二维环面．

$\mathbf{C}$ 上椭圆曲线的理论本质上等价于椭圆函数论．环面 $\mathbf{C}/\Lambda$ 与椭圆曲线的等同可用以下方法实现．具有给定的周期格 Λ 的椭圆函数构成一个域，这个域由 Weierstrass $\wp$ 函数（见 **Weierstrass 椭圆函数** (Weierstrass elliptic functions)）以及它的导函数 $\wp'(z)$ 所生成，这两个函数之间有以下关系式

$$\wp'^2=4\wp^3-g_2\wp-g_3$$

映射 $\mathbf{C}\to P^2(Z\mapsto(1:\wp(Z):\wp'(Z)))$ 诱导了环面 $\mathbf{C}/\Lambda$ 与方程为 $y^2=4x^3-g_2x-g_3$ 的椭圆曲线 $X\subset P^2$ 间的同构．由(1)式给出的 X 与环面 $\mathbf{C}/\Lambda$ 间的等同是通过全纯形式 $\omega=dx/y$ 的线积分实现的，这个等同给出了同构 $X\simeq J(X)$．

把所有椭圆曲线的集合描述为环面 $\mathbf{C}/\Lambda$ 就导出了**模函数** (modular function) $J(\tau)$．两个格 Λ 与 Λ' 确定同构的环面，当且仅当它们是相似的，即它们可通过乘以一个复数而相互得到．因而可以假定 Λ 由数 1 及 $\tau\in H=\{\tau\in\mathbf{C}:\operatorname{Im}\tau>0\}$ 所生成．分别以 $1,\tau$ 及 $1,\tau'$ 为基的两个格相似的充分必要条件是 $\tau'=\gamma(\tau)$，这里 γ 是**模群** (modular group) Γ 的元素．模函数

$$J(\tau)=\frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2}$$

也称为绝对不变量 (absolute invariant)，$J(\tau)=J(\tau')$ 当且仅当对某个 $\gamma\in\Gamma$ 有 $\tau'=\gamma(\tau)$，并且函数 $J: H/\Gamma\to\mathbf{C}$ 给出了 $\mathbf{C}$ 上椭圆曲线的同构类与复数之间的同构．当 $X=\mathbf{C}/\Lambda$ 时，$j(X)=1728\,J(\tau)$．

椭圆曲线 X 有复乘法，当且仅当 τ 是虚**二次无理数** (quadratic irrationality)．这时 R 是虚二次域 $\mathbf{Q}(\tau)$ 的代数整数环里的有限指数子环．具有复乘法的椭圆曲线与虚二次域的**类域论** (class field theory) 之间有紧密的关系（见[4]，[8]）．

椭圆曲线的算术　设 X 是具有 q 个元素的有限域 k 上的椭圆曲线．集合 $X(k)$ 总是非空有限的．因而 X 具有 k 上一维 Abel 簇的结构，且 $X(k)$ 具有有限 Abel 群的结构．$X(k)$ 的阶 A 满足 $|q+1-A|\leqslant 2\sqrt{q}$．作用在 Tate 模 $T_l(X)$ $(l\neq\operatorname{char}k)$ 上的 **Frobenius 自同态** (Frobenius endomorphism) 的特征多项式是 $t^2-(q+1-A)t+q$．它的根 α 和 $\bar{\alpha}$ 是模为 $\sqrt{q}$ 的复共轭代数整数．对于 k 的任何 n 次有限扩域 k_n，$X(k_n)$ 的阶是 $q^n+1-(\alpha^n+\bar{\alpha}^n)$．$X$ 的 **ζ 函数** (zeta-function) 是

$$\frac{(1-q^{-s})(1-q^{1-s})}{1-(q+1-A)q^{-s}+q^{1-2s}}$$

对于某个虚二次域（或 $\mathbf{Q}$）里的模为 $\sqrt{q}$ 的任何代数整数 α，可以找到 k 上椭圆曲线 X，使得 $X(k)$ 的阶是 $q+1-(\alpha+\bar{\alpha})$．

设 k 是 p 进数域 $\mathbf{Q}_p$ 或它的有限代数扩张，B 是 k 的整数环，X 是 k 上椭圆曲线，且设 $X(k)$ 非空．群结构使得 $X(k)$ 成为一维交换紧 **p 进 Lie 群** (Lie group，p-adic)．群 $X(k)$ 是 **Weil-Châtelet 群** (Weil-Châtelet group) $\mathrm{WC}(k,X)$ 的 Понтрягин 对偶．如果 $j(X)\notin B$，则 X 是一条 Tate 曲线（见[1]，[5]），且与 $\mathbf{C}$ 的情形类似，存在 $X(k)$ 的典范单值化．

设 X 是 $\mathbf{Q}$ 上椭圆曲线，且 $X(\mathbf{Q})$ 非空，则 X 双正则同构于曲线 (1)，其中 $a,b\in\mathbf{Z}$，在所有具有整系数 a 和 b 的、与 X 同构的形如 (1) 的曲线中，可以选取一条使得其判别式 Δ 的绝对值最小．X 的前导子 N 与 L 函数 $L(X,s)$ 被定义为局部因子的形式积

$$N=\prod f_p,\quad L(X,s)=\prod L_p(X,s),\tag{2}$$

这里 p 取遍所有素数（见[1]，[5]，[13]）．这里 f_p 是 p 的某个幂，$L_p(X,s)$ 是复变量 s 的亚纯函数，它在 $s=1$ 处既无零点亦无极点．为了确定局部因子，人们考虑 X 的模 p 约化 $(p\neq 2,3)$，这是剩余类域 $\mathbf{Z}/(p)$ 上的一条平面射影曲线 X_p，在仿射坐标系内由方程

$$y^2=x^3+\bar{a}x+\bar{b}\quad(\bar{a}\equiv a \bmod p,\ \bar{b}\equiv b \bmod p)$$

给出．设 A_p 是 X_p 上的 $\mathbf{Z}/(p)$ 点的个数．如果 p 不能整除 Δ，则 X_p 是 $\mathbf{Z}/(p)$ 上的椭圆曲线，可令

$$f_p=1,\quad L_p(X,s)=\frac{1}{1-(p+1-A_p)p^{-s}+p^{1-2s}}$$

如果 p 整除 Δ，则多项式 $x^3+\bar{a}x+\bar{b}$ 有重根，可令

$$L_p(X,s)=\frac{1}{1-(p+1-A_p)p^{-s}},\quad f_p=p^2\ \text{或}\ p$$

(根据它是三重或二重根而定）乘积 (2) 在右半平面 $\operatorname{Re}s>3/2$ 内收敛．人们猜想 $L(X,s)$ 可扩张为整个复平面的亚纯函数，并且函数

$$\xi_X(s)=N^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(X,s)$$

(这里 $\Gamma(s)$ 是 **Γ 函数** (gamma function)）满足函数方程 $\xi_X(s)=W\xi_X(2-s)$，$W=\pm1$（见[5]，[3]）．对于具有复乘法的椭圆曲线，这个猜想已被证明．

群 $X(\mathbf{Q})$ 同构于 $F\oplus X(\mathbf{Q})_t$，这里 $X(\mathbf{Q})_t$ 是有限 Abel 群，F 是有某有限秩 r 的自由 Abel 群．$X(\mathbf{Q})_t$ 同构于以下 15 个群之一（见[11]）：$\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$，$1\leqslant m\leqslant 10$ 或 $m=12$，以及 $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})\times(\mathbf{Z}/\nu\mathbf{Z})$，$1\leqslant\nu\leqslant 4$．数 r 称

为 Q 上椭圆曲线的秩 (rank of the elliptic curve) 或称为它的 Q 秩 (Q-rank) 秩 ≥12 的 Q 上椭圆曲线的例子已经知道．人们猜想 (见[1], [13]) Q 上具有任意大小的秩的椭圆曲线都存在

在研究 $X(\mathbf{Q})$ 时使用了 Tate 高 $\hat{h}$ $X(\mathbf{Q}) \to \mathbf{R}^+$, 这是 $X(\mathbf{Q})$ 上的非负定二次型 (见[1], [3], [8], 亦见**高(Diophantus几何中的)** (height, in Diophantine geometry))．对于任何的 $c \in \mathbf{R}^+$, 集合 $\{P \in X(\mathbf{Q})\ \ \hat{h}(P) \leqslant c\}$ 是有限的．特别地，$\hat{h}$ 恰好在 $X(\mathbf{Q})_t$ 的挠子群上等于 0．

椭圆曲线的一个重要不变量是它的 Tate-Шафаревич 群 Ш(X) (见 **Weil-Châtelet 群** (Weil-Châtelet group))．Ш(X) 的非平凡元素是没有 Q 点的椭圆曲线，它们提供了 **Hasse 原理** (Hasse principle) 不成立的例子．群 Ш(X) 是周期群，而且对每个 n 它的阶是 n 的因子的元素构成一个有限子群．对于大量的椭圆曲线已经验证过 Ш 的 2 与 3 分支是有限的 (见[1], [4], [5])，有人猜想 Ш 是有限的

Birch 和 Swinnerton-Dyer 的有一个猜想 (见[5], [13]) 认为 L 函数 $L(X,s)$ 在 $s=1$ 处的零的阶等于 X 的 Q 秩．特别地，$L(X,s)$ 在 $s=1$ 有零点，当且仅当 $\mathbf{Q}(X)$ 无限．到 1984 年为止，还没有对任何一条椭圆曲线证明过这个猜想，但是对于具有复乘法 (且 $j=1$) 的椭圆曲线，已经知道当 $X(\mathbf{Q})$ 无限时，L 函数在 $s=1$ 有零点 (见[14])．Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想给出了当 $s \to 1$ 时 L 函数的渐近展开的主项，其中还涉及到群 Ш(X) 和 $X(\mathbf{Q})_t$ 的阶以及 Tate 高的行列式 ([1])．它也可以用**玉河数** (Tamagawa number) (见[7]) 来重新叙述．

Weil 猜想 (Weil conjecture) 认为椭圆曲线 X 有一个利用模函数的单值化，这些模函数是相对于模群 Γ 的同余子群 $\Gamma_0(N)$ 的 (见[5]以及代数几何学中的 **ζ 函数** (zeta-function) 这个猜想已对具有复乘法的椭圆函数被证明 已经知道 (见[15]) Q 上每个代数曲线都能用关于 Γ 的某个有限指数子群的模函数来**单值化** (uniformization)．

参考文献

[1] Cassels, J W S , Diophantine equations with special reference to elliptic curves, *J London Math Soc* , **41** (1966), 193－291

[2] Hurwitz, A and Courant, R , Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, Springer, 1968

[3] Mumford, D , Abelian varieties, Oxford Univ Press, 1974

[4] Cassels, J W S and Frohlich, A (eds) Algebraic number theory, Acad Press, 1967

[5] Манин, Ю И ,《Успехи матем наук》, **26** (1971), 6, 7－71

[6] Hartshorne, R , Algebraic geometry, Springer, 1977

[7] Bloch, S , A note on height pairings, Tamagawa numbers, and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture, *Invent Math* , **58** (1980), 65－76

[8] Lang, S , Elliptic curves, Diophantine analysis, Springer, 1978

[9] Lang, S , Elliptic functions, Addison-Wesley, 1973

[10] Mazur, B , Rational isogenies of prime degree, *Invent Math* , **44** (1978), 129－162

[11] Kuyk, W , et al (eds), Modular functions of one variable, **4**, Springer, 1975

[12] Mestre, J F , Construction d'une courbe elliptique de rang ≥12, *C R Acad Sci Paris Sér* 1, **295** (1982), 643－644

[13] Tate, J , The arithmetic of elliptic curves, *Invent Math* , **23** (1974), 197－206

[14] Coates, J and Wiles, A , On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer, *Invent Math* , **39** (1977), 223－251

[15] Белый, Г В ,《Изв АН СССР, Сер матем》, **43** (1979), 267－276

Ю Г Зархин, Вал С Куликов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Mazur, B , Modular curves and the Eisenstein ideal, *Publ Math IHES*, **47** (1978), 33－186

[A2] Silverman, J H , The arithmetic of elliptic curves, Springer, 1986

陈志杰 译

椭圆柱面 [elliptic cylinder, эллиптический цилиндр]

以一个**椭圆** (ellipse) 为准线的二次柱面 (见**二次柱面** (surface of the second order)) 如果这个椭圆是实的，则称为实椭圆柱面，其方程具有下列形式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

如果这个椭圆是虚的，则称为虚椭圆柱面 (imaginary elliptic cylinder)，其方程具有下列形式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

А Б Иванов 撰 张鸿林 译

椭圆函数 [elliptic function, эллиптическая функция]，正常意义下的

一个在有限复平面上是亚纯的**双周期函数** (double-periodic function)．椭圆函数有以下基本性质．

除常数外没有整的椭圆函数 (Liouville 定理 (Liouville theorem))．令 $2\omega_1, 2\omega_3$ 是椭圆函数 $f(z)$ 的原始周期，$\mathrm{Im}(\omega_3/\omega_1) > 0$ (见**双周期函数** (double-periodic function))．$f(z)$ 在它的周期平行四边形

$$\Delta = \{z = 2t\omega_1 + 2\tau\omega_3\ \ 0 \leqslant t,\ \tau < 1\}$$

中的所有极点处的残数的和是零

令 r 是椭圆函数 $f(z)$ 在一个周期平行四边形 Δ 中的极点的个数（按重数计算） 那么按重数计算，$f(x)$ 在 Δ 中取每个有限值恰好 r 次．数 r 称为 $f(z)$ 的阶（order） 小于 2 阶的椭圆函数是不存在的

如果 a_i 和 $b_i(i=1, \cdot, r)$ 是椭圆函数 $f(z)$ 在一个周期平行四边形 Δ 中的全部零点和极点，按重数计算，那么和

$$\sum_{i=1}^{r}(a_i-b_i)$$

依周期模同余于零，即

$$\sum_{i=1}^{r}(a_i-b_i)=2m_1\omega_1+2m_3\omega_3,$$

其中 m_1 和 m_3 是整数（Abel 定理的特殊情形，见 **Abel 函数**（Abelian function））

所有具固定原始周期 $2\omega_1, 2\omega_3$ 的椭圆函数构成一个有两个生成元的椭圆函数代数域 对这些生成元，例如，可取 Weierstrass $\wp$ 函数和它的导数（见 **Weierstrass 椭圆函数**（Weierstrass elliptic functions））

椭圆函数的导数本身是椭圆函数且有同样的周期．每个椭圆函数满足一个一阶常微分方程 每个椭圆函数 $f(z)$ 满足一个代数加法定理（algebraic addition theorem），即值 $f(z_1)$，$f(z_2)$ 和 $f(z_1+z_2)$ 由具有常系数的一个不可约代数方程联系 反之，Weierstrass 定理（Weierstrass theorem）断言满足代数加法定理的每个解析函数 $f(z)$ 要么是 z 或 e^z 的有理函数，要么是椭圆函数

有时使用一个与 θ 函数理论有联系的较一般的术语（见 **θ 函数**（theta-function）） 第三类椭圆函数（elliptic function of the third kind）被定义为满足函数方程

$$f(z+2\omega_i)=\exp[a_i(z+\omega_i)+b_i]\cdot f(z),\ i=1,3,$$

的任意亚纯函数 $f(z)$，其中 a_i 和 b_i 是常数 如果 $a_1=a_3=0$，则称为第二类椭圆函数（elliptic function of the second kind）．如果 $a_1=a_3=b_1=b_3=0$，那么 $f(z)$ 称为第一类或正常意义下的椭圆函数 根据这个术语，Jacobi θ 函数（见 **Jacobi 椭圆函数**（Jacobi elliptic functions））和 Weierstrass σ 函数（见 **Weierstrass 椭圆函数**（Weierstrass elliptic functions）都属于第三类．

椭圆积分（elliptic intergral）最初在 17 世纪末到 19 世纪初的一些学者的工作中被研究过，例如，Jacob 和 Jahann Bernoulli 兄弟，G C Fagnano dei Toschi，L Euler 和 A Legendre．这些积分在计算椭圆及其他二次曲线的弧长的问题中出现过 他们取形式 $\int R(z,w)dz$，其中 R 是变量 z 和 w 的有理函数，z 和 w 由代数方程

$$w^2=a_0z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4$$

联系，其中右边是没有重根的四次或三次多项式．被积函数在具四个支点亏格为 1 的二叶紧 Riemann 曲面 F 上是单值的 F 上的第一、二、三型微分（见 **Riemann 曲面上的微分**（differential on a Riemann surface））分别生成第一、二、三类椭圆积分 第一类积分是关于 F 以及关于由 F 生成的代数函数域的一个主单值化函数．如果把它当作一个独立变量，那么这个域就成为椭圆函数域

Legendre 正规形式椭圆积分的直接逆概念起源并发展于 19 世纪初 N H Abel 和 C G J Jacobi 的工作中 在由 Jacobi 发展的 θ 函数的基础上的椭圆函数的构造，在椭圆函数的应用上有根本重要性．椭圆函数域的理论上较简单的构造，其中把函数 $\wp$ 及其导数作为生成函数，是 18 世纪 70 年代由 K Weierstrass 作出的．

椭圆函数理论发展中的基本问题之一是当从原始周期 $2\omega_1$，$2\omega_3$ 变换到由关系式

$$\hat{\omega}_1=\alpha\omega_1+\beta\omega_3,\ \hat{\omega}_3=\gamma\omega_1+\delta\omega_3$$

联系的原始周期 $2\hat{\omega}_1$，$2\hat{\omega}_3$ 时椭圆函数以及一些相关量的变换问题，其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 是满足 $\alpha\beta-\beta\gamma=n$ 的整数，而 n 是自然数，称为变换的阶．$2\hat{\omega}_1$，$2\hat{\omega}_3$ 的周期平行四边形的面积为 $2\omega_1$，$2\omega_3$ 的周期平行四边形的 n 倍．当 $n=1$ 时得到模群的变换，它产生与椭圆函数有关的**模函数**（modular function）理论．

椭圆函数可看作在复平面上的平移群

$$\{z\to z+2n\omega_1+2m\omega_3\quad n,m\in Z\}$$

变换下不变的亚纯函数来讨论 这种方法的推广导致**自守函数**（automorphic function）的讨论，后者在**分式线性变换**（fractional-linear mapping）下是不变的，而分式线性变换构成了更一般的群．椭圆函数和模函数是自守函数的特殊情形

椭圆积分的逆直接导致对更一般 **Abel 积分**（Abelian integral）$\int R(z,w)dz$ 的 **Jacobi 反演问题**（Jacobi inversion problem），其中变量 z 和 w 满足一个任意的代数方程．沿此方向，人们得到 **Abel 函数**（Abelian function），椭圆函数到多复变的一种推广

在分析的许多分支如代数几何学中的**单值化**（uniformization）方法，在力学、电动力学以及理论物理的其它部分中，椭圆函数与积分都有广泛应用（如特殊函数）

参考文献

[1] Ахиезер Н И，Элементы теории эллиптических функций，2 изд，М，1970

[2] Hurwitz，A and Courant，R，Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen，Springer 1964

[3] Whittaker, E T and Watson, G N, A course of modern analysis, Cambrige Univ Press, 1952

[4] Журавский, А М, Справочник по эллиптическим функциям, М - Л, 1941

[5] Enneper, E, Elliptische Funktionen, Theorie und Geschichte, Halle, 1890

[6] Tannery, J and Molk, J, Elements de la théorie des fonctions elliptiques, 1-4, Gauthier-Villars, 1893-1902

Е Д Соломенцев 撰 杨吟林 译 郑维行 校

椭圆几何学 [**elliptic geometry**, **эллиптическая геометрия**]

在任意二维方向上，Riemann 曲率恒为某一正常数的一类空间的几何学 椭圆几何学是狭义Riemann几何学(Riemann geometry)的高维推广

А Б Иванов 撰

【补注】 这样，椭圆几何学(elliptic geometry)是具有正截面曲率的实射影空间的几何学(即将 $\mathbf{R}^n$ 中对径点等同起来以后的球面几何学) 在[A1]第19章中给出它的一个说明，在[A2]中给出它的推广．某些细节如下．

设 E 是 $(n+1)$ 维 Euclid 空间，$P=\mathbf{P}(E)$ 是 E 中过原点的一切直线所构成的射影空间 对于 $L, L'\in P$，距离 $d(L, L')\in[0, \frac{\pi}{2}]$ 是 E 中两条直线 L 和 L' 之间的角度(Euclid 意义下) 如果 l 和 l' 是交于 P 中 L 的两条直线，则 l 与 l' 之间的角度 $\in[0, \frac{\pi}{2}]$ 是 E 中两个相应平面 l 和 l' 交于直线 L 的角度．具有这种度量(和这种角度概念)的空间 P 称为与 E 相伴的椭圆空间(elliptic space) 当然这同 $S(E)=\{x\in E \ \|x\|=1\}$ 的**球面几何学**(spherical geometry)是密切相关的．实际上它是一个商空间．用这个度量所诱导的拓扑即熟知的拓扑

现在考虑 S^2 的球面几何学，其直线即大圆．拿赤道来说，S^2 上与赤道垂直的一切直线相交于赤道的极点 北极和南极 将相对极点等同起来便可得 $\mathbf{P}(\mathbf{R}^3)$，因此，在 $\mathbf{P}(\mathbf{R}^3)$ 中对于每一条直线 l，存在唯一的一点 A，它是 l 的(绝对)极点，即每一条与 l 垂直的直线都过 A 点 反过来，对于 $\mathbf{P}(\mathbf{R}^3)$ 中每一点 A，存在相对应的一条(绝对)极线

将其推广 假设 $d\subset P$ 是 P 中的一个 r 维平面，则 d 在 P 中的(绝对)极是一个 $s=n-r-1$ 维平面 e，该平面由这样的点 $x=(x_0, x_1, \ , x_n)$ 所组成，它们满足 对一切 $y=(y_0, y_1, \ , y_n)\in d$，有 $\langle x, y\rangle=\sum x_i y_i=0$ 因此对于 $\mathbf{P}(\mathbf{R}^4)$，一条直线的极是直线．

参考文献

[A1] Berger, M, Geometry, 2, Springer, 1987 (中译本 M 贝尔热，几何，第二卷，科学出版社，1989)

[A2] Busemann, H, Recent synthetic differential geometry, Springer, 1970

马传渔 译 黄正中 校

椭圆积分 [**elliptic integral**, **эллиптический интеграл**]

第一类**代数函数**(algebraic function)的积分，即形如

$$\int_{z_0}^{z_1} R(z, w)\,dz \qquad (1)$$

的积分，其中 $R(z, w)$ 是变量 z 和 w 的有理函数．这些变量由方程

$$w^2=f(z)\equiv a_0z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4 \qquad (2)$$

相联系，其中 $f(z)$ 是没有重根的三次或四次多项式 此处通常认为积分(1)不能仅用一个初等函数来表示．如果可以这样表示的话，(1)就称为**伪椭圆积分**(pseudo-elliptic integral)．

椭圆积分一词首先在 Jakob Bernoulli 和 Johann Bernoulli, G C Fagnano dei Toschi 以及 L Euler 关于求椭圆及其他二次曲线弧长的工作中出现．Bernoulli 等人在17世纪末18世纪初奠定了椭圆积分和椭圆函数理论的基础(见**椭圆函数**(elliptic function))，此理论来源于**椭圆积分的反演**(inversion of an elliptic integral)

方程(2)对应于一个亏格 $g=1$，与环面同胚的双叶紧 **Riemann 曲面**(Riemann surface) F，在 F 上 z 和 w 从而 $R(z, w)$ 被看成为 F 的点的函数，是单值的 积分(1)是由 F 上 **Abel 微分**(Abelian differential) $\omega=R(z, w)dz$ 沿某个可求长路径 L 的积分 $\int_L\omega$ 给出的．一般地说，指定路径 L 的始点 z_0 和端点 z_1 并不能完全确定椭圆积分(1)的值，换言之，(1)是 z_0 和 z_1 的多值函数

任何椭圆积分可表示为初等函数和第一、二、三类典范椭圆积分(canonical elliptic integrals)的线性组合的和 例如，这三类积分可写成下列形式

$$I_1=\int\frac{dz}{w}\ ,\ I_2=\int z\frac{dz}{w}\ ,\ I_3=\int\frac{dz}{(z-c)w}\ ,$$

其中 c 是第三类椭圆积分的参数

对应于 I_1 的微分 dz/w 在 Riemann 曲面 F 上是处处有限的，第二类第三类微分分别有残数为零的极点型奇点或单极点，作为有固定下限的变上限的积分函数，这三个椭圆积分在 F 上都是多值的 如果沿着同调基的二个闭链割开 F，则在所得单连通域 F^* 上，积分 I_1 和 I_2 是单值的，而 I_3 仍然有环绕简单极点产生的对数奇异性．通过截口时，每个积分要改变对应的周期(period)或周期模(modulus of periodicity)的整数倍，而 I_3 还有对应于环绕奇点回路的第三种对数周期(logarithmic period) $2\pi i$ 于是(1)型积分的计算化为沿着连接 F^* 上 z_0 和 z_1 的路径 L^* 的积分并加上对

应的周期的线性组合．

对变量z作某些变换，可把函数w和基本椭圆积分表示为正规形式 (normal forms)．在 Weierstrass 正规形式 (Weierstrass normal form) 下，关系式

$$w^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3$$

成立，且积分

$$u = -\int_z^{\infty} \frac{dz}{w}$$

具有周期 $2\omega_1$，$2\omega_3$．这种椭圆积分的反演给出具有周期 $2\omega_1, 2\omega_3$ 的 Weierstrass 椭圆函数 $\wp(z)$ 和不变量 g_2 和 g_3 (见 **Weierstrass 椭圆函数** (Weierstrass elliptic function))．从给定的不变量来计算周期 $2\omega_1, 2\omega_3$ 可用**模函数** (modular function) $J(\tau)$ 进行　如果在第二类正规积分 (normal integral)

$$\int \frac{z\,dz}{w}$$

中引用第一类规范积分u作为积分变量，则适当选取积分常数时，有等式

$$\int \frac{z\,dz}{w} = -\zeta(u)$$

成立，其中$\zeta(u)$是 **Weierstrass ζ 函数** (Weierstrass ζ-function)　此处，第二类正规积分的周期等于 $-2\eta_1 = 2\zeta(\omega_1)$，$-2\eta_3 = 2\zeta(\omega_3)$　Weierstrass 形式下第三类正规积分具有形式

$$I(z, w, z_0, w_0) = \frac{1}{2}\int \frac{(w+w_0)dz}{(z-z_0)w} = \log \frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma(u)\sigma(u_0)} + $$

$$+ u\frac{\sigma'(u_0)}{\sigma(u_0)},$$

其中 $\sigma(u)$ 是 **Weierstrass σ 函数** (Weierstrass σ-function)，$z_0 = \wp(u_0)$，$w_0 = \wp'(u_0)$，$u_0 \not\equiv 0 \bmod (2\omega_1, 2\omega_3)$　这里，下述转换规则 (transposition rule) 成立

$$I(z, w, z_0, w_0) - I(z_0, w_0, z, w) =$$

$$= \frac{\sigma'(u_0)}{\sigma(u_0)}u - \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}u_0 + (2n+1)\pi i,$$

其中n是一个整数　第三类正规积分的周期有以下形式

$$-u_0\eta_3 + \zeta(u_0)\omega_1 + 2n_1\pi i,$$

$$-u_0\eta_3 + \zeta(u_0)\omega_3 + 2n_3\pi i,$$

其中 n_1，n_3 是整数且 $2\pi i$ 是对数周期 (logarithmic period)

在应用中经常遇到 Legendre 正规形式 (Legendre normal form)　这里

$$w^2 = (1-z)^2(1-k^2z^2),$$

其中k称为椭圆积分的模 (modulus of the elliptic integral)，k^2有时称为 Legendre 模 (Legendre modulus) 而 $k' = \sqrt{1-k^2}$ 称为补模 (supplementary modulus)．最经常出现的要推当 $0<k<1$ 与 $z=x=\sin t$ 为实变量的正规情形．Legendre 正规形式的第一类椭圆积分取下列形式

$$u = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-h^2\sin^2 t}} =$$

$$= F(\varphi, k),$$

它也称为第一类不完全椭圆积分 (incomplete elliptic integral)，$\varphi = \operatorname{am} u$ 称为它的振幅 (amplitude)　这是u的无穷值函数　第一类正规积分的反演导致 Jacobi 椭圆函数 $z = \operatorname{sn} u$ (见 **Jacobi 椭圆函数** (Jacobi elliptic functions))．

第二类正规积分的 Legendre 正规形式为

$$\int_0^z \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt = E(\varphi, k) = E(u),$$

也称为第二类不完全椭圆积分

积分

$$F\left[\frac{\pi}{2}, k\right] = K(k) = K,$$

$$F\left[\frac{\pi}{2}, k'\right] = K'(k) = K',$$

$$E\left[\frac{\pi}{2}, k\right] = E(k) = E,$$

$$E\left[\frac{\pi}{2}, k'\right] = E'(k) = E',$$

分别称为第一类与第二类完全椭圆积分 (complete elliptic integrals)　第一类 Legendre 积分有周期 $4K$ 和 $2iK'$，而第二类有周期 $4E$ 和 $2i(K'-E')$

第三类正规积分的 Legendre 正规形式为

$$\int_0^z \frac{dx}{(1-n^2x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} =$$

$$= \int_0^{\varphi} \frac{dt}{(1-n^2\sin^2 t)\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} =$$

$$= \Pi(\varphi, n^2, k) = \Pi(u; n^2),$$

其中 n^2 是参数且照例 $-\infty < n^2 < \infty$．当 $n^2<0$ 或 $k^2<n^2<1$ 时，它称为圆积分 (circular integral)．当 $0<n^2<k^2$ 或 $1<n^2$ 时，称为双曲积分 (hyperbolic integral)．

根据 Jacobi，第三类正规积分定义有所不同.

$$\Pi_J(u,a)=k^2\,\mathrm{sn}a\cdot\mathrm{cn}a\cdot\mathrm{dn}a\int_0^u\frac{\mathrm{sn}^2u\,du}{1-k^2\mathrm{sn}^2u\cdot\mathrm{sn}^2a},$$

其中 $n^2=k^2\mathrm{sn}^2a$. 第三类 Jacobi 和 Legendre 积分间的联系可由以下公式表示

$$\Pi(u,n^2)=u+\frac{\mathrm{sn}a}{\mathrm{cn}a\cdot\mathrm{dn}a}\,\Pi_J(u,a),$$

这里圆的特征对应于一个虚数 a，而双曲特征对应于一个实数 a.

和椭圆函数一起，椭圆积分在分析学，几何学和物理学的各种问题中有许多重要的应用，在力学、天文学及大地测量学中尤其如此 关于椭圆积分和函数的理论，有椭圆积分表和详细的手册以及公式集.

参考文献

[1] Беляков, В М, Кравцова, Р П, Раппопорт, М Г, Таблицы эллиптических интегралов, т 1－2, М, 1962－1963

[2] Jahnke, E and Emde, F, Tables of functions with formulae and curves, Dover, reprint, 1945 (译自德文)

亦见**椭圆函数** (elliptic function).

Е Д Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hancock, H, Theory of elliptic functions Dover, reprint, 1958

[A2] Abramowitz, M and Stegun, I A, Handbook of mathematical functions, Dover, reprint, 1972

杨吟林 译 郑维行 校

椭圆型算子 [**elliptic operator**, **эллиптический оператор**]

具有可逆主象征 (见**算子的象征** (symbol of an operator)) 的线性微分算子或伪微分算子

令 A 是区域 $X\subset\mathbf{R}^n$ 上具有主象征 $\sigma_A(x,\xi)$ 的 (一般地，矩阵) 微分算子或伪微分算子. 如果 A 是 m 阶的，那么 $\sigma_A(x,\xi)$ 是 $X\times(\mathbf{R}^n\setminus0)$ 上的一个矩阵值函数，关于变数 $\xi\in\mathbf{R}^n\setminus0$，它是 m 次正齐次的. 椭圆性意味着对于所有 $x\in X$, $\xi\in\mathbf{R}^n\setminus0$, $\sigma_A(x,\xi)$ 是可逆矩阵. 这个概念称为 Петровский 椭圆性 (Petrovskiĭ ellipticity).

椭圆性的另一形式，Douglis-Nirenberg 椭圆性 (Douglis-Nirenberg ellipticity)，假设 A 是矩阵值算子，$A=(A_{ij})_{i,j=1}^d$，其中 A_{ij} 是 s_j-t_i 阶的算子，$(s_1,\cdots,s_d)$ 和 $(t_1,\cdots,t_d)$ 是两个实向量. 此时可构成主象征矩阵 $\sigma_A(x,\xi)=(\sigma_{A_{ij}}(x,\xi))_{i,j=1}^d$，其中函数 $\sigma_{A_{ij}}(x,\xi)$ 是 ξ 的 s_j-t_i 次正齐次函数. Douglis-Nirenberg 椭圆性意味着对于所有 $x\in X$, $\xi\in\mathbf{R}^n\setminus0$，矩阵 $\sigma_A(x,\xi)$ 是可逆的.

流形上的算子 A 的椭圆性意味着，写成局部坐标时，由 A 所得到的算子是椭圆型的. 等价地，这个椭圆性可用主象征 σ_A 的可逆性来描述，这里 σ_A 是 $T^*X\setminus0$ 上的函数，T^*X 是 X 的余切丛，$T^*X\setminus0$ 是 X 的没有零截面的余切丛. 如果 A 把向量丛 E 的截面映为另一个向量丛 F 的截面，即 $A\ C^\infty(X,E)\to C^\infty(X,F)$，那么算子 A 的椭圆性意味着对于任意点 $(x,\xi)\in T^*X\setminus0$，线性算子 $\sigma_A(x,\xi)$. $E_x\to F_x$ (这里 E_x 和 F_x 分别是 E 和 F 在 x 处的纤维) 的可逆性. 椭圆型算子的一个例子是 **Laplace 算子** (Laplace operator)

一个算子的椭圆性等价于此算子没有实特征方向. 它还可被微局部地理解，即算子 A 在点 (x_0,ξ_0) 处的椭圆性意味着 (线性变换) 矩阵 $\sigma_A(x_0,\xi_0)$ 的可逆性.

带边流形上的伪微分算子 (例如，Boutet de Monvel 代数中的算子，[10]，[11]) 在边界点处的椭圆性意味着在半轴上的边值问题的某个模型算子的可逆性. 这个模型算子是原来的算子经过下列一些步骤得到的 拉直边界，"冻结"算子主部的系数以及在所论点处的边界条件，并沿具有固定的非零向量 ξ' (它可视为边界的余切向量) 的切向 (从 x' 到 ξ') 施行 Fourier 变换 在一个微分算子和某些微分边界条件的情形下，刚才描述的椭圆性条件可用代数语言来表达. 在这个情形 (有时也在一般情形下) 下，这个条件常称为 Шапиро-Лопатинский 条件 (Shapiro-Lopatinskiĭ condition) 或强制性条件 (condition of coerciveness)

椭圆算子的一些最具特征的性质是 1) 相应的方程的解的正则性，2) 精确的先验估计，以及 3) 在紧流形上椭圆算子的 Fredholm 性质.

为了简单起见，在下面所述中所有算子的系数和象征都假设为无限光滑的.

令 $Au=f$ 是一个方程，其中 A 是椭圆型算子 最简单的正则性性质如下所述 当 $f\in C^\infty$ 时，$u\in C^\infty$ 对于具有光滑系数的任意的椭圆型微分算子和 (具有光滑象征的) 任意的椭圆型伪微分算子，这个性质成立. 对于一个边值问题的椭圆型算子它亦成立 (即，当 Шапиро-Лопатинский 条件成立时，直到边界它亦成立). 这个性质的更深刻的形式是它的微局部说法 如果在点 (x_0,ξ_0) 处 A 是椭圆型算子 (这里 x_0 是 X 的内点)，并且 $(x_0,\xi_0)\notin \mathrm{WF}(f)$，其中 WF 表示 (分布或函数的) **波前集** (wave front)，那么 $(x_0,\xi_0)\notin\mathrm{WF}(u)$. 另一深化说法 如果 A 是 m 阶的椭圆型算子，并且 $f\in W_p^s$，那么 $u\in W_p^{s+m}$，这里 W_p^s 是 **Соболев 空间** (Sobolev space)，$1<p<\infty$ 如果 A 是具有解析系数的椭圆型微分算子，并且如果 f 是解析的，那么 u 也是解析的 (在常系数方程的情形下，

这个性质对于其椭圆性是充要的）相应的微局部说法也是对的，并且可以用解析波前集的语言来叙述．

m 阶椭圆型算子 A 的局部先验估计有形式

$$\|u\|_{W_p^{s+m}(\bar{\Omega})} \leqslant C(\|f\|_{W_p^s(\Omega)} + \|u\|_{W_p^{-N}(\Omega)}), \quad (1)$$

其中 $1<p<\infty$，$s\in\mathbf{R}$，$N\in\mathbf{R}$，Ω和Ω'是$\mathbf{R}^n$中的两个区域，$\bar{\Omega}$是Ω'中的紧集，在Ω'中$Au=f$，常数C不依赖于u(但可依赖于s，Ω，Ω' 和 N)

对无边紧流形 X 上的 m 阶椭圆型算子 A 的整体先验估计有与(1)相同的形式，只是在其中以 X 代替 Ω 和 Ω' 在带边流形的情形下，代替(1)中空间 W_p^s 的范数，必须取与向量值函数 u（一般地讲，它们包含边界分量）和 f 的结构有关的范数 例如，假设在带边 Y 的紧流形 X 上给出形如 $u \mapsto (Au, B_1u|_Y \ B_ru|_Y)$ 的椭圆型算子，其中 A 是 m 阶椭圆型微分算子，B_j 是 m_j 阶微分算子，$m_j<m$，并假设(对于算子 A 和边界算子组 $B_1, \quad , B_r$) Шапиро - Лопатинский 条件成立．此时，在 Соболев 空间 $H^s=W_2^s$ 中的先验估计有形式

$$\|u\|_s \leqslant C(\|Au\|_{s-m} + \sum_{j=1}^{r}\|B_ju|_Y\|_{s-m_j-1/2} + \|u\|_0),$$

其中 $\|\cdot\|_t$ 是空间 $H^s(X)$ 中的范数，$\|\cdot\|_s$ 是空间 $H^s(Y)$ 中的范数，$u\in H^s(X)$，$s\geqslant m$，常数 $C>0$ 不依赖于 u (但可依赖于 A，B_j，s，X，Y，以及 Соболев 空间中范数的选取）

在（可能带边的）紧流形上的椭圆型算子在相应的 Соболев 空间中，也在无穷次可微函数的空间中确定了一个 Fredholm 算子．它的指数仅依赖于主象征，并且在主象征的连续变形下是不变的 这就使得能够提出指数计算的问题（见**指标公式**（index formulas））

带参数的椭圆型算子起着重要的作用(见[12]) 当带参数的椭圆性条件在一紧流形上对于大模的参数值成立时，所论的椭圆型算子即为可逆的，并且在（1）型的整体先验估计中最后一项（右端的低次范数）可被略去．

参考文献

[1] Петровский, И Г, Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд, М, 1961（中译本 И Г 彼得罗夫斯基，偏微分方程讲义，高等教育出版社，1956）

[2] Miranda, C, Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970（译自意大利文）.

[3] Ладыженская, О А, Уральцева, Н Н, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М, 1973（中译本 О А 拉迪任斯卡娅，Н Н 乌拉利采娃，线性和拟线性椭圆型方程，科学出版社，1987）

[4] Lions, J L and Magenes, E, Non-homogenous boundary value problems and applications, 1-2, Springer, 1972（中译本 J L Lions, E Magenes, 非齐次边值问题及其应用，第一卷，高等教育出版社，1987）

[5] Bers, L, John, F and Schechter, M, Partial differential equations, Interscience, 1964

[6] Agmon, S, Douglis, A and Nirenberg, L, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, *Comm Pure Appl Math*, **12** (1959), 623-627

[7] Hormander, L, Linear partial differential operators, Springer, 1963 (中译本 L 霍曼德尔，线性偏微分算子，科学出版社，1980）

[8] Шубин, М А, Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М, 1978（英译本 Shubin, M A, Pseudo-differential operators and spectral theory, Springer, 1987）

[9] Paley, R, Seminar on the Atiyah-Singer index theorem, Princeton Univ Press, 1965

[10] Rempel, S and Schulze, B W, Index theory of elliptic boundary problems, Akad Verlag, 1982

[11] Monvel, L Boutet de, Boundary problems for pseudo-differential operators, *Acta Math*, **126** (1971), 11-51

[12] Агранович, М С, Вишик, М И,《Успехи матем наук》, **19** (1964), 3, 53-161

М А Шубин 撰

【补注】 椭圆型微分算子的边值问题可被化为边界上的伪微分方程组，其好处在于边界是一个无边流形．这些方程组涉及在 Cauchy 数据空间中所谓的 Calderón 投影（Calderón projection），在复平面中 Cauchy-Riemann 算子的情形这与 **Hilbert 变换**（Hilbert transform）有关．见[A1]

[A1] 是由[7] 发展而来的四卷本论著中的一卷

参考文献

[A1] Hormander, L, The analysis of linear partial differential operators, 3, Springer, 1985

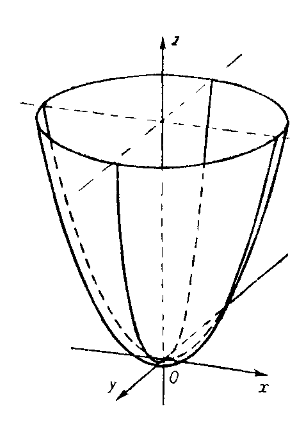
陆柱家 译

椭圆抛物面 [elliptic paraboloid, эллиптический параболоид]

非闭**二次曲面**（surface of the second order） 椭圆抛物面的典则方程具有下列形式

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \ p, q>0$$

这时，椭圆抛物面处于 Oxy 平面的一侧（见图）．当被平行于 Oxy 平面的一些平面所截时，截线为具有相等离心率的椭圆 （如果 $p=q$，则截线为圆，该曲面为回转抛物面（paraboloid of revolution）．）当被通过 Oz 轴的平面所截时，截线为抛物线．而与平面 Oyz 和 Oxz 的截线称为主抛物线（principal parabolas）．椭圆抛物面的对称轴称为它的轴（axis），*而椭圆抛物面与轴的交*



点称为它的顶点（vertex）.

А Б Иванов 撰 张鸿林 译

椭圆型偏微分方程 [elliptic partial differential equation, эллиптического типа уравнение]，在一给定点 x 处的一个 m 阶的偏微分方程

$$\sum a_{i_1 \cdots i_n}(x) \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}} + L_1 u = f, \quad \sum_{j=1}^{n} i_j = m,$$

它的特征形式是

$$K(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sum a_{i_1 \cdots i_n}(x) \lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_n^{i_n}, \quad \sum_{j=1}^{n} i_j = m,$$

在点 x 处相应的特征方程

$$K(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = 0$$

除了 $\lambda_1 = 0, \cdots, \lambda_n = 0$ 之外无其他实根，这里 L_1 是一个阶数小于 m 的微分算子.

二阶方程的特征形式是二次型

$$Q(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j,$$

通过一个非异的仿射变量变换 $\lambda_i = \lambda_i(\xi_1, \cdots, \xi_n)(i = 1, \cdots, n)$ 它可化为形式

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i^2$$

当所有 $\alpha_i = 1$ 或所有 $\alpha_i = -1$ 时，所论方程被称为椭圆型的.

一个偏微分方程被称为在其定义域中是椭圆型的，如果在此域的每一点处它是椭圆型的.

一个椭圆型偏微分方程被称为一致椭圆型的（uniformly elliptic），如果存在两个正常数 k_0 和 k_1，使得

$$k_0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leqslant Q(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \leqslant k_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

参考文献，见**偏微分方程**（differential equation, partial）

А Б Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hormander, L., The analysis of linear partial differential operators, 1, Springer, 1983

陆柱家 译

椭圆型偏微分方程，数值方法 [elliptic partial differential equation, numerical methods, эллиптического типа уравнение численные методы решения]

近似确定椭圆型偏微分方程解的一种方法.在对椭圆型方程提出的各类问题中，边值问题和带 Cauchy 条件的问题得到了最透彻的研究.后者是不适定的，且需要特殊的解法（[1]）.对椭圆型方程比较典型的提法是边值问题，并已经提出了很多不同的数值方法求其近似解（见[2], [3]）.在计算实践中网格法是最广为传播的，其中有有限差分法（见**差分法**（difference methods），**差分格式理论**（difference schemes, theory of），[4], [5]）和有限元方法（见[6]－[9]）.虽然这些方法构造近似解的途径不同——前者逼近方程和边界条件（见**微分边值问题的差分边值问题逼近**（approximation of a differential boundary value problem by difference boundary value problems）），而后者逼近所求解的本身——然而最终确定近似解的代数方程组常常基于类似的想法，并在一些情况下完全一致.

有限差分法的本质如下.用离散点（结点）集代替原问题中自变量连续变化的区域，并称此离散点集为网格（grid），用差分关系逼近出现在微分方程和边界条件中的导数，于是微分方程的边值问题就被一个代数方程组（一种差分格式（difference scheme））所取代.如果所得到的差分边值问题是可解的（可能在足够细的网格上）并且如果在充分加细的网格上它的解逼近（收敛于）原来微分方程的解，则在任一固定网格上得到的差分问题的解就被当做原来问题的一个近似解.

椭圆型偏微分方程最简单的例子是 Poisson 方程（当 $f \equiv 0$ 时，就是 Laplace 方程）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y). \tag{1}$$

在**边值问题，偏微分方程的数值方法**（boundary value problem, numerical methods for partial differential equations）和**差分方程**（difference equation）条目下给出了 Poisson 方程的几个差分格式的例子.

在有限元法中人们逼近边值问题的广义解.例如，若在 $(x, y) \in \Omega$ 上给定方程（1）并求解齐次 Dirichlet 问题，即

$$u(x, y)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

其中 $\partial\Omega$ 是 Ω 的边界，则问题（1）－（2）的广义解定义为一个函数 $u \in W_{2\ \mathrm{comp}}^{1}(\Omega) = H_{\mathrm{comp}}^{1}(\Omega)$，对任何函数 $v \in$

$H^1_{\text{comp}}(\Omega)$ 它满足积分恒等式

$$\iint_\Omega \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]dxdy=-\int_\Omega f_v\,dxdy\,. \quad (3)$$

这里 $H^1_{\text{comp}}(\Omega)$ 是在 $\partial\Omega$ 上为零的函数(看做广义函数)的 **Соболев 空间** (Sobolev space) 最重要的有限元法是 Галеркин 类型的方法 (协调有限元方法) 在 **Галеркин 法** (Galerkin method) 中人们在一个空间的有限维子空间中寻求近似解，这个空间就是定义广义解的积分恒等式所在的空间．应用于问题 (3)，Галеркин 近似解是一个函数 $u_h\in S_h(\Omega)\subset H^1_{\text{comp}}(\Omega)$，对于任意 $v\in S_h(\Omega)$ 它满足积分恒等式 (3) 在有限元法中，子空间 $S_h(\Omega)$ 必须有某些特殊性质 (见**变分差分格式** (difference scheme, variational))

下面的例子说明这些有限维子空间的特殊性质把有限元法和 Галеркин 方法的其他实现方案区别开来 假定 (1) − (2) 解所在的域 Ω 是个多边形．Ω 被剖分成小的三角形 (有限元)，而且任何两个三角形或者根本没有公共点，或者仅有一个公共顶点，或者有一条公共边．可以把在每个三角形上为线性的、连续的，而且在 $\partial\Omega$ 上为零的逐片线性函数空间 $S_h(\Omega)$ 取为 $H^1_{\text{comp}}(\Omega)$ 的有限维子空间 $S_h(\Omega)$ 的维数是不在边界 $\partial\Omega$ 上的三角形顶点个数 (不计重数) 这些顶点称为**结点** (nodes) 人们可以取一组单元 $\varphi_i\in S_h(\Omega)$，它们仅在一个结点上不为零，做为 $S_h(\Omega)$ 的基 这组基的特征在于每个单元的支撑极小并可由所有三角形的和集形成，这些三角形有公共顶点，在这个顶点上指定的基元素为非零 由于这个性质，在每个有限单元上最多有三个非零基函数 (在顶点不处于边界 $\partial\Omega$ 的那些单元上) 这使得人们可以利用这个基函数在有限单元上的限制做为有限单元的基，并不必利用其他有限单元上的信息完成有限元上的所有计算．从其实现的观点来说这个性质使得有限元法非常有效 ([10])

例如，如果 Ω 是单位正方形并用三族等距直线

$$x=mh,\ y=nh,\ y=x+ph,\ m,n,p\in\mathbf{Z},\ h^{-1}=N\in\mathbf{N}$$

把 Ω 剖分成有限元，在基函数非零值为 1 的条件下，那么对于近似解展开式

$$u_h(x,y)=\sum_{m\ n} c_{mn}\varphi_{mn}(x,y)$$

中的系数 c_{mn} 可以得到一个方程组，它和从有限差分法得到的方程组完全一致 这里 c_{mn} 是近似解在结点处的值．

这样建立的有限元法的精度可由估计式

$$\|u-u_h\|_{H^1_{\text{comp}}(\Omega)}=O(h)$$

表征，其中 h 是有限单元的最大线性尺寸 为了达到较高的精度，必须不在逐片线性函数空间中寻求近似解，而是在逐片二次函数空间中，或更一般地，在逐片多项式函数空间中去寻求 在这种情况下，对于具有适当光滑性的解其精度为 $O(h^k)$，这里 k 是所用多项式的次数

除三角形有限元外人们也利用四边形有限元．然而，当四边形的边不平行于坐标轴时，必须使用等参数技术，也就是说，开始用一种非退化变换把问题中的有限元映射到一种标准型上 (在目前情况下映射到边平行于坐标轴的矩形上)，这个变换的逆由标准有限单元上近似解同样的函数给出．人们可以利用曲边三角形和四边形 (又要用到等参技术)．当在有光滑边界的域上用高于一阶精度的方法求解问题时这是必要的

除 Галеркин 类型的有限元法外，还有另外一种所谓的非协调有限元方法，在这类方法中不在原来空间的子空间中寻求解 通常这种方法适用于高于二阶的椭圆型偏微分方程问题

有限差分法和有限元法导致有稀疏系数矩阵的高阶线性代数方程组，人们可以压缩这些矩阵中大部分零元素 (见 [11], [12]) 迄今另一种近似求解椭圆型偏微分方程边值问题的方法已经显著发展起来 边界元法 ([13])．

参考文献

[1] Lattès, R and Lions, J L, Méthode de quasi-reversibilite et applications, Dunod, 1967

[2] Канторович, Л В, Крылов В И, Приближенные методы высшего анализа, 5 изд, М -Л, 1962 (英译本 Kantorovich, L V and Krylov, V I, Approximate methods of higher analysis, Noordhoff, 1958)

[3] Михлин, С Г, Смолицкий, Х Л, Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, М, 1965 (英译本 Mikhlin, S G and Smolitskii Kh L, Approximate methods of solution of differential and integral equation, Amer Elsevier, 1967)

[4] Самарский, А А, Андреев, В Б, Разностные методы для эллиптических уравнений, М, 1976

[5] Birkhoff, G, Solving elliptic problems 1930 − 1980, in Schultz M H (ed) Elliptic problem solvers, Acad Press, 1981, 17 − 38

[6] Zienkiewicz, O C, The finite element method, McGraw-Hill, 1977

[7] Strang, G and Fix, G J, An analysis of the finite element method, Prentice-Hall, 1973

[8] Ciarlet, P G, The finite element method for elliptic problems, North-Holland, 1978

[9] Mitchell, A R and Wait, R, The finite element method in partial differential equations, Wiley, 1977

[10] Hinton, E and Owen, D R J, Finite element programming, Acad Press, 1977

[11] Самарский, А А , Николаев, Е С , Методы решения сеточных уравнений, М , 1978
[12] George, A and Liu, J W -H , Computer solutions of large sparse positive definite systems, Prentice Hall, 1981
[13] Brebbia, C A and Walker, S , Boundary element techniques in engineering, Butterworth, 1980

В Б Андреев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Axelsson, O and Barker, V A , Finite element solution of boundary value problems-theory and computation, Acad Press, 1984
[A2] Johnson, C , Numerical solution of partial differential equations by the finite element method, Cambridge Univ Press, 1987
[A3] Birkhoff, G and Lynch, R E , Numerical solution of elliptic problems, SIAM, 1984
[A4] Ames, W F , Numerical methods for partial differential equations, Acad Press, 1977
[A5] Ciarlet, P G , Introduction to the numerical analysis of the finite element method, North-Holland, 1977
[A6] Fairweather, G , Finite element Galerkin methods for differential equations, M , Dekker, 1978
[A7] Forsythe, G E and Wasow, W R , Finite difference methods for partial differential equations, Wiley, 1960
[A8] Gladwell, I and Wait, R (eds), A survey of numerical methods for partial differential equations, Clarendon Press, 1979
[A9] Mitchell, A R and Griffiths, D F , The finite difference method in partial differential equations, Wiley, 1980

蔡大用 译

椭圆点 [elliptic point, эллиптическая точка]

正则曲面上使密切抛物面为椭圆抛物面的点．在椭圆点，Dupin 标形是一个椭圆，曲面的 Gauss 曲率是正的，曲面的主曲率同号，并且对于曲面第二基本形式的系数成立不等式

$$LN-M^2>0$$

在椭圆点的邻域内曲面是局部凸的

Д Д Соколов 撰 沈一兵 译

椭圆曲面 [elliptic surface, эллиптическая поверхность]

一个代数的或解析的完全非奇异曲面 X，它具有一个**椭圆曲线** (elliptic curve) 的纤维化，即具有一个到非奇异曲线 B 上的态射 π $X\to B$，π 的一般纤维为非奇异椭圆曲线 每个椭圆曲面在 B 上双有理 (或双亚纯) 等价于唯一的极小模型，它由 π 的纤维不包含算术亏格为0的例外曲线来刻画 以后总假定椭圆曲面是极小的 极小椭圆曲面的结构比直纹曲面复杂 椭圆曲面可能有奇异纤维 (singular fibres) $X_t=\pi^{-1}(t)$ (即不是非奇异椭圆曲线的纤维) [3] 给出了椭圆曲面的奇异纤维的分类 奇异纤维 $X_t=\sum n_i E_i$ 称为多重的 (multiple)，如果 n_i 的最大公因子 $m\geqslant 2$，这时 $X_t=mF$，m 称为纤维 X_t 的重数 (multiplicity of the fibre)

在极小椭圆曲面上典范类 K_X 包含一个除子，它是纤维的有理组合，特别地，$(K_X^2)=0$ 而且，下面的关于典范类的公式成立 (见[1]，[4])

$$K_X=\pi^*(K_B-d)+\sum(m_i-1)F_i,$$

这里 $X_{t_i}=m_iF_i$ 是 π 的所有多重纤维，d 是 B 上次数为 $-\chi(\mathcal{O}_X)$ 的除子 拓扑 **Euler 示性数** (Euler characteristic) 满足公式

$$e(X)=\sum e(X_{t_i})$$

椭圆纤维化 (elliptic fibrations) **的分类**．可以认为纤维化 π $X\to B$ 是函数域 $k(B)$ 上的椭圆曲线 一般地说，该曲线没有 $k(B)$ 上的 Abel 簇的结构．如果有这样的结构，该曲线必须有 $k(B)$ 上的有理点 (这时候，X 双有理同构于 $B\times A^2$ 中由 Weierstrass 方程 $y^2=x^3-g_2x-g_3$ 定义的曲面，这里 $g_2,g_3\in k(B)$) 有理点的刻画等价于满足 $\pi e=\mathrm{id}$ 的截面 e $B\to X$ 的刻画 截面存在的一个必要条件是没有多重纤维．没有多重纤维的纤维化称为约化的 (reduced) 通过对基曲线作适当的分歧覆叠后，每个纤维化都有截面 (从而是约化的) ([3])．每个纤维化都可以通过一系列对数变换 ([4])——在纤维的邻域内对纤维化作局部手术——的逆变换而得到约化的纤维化

可以如下刻画约化椭圆纤维化 对于每个这样的纤维化 π $X\to B$，对应唯一的纤维化 $\mathcal{J}_B(X)\to B$，它是**群对象** (group object) 且使得 X/B 是 $\mathcal{J}_B(X)/B$ 上的**主齐性空间** (principal homogeneous space)，$\mathcal{J}_B(X)/B$ 是 X/B 的 Jacobi 纤维化 (Jacobi fibration)，它刻画了截面的存在性 对于给定的 Jacobi 纤维化 $\mathcal{J}/B$，满足 $\mathcal{J}_B(X)\simeq J$ 的纤维化 X/B 的同构类的集合 $I(\mathcal{J}/B)$ 有一个类似于**可逆层** (invertible sheaf) 的上同调描述 这里局部截面 τ $\mathcal{J}\to B$ 的层 $\mathscr{H}^0(\mathcal{J}/B)$ 扮演了 $\mathcal{O}_B^*$ 的角色 有一个自然的一一对应

$$\theta\quad I(\mathcal{J}/B)\ \to\ H^1(B,\mathscr{H}^0(\mathcal{J}/B)),$$

在这个对应下 Jacobi 纤维化对应于零元素 利用 θ 可以区别代数的和非代数的纤维化 对于约化纤维化 π $X\to B$，曲面 X 是代数的，当且仅当 $H^1(B,\mathscr{H}^0(\mathcal{J}/B))$ 中与之对应的元素的阶有限 可以进一步探讨与可逆层类似的结论．与正合列

$$0\to\mathbf{Z}\to\mathcal{O}_B\xrightarrow{\exp}\mathcal{O}_B^*\to 1$$

相类似的是正合列

$$0 \to R^1\tau_*\mathbf{Z} \to \mathscr{H}^0(T(\mathscr{C})/B) \to \mathscr{H}^0(\mathscr{C}/B) \to 0,$$

这里 $T(\mathscr{C})$ 是纤维 $\tau^{-1}(b)$ 在 $e(b)$ 点的切空间，$\mathscr{H}^0(T(\mathscr{C})/B)$ 是从 $T(\mathscr{C})/B$ 的局部截面层．边缘同态

$$\delta \quad H^1(B,\mathscr{H}^0(\mathscr{C}/B)) \to H^2(B,R^1\tau_*\mathbf{Z})$$

可以使人们看出何时两个纤维化互为形变　两个纤维化互为形变的充分必要条件是与之相对应的元素在 δ 下的象相同（见[4]）．

代数椭圆曲面 (algebraic elliptic surfaces) **的分类**．假定 char $k=0$　椭圆曲面的典范维数 (canonical dimension) $k(X)\leqslant 1$，即等于 -1, 0 或 1　如果 $k(X)=1$，则称 X 为一般型椭圆曲面 (elliptic surface of general type)．它们可用条件 $12K_X\neq 0$ 及 $|12K_X|\neq\phi$ 来刻画．满足 $p_g\geqslant 2$，或更一般地，存在 m，使 $P_m\geqslant 2$ 的椭圆曲面是一般型的．

$k(X)=0$ 的椭圆曲面可用条件 $12K_X=0$ 来刻画　在这种情况下，$\chi(\mathscr{O}_X)$ 可取三个值 2, 1 或 0　如果 $\chi(\mathscr{O}_X)=2$，则 X 是**椭圆 $K3$ 曲面** ($K3$-surface) ($q=0$, $K_X=0$)．在这种情况下，B 同构于射影直线 P^1，纤维化 π 没有多重纤维，且 X 有不变量为 $p_g=1$, $q=0$, $b_2=22$　如果 $\chi(\mathscr{O}_X)=1$，则 X 是 Enriques 曲面 (Enriques surface)，即 $q=p_g=0$, $2K_X=0$ 的曲面．(Enriques 曲面都是椭圆的．) 在这种情况下，$B\simeq P^1$，纤维化 π 有两条重数为 2 的多重纤维，且 X 有不变量 $p_g=q=0$, $b_2=10$　如果 $\chi(\mathscr{O}_X)=0$，则有两种可能的情况．X 或者是 Abel 簇 (这时，$p_g=1$, $q=2$, $b_2=6$)，或者 X 是超椭圆曲面 (hyper-elliptic surface)，即 X 有一个有限非分歧覆叠是两条椭圆曲线的积．在后一种情况下，$p_g=0$, $b_1=2$, $b_2=2$, $B\simeq P^1$，π 有 3 条或 4 条多重纤维，它们的重数有四种可能性 (3,3,3)，(2,4,4)，(2,3,6) 及 (2,2,2,2)，并且分别地有 $3K_X=0$, $4K_X=0$, $6K_X=0$ 及 $2K_X=0$

$K(X)=-1$ 的椭圆曲面是**直纹曲面** (ruled surface)，它由条件 $|12K_X|=\phi$ 来刻画．这里有两种可能的情况 1) X 是 $p_g=q=0$, $b_2=10$ 的曲面，且 π 至多有一条多重纤维　此外，没有多重纤维的曲面可以如下得到　取一个由两个三次多项式 F_0 和 F_1 确定的有理映射 $P^2\to P^1$，再爆发 F_0 与 F_1 的 9 个交点　或者 2) X 是 $p_g=0$, $q=1$, $b_2=2$ 的曲面，且多重纤维的重数 m_i 满足不等式

$$\sum\left[1-\frac{1}{m_i}\right]<2$$

典范类的公式及椭圆曲面的分类也能推广到有限特征的域的情况（[5]，[6]）

非代数椭圆曲面 (non-algebraic elliptic surfaces) **的分类**　非代数曲面的代数维数 $a(X)=\operatorname{trdeg} M(X)$ 为 1 或 0．如果 $a(X)=0$，则 X 是非椭圆的．所有 $a(X)=1$ 的曲面都是椭圆的　这里，$\pi\ X\to B$ 的结构可以几乎典范地被确定　每个这样的纤维化 π 必定是椭圆的　用典范维数对非代数椭圆曲面的分类恰好与对代数椭圆曲面的分类完全一样　$k(X)=-1\Leftrightarrow|12K_X|=\phi$, $k(X)=0\Leftrightarrow 12K_X=0$, $k(X)=1$ (X 是基本型的) $\Leftrightarrow|12K_X|\neq\phi$, $12K_X\neq 0$

$k(X)=0$ 的非代数曲面属于如下类型之一 1) $K3$ 曲面 ($\chi(\mathscr{O}_X)=2$, $b_1=0$, $b_2=22$, X 是单连通的)，2) 复环面 ($K_X=0$, $\chi(\mathscr{O}_X)=0$, $b_1=4$, $b_2=6$)，3) 小平曲面 (Kodaira surfaces) ($K_X=0$, $\chi(\mathscr{O}_X)=0$, $b_1=3$, $b_2=4$)　第一小平曲面是椭圆曲线上以某椭圆曲线作为典型纤维的局部全纯平凡纤维化，从可微性的角度看，第一小平曲面是以圆为纤维的三维环面上的丛．4) $\chi(\mathscr{O}_X)=0$, $p_g=0$, $b_1=1$, $b_2=0$ 的曲面，对于这些曲面，有 $mK_X=0$, $m=2,3,4$ (与超椭圆曲面类似)　它们以小平曲面作为有限非分歧覆叠　在 2), 3) 和 4) 的情况下，$\mathbf{C}^2$ 是 X 的万有覆叠

$K(X)=-1$ 的非代数椭圆曲面是 Hopf 曲面，即其万有覆叠是 $\mathbf{C}^2\backslash 0$　对于 Hopf 曲面，$\chi(\mathscr{O}_X)=0$, $b_1=1$, $b_2=0$　真 Hopf 曲面是 $(\mathbf{C}^2\backslash 0)/T$，这里 $T(z_1,z_2)=(\alpha_1 z_1,\alpha_2 z_2)$ 是 T 的实生成元．真 Hopf 曲面同胚于 $S^1\times S^2$，并且被这个性质所刻画．任意椭圆 Hopf 曲面是真 Hopf 曲面的商（[4]）．

参考文献

[1] Алгебраические поверхности, M, 1965 (英译本 Algebraic surfaces, *Proc Steklov Inst Math*, **75** (1967))

[2] Bombieri, E and Husemoller, D, Classification and embeddings of surfaces, in Algebraic geometry, Proc Symp Pure Math, Vol 29, Amer Math Soc, 1975, 329－420

[3A] Kodaira, K, On compact complex analytic surfaces Ⅰ, *Ann of Math* (2), **71** (10), 111－152

[3B] Kodaira, K, On compact complex analytic surfaces Ⅱ, *Ann of Math* (2), **77** (1963), 563－626

[3C] Kodaira, K, On compact complex analytic surfaces Ⅲ, *Ann of Math* (2), **78** (1963), 1－40

[4A] Kodaira, K On the structure of compact complex analytic surfaces Ⅰ, *Amer J Math*, **86** (1964), 751－798

[4B] Kodaira, K On the structure of compact complex analytic surfaces Ⅱ, *Amer J Math*, **88** (1966), 682－721

[4C] Kodaira, K On the structure of compact complex analytic surfaces Ⅲ, *Amer J Math*, **90** (1968), 55－83

[4D] Kodaira, K On the structure of compact complex analytic surfaces Ⅳ, *Amer J Math*, **90** (1968), 1048－1066

[5] Mumford, D, 'Enriques' classification of surfaces in char

p I, in Global analysis, Papers in honour of K Kodaira, Univ Tokyo Press, 1969, 325-339

[6] Bombieri, E and Mumford, D, 'Enriques' classification of surfaces in char p II, in Complex analysis and algebraic geometry, Iwanami Shoten, 1977, 23-42

Вал С Куликов 撰

【补注】 第二小平曲面 (secondary Kodaira surface) 是除第一小平曲面 (primary Kodaira surface) 以外的小平曲面，它有一个非分歧覆叠，其覆叠曲面是第一小平曲面．第二小平曲面是有理曲线上的椭圆纤维化，其第一 Betti 数是 1

在代数椭圆曲面的分类一节的开头提到的典范维数 $k(X)$ 是**小平维数** (Kodaira dimension) Kod(X)(当 Kod$(X)=-\infty$ 时 $k(X)=-1$)

参考文献

[A1] Barth, W, Peters, C and Ven, A van der, Compact complex surfaces, Springer, 1984

蔡金星 译

Emden 方程 [Emden equation ; Эмдена уравнение]

二阶非线性常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+y^\alpha=0, \qquad (1)$$

或者其自伴形式

$$\frac{d}{dx}\left[x^2\frac{dy}{dx}\right]+x^2y^2=0,$$

其中 $\alpha>0$ ($\alpha\neq1$) 是常数 点 $x=0$ 是 Emden 方程的奇点 经过变量变换 $x=1/\xi$，方程 (1) 化为

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\frac{y^\alpha}{\xi^4}=0,$$

而经过变量变换 $y=\eta/x$，则化为

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}+\frac{\eta^\alpha}{x^{\alpha-1}}=0$$

经过变量变换

$$x=e^{-t},\ y=e^{\mu t}u,\quad \mu=\frac{2}{(\alpha-1)},$$

并经过代换 $u'=v(u)$ 降阶以后，得到一阶方程

$$\frac{dv}{du}=-(2\mu-1)-\frac{\mu(\mu-1)u+u^\alpha}{v}$$

方程 (1) 是 R Emden ([1]) 在研究多方气球的平衡条件时得到的，这项研究需要考虑方程 (1) 满足初始条件 $y(0)=1$, $y'(0)=0$ 的解 $y(x)$，这里假设 $y(x)$ 定义在某个区间 $[0,x_0]$ $(0<x_0<\infty)$ 上，并具有性质

$$\text{对于 } 0\leqslant x<x_0,\ y(x)>0,\ y(x_0)=0$$

有时，方程 (1) 也称为 Lienard-Emden 方程 (Lienard-Emden equation).

比 Emden 方程更一般的方程是 Fowler 方程 (Fowler equation)

$$\frac{d}{dx}\left[x^2\frac{dy}{dx}\right]+x^\lambda y^\alpha=0,\ \lambda,\ \alpha>0$$

和 Emden-Fowler 方程 (Emden-Fowler equation)

$$\frac{d}{dx}\left[x^\rho\frac{dy}{dx}\right]\pm x^\lambda y^\alpha=0, \qquad (2)$$

其中 $\rho,\lambda,\alpha\neq1$ 是一些实参数 作为特殊情况，这个方程包括 Thomas-Fermi 方程 (Thomas-Fermi equation)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y^{3/2}}{\sqrt{x}},$$

它是在研究原子中的电子分布时出现的 如果 $\rho\neq1$，则经过变量变换，方程 (2) 可以化为下列形式

$$\frac{d^2w}{ds^2}\pm s^\sigma w^\alpha=0$$

存在关于 Emden-Fowler 方程的解的定性和渐近研究的各种结果 (例如，见[2], [3])．对于 Emden-Fowler 型方程 (equation of Emden-Fowler type)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a(x)|y|^\alpha\operatorname{sign}y=0$$

也进行了详细研究 (关于这个方程和与其相似的 n 阶方程，见[4]).

参考文献

[1] Emden, R, Gaskugeln, Teubner, 1907

[2] Sansone, G, Equazioni differenziali nel campo reale, 2, Zanichelli, 1949

[3] Bellman, R, Stability theory of differential equations, McGraw-Hill, 1953 (R 贝尔曼，微分方程的解的稳定性理论，科学出版社，1957)

[4] Кигурадзе, И Т, Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, Тб, 1975

Н Х Розов 撰 张鸿林 译

经验分布 [empirical distribution, эмпирическое распределение]，样本分布 (sample distribution)

为了估计真分布而由样本确定的概率分布 假定观测结果 X_1, , X_n 是独立同分布随机变量，其分布函数为 $F(x)$，又设 $X_{(1)}<\ <X_{(n)}$ 是相应的次序统计量 相应于 X_1, , X_n 的经验分布 (empirical distribution) 定义为在每个值 X_k 处的概率都是 $\frac{1}{n}$ 的离散分布．经验分布函数 (empirical distribution function) $F_n(x)$ 是在 $X_{(1)}$, , $X_{(n)}$ 的跳跃都为 $\frac{1}{n}$ 的阶梯函数

$$F_n(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant X_{(1)},\\ \frac{k}{n}, & X_{(k)}<x\leqslant X_{(k+1)},\ 1\leqslant k\leqslant n-1,\\ 1, & x>X_{(n)}\end{cases}$$

对于 $X_1, \cdots, X_n$ 的固定值，函数 $F_n(x)$ 具有通常**分布函数**(distribution function)的所有性质．对于每一固定的实数 x，$F_n(x)$ 作为 $X_1,\cdots,X_n$ 的函数是随机变量．因此，相应于样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的经验分布函数是依赖于实参数 x 的随机变量族 $F_n(x)$．对于固定的 x，

$$\mathsf{E}F_n(x)=F(x),\ \mathsf{D}F_n(x)=\frac{1}{n}F(x)[1-F(x)],$$

且

$$\mathsf{P}\{F_n(x)=\frac{k}{n}\}=\binom{n}{k}[F(x)]^k[1-F(x)]^{n-k}$$

根据大数律，对每一个 x，当 $n\to\infty$ 时，概率为 1 有 $F_n(x)\to F(x)$．这意味着，$F_n(x)$ 是分布函数 $F(x)$ 的无偏相合估计．当 $n\to\infty$ 时，经验分布函数概率为 1 对 x 一致收敛到 $F(x)$，也就是说，如果

$$D_n=\sup_x|F_n(x)-F(x)|,$$

则

$$\mathsf{P}\{\lim_{n\to\infty}D_n=0\}=1$$

(Гливенко-Cantelli 定理(Glivenko-Cantelli theorem))．

量 D_n 是 $F_n(x)$ 对 $F(x)$ 近似程度的一个度量．A．H．Колмогоров (1933) 找到了它的极限分布．对于连续分布函数 $F(x)$，

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{\sqrt{n}\,D_n<z\}=K(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k e^{-2k^2z^2},\quad z>0$$

如果 $F(x)$ 未知，则为检验它是给定的连续函数 $F_0(x)$ 这个假设，可采用基于 D_n 统计量的检验(见**Колмогоров 检验**(Kolmogorov test)，**Колмогоров-Смирнов 检验**(Kolmogorov-Smirnov test)，**统计学中的非参数方法**(non-parametric methods in statistics))．

经验分布的矩和任何其他数字特征称为样本的(sample)或经验的(empirical)，例如，$\bar{X}=\sum_{k=1}^n X_k/n$ 是样本均值(sample mean)，$s^2=\sum_{k=1}^n(X_k-\bar{X})^2/n$ 是样本方差(sample variance)，以及 $\hat{\alpha}_r=\sum_{k=1}^n X_k^r/n$ 是 r 阶样本矩(sample moment)．

样本数字特征用来作为总体分布相应数字特征的统计估计．

参考文献

[1] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983

[2] Waerden, B. L. van der, Mathematische statistik, Springer, 1957

[3] Боровков, А. А., Математическая статистика, М., 1984

А. В. Прохоров 撰

【补注】 近几年来，经验分布在统计和有关理论中的应用已有大的发展．文献[A2]已对此作了概述．关于与经验分布有关的强收敛理论的发展，见[A1]．

参考文献

[A1] Csorgo, M. and Révesz, P., Strong approximation in probability and statistics, Acad. Press, 1981

[A2] Shorack, G. R. and Wellner, J. A., Empirical processes with applications to statistics, Wiley, 1986

[A3] Loéve, M., Probability theory, Princeton Univ. Press, 1963 (中译本：M．洛易甫，概率论(上册)，科学出版社，1966)

[A4] Gaenssler, P. and Stute, W., Empirical processes: a survey of results for independent and identically distributed random variables, *Ann. Prob.*, 7 (1977), 193－243

吴启光 译　陶 波 校

空盒检验[empty-boxes test, пустых ящиков критерий]

用来检验一个独立样本来自一给定分布这一假设(H_0)的统计检验．更确切地，设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自连续分布 $F(x)$ 的独立样本．选择点 $z_0=-\infty<z_1<\cdots<z_{N-1}<z_N=\infty$，使得 $F(z_k)-F(z_{k-1})=1/N$，$k=1,\cdots,N$．这个检验的构造是基于统计量 μ_0，而 μ_0 是不包含任何观测值 x_i 的区间 $(z_{k-1}, z_k]$ 的个数．这个检验的规则为：若 $\mu_0\leqslant C$，则接受 H_0，若 $\mu_0>C$，则否定 H_0．常数 C 由第一类错误的概率(即 H_0 为真但被否定的概率)等于一给定值来确定．对于大的 n 和 N，利用随机分布的极限定理可计算常数 C 和估计空盒检验的功效．

参考文献

[1] Колчин, В. Ф., Севастьянов, Б. А., Чистяков, В. П., Случайные размещения, М., 1976 (英译本：Kolchin, V. F., Sevast'yanov, B. A. and Chistyakov, V. P., Random allocations, Winston, 1978)

Б. А. Севастьянов 撰　吴启光 译　陶 波 校

空集[empty set, пустое множество]

不含元素的集合．记号：ϕ，Λ．换句话说，$\phi=\{x: x\neq x\}$．并且，在这个定义中，可以用任何永不成立的论断来代替 $x\neq x$．空集是任何集合的子集．

М. И. Войцеховский 撰　张鸿林 译

自同态[endomorphism, эндоморфизм]，代数系统的

代数系统 A 到自身内的一个与其结构相容的映射．即如果 A 是一个代数系统且其表征由运算符号集合 Ω_F 和谓词符号集合 Ω_p 构成，那么一个自同态 $\varphi: A\to A$ 必须满足下列条件：

1) 对任一 n 元运算 $\omega\in\Omega_F$ 及 A 的元素的任意序列 $a_1,\cdots,a_n$，

$$\varphi(a_1,\cdots,a_n\omega)=\varphi(a_1)\cdots\varphi(a_n)\omega,$$

2) 对任意 n 元谓词 $P\in\Omega_p$ 及 A 的元素的任意序列 a_1,

, a_n,

$$P(a_1, \quad, a_n) \Rightarrow P(\varphi(a_1), \quad, \varphi(a_n))$$

自同态概念是两个代数系统的**同态**（homomorphism)概念的特殊情况 任一代数系统的所有自同态关于映射的合成运算构成一个幺半群，该幺半群的单位元是这个代数系统的基础集合上的恒等映射（见**自同态半群**（endomorphism semi-group)）

一个有逆元的自同态称为代数系统的一个**自同构**(automorphism) М Ш Цаленко 撰

【补注】 下面是自同态的一个最简单的例子．Abel群 A 的一个自同态，是一个映射 φ $A\to A$ 且满足条件 $\varphi(0)=0$ 并且对 A 中任意元素 a, b 来说，$\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$，$\varphi(-a)=-\varphi(a)$ 对于一个有单位元 1 的环 R 的自同态 φ，要求 φ 是 R 的基础集上的可换群的自同态，而且 $\varphi(1)=1$，以及对任意 $a,b\in R$，$\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$

参考文献

[A1] Cohn, P M , Universal algebra, Reidel, 1981

卢景波 译

自同态环 [**endomorphism ring, эндоморфизмов кольцо**]

由 A 到其自身的所有态射所组成的结合环 End A =Hom (A, A), 这里的 A 是某一**加性范畴**（additive category)中的一个对象 End A 中的乘法就是态射的合成，而加法则是态射的加法，它们都是由加性范畴的公理系所定义的 恒等态射 1_A 是环 End A 的单位元 End A 中的一个元素 φ 是可逆的，当且仅当 φ 是对象 A 的一个自同构 如果 A 与 B 都是一个加性范畴 C 中的对象，那么群 Hom (A, B) 就有 End A 上的右模的自然结构，而且有 End B 上的左模的自然结构．设 T $C\to C_1$ 是从一个加性范畴 C 到一个加性范畴 C_1 的一个共变（或反变）加性函子 那么，对于 C 中的任一个对象 A，函子 T 就引出一个自然同态（或反同态）End $A\to$ End $T(A)$

设 C 是环 R 上的模范畴 对于一个 R 模 A，环 End A 是由 Abel 群 A 的自同构中那些可与 R 的元素乘法可交换的所有自同构所组成的 两个自同态 φ 与 ψ 之和是由公式

$$(\varphi+\psi)(a) = \varphi(a)+\psi(a),\ a\in A$$

来定义的 如果 R 是可交换的，则 End A 就有一个 R 代数的自然结构 模 A 的许多性质都可由 End A 来刻画．例如，A 是一个不可约模，当且仅当 End A 是一个可除环

一个结合环 K到 End A 内的任意的一个同态 π 称为环 K 的表示（representation of the ring)（由对象 A 的自同态）．如果 K 有单位元，那么就需要再加一个条件 $\pi(1)=1_A$．任何结合环 K 都在某一个 Abel 群 A 的自同态环中有一个忠实的表示 再者，若 K 有单位元，则 A 可选成 K 的加法群，使 K 的元素由左乘而作用于此群上 若 K 没有单位元，而 K_1 是由 K 另外加一个单位元所得的环，则 A 可取为 K_1 的加法群

在一个 Abel 簇 X 的情况，除了环 End X 以外（它是一个有限生成的 Z 模）人们还将考虑自同态代数（algebra of endomorphisms)（复数乘法的代数 (algebra of complex multiplications)) $\mathrm{End}^0 X = \mathbf{Q}\otimes_Z \mathrm{End}\, X$

参考文献

[1] Faith, C , Algebra rings, modules, and categories, 1-2, Springer, 1973－1976

[2] Mumford, D , Abelian varieties, Oxford Univ Press, 1974

[3] Итоги науки и техники Алгебра Топология Геометрия, т 21 М , 1983, 183－254

Л В Кузьмин 撰 周伯埙 译

自同态半群 [**endomorphism semi-group, эндоморфизмов полугруппа**]

某对象（赋以某种结构 σ 的集合 X）的自同态对于乘法（依次进行变换）运算组成的半群．对象 X 可以是向量空间、拓扑空间、代数系、图等等，通常把它看成是某**范畴**（category）的对象，而通常该范畴中的**态射**（morphism）是保持 σ 中关系的映射（线性变换或连续变换，同态等） X的全部自同态（即到它的子对象的态射）的集合 End X 是 X 的全部变换的半群 T_X(见**变换半群**（transformation semi-group)）的子半群．

半群 End$X$可以包含结构 σ 的大量的信息 例如设 X 和 Y 分别是除环 F 和 H 上的维数 ≥2 的向量空间，若它们的自同态（即，线性变换）的半群 End$X$ 和 End$Y$ 同构，就推出 X 和 Y（特别是 F 和 H）同构 某些前序集和格，每个 Boole 环，某些别的代数系都被它们的自同态半群决定到同构 对某些模和变换半群这也是对的 X的类似的信息由 End X的某个真子半群(例，拓扑空间的同胚变换的半群）所负载

用这种方法，对象 X的一些类（例，拓扑空间）可以由它们的部分自同态的半群也即是作为 X的子对象的态射的部分变换的半群所刻画．

参考文献

[1] Глускин, Л М , в кн , Труды 4－20 Всесоюзного математического съезда, т 2, Л 1964, 3－9

[2] Зыков, А А , Теория конечных графов, Новосиб , 1969

[3] Magill, K D, A survey of semigroups of continuous selfmaps, Semigroup Forum **11** (1975－1976), 189－282

[4] Petrich, M , Rings and semigroups, Springer, 1974

Л М Глускин 撰 石生明 译 许以超 校

能量不等式 [energy inequality, энергетическое неравенство]

用某种形式估计**能量积分** (energy integral) 的不等式

参考文献

[1] Mizohata S. The theory of partial differential equations Cambridge Univ Press, 1973 (译自日文)

А В Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Courant, R and Hilbert, D, Methods of mathematical physics, Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (译自德文) (中译本 R 柯朗, D 希尔伯特, 数学物理方法, II, 科学出版社, 1977)

孙和生 译 陆柱家 校

能量积分 [energy integral, энергии интеграл]

表示一个力学系统在某一时刻的动能和势能之和的量

例如, 假设在一个具有分段光滑边界 S 的有界区域 G 中, 对于双曲型偏微分方程

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\operatorname{div}(p\operatorname{grad}u)-qu+F(x,t)\equiv -Lu+F(x,t) \tag{1}$$

提出混合问题

$$u|_{t=+0}=u_0(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=+0}=u_1(x), \tag{2}$$

$$\alpha u+\beta\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=0,\ t>0, \tag{3}$$

其中 $p\in C^1(G)$, $q\in C(\overline{G})$, $p(x)>0$, $q(x)\geqslant 0$, $\rho\in C(G)$, $\alpha,\beta\in C(S)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)\geqslant 0$, $\alpha(x)+\beta(x)>0$

问题 (1)−(3) 的古典解是函数类 $C^2(G\times(0,\infty))\cap C^1(\overline{G\times(0,\infty)})$ 中的函数 $u(x,t)$, 它在柱形域 $G\times(0,\infty)$ 中满足 (1), 在柱形域的下底满足初始条件 (2), 在柱形域的侧面满足边界条件 (3)

此时关系式

$$J^2(t)=J^2(0)+\int_0^t\int_G F(x,\tau)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial\tau}\,dx\,d\tau,\quad t\geqslant 0, \tag{4}$$

成立, 其中

$$J^2(0)=\frac{1}{2}\int_G(\rho u_1^2+p|\operatorname{grad}u_0|^2+qu_0^2)dx+\frac{1}{2}\int_S p\frac{\alpha}{\beta}u_0^2dS$$

能量积分 (energy integral) 定义为量

$$J^2(t)=\frac{1}{2}\int_G\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+p|\operatorname{grad}u|^2+qu^2\right]dx+\frac{1}{2}\int_S p\frac{\alpha}{\beta}u^2dS$$

对于 $F=0$, 等式 (4) 有形式

$$J^2(t)=J^2(0),\quad t\geqslant 0$$

能量积分的物理意义为 一个没有外界扰动的振荡系统的总能量不随时间而变 (能量守恒律).

参考文献

[1] Владимиров, В С, Уравнения математической физики, 4 изд, М, 1981 (英译本 Vladimirov, V S, Equations of mathematical physics, Mir, 1984)

А Б Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ladyzhenskaya, O A and Ural'tseva, N N, Equations aux derivées partielles de type elliptique, Dunod, 1969 (译自俄文).

[A2] Ладыженская О А, Солонников, В А, Уральцева, Н Н, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М, 1967 (英译本 Ladyzhenskaya, O A, Solonnikov, V A and Ural'tseva, N N, Linear and quasi-linear equations of parabolic type, Amer Math Soc, 1968)

[A3] Bers, L, John, F and Schechter, M, Partial differential equations, Interscience, 1966

[A4] John, F, Partial differential equations, Springer, 1978 (中译本 F 约翰, 偏微分方程, 科学出版社, 1986)

[A5] Garabedian, P R, Partial differential equations, Wiley, 1967

陆柱家 译

能量法 [energy method, энергетический метод]

同 **Ritz 法** (Ritz method).

测度的能量 [energy of measures, энергия мер]

位势论 (potential theory) 中的一个概念, 是电荷系统的位能这个物理概念的类似物 对于 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ ($n\geqslant 2$) 的点 $x=(x_1,\ldots,x_n)$, 设

$$H(|x|)=\begin{cases}\ln\dfrac{1}{|x|}, & 当\ n=2,\\ \dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & 当\ n\geqslant 3,\end{cases} \tag{1}$$

为 Laplace 方程的基本解, 又设

$$U_\mu(x)=\int H(|x-y|)\,d\mu(y) \tag{2}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 的 Borel 测度 μ 的 Newton 位势 ($n\geqslant 3$) 或者对数位势 ($n=2$)

下面限于 $n\geqslant 3$ 的情形. 两个非负测度 μ 和 ν 的**相互能量** (mutual energy) 定义为

$$(\mu,\nu)=\int H(|x-y|)\,d\mu(x)\,d\nu(y)$$

$$=\int U_\mu(y)dv(y)=\int U_v(x)d\mu(x) \qquad (3)$$

此时 $(\mu,v)\geqslant 0$，但可能 $(\mu,v)=+\infty$ 测度 μ 的能量定义为数量 (μ,μ)，$0\leqslant(\mu,\mu)\leqslant+\infty$．对于两个带号测度 μ,v，可先做标准分解 $\mu=\mu^+-\mu^-$，$v=v^+-v^-$（或者具有形式 $\mu=\mu_1-\mu_2$，$\mu_1,\mu_2\geqslant 0$ 的任一分解），如果这四个测度的能量都有限，则定义 μ 与 v 的相互能量为

$$(\mu,v)=(\mu^+,v^+)+(\mu^-,v^-)-(\mu^+,v^-)-(\mu^-,v^+),$$

它可能是负的，但

$$(\mu,\mu)\geqslant\left(\sqrt{(\mu^+,\mu^+)}-\sqrt{(\mu^-,\mu^-)}\right)^2\geqslant 0 .$$

具有有限能量的测度全体 $\mathscr{E}$，关于标量积 (μ,v) 和能量范数（energy norm）$\|\mu\|_e=\sqrt{(\mu,\mu)}$ 构成一个准 Hilbert 向量空间 此时，Буняковский－Cauchy－Schwarz 不等式 $|(\mu,v)|\leqslant\|\mu\|_e\cdot\|v\|_e$ 以及如下能量原理（energy principle）都成立 如果 $\|\mu\|_e=0$，则 $\mu=0$ H Cartan 证明了空间 $\mathscr{E}$ 不完全，但其中非负测度全体之集合 $\mathscr{E}^+\subset\mathscr{E}$ 在 $\mathscr{E}$ 中完全．

设 K 为 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 3)$ 中的紧集 这时，在 K 上的所有概率测度 λ(即 $\lambda\geqslant 0$，$\lambda(K)=1$)中，存在一个极值容量测度（extremal capacitary measure）λ_0，即它具有最小的能量 (λ_0,λ_0) λ_0 与 K 的容量 $C(K)$ 之间的关系为

$$(\lambda_0,\lambda_0)=\int U_{\lambda_0}(x)d\lambda_0(x)=\frac{1}{C(K)} \qquad (4)$$

如果测度 $\mu\in\mathscr{E}$ 的位势 U_μ 有平方可和的梯度，则

$$c(n)\|\mu\|_e=\|U_\mu\|, \qquad (5)$$

其中

$$\|U_\mu\|=\left[\int_{\mathbf{R}^n}\operatorname{grad}^2U_\mu(x)dx\right]^{1/2}$$

为 Dirichlet 范数（Dirichlet norm），且 $c(n)=(n-2)2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$，$n\geqslant 3$ 实际上，对任意测度 $\mu\in\mathscr{E}$，式(5)也都成立，但这时 Dirichlet 范数 $\|U_\mu\|$ 是通过一个合适的极限过程来定义的

对平面 $\mathbf{R}^2$ 的情形，由于对数核（1）在无穷远点的奇性，不能直接利用（3）和对数位势（2）来定义测度的能量．设 Ω 是 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 中的有界区域，其 Green 函数为 $g(x,y)$，又设 μ 是 Ω 上的 Borel 测度．当用形式为

$$G_\mu(x)=\int g(x,y)d\mu(y)$$

的 Green 位势 G_μ 和 G_v 来代替（3）中的 Newton 位势 U_μ 和 U_v 时，对于 $n\geqslant 3$，得到测度能量的另一种定义，它与上面给出的定义是等价的．然而，这个定义对于 $n=2$ 也是合适的，而且保持了上述的所有性质（这时 $c(2)=2\pi$）

参考文献

[1] Brelot, M , Elements de la theorie classique du potentiel, Sorbonne Univ Centre Doc Univ , Paris, 1959

[2] Wermer, J , Potential theory, Springer, 1974

[3] Ландкоф, Н С , Основы современной теорий потенциалв, М , 1966（英译本 Landkof, N S , Foundations of modern potential theory, Springer, 1972）

Е Д Соломенцев 撰 高琪仁、吴炯圻 译

Engel 代数 [Engel algebra, Энгелева алгебра]

一个满足下述 Engel 条件（Engel condition）的结合代数或 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 对于每个 $X\in\mathfrak{g}$，其内导子 ad X（见**环中的导子**（derivation in a ring））是幂零的．换言之，Engel 代数的所有元素是 **Engel 元**（Engel element）（也可见**诣零 Lie 代数**（Lie algebra, nil））

Ю А Бахтурин 撰

许永华 译

Engel 元 [Engel element, Энгелев элемент]

Lie 环或结合环中的一个元素，由它所决定的内导子（见**环中的导子**（derivation in a ring））对此环是幂零的．如果域上一个有限维 Lie 代数的所有元都是 Engel 元，那么此代数是幂零的（见 **Engel 定理**（Engel theorem））并且称此导子的幂零指数为 Engel 指数（Engel index）一般地，一个 Lie 代数的 Engel 元的集合甚至不是子空间，但如果在此集合中加上诸如广义可解性之类的附加条件，它便成为一个子代数，甚至是一个理想（[1]）若存在指数为 2 的 Engel 元，则此 Lie 代数称为强退化的（strongly degenerate）Lie 代数的一个理想称为 Кострикин 根（Kostrikin radical），如果它是使此 Lie 代数对该理想的商代数为非强退化的所有理想中之最小者

参考文献

[1] Amayo, R K , Stewart, I , Infinite-dimensional Lie algebras, Noordhoff, 1974

[2] Кострикин, А И , В кн Избранные вопросы алгебры и логики, Новосиб , 1973, 142－160

[3] Kostrikin, A I , Around Burnside, Springer, Forthcoming（译自俄文）

Ю А Бахтурин 撰

许永华 译 牛凤文 校

Engel 群 [Engel group, Энгелева группа]

一个群 G，对它的每两个元素 a,b 皆存在一个整数 $n=n(a,b)$ 使得 $[[\quad[[a,b],b],\quad b],b]=1$，其中 b 被隔开 n 次而 $[a,b]$ 是 a 与 b 的**换位子**（commutator）若

数 n 能选取与 a,b 无关，则称 G 是有限类 n 的 Engel 群 (Engel group of finite class n). Engel 群的类包含了局部幂零群的类，但与它并不重合 类 n 的每个幂零群是同类的 Engel 群．类为 2 的 Engel 群是类至多为 3 的幂零群

这种群是以 F Engel 来命名的

参考文献

[1] Курош, А Г, Теория групп, 3 изд, М, 1967 (英译本 Kurosh, A G, The theory of groups, 1-2, Chelsea, 1955-1956)　　H H Вильямс 撰

【补注】 有限 Engel 群是**幂零群** (nilpotent group)

参考文献

[A1] Robinson, D J S, A course in the theory of groups, Springer, 1982

[A2] Huppert, B, Finite groups, Springer, 1982

石生明 译　许以超 校

Engel 定理 [Engel theorem, энгеля теорема]

设 $\mathfrak{g}$ 是域 k 上有限维 Lie 代数，并设对所有 $X\in\mathfrak{g}$，线性算子

$$\operatorname{ad} X\ (\text{这里 } \operatorname{ad} X(Y)=[X,\ Y])$$

为幂零的，则存在 $\mathfrak{g}$ 的一组基，使得所有算子 $\operatorname{ad} X$ 的矩阵是主对角线上为零的三角阵

F Engel(大约在 1887 年，发表于 [1]) 证明了具有上述性质的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 是可解的，据此并应用 S Lie 的一个定理 (见 **Lie 定理** (Lie theorem)), 即得到上述断言 Engel 定理公开发表的证明最早是 W Killing ([2]) 给出的，他承认 Engel 的优先性 Engel 定理常被叙述为下面更一般的形式 如果 $\rho\ \mathfrak{g}\to \operatorname{End} V$ 是一个有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 在向量空间 V 上的线性表示 (这里 $\mathfrak{g}$ 和 V 被视为在一个任意域上)，且设对任一 $X\in\mathfrak{g}$，$\rho(X)$ 为幂零自同态，则存在一个非零向量 $v\in V$，使得对任意的 $X\in\mathfrak{g}$，$\rho(X)v=0$ 当 V 有限维时，可推得存在 V 的一组基，使得所有的 $\rho(X)$ 是主对角线上为零的三角矩阵 (或一回事，V 中存在一组完全标志 $F=\{V_i\}$，使得对所有的 $X\in\mathfrak{g}$ 及 $i\geq 1$ 有 $\rho(X)(V_i)\subset V_{i-1}$) 当 $\rho(\mathfrak{g})$ 是一个由交换运算 F 封闭的幂零自同态组成的子集的线性包时，Engel 定理的结论对任一 ρ 亦成立 一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 称为 Engel 代数 (Engel algebra), 如果任何 $X\in\mathfrak{g}$ 是 **Engel 元** (Engel element), 就是说，如果所有算子 $\operatorname{ad} X(X\in\mathfrak{g})$ 是幂零的 或者换句话说，如果对任何 X 存在一个 n 使得对任何 $Y\in\mathfrak{g}$ 皆有

$$[X,\ \ [X,\ Y]\ \cdot\ ]=0\ \ (n\text{ 个括号})$$

一个有限维 Lie 代数是 Engel 代数，当且仅当它是幂零的．但无限维代数的幂零性不能从 Engel 性质中推出．然而，零特征域上的有限生成 Lie 代数在对某个 n 满足 $(\operatorname{ad} X)^n=0$ (n 不依赖于 X) 条件下是幂零的 (Зельманов 定理 (Zel'manov theorem) 亦见 [3]) 对非零特征这是一个尚未解决的问题．

参考文献

[1] Lie, S and Engel, F, Theorie der Transformationsgruppen, 3, Teubner, 1893

[2] Killing, W, Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, *Math Ann*, **31** (1888), 252-290

[3] Levitzki, J, On a problem of A Kurosh, *Bull Amer Math Soc*, **52** (1946), 1033-1035

[4] Jacobson, N, Lie algebras, Interscience, 1962 (中译本 N 贾柯勃逊，李代数，上海科学技术出版社，1964)

[5] Bourbaki, N, Elements of mathematics Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975 (译自法文)

B B Горбацевич 撰

许永华、朱胜林 译　牛凤文 校

Enneper 曲面 [Enneper surface, эннепера поверхность]

覆盖回转曲面的一个代数**极小曲面** (minimal surface) 它的参数方程是

$$x=\frac{1}{4}\ (u^3-3u-3uv^2),$$

$$y=\frac{1}{4}\ (3v+3u^2v-v^3),$$

$$z=\frac{3}{4}\ (v-u^2)$$

这个曲面是 A Enneper 于 1864 年发现的．

M И Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Nitsche, J C C, Vorlesungen über Minimalflachen, Springer, 1975

张鸿林 译

整函数 [entire function, целая функция]

在整个复平面 (可能除去无穷远点) 解析的函数 它可以展开为在整个复平面中收敛的幂级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\ ,\quad a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ ,\quad k\geqslant 0\ ,$$

$$\lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}=0.$$

如果处处有 $f(z)\neq 0$，则 $f(z)=e^{P(z)}$，其中 $P(z)$ 是一个整函数 如果 $f(z)$ 在有限多个点处取零值，并设这些点是 $z_1,\ \ ,z_k$ (称为**函数的零点** (zero of the function))，则

$$f(z)=(z-z_1)\quad (z-z_k)e^{P(z)}\ ,$$

其中 $P(z)$ 是一个整函数

在$f(z)$具有无穷多个零点$z_1, z_2,$ 的一般情形下，有积表示式（见关于无穷积的 **Weierstrass 定理**（Weierstrass theorem））

$$f(z)=z^{\lambda}e^{P(z)}\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{z}{z_k})\exp(\frac{z}{z_k}+ \quad +\frac{z^k}{kz_k^k}), \quad (1)$$

其中$P(z)$是一个整函数 当$f(0)\neq 0$时，$\lambda=0$，当$f(0)=0$时，λ是零点$z=0$的重数

令

$$M(r)=\max_{|z|\leq r}|f(z)|.$$

如果对于大的r量$M(r)$的增长不快于r^{μ}，则$f(z)$是次数不超过μ的多项式．因此，如果$f(z)$不是多项式，则$M(r)$增长快于r的任何幂 为在这种情形下估计$M(r)$的增长，取指数函数作为比较函数．

由定义，$f(z)$为有限阶整函数（entire function of finite order），如果存在有限数μ，使得

$$M(r)<e^{r^{\mu}}, \quad r>r_0$$

满足上述条件的数μ的集合的最大下界ρ称为整函数$f(z)$的阶 (order of the entire function) 阶可按公式

$$\rho=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k\ln k}{\ln|1/a_k|}$$

计算．

如果ρ阶函数$f(z)$满足条件

$$M(r)<e^{\alpha r^{\rho}}, \quad \alpha<\infty, \quad r>r_0, \quad (2)$$

则称$f(z)$为ρ阶有限型（finite type）函数．满足上述条件的数α的集合的最大下界σ称为整函数$f(z)$的型 (type of the entire function)，它由公式

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, k^{1/\rho}|a_k|^{1/k}=(\sigma e\rho)^{1/\rho}$$

确定

在有限型整函数中还区分正规型整函数（entire function of normal type）（$\sigma>0$）和最小型整函数 (entire function of minimal type)（$\sigma=0$） 如果条件 (2) 对任何$\alpha<\infty$都不成立，则称所给函数为最大型整函数（entire function of maximal type) 或无穷型整函数（entire function of infinite type） 阶为1的有限型整函数以及阶小于1的整函数由条件

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, k|a_k|^{1/k}=\beta<\infty$$

所刻画，称为指数型整函数 (entire function of exponential type)．

ρ 阶整函数$f(z)$的零点$z_1, z_2,$ 具有性质

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|z_k|^{\rho+\varepsilon}}<\infty, \quad 对所有 \varepsilon>0 .$$

令p为使得$\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|^{-p-1}<\infty$的最小整数（$p\leqslant\rho$），则下述积表示式（见关于整函数的 **Hadamard 定理**（Hadamard theorem））成立·

$$f(z)=z^{\lambda}e^{P(z)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\exp\left(\frac{z}{z_k}+ \quad +\frac{z^p}{pz_k^p}\right), \quad (3)$$

其中$P(z)$是次数不超过ρ的多项式．

为刻画有限ρ阶和有限σ型的整函数$f(z)$沿射线的增长，引进量

$$h(\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho}}$$

——增长指标（growth indicator，见**增长标形**（growth indicatrix））．此时恒有

$$|f(re^{i\varphi})|<e^{(h(\varphi)+\varepsilon)r^{\rho}}, \quad r>r_0(\varepsilon)，对一切 \varepsilon>0$$

如果

$$|f(re^{i\varphi})|>e^{(h(\varphi)-\varepsilon)r^{\rho}}, \quad r>r_0(\varepsilon), \quad z\notin E_0,$$

其中E_0是在某种意义下小的集合（相对测度为0的集合），则$f(z)$的零点在平面上的分布就某种意义是非常规则的 而且在$h(\varphi)$与零点的特征（密度）之间有一个精确的关系．具有这种性质的函数$f(z)$称为完全正则增长函数（function of completely regular growth）

多变量函数$f(z_1, \cdot, z_n)$是整函数，如果它对于$|z_k|<\infty$ ($k=1, \ ,n$)解析 对多复变量整函数仍可引进阶与型（共轭阶与型）的概念 此时没有无穷积形式的简单表示式，因为与$n=1$的情形相反，此时$f(z)$的零点不是孤立的．

参考文献

[1] Евграфов, М А , Асимптотические оценки и целые функции, 3 изд , М , 1979

[2] Левин, Б Я , Распределение корней целых функций , М , 1956 (英译本 Levin, B Ya , Distribution of zeros of entire functions, Amer Math Soc , 1980)

[3] Ронкин, Л И , Введение В теорию целых функций многих переменных, М , 1971 (英译本 Ronkin, L I , Introduction to the theory of entire functions of several variables , Amer Math Soc , 1974)

А Ф Леонтьев 撰

【补注】 上述“积表示式”(1)（当$f(z)$具有无穷多个零点时）也称为 Weierstrass 积表示（Weierstrass product representation） 表示式 (3)（其中出现在指数中的多项式都是固定p次）也称为 Hadamard 积表示 (Hadamard product representation)．

“整函数”一词的英文有时（尤其在较早的文献中）也用“integral function”，见 [A2]，[A3] [A4] 是一部初等概论 关于多复变量整函数（类似于 Hadamard 定理的命题）见 [3]，[A5] 关于单复变整

函数的零点分布及有关材料见 [2], [A7]

参考文献

[A1] Boas H P, Entire functions, Acad Press, 1954
[A2] Cartwright, M L, Integral functions, Cambridge Univ Press, 1962
[A3] Valiron, G, Lectures on the general theory of integral functions, Chelsea, 1949 (译自法文)
[A4] Holland, A S B, Introduction to the theory of entire functions, Acad Press, 1973
[A5] Lelong, P, Gruman, L, Entire functions of several complex variables, Springer, 1986
[A6] Lelong, P, Fonctionelles analytiques et fonctions entieres (n variables), Univ de Montreal, 1968
[A7] Levinson, N, Gap and density theorems, Amer Math Soc 1968

沈永欢 译

整有理函数 [entire rational function, целая рациональная функция], (代数) 多项式 ((algebraic) polynomial) 形如

$$w = P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \quad + a_n$$

的函数, 其中 n 是非负整数, 系数 a_0, a_1, , a_n 是实数或复数, 而 z 是实变量或复变量 如果 $a_0 \neq 0$, 则 n 称为多项式的次数 (degree), 多项式 $P_n(z) \equiv 0$ 没有次数 最简单的不恒为常数的整有理多项式是线性函数

$$w = az + b, \ a \neq 0$$

整有理函数在整个平面上是解析的, 即它是复变量 z 的**整函数** (entire function), 而 ∞ 是 $P_n(z)$ 的 n 阶极点 (对于 $n \geqslant 1$, 当 $z \to \infty$ 时 $P_n(z) \to \infty$, 反之, 如果 $f(z)$ 是整函数, 且当 $z \to \infty$ 时 $f(z) \to \infty$, 则 $f(z)$ 是有理整函数) 实或复多变量的多项式在数学分析中也起着重要的作用 整有理函数可用来近似表示一些更复杂的函数, 因为它们最容易计算

亦见**多项式** (polynomial)

参考文献

[1] Привалов, И И, Введение в теорию функций комплексного переменного, 12 изд, М, 1977 (中译本 И И 普里瓦洛夫, 复变函数引论, 人民教育出版社, 1978)

Е П Долженко 撰

【补注】 在西文文献中, 不常用 "entire rational function" (整有理函数) 一词.

参考文献

[A1] Ahlfors, L V, Complex analysis, McGraw-Hill, 1979
[A2] Маркушевич, А И, Теория аналитических функций, 2 изд, М, 1967 (中译本 А И 马库雪维奇, 解析函数论, 高等教育出版社, 1959)

张鸿林 译

熵 [entropy, энтропия]

随机变量的不确定程度的一个信息理论度量. 若 ξ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{P})$ 上的离散随机变量, 其取值为 $x_1, x_2,$, 概率分布为 $\{p_k \ 1, 2, \ \}$, $p_k = \mathrm{P}(\xi = x_k)$, 则熵定义为

$$H(\xi) = -\sum_{k=1}^{\infty} p_k \log p_k \tag{1}$$

(这里假定 $0 \log 0 = 0$) 对数的底可以是任何正数, 但通常取以 2 或 e 为底的对数, 这相当于选择**比特** (bit) (二进制单位) 或自然单位 (natural unit) 作为度量单位.

若 ξ 和 η 是两个离散随机变量, 分别取值 $x_1, x_2,$ 和 $y_1, y_2,$, 概率分布分别为 $\{p_k \ k=1, 2, \ \}$ 和 $\{q_j \ j=1, 2, \ \}$, 又 $\{p_{k|j} \ k=1, 2, \ \}$ 是给定 $\eta = y_j$ 时 ξ 的条件分布, 则给定 η, ξ 的 (平均) 条件熵 (conditional entropy) 定义为

$$H(\xi|\eta) = -\sum_{j=1}^{\infty} q_j \sum_{k=1}^{\infty} p_{k|j} \log p_{k|j} \tag{2}$$

设 $\xi = \{\xi_k \ k = \ , -1, 0, 1, \ \}$ 是具有离散时间和离散值空间的平稳过程, 且 $H(\xi_1) < \infty$, 则这个平稳过程的熵 (更确切地, 平均熵) $\bar{H}(\xi)$ 定义为极限

$$\bar{H}(\xi) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\xi^n), \tag{3}$$

这里 $H(\xi^n)$ 是随机变量 $\xi^n = (\xi_1, \ , \xi_n)$ 的熵 众所周知, (3) 式右边的极限总是存在的, 且

$$\bar{H}(\xi) = \lim_{n \to \infty} H(\xi_n | \xi_1, \ , \xi_{n-1}), \tag{4}$$

这里 $H(\xi_n | \xi_1, \ , \xi_{n-1})$ 是给定 $\xi^{n-1} = (\xi_1, \ , \xi_{n-1})$ 时 ξ_n 的条件熵. 平稳过程的熵在动态系统理论中有重要的应用

如果 μ 和 ν 是可测空间 $(\Omega, \mathfrak{A})$ 上的两个测度, μ 关于 ν 绝对连续, $d\mu/d\nu$ 是相应的 Radon-Nikodým 导数, 则 μ 关于 ν 的熵 $H(d\mu/d\nu)$ 定义为积分

$$H\left(\frac{d\mu}{d\nu}\right) = \int_{\Omega} \log \frac{d\mu}{d\nu} \ \nu(d\omega) \tag{5}$$

微分熵 (differential entropy) 是一个测度关于另一测度的熵的特殊情形

信息论中熵的概念的许多可能的推广之中, 最重要的一个如下 设 ξ 和 $\tilde{\xi}$ 是分别取值于可测空间 $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}})$ 和 $(\tilde{\mathfrak{X}}, S_{\tilde{\mathfrak{X}}})$ 的随机变量. 假定 ξ 的分布 $p(\cdot)$ 是给定的, 又设 W 是乘积空间 $(\mathfrak{X} \times \tilde{\mathfrak{X}}, S_{\mathfrak{X}} \times S_{\tilde{\mathfrak{X}}})$ 上所有可能的概率测度组成的集合中可作为 $(\xi, \tilde{\xi})$ 的联合分布的一个类 那么, W 熵 (W-entropy) (或者给定信息再现精确性条件 W 下的熵 (见**信息再现的精确性** (information, exactness of reproducibility of))) 定义为

$$H_W(\xi) = \inf I(\xi, \tilde{\xi}), \tag{6}$$

这里 $I(\xi, \tilde{\xi})$ 是给定 ξ 时 $\tilde{\xi}$ 中的**信息量** (information, amount of), 下确界是对联合分布 $p(\cdot, \cdot)$ 属于 W 且 ξ 遵从分布 $p(\cdot)$ 的所有随机变量对 $(\xi, \tilde{\xi})$ 来求. 联合分布 $p(\cdot, \cdot)$ 的类常用某一作为失真度量 (measure of

distortion）的非负可测实函数 $\rho(x,\widetilde{x})$, $x \in \mathfrak{X}$, $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathfrak{X}}$, 由下述方式给出

$$W=\{p(\cdot,\cdot)\ \ \mathrm{E}\rho(\xi,\widetilde{\xi})\leqslant\varepsilon\},\qquad(7)$$

此处 $\varepsilon>0$ 是给定的．在 W 由（7）给出的这种情况下，由（6）确定的量称为 ε 熵（ε-entropy）（或者作为失真函数（function of distortion））的速率（rate），并记为 $H_\varepsilon(\xi)$ 例如，如果 $\xi=(\xi_1,\ \ ,\xi_n)$ 是各分量独立的 Gauss 随机向量，$\mathrm{E}\xi_k=0$, $k=1,\ \ ,n$, 且函数 $\rho(x,\widetilde{x})=\sum_{k=1}^{n}(x_k-\widetilde{x}_k)^2$, 此处 $x=(x_1,\ \ ,x_n)$, $\widetilde{x}=(\widetilde{x}_1,\cdot,\widetilde{x}_n)$, 那么

$$H_\varepsilon(\xi)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\log\max\left\{\frac{\mathrm{E}\xi_k^2}{\lambda}\ ,1\right\},$$

此处 λ 由下式确定

$$\sum_{k=1}^{n}\min(\lambda,\mathrm{E}\xi_k^2)=\varepsilon$$

若 ξ 是离散随机变量，$(\mathfrak{X},S_{\mathfrak{X}})$ 和 $(\widetilde{\mathfrak{X}},S_{\widetilde{\mathfrak{X}}})$ 是相同的，且

$$\rho(x,\widetilde{x})=\begin{cases}0, & \text{当 } x=\widetilde{x} \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } x\neq\widetilde{x} \text{ 时},\end{cases}$$

则当 $\varepsilon=0$ 时，ε 熵等于由（1）定义的通常的熵，即 $H_0(\xi)=H(\xi)$

参考文献

[1] Shannon, C , A mathematical theory of communication, *Bell System Techn J* , **27** (1948), 379－423, 623－656

[2] Gallager, R G , Information theory and reliable communication, Wiley, 1968

[3] Berger, T , Rate distortion theory, Prentice-Hall, 1971

[4] Billingsley, P , Ergodic theory and information, Wiley, 1956

Р Л Добрушин, В В Прелов 撰

【补注】 关于动力系统理论中的熵，见**动力系统的熵理论**（entropy theory of a dynamical system）和**拓扑熵**（topological entropy） 吴启光 译 陶 波 校

可测分解的熵 [entropy of a measurable decomposition, энтропия измеримого разбиения]，正规化测度空间 (X,μ) 中的

正规化测度空间 (X,μ) 的可测分解 ξ 的熵的定义如下 若 ξ 中具有零测度的元素就总体而言构成一个正测度集，则 ξ 的熵为 $H(\xi)=\infty$; 否则

$$H(\xi)=-\sum\mu(C)\log\mu(C),$$

这里和式取遍 ξ 的一切具有正测度的元素， 对数的底通常取 2 Д В Аносов 撰

【补注】 常用“可测分划”（measurable partition）一词来代替“可测分解”，见 [A1]

参考文献

[A1] Cornfeld, I P , Fomin, S V and Sinai, Ya G , Ergodic theory, Springer, 1982 (译自俄文)

郑维行 译

动力系统的熵理论 [entropy theory of a dynamical system, энтропийная теория динамических систем]

遍历理论（ergodic theory）的与概率论、信息论密切相关的一个分支 在广阔的范围内这种联系的特点如下．

设 $\{T_t\}$ 是具有相空间 W 与**不变测度**（invariant measure）μ 的一动力系统（通常是**可测流**（measurable flow）或**瀑布**（cascade））. 设 $f\ W\to\mathbf{R}$ 为可测函数并设 ξ 为将 W 分为逆象 $f^{-1}(c)(c\in\mathbf{R})$ 的**可测分解**（measurable decomposition）或可测分划（measurable partition）（为了下面讨论，只须考虑具有可数甚至通常有有限个值的 f 的逆象以及相应的分划 ξ ）那么，

$$\{t\mapsto f(T_tw)\}$$

是以 W 为基本事件空间的稳定**随机过程**（stochastic process）（在狭义意义下）. 通常这可以看作一个过程 $\{X_t(\omega)\}$, 它的基本事件空间是赋予适当测度 ν 的**样本函数**（sample function）ω 的空间 Ω, 并且 $X_t(\omega)=\omega(t)$ 映射

$$\pi\ \ W\to\Omega,\ (\pi w)(t)=f(T_tw)$$

是测度空间之间的同态（见**度量同构**（metric isomorphism）条目中的定义），将 $\{T_t\}$ 映射为移位 $\{S_t\}$, 其中 $(S_t\omega)(\tau)=\omega(t+\tau)$

过程 $\{X_t(\omega)\}$ 含有原来系 $\{T_t\}$ 的一些信息．当 π 为同构时，它甚至可能是全部信息 （人们说 ξ 为 $\{T_t\}$ 的生成元（generator），若 T 是自同构，那么，当分划是瀑布 $\{T^n\ \ n\geqslant 0\}$ 的生成元时，它称为 T 的单边生成元（one-side generator），且当分划是 $\{T^n\ \ n\in\mathbf{Z}\}$ 的生成元时，它称为 T 的双边生成元（two-side generator).）然而，$\{X_t(\omega)\}$ 还依赖于 f 的选择，即首先依赖于 ξ（f 在 ξ 的元素上的特定值在这里并不重要） 在遍历理论中有兴趣的是一个个别过程 $\{X_t(\omega)\}$ 或一些过程的（由各种 ξ 得到的）集体的那些性质，它们正好能反映系统 $\{T_t\}$ 自身的性质．然而，长时间以来选择这样一些性质是不容易的，除非它们可化为已知的情形

上述困难在 20 世纪 50 年代中期成功地为 А Н Колмогоров 所克服，当时他引进了一个基本的新（非谱的）不变量，即动力系统的度量熵（entropy），并强调了递增（increasing）可测分划 η 的作用，即对 $t>0$, 使 $T_t\eta$ 精于 $\eta(\mathrm{mod}\ 0)$ 的那些 η.（在此方式下，一个分划描述过程 $\{X_t(\omega)\}$ 的“过去”，亦见 K 系统（K-system），**正合**

自同态（exact endomorphism））这一类问题的研究（包括生成分解的存在性与性质）构成动力系统的熵理论的对象，且在20世纪60年代中期它们是被放在一起来研究的（见[1]）. 实质性的补充要算 D Ornstein 的更完全、有点更特殊的理论，其中以更直接的方式应用了辅助随机过程 $\{X_t(\omega)\}$（见[2]） 为保证在动力系统的 Колмогоров 与 Ornstein 熵理论两者中的度量同构下的不变性，概率论与信息论思想便以实质的变换形式渗透到这一领域中.

作为例子，可列举动力系统的熵理论中发生的随机过程的正则型的两个条件 其一导致 K 系统的定义. 而另一个限制性较大，是一个很弱的 Bernoulli 性质，它成为采样函数空间中位移同构于 **Bernoulli 自同构**（Bernoulli automorphism）的必要且充分的条件 在许多例子中可以验明，原定义与随机过程没有什么关系.

参考文献

[1] Рохлин, В А, Цикл статей по эргодической теории, 《Успехи матем наук》, 22 (1967), 5, 3－56

[2] Ornstein, D, Ergodic theory, randomness, and dynamical systems, Yale Univ Press, 1974

亦见 K **系统**（K-system），**熵**（entropy），**遍历理论**（ergodic theory）条目的文献 Д В Аносов 撰

【补注】 动力系统的理论中熵的定义如下（亦见**熵**） 对概率空间 $(W, \mathscr{A}, \mu)$ 的每个可测分划 $\xi=\{A_1, \dots, A_m\}$，它的熵 $H(\xi)$ 定义为

$$H(\xi) = -\sum_{k=1}^{m} \mu(A_k)\log\mu(A_k)$$

（假定 $0\log 0=0$） 这里对数的底可取任何正数，但照例取 2 或 e

然后关于分划 ξ 的保测变换 T 的（即瀑布的）熵 $h(T,\xi)$ 定义为

$$h(T,\xi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\xi^n),$$

其中 $\xi^n=\vee_{i=1}^{n-1}T^{-i}\xi$，即分划 $\xi, T^{-1}\xi, \dots, T^{-n}\xi$ 的公共加细. 最后，T 的熵定义为

$$h(T)=\sup h(T,\xi),$$

其中上确界取遍 W 的一切有限可测分划

由于对 W 中的流 $\{T_t\}$ 有 $h(T_t)=|t|h(T_1)$，对一切 $t\in\mathbf{R}$，人们常定义流 $\{T_t\}$ 的熵为

$$h(\{T_t\})=h(T_1)$$

参考文献

[A1] Cornfeld, I P, Fomin, S V and Sinai, Ya G, Ergodic theory, Springer, 1982（译自俄文）

[A2] Mañé, R, Ergodic theory and differentiable dynamics, Springer, 1987

郑维行 译

可枚举谓词 [**enumerability predicate, нумерически выразимый предикат**]

一算术谓词 $P(x_1, \dots, x_n)$ 称为相对于一算术的给定**形式系统**（formal system）S 可枚举，若它有如下性质 在**形式算术**（arithmetic, formal）的语言中存在公式 $F(x_1, \dots, x_n)$，使得对任意自然数 $k_1, \dots, k_n$，

1) 若 $P(k_1, \dots, k_n)$ 真，则 $\vdash_S F(k_1, \dots, k_n)$，

2) 若 $P(k_1, \dots, k_n)$ 假，则 $\vdash_S \neg F(k_1, \dots, k_n)$，

其中 $\vdash_S$ 意思是 S 中的可推导性，而 $F(k_1, \dots, k_n)$ 是在 $F(x_1, \dots, x_n)$ 中把变元 $x_1, \dots, x_n$ 代之以表示 $k_1, \dots, k_n$ 的项的结果 在此情况下，称公式 $F(x_1, \dots, x_n)$ 是 $P(x_1, \dots, x_n)$ 的可枚举谓词 对于形式算术系统 S 如下命题成立 一切递归谓词且只是它们在 S 中是可枚举谓词.

一个 n 元算术函数 f 称为可枚举的（enumerable），若有一个算术公式 $F(x_1, \dots, x_n, y)$，使得对任意自然数 $k_1, \dots, k_n, l$，

1) 若 $f(k_1, \dots, k_n)=l_1$，则 $\vdash_S F(k_1, \dots, k_n, l)$，

2) $\vdash_S \exists y F(k_1, \dots, k_n, y) \wedge \forall x\forall y(F(k_1, \dots, k_n, x)\wedge F(k_1, \dots, k_n, y)\supset x=y)$

在通常的形式算术系统中，一切一般递归函数，且只是它们，是可枚举的（见**一般递归函数**（general recursive function））

参考文献

[1] Kleene, S C, Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951（中译本 S C 克林，元数学导论，科学出版社，1984）

В Е Плиско 撰

【补注】 满足 1) 及 2) 的谓词 P，更常称为在系统 S 中可定义（definable）.

杨东屏 译

可枚举集 [**enumerable set, перечислимое множество**]

作为实行某种可构造的产生过程的结果而出现的集合. 这种过程可以想成是计算某个具有自然数初始数据的算法的值的过程，因此例如如下的确切形式可作为自然数可枚举集的定义 一自然数集被称为可枚举的（enumerable），若存在一**部分递归函数**（partial recursive function）使得此集合是该函数的值域

任何自然数的**可判定集**（decidable set）是一可枚举集. 反之不然 人们可以构造一不可判定的可枚举集 这事实在 1936 年由 A Church 建立，它是算法的一般理论中的基本结果之一（见**算法论**（algorithms, theory of）），它可以用于推导出一切已知的**算法问题**（algorithmic problem）的否定解 若某集合与其补集皆为可枚举集，此集合可判定（Post 定理（Post theorem）） 可枚举集的研究和分类组成了算法集合论研究的主题.

参考文献

[1] Rogers, jr, H, Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967

H M Нагорный 撰 杨东屏 译

枚举模型 [enumerated model, нумерованная модель]

二元组 $(\mathfrak{M}, v)$，其中 $\mathfrak{M}$ 是某个固定的符号系统 σ_0 的模型，v 是 $\mathfrak{M}$ 的基础集 M 的一个**枚举** (enumeration) 在枚举模型的研究中，发展得最广泛、深入的方向是**递归模型论** (recursive model theory). 另一方向是关于枚举模型的复杂性 (complexity of an enumerated model) 问题的研究. 枚举模型的复杂性是指自然数集 $\gamma^{-1}(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, v))$，或 $\gamma^{-1}(\mathrm{Th}_0(\mathfrak{M}, v))$ 的复杂性，其中 γ 是关于符号系统 $\sigma=\sigma_0\cup\{c_0, \ \ ,c_n, \ \ \}$ 的全体公式的某个 Gödel 枚举 其中常项 c_n 不属于 σ_0，$\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, v)$ 是符号系统 σ 在模型 $\mathfrak{M}_v$ 中为真的全体闭公式集 $\mathfrak{M}_v$ 是由 $\mathfrak{M}$ 将 σ_0 扩充到 σ 得到的，其中常量 c_n 的值定义为 $v(n)$ $\mathrm{Th}_0(\mathfrak{M}, v)$ 表示在 $\mathfrak{M}_v$ 中为真的全体无量词公式的集合

初等理论 (elementary theory) 的几种特殊的模型在数理逻辑及代数中起重要作用. 重要问题之一是它们的复杂性 现已得到下述的结果 令 Σ_n^A, Π_n^A, Δ_n^A 及 $\Sigma_n^{1,A}$, $\Pi_n^{1,A}$, $\Delta_n^{1,A}$ 相应地表示相对于 A 的算术及分析的**分层** (hierarchy).

若理论 T 相对于 A 递归且有简单模型 $\mathfrak{M}$，则存在 $\mathfrak{M}$ 的枚举 v 使得 $\gamma^{-1}(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, v))\in\Delta_2^A$，即 $\gamma^{-1}(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, v))$ 相对于集合 A' 递归，其中 A' 为全体相对于 A 且 $\varphi_x^A(x)$ 有定义的可计算函数 φ_x^A 的 Gödel 数的集合

若 T 相对于 A 递归且有可数饱和模型 $\mathfrak{M}$，则存在 $\mathfrak{M}$ 的一个枚举 v，使得 $\gamma^{-1}(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, v))\in\Delta_1^{1,A}$，即 $\gamma^{-1}\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, v))$ 是相对于 A 的超算术集 此类关于复杂性的囿界在某种意义上是精确的

下述结果也与寻求精确囿界的问题有关. 我们已知每个不矛盾公式都有一个复杂性为 Δ_2^0 的枚举模型 $(\mathfrak{M}, v)$，即

$$\gamma^{-1}(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, v))\in\Delta_2^0$$

Ершов 分层对 Δ_2^0 内的集合给出一个较精细的分类 下述定理已得到证明 对任意 n 存在一个不矛盾的公式 φ_n，φ_n 没有谓词在 Σ_n^{-1} 内的枚举模型 $(\mathfrak{M}, v)$，即 $v^{-1}(P_i)\in\Sigma_n^{-1}$，且 $\mathfrak{M}\vdash\varphi_n$，此处 $\sigma_0=\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. 在一个可构造的非原子 Boole 代数 $(\mathfrak{M}, v)$ 中，可以构造一个递归枚举的理想 I(即集合 $v^{-1}(I)$ 是递归可枚举的)，使得 Boole 代数 $\mathfrak{M}/I$ 是非构造的 此结果使得有可能证明递归可枚举集的格是非递归可表示的.

对于枚举全序的研究已使否证 Turing 度的强齐次性猜想成为可能.

参考文献

[1] Гончаров, С С, Дроботун, Б Н, «Сиб матем ж», **21** (1980), 2, 25-41
[2] Денисов, С Д, «Алгебра и логика», **11** (1972) 6 648-655
[3] Дроботун, Б Н, «Сиб матем ж», **18** (1977), 5, 1002-1014
[4] Ершов, Ю Л, Теория нумераций, М, 1977
[5] Rogers, jr, H, Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967
[6] Feiner, L, Hierarchies of Boolean algebras, *J Symbolic Logic*, **35** (1970), 365-374
[7] Feiner, L, The strong homogeneity conjecture, *J Symbolic Logic*, **35** (1970), 375-377

С С Гончаров 撰 黄且圆 译

枚举 [enumeration, нумерация]

算法理论的分支枚举理论 (enumeration theory) 中的基本概念，而枚举理论是研究被任意**构造对象** (constructive object) 配数的对象类的一般性质 经常作为构造元素自然数是所讨论类的元素的配数.

用自然数来枚举非数值的对象 (如逻辑公式) 以及把关于这些对象的断言转化到自然数的形式算术的论域之中的想法，首先是由 K Gödel 用于 Peano 算术的 **Gödel 不完全性定理** (Godel incompleteness theorem) 证明之中 此后此想法用于像 **Turing 机** (Turing machine)，**部分递归函数** (partial recursive function) 和递归可枚举集等算法理论中基本对象的枚举 把适当枚举赋值于这些对象类，在许多情况下可以更确切地解释这些对象的性质并使它们的一些重要的新性质更为显然. 这样就产生了系统使用任意集的枚举的想法. 在这想法的实现中，可以看出许多算法理论的熟知结果，实际上是枚举理论中一般规则的推论 (关于枚举理论的结构，它特殊的概念和方法的产生，以及枚举理论中指导原则的形成，见[1]-[4]). 特别地在使用了**范畴** (category) 理论的语言后更成功，它可使得我们用一全新观点看待枚举理论 (见[4])

一个枚举集 (enumerated set) 是一个对 $\mathfrak{A}=(A, v)$，其中 A 是一可数集，而 v 是一由自然数集 $\mathbf{N}$ 到 A 上的映射. 映射 v 被称为集合 A 的枚举 (enumeration) 若 $v(n)=a$，则 n 称为在枚举 v 中对象 a 的数 (number) 一集合 A 的枚举 v_1 归约 (reduce) 到 A 的枚举 v_2 (枚举的归约关系记为 $\leqslant$) 是指，一个一元一般递归函数 f，使得 $v_1(n)=v_2(f(n))$ 对一切 $n\in\mathbf{N}$ 成立. 一集合 A 的两个枚举 v_1 和 v_2 称为是等价的 (equivalent)，若 $v_1\leqslant v_2$，且 $v_2\leqslant v_1$ 由枚举理论观点对一集合和它的等价枚举不加区别. 基于这理由研究的对象，通常是集合 A 在枚举归约的关系 $\leqslant$ 偏序下枚举的等价类集合 $L(A)$ 通常人们研究集合 A 的可归约到 v 的枚举的等价类集合 $L(A, v)$ 在许多情况下，$L(A)$ 及 $L(A, v)$ 是 A 的 "复杂

性的测度"

对A和B两集合枚举的比较，基本概念是态射．一被枚举的集合$\mathfrak{A}=(A, v_1)$到一被枚举的集合$\mathfrak{B}=\langle B, v_2\rangle$的态射（morphism），是一个由$A$到$B$内的映射$\mu$，使得存在一个一元一般递归函数$f$，使$\mu v_1(u)=v_2(f(n))$对一切$n\in N$成立　由$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{B}$的一切态射的集合记为$\mathrm{Mor}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$　算法的一般理论里的许多问题与集合Mor的研究密切相关，特别与澄清是否可能对此集合强加一个"好的"枚举相关．

被枚举集的范畴$\mathfrak{N}$由枚举集和态射组成．研究这范畴$\mathfrak{N}$的性质是枚举理论的基本任务　如此研究的起点，经常是检查在被枚举集和最重要的特定枚举，即Kleene的一切一元部分递归函数的枚举φ和Post的一切递归可枚举集的枚举π之间的关系．在算法理论中，表明存在一个二元部分递归函数$U(x, y)$对一切一元部分递归函数是通用的，即对任意部分递归函数f有一数a，使得$f(x)=U(a,x)$　于是Kleene枚举（Kleene enumeration）φ定义如下　$\varphi_x(y)=U(x,y)$　若π_x表示φ_x值域，则人们可得到一切递归可枚举集的Post枚举（Post enumeration）π

$\mathfrak{N}$的研究中基本的重要内容是А　И　Мальцев引进的完全枚举，它的最一般形式是Kleene和Post枚举的主要特征的综合　集合A的一个枚举v称为是完全的（complete）　若在A的元素中有一特殊的元素a，使得对任意一元部分递归函数f有一一元一般递归函数h，使得

$$vh(x)=\begin{cases} vf(x), & \text{若 } f(x) \text{ 值有定义}, \\ a, & \text{否则} \end{cases}$$

完全枚举在$\mathfrak{N}$中起"内射"元素的作用，且对A有完全枚举的可能性说明对象A的类的非常通用性及重要性．特别地，Kleene的部分递归函数的枚举φ及Post的递归可枚举集的枚举π是完全的（在前一种情况下，特殊元素a是处处无定义的函数；在后一种情况下，特殊元素a是空集）在关于范畴$\mathfrak{N}$的研究中，一重要的趋势也是被枚举集的不同子对象的选择和研究（见[4]）．

枚举理论中关于Kleene和Post枚举和它们子对象研究的有关部分已研究得差不多了，所以在这些情况中方法的使用和算法的理论是最有效的．这里人们首先研究所谓可计算枚举．例如，若A是递归可枚举集族，则这族的一个枚举v称为可计算的（computable），若关系$x\in v(y)$本身是递归可枚举的　族A的可计算枚举的等价类集记为$L^0(A)$　这个集同$L(A)$一样被归约关系$\leqslant$偏序　$L^0(A)$的最大元素（若存在）称为A的主可计算枚举（principal computable enumeration）　特别地，Kleene和Post的枚举分别对（一切一元部分递归函数的）族φ和（一切递归可枚举集的）族P是主可计算的　在枚举理论中，大量工作是致力于集$L^0(\varphi)$和$L^0(P)$的研究．要牢记算法理论中已发现的部分递归函数和递归可枚举集的许多性质，本质上是$L^0(\varphi)$和$L^0(P)$的代数性质的反映，例如，在算法理论中，研究的并起重要作用的所谓m步集可容易地适应枚举理论的模式　若人们考虑只由两个集φ和$\{0\}$组成的族A，那么m步集（m-step sets）无非就是$L(A)$，而m步递归可枚举集（recursive-enumerable set）则是$L^0(A)$　现在已有$L(A)$和$L^0(A)$结构的完全代数的描述（见[4]）．

令A是递归可枚举集族（对部分递归函数情况相似）A的指标集（indexing set）（或枚举集（enumerating set））是集合

$$\theta A=\{x \quad \pi_x\in A\},$$

其元素即Post枚举中A的递归可枚举集的配数　在枚举理论中，人们研究不同族A的指标集θA．例如，Rice-Shapiro定理给出集合θA是递归可枚举的那些族A的描述　这些族在枚举理论中被称为完全可枚举类（completely-enumerable classes）　也有对Post枚举其他形式的子对象的描述　特殊标准类，因子分解和收缩核．所谓标准类起重要作用

递归可枚举集的一族S称为标准类（standard class），若存在一个一般递归函数f，使得$S=\{\pi(f(0)), \pi(f(1)),$　$\}$，若此处$\pi(x)\in S$，则$\pi(x)=\pi(f(x))$　标准类和完全枚举密切相关　当前（1982）尚无标准类的满意的描述　这种描述可把算法理论中许多问题弄明白．在枚举理论中，主子对象，能行主子对象和Post枚举的其他类的子对象也已被考虑．

代数系统（algebraic system）概念的算法类似物，即一集合及其上给定的函数和谓词是一个加标的（indexed）或构造的（constructive）代数系统（algebraic system）想法如下　对要处理的集A强加上一枚举．把A上定义的函数和谓词换成这些函数和谓词的"翻译"　翻译法是把A中对象改为它们配上的数．如果这样翻译后可以得到的函数和谓词是一般递归的，则称给定的代数系统是构造的（contructive）．最早系统地研究构造代数系统的是Мальцев（[3]）

应该提到枚举理论在算法理论的问题中的两个重要应用　Myhill关于通用对象的理论的构造的完全化，和有穷型可计算泛函理论的构造（见[4]）　枚举理论的方法和结果可用于与数理逻辑和算法理论接近的领域，特别可用于程序设计　所以用枚举理论某些程序设计语言的语义问题可被解决．

参考文献

[1] Мальцев, А　И，Алгоритмы и рекурсивные финкции, М，1965（英译本 Mal'tsev, A I, Algorithms and recursive functions, Wolters-Noordhoff, 1970）

[2] Мальцев, А　И，《Успехи матем　наук》，**16**（1961），3、

3-60

[3] Успенский, В А, Лекции о вычислимых финкциях, М, 1960

[4] Ершов, Ю Л, Теория нумераций, М, 1977

И А Лавров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Manin, Yu I, A course in mathematical logic, Springer, 1977 (译自俄文)

杨东屏 译

枚举算子 [enumeration operator, перечисления оператор]

一切自然数集合的集合到它自身内的一映射 (即 2^N 到 2^N 内的一映射，其中 N 是自然数集)，其定义如下．令 W_z 是有 Gödel 数 z 的一递归可枚举集，令 D_u 是有典范下标 u 的一自然数的有穷集 (即 $D_u=\{x_1, \ldots, x_n\}$, 其中 $x_1<\cdots<x_n$, 且 $2^{x_1}+\cdots+2^{x_n}=u$), 且令 $\langle x,u\rangle$ 是由数 x 和 u 组成的有序对在一取定的一一对应的对的递归编码下的数．每个递归可枚举集 W_z 产生一个把任意给定的自然数集 B 转变为一具有存在满足 $D_u\subset B$ 的 u, 使得 $\langle x,u\rangle$ 属于 W_z 的性质的自然数 x 的集合 A 的步骤，即 $\langle x,u\rangle$ 属于 W_z, 且若有穷集 D 被包含在 B 内，则 x 和 A 有关联．换言之，

$$A=\{x: (\exists u)(\langle x,u\rangle\in W_z \wedge D_u\subseteq B)\}$$

这步骤可以使人们从关于 B 的一个枚举能行地得到关于 A 的一个枚举．它称为枚举算子，并记为 Φ_z. 若有枚举算子 Ψ 使得 $\Psi(B)=A$, 则称 A 是**在枚举中可约的** (reducible in enumerability) 到 B $(A\leqslant eB)$.

若 Φ 和 Ψ 是枚举算子，则它们的复合 $\Phi\Psi$ 也是枚举算子．若 Ψ 是一枚举算子且 $B_1\subseteq B$, 则 $\Psi(B_1)\subseteq\Psi(B)$. 若 $x\in\Psi(B_1)$, 则有有穷集 $D\subseteq B_1$ 使得 $x\in\Psi(D)$. 每个枚举算子 Ψ 有一最小不动点，即有一递归可枚举集 A 使得 $\Psi(A)=A$, 且若 $\Psi(B)=B$, 则 $A\subseteq B$.

参考文献

[1] Rogers, jr, H, Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967

В И Плиско 撰 杨东屏 译

枚举问题 [enumeration problem, перечисления проблема]

一个**算法问题** (algorithmic problem), 在其中必须对给定集合 A 构造一个枚举 A 的算法，即构造一个可施用于任何自然数的算法 $\mathfrak{A}$, 它把自然数转化为 A 的一个元素，且使得 A 的任何元素都可借助 $\mathfrak{A}$ 施于某自然数而得到，换言之，$A=\{\mathfrak{A}(i): i\in\mathbf{N}\}$. 对一集合 A 的枚举问题可解 (即这样的 $\mathfrak{A}$ 存在), 当且仅当 A 是一非空**可枚举集** (enumerable set).

В Е Плиско 撰 杨东屏 译

计数理论 [enumeration theory; перечисления теория]

组合分析 (combinatorial analysis) 的一个分支，它研究和发展解**计数问题** (enumeration problem) 的方法．这类问题相当于计算具有某些性质的有限集的元素的个数，或其等价类的个数．它的方法之一是**容斥原理** (inclusion-and-exclusion principle) 及其各种推广．Pólya 计数理论 (见 **Pólya 定理** (Pólya theorem)) 时常使人能够克服计数不同的对象而又要把它们看作不可辨的困难．解计数问题的一个基本工具是**生成函数** (generating function), 它们在求渐近关系方面也起重要作用 (见 [1]-[3]).

在组合论中求生成函数，广泛使用形式幂级数的代数和各种符号方法 (见 [1], [2], [4]). 探讨求生成函数的一般方法的基础在于许多离散对象有一种自然的序 (见 [1], [5]). 下面以关联代数的构成为例，说明怎样运用它们解决某些计数问题．

设已给出一偏序集 X, 它有序关系 $\leqslant$, 并设 X 是局部有限的，即设它的任一截段

$$[x, y]=\{z: x\leqslant z\leqslant y, \ x, y, z\in X\}$$

是有限的．

关联代数 (incidence algebra) $I(X)$ 是实函数 $f(x, y)$ $(x, y\in X)$ 的集合，且使 $f(x, y)=0$, 如果 $x\nleqslant y$. 这样的两个函数的和以及数乘都按通常方式定义，而卷积 $f*g=h$ 由

$$h(x, y)=\sum_{x\leqslant z\leqslant y} f(x, z)g(z, y)$$

引入．这种乘法是结合的，并且对于加法是分配的．关联代数 $I(X)$ 具有单位元

$$\delta=\delta(x, y)=\begin{cases}1, & \text{对于 } x=y, \\ 0, & \text{对于 } x\neq y\end{cases}$$

在 $I(X)$ 中有两个元素是重要的：ζ 函数 $\zeta=\zeta(x, y)$ $(\zeta(x, y)=1$, 对于 $x\leqslant y)$ 以及 Mobius 函数 $\mu=\zeta^{-1}$, μ 是 ζ 的逆元．以下陈述成立：若一局部有限偏序集 X 有最大下界，且对所有 $x\in X$, 函数 $f(x)$ 有定义，$g(x)=\sum_{y\leqslant x} f(y)$, 则对于所有 $x\in X$,

$$f(x)=\sum_{y\leqslant x} g(y)\mu(y, x)$$

(Mobius **反演定理** (Mobius inversion theorem)).

若 $X=B$ 是某一可数集的所有有限子集的集合，且若 $x\leqslant y$ 意味着 $x\subseteq y$, 则对于 $x\leqslant y$, 有

$$\mu_B(x, y)=(-1)^{|y|-|x|}.$$

这时，Mobius 反演就是容斥原理．

若 $X=D$ 是一个自然数的集合，且 $x\leqslant y$ 意味着 x 整除 y, 则对于 $x\leqslant y$, $\mu_D(x, y)=\mu(y/x)$, 式中

$\mu(n)$ 是数论中的 **Mobius 函数**（Mobius function）

一个约化关联代数（reduced incidence algebra）$R(X)$ 是 $I(X)$ 的一个子代数，它包含了 $I(X)$ 中在等价截段上取等值的所有函数 截段的等价关系具有如下性质 若对于 $[x, y] \sim [u, v]$ 有 $f(x, y)=f(u, v)$ 和 $g(x, y)=g(u, v)$，则也有

$$(f*g)(x, y)=(f*g)(u, v)$$

例如，若把同构的截段视为等价的，则此性质为真 ζ 函数和 Mobius 函数恒属于 $R(X)$

若 $X=\mathbf{N}_0=\{0, 1, \cdot\}$，并有数的自然序，则 $I(\mathbf{N}_0)$ 同构于上三角形无限矩阵的代数．若 $R(\mathbf{N}_0)$ 由所有满足当 $n-m=n_1-m_1=k$ 时 $f(m, n)=f(m_1, n_1)$ 的函数 $f\in I(\mathbf{N}_0)$ 构成，则一一对应关系

$$f \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_k x^k, \quad g \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_k x^k$$

成立，式中当 $n-m=k$ 时有 $a_k=f(m, n)$，且 $b_k=g(m, n)$，因而

$$f*g \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad c_k=\sum_{s=0}^{k} a_s b_{k-s}$$

故 $R(\mathbf{N}_0)$ 同构于形式幂级数代数，且

$$s \Leftrightarrow (1-x)^{-1}, \quad \mu \Leftrightarrow 1-x$$

若 $X=B$，则 $R(B)$ 同构于指数幂级数代数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!},$$

且 $s \Leftrightarrow e^x$，$\mu \Leftrightarrow e^{-x}$，式中当 $|y \setminus x|=|v \setminus u|$ 时，有 $[x, y] \sim [u, v]$.

若 $X=D$，考虑当 $n/m=n_1/m_1$ 时 $f(m, n)=f(m_1, n_1)$，则 $R(D)$ 同构于 Dirichlet 级数代数，且

$$\zeta \Leftrightarrow \zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \mu \Leftrightarrow \frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

例．令 $c(x, y)$ 为 X 中形如 $x<x_1<\quad<x_{l-1}<y$ 的链的个数，则 $(\zeta-\delta)^k(x,y)$ 是长为 k（即 $l=k$）的链的个数，故

$$c(x, y)=\sum_{k=0}^{\infty}(\zeta-\delta)^k(x, y)=$$

$$=[\delta-(\zeta-\delta)]^{-1}(x, y)=(2\delta-\zeta)^{-1}(x, y)$$

考虑当 $X=\mathbf{N}_0$，B，D 时 $R(X)$ 中的这个公式．在 $X=\mathbf{N}_0$ 与 $y-x=n$ 的情形下，$c(x, y)=c_n$ 是 n 的有序分解（分拆）数 在 $R(\mathbf{N}_0)$ 中公式取形式

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=\frac{1}{2-(1-x)^{-1}},$$

因此 $c_n=2^{n-1}$，$n>0$

对于 $X=B$ 的情形，$c(x, y)=c_n$ 是一个 n 元集的有序分解数，$|x \setminus y|=n$，且

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n=\frac{1}{2-e^x}$$

对于 $X=D$ 的情形，$c(x, y)=c_n$ 是 $n=y/x$ 的有序分解数，因而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}=\frac{1}{2-\zeta(1)}$$

参考文献

[1] Сачков, В Н, Комбинаторные методы дискретной математики, М, 1977

[2] Riordan, J, An introduction to combinatorial analysis, Wiley, 1958

[3] Перечислительные задачи комбинаторного анализа, М, 1979(译自英文)

[4] Mullin, R and Rota, G - C, On the foundations of combinatorial theory, Ⅲ Theory of binomial enumeration, in B Harris (ed) Graph theory and its applications, Acad Press, 1970, 167 - 213

[5] Rota, G - C, On the foundations of combinatorial theory, Ⅰ, Theory of Mobius functions, *Z Wahrscheinlichkeitstheor, Verw Geb*, 2(1964), 4, 340 - 368

[6] Hall, M, Combinatorial theory, Blaisdell, 1967

B M Михеев 撰

【译注】

参考文献

[B1] M Aigner, Combinatorial Theory, Springer - Verlag, 1979

钟集译 李乔校

包络 [envelope, огибающая]，平面上一族曲线的

其上每点都与曲线族的一条曲线相接触的曲线，使得接触点沿着包络从曲线族中的一条转到另一条 例如，中心在一直线上的同半径的圆族，它的包络由二条平行线组成．若 C 是曲线族的参数，t 是沿包络的参数，$C(t)$ 表示与包络上参数为 t 的点相接触的（曲线）族中曲线所对应的 C 值，则假设能选取 $C(t)$，使得在 t 的任何部分区间上这个函数不是常数．

对于由 $f(x,y,C)=0$ 给定的曲线族，其中 $f\in C^1$ 和 $|f_x|+|f_y|\neq 0$，包络存在的必要条件是 $x(t)$，$y(t)$，$C(t)$ 满足

$$f=0, \quad f_C=0. \qquad (1)$$

组 (1) 对确定包络的点是有用的，但曲线族的其他奇点也满足 (1)．一点属于包络的充分条件是 $f\in C^2$ 并且除满足 (1) 外还要满足

$$f_{CC}\neq 0, \quad \frac{D(f, f_C)}{D(x, y)}\neq 0 \qquad (2)$$

对于由 C^1 函数

$$\mathbf{r}(u, C)=\{x(u, C), \ y(u, C)\}$$

给出的平面曲线族，其中 C 是族的参数，u 是沿族中曲线的参数，一点在包络上的必要条件是 $\mathbf{r}_u \parallel \mathbf{r}_C$，或

$$\varphi = \frac{D(x, y)}{D(u, C)} = 0, \tag{3}$$

两者是同一回事

充分条件是 $\mathbf{r} \in C^2$ 并且除满足 (3) 外还要满足

$$\mathbf{r}_u \varphi_C - \mathbf{r}_C \varphi_u \neq 0 . \tag{4}$$

违反条件(2)和(4)往往与包络上出现尖点有关．

空间依赖于单参数 C 的曲面族的包络 (envolope of a family of surfaces) 是这样的曲面，使得其上每个内蕴参数为 (u, v) 的点与族中参数为 $C(u, v)$ 的曲面相接触，并且函数 $C(u, v)$ 在 (u, v) 定义域的任何区域上不是常数．例如，中心在一直线上的同半径球面族的包络是一个柱面 对于由 $f(x, y, z, C)=0$ 给出的曲面族，其中 $f \in C^1$ 和 $|f_x|+|f_y|+|f_z| \neq 0$，包络的必要条件是满足方程组

$$f=0, \quad f_C=0, \tag{5}$$

而充分条件是 $f \in C^2$ 并且除(5)外再加上条件

$$f_{CC} \neq 0, \tag{6}$$

$$\left|\frac{D(f, f_C)}{D(x, y)}\right| + \left|\frac{D(f, f_C)}{D(y, z)}\right| + \left|\frac{D(f, f_C)}{D(z, x)}\right| \neq 0.$$

对于曲面族 $\mathbf{r}(u, v, C)$，其中 $\mathbf{r} \in C^1$ 和 $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$，包络的必要条件是满足方程

$$\varphi = (\mathbf{r}_u \ \mathbf{r}_v \ \mathbf{r}_C) = 0, \tag{7}$$

而充分条件是 $\mathbf{r} \in C^2$ 并且除 (7) 外还要满足下列条件:

$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v & \varphi_C \\ \mathbf{r}_u^2 & \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v & \mathbf{r}_u\mathbf{r}_C \\ \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v & \mathbf{r}_v^2 & \mathbf{r}_v\mathbf{r}_C \end{vmatrix} \neq 0, \quad |\varphi_u| + |\varphi_v| \neq 0 . \tag{8}$$

违反条件 (6) 和 (8) 中的第一式往往与包络上出现尖棱有关．包络与族中每张曲面的接触线称为特征线 (characteristic curve)．包络上的尖棱通常就是特征线的包络．

空间依赖于双参数 A 和 B 的一族曲面的包络是这样的曲面，使得其上每点 (u, v) 与族中参数为 $A(u, v)$ 和 $B(u, v)$ 的曲面相接触，并且在 (u, v) 定义域的任何区域上不存在函数 $\Phi \in C^1$ 使 $A(u, v) = \Phi(B(u, v))$ 对于由方程 $f(x, y, z, A, B)=0$ 给出的曲面族，其中 $f \in C^1$ 和 $|f_x|+|f_y|+|f_z| \neq 0$，包络的必要条件是满足方程组

$$f=0, \ f_A=0, \ f_B=0, \tag{9}$$

而充分条件是 $f \in C^2$，并且满足 (9) 和下列条件

$$\frac{D(f, f_A, f_B)}{D(x, y, z)} \neq 0, \quad \frac{D(f_A, f_B)}{D(A, B)} \neq 0 .$$

对于曲面族 $\mathbf{r}(u, v, A, B)$，其中 $\mathbf{r} \in C^1$ 和 $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$，必要条件是

$$\varphi = (\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v \mathbf{r}_A) = 0, \ \psi = (\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v \mathbf{r}_B) = 0, \tag{10}$$

而充分条件是 $\mathbf{r} \in C^2$，并且满足 (10) 和

$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v & \varphi_A & \varphi_B \\ \psi_u & \psi_v & \psi_A & \psi_B \\ \mathbf{r}_u^2 & \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v & \mathbf{r}_u\mathbf{r}_A & \mathbf{r}_u\mathbf{r}_B \\ \mathbf{r}_v\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v^2 & \mathbf{r}_v\mathbf{r}_A & \mathbf{r}_v\mathbf{r}_B \end{vmatrix} \neq 0, \quad \frac{D(\varphi, \psi)}{D(A, B)} \neq 0 .$$

n 维流形中依赖于 k 个参数的一族 m 维子流形包络的更复杂概念可在可微映射奇异性理论的基础上引出，作为一族映射的奇异性的特殊形式．

参考文献

[1] Залгаллер, В А , Теория огибающих, М , 1975

[2] Favard, J , Cours de geometrie differentielle locale, Gauthier-Villars, 1957 .

[3] Толстов, Г П., 《Успехи матем наук》, 7 (1952), 4 173 – 179

В А Залгаллер 撰

【补注】

参考文献

[A1] Thom, R , Sur la théorie des enveloppes, *J de Math Pures Appl* , 56 (1962), 177 – 192 .

[A2] Weil, A , Collected papers, 1, Springer, 1980, p 133 .

[A3] Do Carmo, M P, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, 1976 (中译本 M P 多卡模, 曲线和曲面的微分几何学, 上海科学技术出版社, 1988)

沈一兵 译

包络级数 [**enveloping series , обвертывающий ряд**], 数 A 的

级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \tag{*}$$

使得对于一切 $n = 0, 1, 2,$ ，有

$$|A - (a_0 + a_1 + \quad + a_n)| < |a_{n+1}|$$

包络级数可能收敛，也可能发散，如果它收敛，则它的和等于 A 级数 (*) 在严格意义下包络实数 A，如果 a_n 是实数，而且对于一切 $n=0, 1, 2,$ ·,有

$$A - (a_0 + a_1 + \cdot + a_n) = \theta a_{n+1}, \ 0 < \theta_n < 1$$

在这种情况下，A 处于级数 (*) 的任何两个相继的部分和之间．例如，对于 $x>0$，函数 e^{-x}, $\ln(1+x)$, $(1+$

$x)^{-p}(p>0)$, $\sin x$, $\cos x$, $\arctan x$, $J_0(x)$ 都在严格意义下为其 MacLaurin 级数所包络.

如果对于 $x > R > 0$，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$$

包络取实值的函数 f，并且数 a_n 是实的，则数 $a_1, a_2,$ 的符号交替出现，而这个级数是严格意义下的包络级数．这个级数是函数 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时的渐近展开，如果它是发散的，则称为半收敛级数 (semi-convergent series)．这种级数用于当 x 取大值时 $f(x)$ 的近似数值计算．

参考文献

[1] Pólya, G and Szego, G, Problems and theorems in analysis, Springer, 1976 (中译本 G 皮利亚、G 舍贵，数学分析中的问题和定理，上海科学技术出版社，1981)

[2] Hardy, G H, Divergent series, Clarendon Press, 1949

М В Федорюк 撰 张鸿林 译

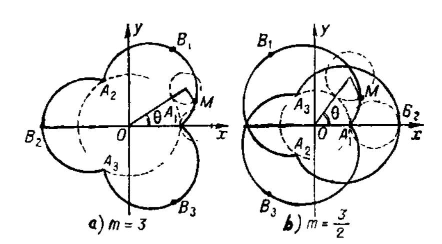
外摆线 [**epicycloid**, **эпициклоида**]，亦称圆外旋轮线

当一个圆沿着另一个圆的外侧滚动时，作为动圆上的一点的轨迹而得到平面曲线 其参数方程是

$$x = (r+R)\cos\theta - r\cos\left[(r+R)\frac{\theta}{r}\right],$$

$$y = (r+R)\sin\theta - r\sin\left[(r+R)\frac{\theta}{r}\right],$$

其中 r 是动圆的半径，R 是定圆的半径，而 θ 是两个圆接触点的向径与 x 轴之间的夹角 (见图) 当模数 (modulus) $m=R/r$ 取不同值时，所得到的外摆线具



有不同的形状 当 $m=1$ 时，它是心脏线 (cardioid)，当 m 是整数时，外摆线由 m 个不同分支组成．尖点 A_1, , A_m 具有极坐标 $\rho=R$, $\varphi=2\pi k/m$ $(k=0, 1, \quad, m-1)$ 曲线的顶点 B_1, , B_m 具有坐标 $\rho=R+2r$, $\varphi=\pi(2k+1)/m$，当 m 是有理数时，曲线的各分支彼此相交，而当 m 是无理数时，存在无穷多个分支，描绘外摆线的点 M 不返回出发时的位置，对于有理数 m，外摆线是封闭的代数曲线．从点 A_1 算起的弧长是

$$s = 8Rm(1+m)\sin^2\frac{\theta}{4},$$

从点 B_1 算起的弧长是

$$s = 4Rm(1+m)\cos\frac{\theta}{2}$$

曲线的两个向径和它的弧所围成的扇形面积是

$$S = m\pi(R+mR)(R+2mR)$$

曲率半径是

$$r_k = \frac{4Rm(1+m)}{2m+1}\sin\frac{\theta}{2}$$

如果点 M 不处于动圆上，而是在它的外部或内部区域中，则它所描绘的曲线相应地称为长幅外摆线 (elongated epicycloid) 和短幅外摆线 (shortened epicycloid) (见次摆线 (trochoid)) 外摆线属于**旋轮类曲线** (cycloidal curve)

参考文献

[1] Савелов, А А, Плоские кривые, М, 1960

Д Д Соколов 撰

【补注】 外摆线 (和**内摆线** (hypocycloid)) 具有许多等价的定义 例如见 [A3], pp 273－277 外摆线以及，更一般地，次摆线，对于运动学作图来说是很重要的．

参考文献

[A1] Müller, H-R, Kinematik, de Gruyter, 1963

[A2] Strubecker, K, Differential geometry, 1, de Gruyter, 1964

[A3] Berger, M, Geometry, 1, Springer, 1987 (中译本 M 贝尔热，几何，第一册，科学出版社，1989)

[A4] Berger, M and Gostiaux, B, Differential geometry, Springer, 1988

张鸿林 译

传染过程 [**epidemic process**, **эпидемии процесс**]

一种**随机过程** (stochastic process)，用来作为某种传染病传播的数学模型．最简单的这种模型可以用一个连续时间 **Марков过程** (Markov process) 来描述，它在时刻 t 的状态是病人数 $\mu_1(t)$ 和暴露的人数 $\mu_2(t)$ 如果 $\mu_1(t)=m$, $\mu_2(t)=n$，则在时间间隔 $(t, t+\Delta t)$ 内 $(\Delta t \to 0)$，转移概率如下决定 以概率 $\lambda_{mn}\Delta t + O(\Delta t)$, $(m, n) \to (m+1, n-1)$，以概率 $\mu m\Delta t + O(\Delta t)$ $(m, n) \to (m-1, n)$ 在此情形下，生成函数

$$F(t, x, y) = \mathsf{E}\, x^{\mu_1(t)} y^{\mu_2(t)}$$

满足微分方程

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \lambda(x^2 - xy)\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \mu(1-x)\frac{\partial F}{\partial x}$$

Б А Севастьянов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bailey, N T J, The mathematical theory of infections diseases and its applications, Hafner, 1975

[A2] Ludwig, D, Stochastic population theories, Springer, 1974

刘秀芳 译

Epimenides 悖论 [Epimenides paradox, Эпименида парадокс]

见悖论 (antinomy)

满态射 [epimorphism; эпиморфизм]

一种反映集合的满映射的代数性质的概念．在一个范畴(category) $\mathfrak{R}$ 中，一个态射(morphism) $\pi: A\to B$ 称为一个满态射，如果 $\alpha\pi=\beta\pi$ 蕴涵着 $\alpha=\beta$ 换言之，一个满态射是一个可以从右方消去的态射．

每一个同构都是一个满态射 两个满态射之积是一个满态射．所以，一个范畴 $\mathfrak{R}$ 中的所有的满态射形成 $\mathfrak{R}$ 的一个子范畴（记为 Epi $\mathfrak{R}$）

在集合、向量空间、群与 Abel 群的范畴中，满态射恰都是满映射，即都是一个集合、向量空间、或群到另一集合、向量空间或群上的线性映射与同态．可是，在拓扑空间或结合环的范畴中，存在着非满的满态射（即不是映射到"上"的映射）

满态射的概念是与单态射(monomorphism)的概念相对偶的 M Ш Цаленко 撰

【补注】 在上文中，α,β 都假定为对某个 C 的态射 $B\to C$ 如果态射的合成是从左到右写的，有时是这样作的，那么 π $A\to B$ 与 α $B\to C$ 的合成就写成 $\pi\alpha$，于是满态射当然就是可从左方消去的态射

在环的范畴中，嵌入 $\mathbf{Z}\to\mathbf{Q}$ 是一个不满的满态射的例子．

参考文献

[A1] Mitchell, B, Theory of categories, Acad Press, 1965

周伯埙 译

等容与等部件的图形 [equal content and equal shape, figures of, равновеликие и равносоставленные фигуры]

$\mathbf{R}^2$ 中两个面积相等的图形，并对应于两个多边形 M_1 与 M_2，后两者都能再分解为多边形作为部件，使构成 M_1 的部件分别合同于构成 M_2 的部件

当 $n\geqslant 3$ 时，$\mathbf{R}^n$ 中等容指的是体积相等，多面体等部件的定义与在 $\mathbf{R}^2$ 中相似 这些概念都已推广到非 Euclid 几何学．

多边形的面积是满足下述公理的一个函数 $s(M)$．

α) 对任何多边形 M, $s(M)\geqslant 0$,

β) 如果 M 是由两两除边界点外无公共点的多边形 M_1, , M_k 拼成的，则

$$s(M)=s(M_1)+\quad+s(M_k),$$

γ) 如果 M_1 和 M_2 全等，则 $s(M_1)=s(M_2)$,

δ) 边为单位长的正方形的面积为 1.

利用这些公理可确定一个矩形的面积．

定理 若两个多边形等部件，则必等积．

早在 Euclid 时代即已熟知的剖分法(method of subdivision)就是以此定理为基础．为了计算一个多边形的面积可将它分成有限个部件，然后拼成一个已知面积的图形．例如，一个平行四边形与一个同底等高的矩形是等部件的（见图 1)，一个三角形与一个同底半高的平行四边形是等部件的(见图 2)

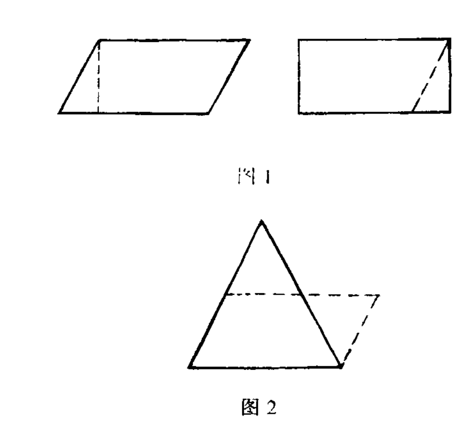


图 1

图 2

这样，以关于矩形面积的定理为基础，可以构造多边形面积的完整理论

以公理 β) 和 γ) 为基础，还有另一种计算面积的方法——填补法(complementation method) 两个多边形称为填补相等的，意即如果分别添上一些各自全等的多边形，就可得到两个全等的多边形．例如，平行四边形与同底等高的矩形是填补相等的(见图 3)，从而是等积的

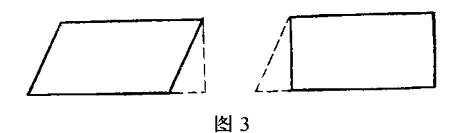


图 3

在 Euclid 平面上，两个多边形等积，当且仅当它们等部件，或当且仅当填补以后相等．在 Лобачевский 平面上和椭圆平面上类似的定理成立．另一方面，在非 Archimedes 几何中，"等积"与"填补相等"是等价的，但两者都不与"等部件"等价．

$\mathbf{R}^3$ 中体积的理论是以相似于面积公理 α)— γ) 的公理为基础．然而，为了计算一个四面体的体积，从 Euclid 开始，就使用了极限过程("艰苦的阶梯") 在现代教科书中，人们使用积分求体积，其定义也与极限有关．同面积论比较，应用极限似乎是"多余的"，这个基础问题构成 Hilbert 第三问题：证明用剖分法和填补法计算任意一个四面体的体积是不可能的．M Dehn 于 1900 年证明了 一个正四面体与一个等积的立方体

不是等部件的，从而解决了 Hilbert 第三问题．两个等积的多面体 M_1 和 M_2 等部件的充分必要条件是Dehn 不变量 $f(M)$ 满足 $f(M_1)=f(M_2)$，这里 $f(M)$ 是 M 的棱长和相应二面角的大小的函数，见[2]

Dehn 不变量已推广到高维情形．高维等部件的必要条件已经提出来，并已证明 当 $n\geqslant 3$ 时，一个正则 n 维单形与一个等积的 n 维立方体不等部件 在 $\mathbf{R}^4$ 内等部件的必要条件也是充分条件．

假设 G 是平面的一个运动群 两个多边形 M_1 和 M_2 称为 G 全等的，意即存在一个运动 $g\in G$，使得 $g(M_1)=M_2$ 两个多边形 M_1 和 M_2 称为 G 等部件的，意即它们可剖分为部分多边形，使得组成 M_1 的部分多边形分别 G 全等于组成 M_2 的部分多边形 对于多面体，G 等部件可类似地定义．

假设 S 是由全体平移与中心对称所组成的运动群 在 $\mathbf{R}^2$ 中等部件与 S 等部件是等价的概念．特别是，等积多边形能剖分，使所得的多边形不仅分别全等，并具有对应的平行边．

在 $\mathbf{R}^2$ 的情形下，等部件等价于 G 等部件，当且仅当 $G\supset S$，对于 $\mathbf{R}^3$，等部件等价于 G 等部件，当且仅当 $G\subset D_0$，这里 D_0 是保持定向的一切运动所构成的群．

下面给出旗不变量的定义 利用旗不变量可以给出 T 等部件的充分必要条件，这里 T 是平移群．设 $\mathbf{R}^{n-1}$， ，$\mathbf{R}^i(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间序列，使得 $\mathbf{R}^{n-1}\supset \quad \supset \mathbf{R}^i$，这里上指标表示维数．进一步，对于每一个 $j=i+1,\ \cdot, n$，$\mathbf{R}^{j-1}$ 分 $\mathbf{R}^j$ 成两个半空间，取定其中之一为“正的”，记作 P^j，称序列 $\varphi=(P^n,\quad, P^{i+1})$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一面 i 阶旗 最后，记 $Q=(M^{n-1},\quad, M^i)$，它是 $\mathbf{R}^n$ 中多面体 M^n 的面的序列，使得 $M^{n-1}\supset \quad \supset M^i$

若对所有的 $j=i,\quad, n-1$，$M^j\parallel \mathbf{R}^j$，则令

$$H_\Phi(Q)=\varepsilon_{n-1}\quad \varepsilon_i|M^i|,$$

这里 $|M^i|$ 是面 M^i 的 i 维体积，且 $\varepsilon_i=\pm 1$，当 M^{j+1} 与 M^j 的正侧相接触时，取 $\varepsilon_j=+1$，否则取 -1 只要对一个 j，$M^j\parallel \mathbf{R}^j$ 不成立，则 $H_\Phi(Q)=0$，这里 $H_\Phi(M^n)=\sum H_\Phi(Q)$，即对多面体 M^n 的各面组成的一切序列 Q 求和．

两个等积多面体 T 等部件，当且仅当它们的每个旗不变量 H_Φ 在多面体上取相同的值．

$\mathbf{R}^n$ 中多面体 M^n 称为 k 重 Minkowski 和（k-multiple Minkowski sum），只要存在多面体 $N_1, N_2,\quad, N_k$（维数为正数），其承载平面分解 $\mathbf{R}^n$ 为这样的直和，使得 $M^n=N_1+\quad+N_k$（这里用的是点集的向量和）．一个多面体称为 $\mathfrak{Z}_k$ 类，意即 M_n 可剖分成有限多个多面体，每一个多面体 T 等部件于一个可表成 k 重 Minkowski 和的多面体

多面体 $M^n\in\mathfrak{Z}_k$，当且仅当对于所有阶数小于 k 的旗不变量 H_Φ，恒有 $H_\Phi(M^n)=0$．

假设 Γ 为全体具有正系数的同位相似和全体平移所组成的群．$\mathbf{R}^n$ 中任意两个多面体是 Γ 等部件的．图 4 用一个三角形和一个矩形说明了这一点，图中数字表示 Γ 全等多边形．

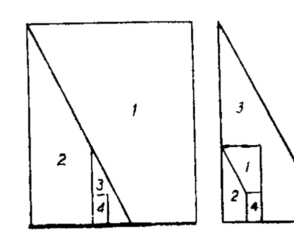


图 4

实行系数 $\lambda>0$ 的同位相似一次，一个 n 维多面体的体积便乘以 λ^n 若以此作为公理，则可用剖分法求得任一多面体的体积

假设在一个 n 维 Euclid 空间、双曲空间或椭圆空间内一个运动群 G 是几乎可迁的（即一点的轨道是处处稠密的），则在该空间中两个多面体 G 填补相等的充分必要条件是它们为 G 等部件．

参考文献

[1] Hilbert problems, *Bull Amer Math Soc*, **8** (1902), 437 − 479

[2] Болтянский, В Г, Равновеликие и равносоставленные фигуры, М, 1956

[3] Болтянский, В Г, Третья проблема Гильберта, М, 1977 (英译本 Boltyanskii, V G, Hilbert's third problem, Winston, 1978)

[4] Hadwiger, H, Vorlesungen uber Inhalt, Oberflache und Isoperimetrie, Springer, 1957

[5] Jessen, B and Thorup, A, The algebra of polytopes in affine spaces, *Math Scand*, **43** (1978), 2, 211 − 240

В Г Болтянский 撰

【补注】 词语“等容与等部件”不是规范的．它起源于由 D Hilbert 采用的德文“Zerlegungsgleich”一词 亦可译为“剖分相等”，“逐块等形”或者“等可剖分”

参考文献

[A1] Sah, C - H, Hilbert s third problem scissors congruence, Pitman, 1979

[A2] Hadwiger, H, Polytopes and translative equidecomposability, *Amer Math Monthly*, **79** (1972), 275 − 276

[A3] McMullen, P and Scheider, R, Valuations on convex bodies, in P M Gruber and J M Wills (eds) Convexity and its applications, Birkhauser, 1983, 170 − 247

马传渔 译 黄正中 校

相等性公理[equality axioms, равенства аксиомы]

数学证明中指明相等关系运用规则的公理．这些公

理断言相等关系的自反性以及等量代换的可行性. 符号化写出相等性公理是

$$x=x,$$
$$x=y\wedge\ \varphi(y|v)\Rightarrow\varphi(x|v),$$
$$x=y\Rightarrow t(y|v)=t(x|v),$$

其中 φ 是所涉及语言的一个公式, t 是一个项, x, y, z 是具有相同变化范围的变元, 表达式 $\varphi(x|v)$ 和 $t(x|v)$ 表示 φ 或 t 中所有自由出现的 v 都被 x 代换得到的结果.

用相等性公理可以证明相等关系的对称性和传递性. 为证前者只需取 φ 为公式 $y=v$, 证后者时取公式 $v=z$

如果所涉及语言的公式和项是用逻辑方法联结原子公式和项的迭代构成, 则(上述)简化的相等性公理可以由其特例, 取 φ 和 t 是原子公式和原子项, 推演得到. 符号化为

$$x_i=y_i\wedge P(x_1,\quad,x_i,\quad,x_n)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(x_1,\quad,y_i,\quad,x_n),$$
$$x_i=y_i\Rightarrow f(x_1,\quad,x_i,\quad,x_n)=$$
$$=f(x_1,\quad,y_i,\quad,x_n),$$

其中 P 和 f 是 n 元谓词和函数符号. B H Гришин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kleene, S C, Introduction to metamathematics, North-Holland, 1950, Chapt XIV (中译本 S C 克林, 元数学导论, 科学出版社, 1984) 沈复兴 译

方程 [equation, уравнение]

下述问题的解析形式 求这样一些值, 当自变量取这些值时, 两给定的函数之值相等 函数所依赖的自变量通常称为未知数 (unknown), 使得两函数之值相等的自变量的值称为方程的解 (solution), 对于这样的未知数的值, 亦称它们满足给定的方程 形如 $f(x)=0$ 的方程的解 x_0, 亦称为 $f(x)$ 的根 (root).

给定方程的解依赖于未知数取值的域 M 一个方程在 M 中可能无解, 这时, 就说它在 M 中是不可解的 如果方程是可解的, 则它可能有一个解, 多个解, 或无穷多个解 例如, 方程 $x^4-4=0$ 在有理数域中是不可解的, 但是在实数域中有两个解· $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$, 而在复数域中则有四个解 $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$, $x_3=i\sqrt{2}$, $x_4=-i\sqrt{2}$ 方程 $\sin x=0$ 在实数域中有无穷多个解 $x_k=k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,$

如果一个方程以域 M 中的一切数作为解, 则称它是 M 上的一个恒等式 (identity)

如果对于一组方程, 需要求出同时满足所有方程的未知数的值, 那么这一组方程就称为一个方程组 (system of equations), 同时满足方程组的所有方程的未知数的一组值, 称为方程组的解 (solution of system). 两个方程组 (或两个方程) 称为等价的 (equivalent), 如果一个方程组 (方程) 的每个解都是另一个方程组 (方程) 的一个解, 反之亦然, 这里两个方程组 (方程) 是在同一个域上来考虑的.

求一个方程的解的过程通常是把它变换成一个等价的方程 有时, 把给定的方程变换成另一个方程后, 其解的集合大于原方程的解的集合. 所以, 在解方程的过程中, 如果进行了这种变换, 就可能出现多余的解 因此必须把由变换后的方程得到的解代入原方程进行验算

代数方程 (algebraic equation) 已经过全面彻底的研究. 解方程是 16 世纪和 17 世纪代数学的主要任务. 如果 $f(x)$ 是超越函数, 则方程 $f(x)=0$ 称为超越方程 (transcendental equation), 根据 $f(x)=0$ 的形式, $f(x)=0$ 称为三角方程 (trigonometric equation)、对数方程 (logarithmic equation) 或指数方程 (exponential equation)

在实际上, 为了解方程, 通常采用各种近似方法 (例如见**线性代数中的数值方法** (linear algebra, numerical methods in)

最简单的方程组是线性方程组 (见**线性方程** (linear equation) 解方程组 (不一定是线性的), 一般地说, 是利用所谓消元法化为解单独一个方程 (见**消元理论** (elimination theory)).

在数论中考虑整数域上的方程, 研究这种方程的解形成 **Diophantus 方程** (Diophantine equation) 论这一数学分支

在一般情况下, 方程是下述问题的表示形式 求属于某一集合 A 的一些元素 a, 使得 $F(a)=\Phi(a)$, 这里 F 和 Φ 是给定的由 A 到另一集合 B 的映射. 如果 A 和 B 是数集, 则得到上面考虑的那种形式的方程. 如果 A 和 B 是高维空间中的点集, 则得到方程组. 如果 A 和 B 是函数集合, 则根据所含映射的特点, 分别得到**常微分方程** (differential equation, ordinary)、**偏微分方程** (differential equation, partial)、**积分方程** (integral equation) 和其他形式的方程

本条目内容根据 БС Э-3 张鸿林 译

无穷阶方程 [equation of infinite order, бесконечного порядка уравнение], 复域中的

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z)\,y^{(n)}(z)=f(z)$$

的微分方程, 其中 $y(z)$ 是复变量 z 的未知函数, $a_n(z)$ 及 $f(z)$ 是给定的函数 已被充分研究的无穷阶方程是

具有常系数的方程

$$Ly \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^{(n)}(z) = f(z).$$

如果特征函数

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$$

是一个指数型 σ 整函数，那么，当 $y(z)$ 是在圆盘 $|z-z_0| < R\ (R>\sigma)$ 中解析的函数时，左边 Ly 对 $z=z_0$ 有意义 如果 $\sigma=\infty$，则必须假定 $y(z)$ 是整函数 与有穷阶方程的差别在于即使 $f(z)$ 是整函数，解 $y(z)$ 也可以有奇点．如果 $\sigma=0$ 且 $f(z)$ 是整函数，则解的存在区域是凸的（[1]）通解由一个特解和相应齐次方程的通解组成．设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdot$ 是特征方程 $\varphi(\lambda)=0$ 的根，并设 $m_1, m_2,$ 分别是它们的重数．齐次方程有初等特解 $z^k e^{\lambda_n z}(k=0, \ \ , m_n-1, n=1,2, \ \ )$ 齐次方程的解可写成根据确定的规则形成的初等特解的级数．如果特征函数 $\varphi(\lambda)$ 有正常的增长（在某个确定意义下），则可以找到这个级数部分和的子序列收敛到 $y(z)$([4])．一般情况下，可以用初等解的有限线性组合近似函数 $y(z)$ 到所需的精确度([5]) 如果 $\sigma=0$，则一个无穷阶方程可以有非解析解([2])．在某些条件下这些解构成一个**拟解析类**（quasi-analytic class），其中微商增长的界比经典 Denjoy - Carleman 定理中的弱．

无穷阶方程有多种应用 它们被用于 Dirichlet 多项式序列，解析函数系的完全性，解析和调和函数的唯一性等问题的研究，以及用于解析问题的可解性，例如广义拟解析性问题，动量的广义唯一性问题，等等

参考文献

[1] Pólya, G , Eine Verallgemeinung des Fabryschen Luckensatzes, *Nachr Ges Wiss Gottingen* (1927), 187 – 195

[2] Valiron, G , Sur les solutions des équations différentielles lineaires d'ordre infini et à coefficients constants, *Ann Sci École Norm Sup* (3), **46** (1929), 1, 25 – 53

[3] Леонтьев, А Ф, 《Тр четвертого всесоюзн матем съезда》, Л , **2** (1964), 648 – 660

[4] Леонтьев, А Ф ,《Матем сб》, **70** (1966), 1, 132 – 144

[5] Красичков - Терновский, И Ф ,《Матем сб》, **88** (1972), 3, 331 – 352 .

А Ф Леонтьев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hirschmann, I I and Widder, D V , The convolution transform, Princeton Univ Press, 1955

[A2] Ehrenpreis, L , Theory of infinite derivatives, *Amer J Math* , **81** (1959), 799 – 845 .

[A3] Ehrenpreis, L , Fourier analysis in several complex variables, Wiley (Interscience), 1970 .

周芝英 译 叶彦谦 校

等仿射联络 [**equi-affine connection**, **эквиаффинная связность**]

n 维光滑流形 *M* 上的**仿射联络** (affine connection), 使得 *M* 上存在一个关于这联络的为共变常数的非零 *n* 次形式 Φ 形式 $\Phi(X_1, \ \ , X_n)$ 可解释为由向量场 $X_1, \ \ , X_n$ 构成的平行多面体的体积函数，这个条件意味着存在一个在向量的**平行移动** (parallel displacement) 下保持不变的体积．若 *M* 上的仿射联络用局部联络形式的矩阵给出

$$\omega^i = \Gamma_k^i(x)\, dx^k, \ \det|\Gamma_k^i| \neq 0,$$

$$\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i(x)\, \omega^k,$$

并且 $\Phi = \lambda\omega^1 \wedge \ \ \wedge \omega^n$，则上述关于 Φ 的条件具有如下形状

$$d\lambda = \lambda\omega_i^i$$

等价地，*M* 上仿射联络是等仿射的，其充要条件为它的**和乐群** (holonomy group) 是仿射幺模群．对于无挠联络的情况，这个条件等价于 **Ricci 张量** (Ricci tensor) $R_{kl} = R_{kli}^i$ 的对称性，即 $R_{kl} = R_{lk}$．在等仿射联络下 *M* 的标架丛可简化为使得 $\omega_i^i = 0$ 的子丛．

参考文献

[1] Норден, А П , Пространства аффинной связности, 2 изд , М , 1976

Ю Г Лумисте 撰

【补注】

参考文献

[A1] Schouten, J A , Ricci calculus, Springer, 1954

沈一兵 译

等仿射几何学 [**equi-affine geometry** , **эквиаффинная геометрия**]，亦称等积仿射几何学

仿射几何学 (affine geometry) 的一个分支．它研究对**仿射幺模群** (affine unimodular group) 的变换不变的量 最重要的事实是：在等仿射几何中，平行四边形有面积，平行六面体有体积． Л А Сидоров 撰

【补注】 见 [A1] 第 276 页，[A2] 第 150 – 156 页，[A3] 第 40 – 52 页，[A4]，[A5] 第 367 页．

参考文献

[A1] Berger, M , Geometry, 1, Springer, 1987 (中译本 M 贝尔热，几何，第一卷，科学出版社，1987)

[A2] Spivak, M , Differential geometry, 2, Publish or Perish, 1979

[A3] Fejes Toth, L , Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, Springer, 1972

[A4] Dieudonné, J , Treatise on analysis, 4, Acad Press, 1974

[A5] Blaschke, W , Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitatstheorie, Affine Differentialgeometrie, 2, Springer, 1923

马传渔 译 黄正中 校

等仿射平面 [**equi-affine plane**, **эквиаффинная плоскость**], 亦称等积仿射平面

在**仿射幺模群** (affine unimodular group) 的变换下的仿射平面, 其中平行四边形的面积不变.

Л А Сидоров 撰

【补注】 亦见**等仿射几何学** (equi-affine geometry)

马传渔 译 黄正中 校

等维数理想 [**equi-dimensional ideal**, **несмешанный идеал**]

(在某个域 k 上有限生成的) 整区 R 的一个理想 $\mathfrak{m}$, 它具有如下性质 在准素分解 $\mathfrak{m}=\mathfrak{Q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{Q}_s$ 中, 所有与准素理想 $\mathfrak{Q}_1,\cdots,\mathfrak{Q}_s$ 相伴的素理想 $\mathfrak{P}_1,\cdots,\mathfrak{P}_s$ 皆有相同维数, 也就是说, 对所有 i, 商环 $R/\mathfrak{P}_i$ 皆有相同的 Krull 维数. 这一共同的维数称为等维数理想 $\mathfrak{m}$ 的维数 (dimension of the equi-dimensional ideal).

如果 R 是某一仿射簇 X 上的正则函数环, 那么 R 的一个理想 $\mathfrak{m}$ 是等维数的, 当且仅当由 $\mathfrak{m}$ 所定义的子簇 $Y\subset X$ 的所有不可约分支都有相同维数.

Л В Кузьмин 撰

【补注】 一个等维理想也称为非混合理想 (unmixed ideal) 人们有时也用 (理想的) "等维数" (equi-dimension) 来替代术语 "等维数理想的维数".

整闭的 Noether 整环是一个整区, 它的所有主理想是等维数的, [A1], p. 196

参考文献

[A1] Zariski, O, Samuel, P, Commutative algebra, 2, Springer, 1975

许永华 译

等距离集 [**equi-distant**, **эквидистанта**]

度量空间 R 中集合 M 的等距离集是 R 中 M 的**管状邻域** (tubular neighbourhood) 的边界, 其中管状邻域由中心在 M 上半径同为 d 的球所组成. 若 M 是 Riemann 空间 V^n 中的可微子流形 M^k, 则 M 的等距离集由在 M^k 每点垂直于 M^k 的测地线上长度 (从 M^k 的对应点算起) 相等的测地线段的端点给出 (在更严格的意义下) 若 V^n 是完全的, 则等距离集是 V^n 中 M^k 的法丛上一切有固定长度 d 的向量在**指数映射** (exponential mapping) 下的象. 若 V^n 不是完全的, 则等距离集只对充分小的 d 才存在

等距离集例子 1) Лобачевский 平面 (超循环 (hypercycle)) 上的等距离集是垂直于某直线 (基线 (basic line), 或基 (basis)) 的直线束的正交轨线. 等距离集由两支组成, 它们位于基线的两边且凹向基线 等距离集的曲率是常数. 2) Лобачевский 空间中的等距离集是外在曲率为正常数的曲面.

Д Д Соколов 撰 沈一兵 译

等度连续性 [**equicontinuity**, **равностепенная непрерывность**], 函数集的

和连续函数集的紧性概念密切相关的一个概念. 设 X 和 Y 是紧距离空间, $C(X,Y)$ 是从 X 到 Y 的连续映射的集合, 集合 $D\subset C(X,Y)$ 称作是等度连续的 (equicontinuous), 如果对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使对一切 $x_1,x_2\in X$, $f\in D$, 从 $\rho_X(x_1,x_2)\leqslant\delta$ 可推出 $\rho_Y(f(x_1),f(x_2))\leqslant\varepsilon$ D 的等度连续性等价于 D 在 $C(X,Y)$ 中相对紧 *), 此时 $C(X,Y)$ 被赋予距离

$$\rho(f,g)=\max_{x\in X}\rho_Y(f(x),g(x)),$$

这就是 Arzelà-Ascoli 定理 (Arzelà-Ascoli theorem) 等度连续性的思想可以移植到一致空间.

参考文献

[1] Колмогоров, А Н, Фомин, С В, Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд, М, 1981 (中译本 А Н 柯尔莫哥洛夫等, 函数论与泛函分析初步, 高等教育出版社, 1957)

[2] Edwards, R E, Functional analysis theory and applications, Holt, Rinehardt, Winston, 1965

Е М Семенов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Dieudonné, J A, Foundations of modern analysis, Acad Press, 1961

【译注】 *) 此句话前应加一句 "当 D 有界时,".

余庆余 译

等度收敛级数 [**equiconvergent series**, **равносходящиеся ряды**]

收敛的或发散的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, 二者之差是一个收敛级数, 且其和为零 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=0$ 如果仅仅是二者之差为收敛级数, 则两个级数称为广义等度收敛的 (equiconvergent in the wide sense).

如果 $a_n=a_n(x)$ 和 $b_n=b_n(x)$ 是函数, 例如 $a_n,b_n\cdot X\to\mathbf{R}$, 其中 X 是任何集合, $\mathbf{R}$ 是实数集, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 称为在 X 上一致等度收敛的 (uniformly equiconvergent) (广义一致等度收敛的 (uniformly equiconvergent in the wide sense)), 指的是二者之差为 X 上的一致收敛级数, 且其和为零 (相应地, 仅仅为 X 上的一致收敛级数).

例 如果区间 $[-\pi,\pi]$ 上的两个可积函数在区间 $I\subset[-\pi,\pi]$ 上相等, 则它们的 Fourier 级数在每个区间 $I^*\subset I$ 上是一致等度收敛的, 而共轭的 Fourier 级数在 I^* 上是广义一致等度收敛的.

Л Д Кудрявцев 撰 张鸿林 译

平衡位置 [**equilibrium position**, **равновесия положение**]

常微分方程组

$$\dot{x}=f(t,x),\ x\in\mathbf{R}^n \qquad (*)$$

的平衡位置是这样的点 $\xi\in\mathbf{R}^n$，使得 $x=\xi$ 是 (*) 的(不随时间变化的)解 这个解本身也称为平衡位置

点 $\xi\in\mathbf{R}^n$ 是 (*) 的一个平衡位置，当且仅当对于一切 t，有

$$f(t,\xi)=0$$

设 $x=\varphi(t)$ 是 (*) 的任意解，变量置换 $x=\varphi(t)+y$ 把这个解变换为方程组

$$\dot{y}=F(t,y),\ F(t,y)\equiv f(t,\varphi(t)+y)-f(t,\varphi(t))$$

的平衡位置 $y=0$ 因此，在稳定性理论中，例如可以认为 (不失一般性)，总是研究处于 $\mathbf{R}^n$ 中的原点上的平衡位置的稳定性的问题

非自治系统 (*) 的平衡位置 $x=0$ 往往称为平凡解 (trivial solution)、零解 (zero solution)、奇点 (singular point)、平稳点 (stationary point)、静止点 (rest point)、平衡状态 (equilibrium state) 或不动点 (fixed point) Н Х Розов 撰 张鸿林 译

平衡关系 [equilibrium relation，равновесия соотношение]

表达在 $|z|<R\leqslant\infty$ 中亚纯函数 $f(z)$ 的增长与其值分布 (见**值分布论** (value-distribution theory)) 之间联系的一个关系．每个亚纯函数 $f(z)$ 具有下述平衡性质 (equilibrium property) 设 $N(r,a,f)$ 为刻画 $f(z)$ 的 a 点分布密度的计数函数，而 $m(r,a,f)$ 为刻画 $f(z)$ 对给定数 a 的平均逼近度的迫近函数，那么 $N(r,a,f)$ 与 $m(r,a,f)$ 的和对 a 的不同值是不变的 使用球面度量会使平衡关系更加有效．

以

$$[a,b]=\frac{|a-b|}{\sqrt{1+|a|^2}\sqrt{1+|b|^2}}$$

表示两个数 a 与 b 之间的球面距离，对每个复数 a，令

$$m^0(r,a,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\frac{1}{[f(re^{i\theta}),a]}\,d\theta-\alpha(a,f),$$

其中

$$\alpha(a,f)=\lim_{z\to 0}\ln\frac{|z|^n}{[f(z),a]},$$

并以 $n=n(0,a,f)$ 表示 $f(z)$ 在 $z=0$ 处 a 点的重数 当 $r\to R$ 时，函数 $m^0(r,a,f)$ 与 Nevanlinna 迫近函数 $m(r,a,f)$ 之差是一有界项．因而在圆 $|z|=r<R$ 上，如前所述，函数 $m^0(r,a,f)$ 就刻画了 $f(z)$ 向 a 的平均逼近速率 下述结果成立 对每个值 $r,0\leqslant r<R$，对扩张复平面上的任何复数 a，以及对 $|z|<R\leqslant\infty$ 中任何亚纯函数 $f(z)$，有等式 (平衡关系 (equilibrium relation))

$$m^0(r,a,f)+N(r,a,f)=m^0(r,\infty,f)+N(r,\infty,f),$$

其中

$$N(r,a,f)=\int_0^r[n(t,a,f)-n(0,a,f)]\frac{dt}{t}+n(0,a,f)\ln r,$$

而 $n(t,a,f)$ 表示 $f(z)$ 在圆盘 $\{z\ |z|\leqslant t\}$ 上的 a 点数．

在 R Nevanlinna 的奠基性论著 [1] 发表后，平衡关系式还被移植到 p 维整曲线 (见 [3]) 和全纯映射 (见 [4]，[5]) 上

参考文献

[1] Nevanlinna, R , Analytic functions, Springer, 1970 (译自德文)

[2] Wittich, H , Neueste Ergebnisse über eindeutige analytische Funktionen, Springer, 1955

[3] Weyl, H , Meromorphic functions and analytic curves, Princeton Univ Press, 1943

[4] Шабат, Б В , Введение в комплексный анализ, 2 изд , ч 2, М , 1976

[5] Griffiths, P , King, J , Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties, *Acta Math* , **130** (1973), 145－220

В П Петренко 撰

【补注】 函数 f 的 a 点是使得 $f(z)=a$ 的点 z．

平衡关系常称为 Nevanlinna 第一基本定理 (Nevanlinna first main theorem) 的 Ahlfors-清水形式．

关于计数函数和迫近函数概念，亦见 **Nevanlinna 定理** (Nevanlinna theorem)，**值分布论** (value-distribution theory)．

参考文献

[A1] Griffiths P A , Entire holomorphic mappings in one and several complex variables, Princeton Univ Press, 1976

【译注】

参考文献

[1] 庄圻泰，亚纯函数的奇异方向，科学出版社，1982

[2] 杨乐，值分布论及其新研究，科学出版社，1982

沈永欢 译

等价 [equivalence，эквивалентность]

集合 X 上的具有下列性质的**二元关系** (binary relation) $R\subseteq X\times X$

1) 对任意 x xRx (自反性 (reflexivity))，

2) $xRy\Rightarrow yRx$ (对称性 (symmetry))，

3) $xRy\wedge yRz\Rightarrow xRz$ (传递性 (transitivity))

如果 f 是集合 X 到集合 Y 内的映射，则关系 $R=\{(x_1,x_2)\ fx_1=fx_2\}$ 是一等价关系

对任意 $y\in X$，所有与 y 等价的 x 组成的集合 $U\subseteq X$ 称为是 y 的等价类 (equivalence class) 任意两个等价类要么不相交，要么重合，也就是说，任意一个等价关系定义了 X 的一个分划，反之亦然

В Н Гришин 撰 张锦文、赵希顺 译

等价（逻辑的）[equivalence (logical), равносильность]

两个命题 A 和 B（逻辑）等价，如果对 A 和 B 的参量的各种可允许的取值，A 和 B 都同真或同假．例如，方程，不等式，方程组，不等式组的等价是指它们的解集相同．**命题演算**（proposition calculus）公式的等价是指它们所定义的 **Boole 函数**（Boolean function）相同．

参考文献

[1] Новиков, П С, Элементы математической логики, 2 изд, М, 1973（英译本 Novikov, P S, Elements of mathematical logic, Edinburgh, 1964）

С Н Артемов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kleene, S O, Mathematical logic, Wiley, 1967

沈复兴 译

范畴的等价 [equivalence of categories, эквивалентность категорий]

范畴的同构概念的一种推广，它首先是由同构对象类的存在而得来的．

两个范畴 $\mathfrak{K}$ 与 $\mathfrak{L}$ 称为等价的（equivalent），如果有一元共变函子 F $\mathfrak{K}\to\mathfrak{L}$ 与 G $\mathfrak{L}\to\mathfrak{K}$，使得乘积 FG 与恒等函子 $\mathrm{Id}_{\mathfrak{L}}$ 自然等价，而且乘积 GF 与 $\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}}$ 自然等价，换言之，范畴 $\mathfrak{K}$ 与 $\mathfrak{L}$ 是等价的，如果有函子 F 与 G "几乎"互逆 两个范畴是等价的，当且仅当它们的骨架是同构的（见**范畴的骨架**（skeleton of a category））

Понтрягин 对偶定理建立了 Abel 群的范畴与下述范畴的等价性，此范畴是与拓扑 Abel 群的范畴对偶的，Boole 代数的范畴等价于与 Boole 空间的范畴对偶的范畴，集合的范畴上的二元关系所组成的范畴等价于一个三元组的 Kleisli 范畴，这个三元组是由取子集的集合的函子所定义的． М Ш Цаленко 撰

【补注】关于三元组的概念参见**三元组**（triple），关于一个三元组的 Kleisli 范畴的概念参见**范畴**（category）的补注

参考文献

[A1] Mitchell, B, Theory of categories, Acad Press, 1965

周伯埙 译

等价表示 [equivalent representations, эквивалентные представления]

群（代数、环、半群）X 分别在向量空间 E_1 和 E_2 中的两个表示 π_1, π_2，它们的**交结算子**（intertwining operator）是 E_1 到 E_2 的向量空间同构（有时这样的表示称为代数等价的（algebraically equivalent）），若 π_1 和 π_2 是拓扑向量空间 E_1 和 E_2 中的表示且 π_1 和 π_2 的交结算子是 E_1 到 E_2 的拓扑向量空间的同构，就称 π_1 和 π_2 是拓扑等价的（topologically equivalent）"等价表示"一词也用于定义另外一些等价关系 例如，两个表示若存在具有稠密的定义域和稠密的值域的闭算子以交结它们，则称为弱等价的（weakly equivalent）．Banach 空间中 Lie 群的两个表示，若泛包络代数在它们的解析向量的空间上的诱导表示是代数等价的，就称为无穷小等价的（infinitesimally equivalent）．代数的两个表示，若它们的核重合，有时称为等价的或同构的（isomorphic），拓扑群的两个表示，如果该群的某个**群代数**（group algebra）的诱导表示同构，那么也称为等价的 А И Штерн 撰 石生明 译 许以超 校

等价求和法 [equivalent summation methods, равносильные методы суммирования]

同类序列（可能趋于不同的极限）求和的方法，换句话说，等价求和法是有相同**可和性域**（summability field）的求和方法 有时，具有相同可和域且是相容求和的（见**求和法的相容性**（compatibility of summation methods））方法被称为是等价的 **Cesàro 求和法**（Cesàro summation methods）(C,k) 与 **Riesz 求和法**（Riesz summation method））(R,n,k)（对相同的整数 $k\geqslant 0$），Cesàro 求和法 (C,k) 与 **Hölder 求和法**（Hölder summation methods）(H,k)（对相同的整数 $k\geqslant 0$）是等价且相容的方法的例子 存在着等价但不相容的求和法

有时，所考虑的不是完全的可和域，而是这些完全可和域属于某一集 U 的一些子集．如果这些子集对于两个求和法来说是重合的，那么就说这两个方法在 U 上是等价的 对于实序列的求和法称为完全等价的（completely equivalent），如果它们的可和域当可和序列直到包含 $+\infty$ 和 $-\infty$ 时仍然保持相等的话 对于可和性的特殊形式（绝对可和性、强可和性等等），等价求和法可类似地定义．

借助于矩阵 $\|a_{nk}\|$ 及 $\|b_{nk}\|$，以由序列到序列的变换来定义的**矩阵求和法**（matrix summation methods）称为在序列 $\{s_k\}$ 的集合 U 上绝对等价的（absolutely equivalent），如果对任何 $\{s_k\}\subset U$ 有 $\tau_n^{(A)}-\tau_n^{(B)}\to 0$，$n\to\infty$，其中

$$\tau_n^{(A)}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}s_k,\quad \tau_n^{(B)}=\sum_{k=1}^{\infty}b_{nk}s_k,$$

而且表示 $\tau_n^{(A)}$ 和 $\tau_n^{(B)}$ 的级数对所有的 n 都收敛

参考文献

[1] Cooke, R G, Infinite matrices and seguence spaces, MacMillan, 1950

[2] Hardy, G H, Divergent series, Clarendon Press, 1949

[3] Кангро, Г Ф, в сб, Итоги науки и техники Метематический анализ, т 12, М, 1974, 5-70

И И Волков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Zeller, K and Beekmann, W, Theorie der Limitierungsverfahren, Springer, 1970 郭思旭 译 邓应生 校

等价变换 [**equivalent transformations**, **эквивалентные преобразования**], 控制系统的

保持**控制系统** (control system) 等价关系的变换 它们用在优化和控制问题中, 也作为刻画 (例如, 通过公理化) 特定类型控制系统的工具. 形式系统的演绎也可视为控制系统的等价变换 等价关系常取为功能等价. 即如果两个控制系统具有相同的功能, 则它们是等价的 有时与其它概念相应, 也考虑其它等价关系

控制系统的等价变换是与大量各种问题相关联的, 这些问题的具体形式则依控制系统类的特定性质而变 这种类型的基本问题有

1 构造变换规则的有限 (或递推) 完全系构造. 等价变换的一个规则系, 称为对给定一类控制系统是完全的 (complete), 如果这类系统中的任意一个, 可通过有限次运用这些规则变换为任意与其等价的另一个. 这一问题的解本质上依赖于控制系统的类型及其等价关系, 也依赖于可允变换的集合

这一问题的最广泛的提法涉及的解法受到如下的限制 控制系统定义了一个部件 (或子系统) 的概念. 考虑控制系统中把该系统一些部件替换成另一些的那些变换 于是, 一个部件对 (α,β) 定义了任意一个控制系统 γ 的变换集. 其中每一变换由以部件 β 代换 γ 中的部件 α 所构成 (如果 γ 不包括 α, 那么假设由 (α,β) 定义的变换保持 γ 不变) 一个部件对 (α,β) 称作为对给定类型控制系统的一个法则 (rule), 如果由其所定义的变换保持等价关系 亦即, 如果把给定类型中的任意一个控制系统转化为与其等价的一个. 某些法则还可附加可应用性条件, 来指明它们可应用并保持等价关系的情形 如果法则 (α,β) 可应用到每个控制系统的任何包含部件 α 的情形, 则它称为是局部的 (local) 一个法则的非局部特性常常指的是, 其可应用性须由整个控制系统的结构而定 法则系的完全性概念通常定义如下

一对 (α,β) 称为由法则系 Σ 可推断的, 如果部件 α 可通过 Σ 中的法则变换为部件 β (法则应用于部件与控制系统的情形一样定义) 法则系 Σ 称为完全的, 如果所有部件对 (α,β), 其中 α 和 β 是等价控制系统, 都可由其推断 通常与法则一起考虑的还有法则方案 (schemes of laws). 这包括一些参数 (自由变量) 把一个特定值赋予参数, 每个法则方案一般得到法则的一个无限集合 最广泛的问题提法, 则是要求对给定类型的控制系统寻找一个有限完全的法则方案系统

2 变换法则系统 (既可对个别系统, 也可从算法观点) 的完全性问题是 相对于法则系, 确定它是不是完全的

3 产生等价关系有效步骤的构造. 这个问题是第一个问题的弱化 解决的方法包括任意算法和非确定性可形式描述的步骤.

4 优化 (或一般地, 追求某种目标) 变换步骤的构造 这里最通常的问题, 是使控制系统的方案或化控制系统为其在等价类中唯一的某个典范形的复杂性最小 在后一种情形下, 问题的解也是等价关系的一个解决步骤 变换的目的也可能是自改正或其他特殊控制系统的构造 优化问题是与具有度量特点的整个一系列问题相联系的 例如, 关于得到解的复杂性估计问题, 关于最优控制系统部分问题等

5 第一类问题的解 即对任意给定类型控制系统, 无穷类型集合中有限或递推完全变换法则系统的存在性问题 这样类型的控制系统可以是, 例如, 同类型代数中所有项构成的集合的全体, 在不同基底下**功能元图** (diagram of functional elements) 的类的全体等.

特定类型控制系统的特殊性体现在上述问题的提法和解法中 下面考虑一些例子

代数学中的等价变换 每一由若干符号构成的**代数** (algebra) 相应于控制系统的一个无穷集——所有由给定符号组成的项 (公式) (连同由它们定义的函数) 所构成的集合. 项集合上一个自然的等价关系是函数等价 (functional equivalence) 两项 t_1 和 t_2 等价, 当且仅当除了非本质自变量外, 它们定义了一个且同一个函数 这时常用的记法是 $t_1=t_2$ (或 $t_1\equiv t_2$), 而这样的表达式称为是该代数的恒等式 (identities) 或等式 (equalities) 这时项的部件是子项 即它们本身也是项. 因为用等价的一项替换一个子项保持等价关系, 任意代数恒等式 (视为项的无序对) 是一个局部法则. 任意代数恒等式也可视为法则方案, 其参数就是变量. 因此, 问题 1 可提为如下 对于一个给定的代数, 寻找其作为方案或法则的有限完全的恒等式系统 换句话说, 这时, 问题 1 就是各种代数的代数公理化问题

有限完全恒等式系统的存在性是代数的一个函数性质, 即它由可在给定代数中表达的函数集合完全确定, 而不依赖于符号的内容 任意函数完全 (有限) 代数具有一个有限完全恒等式系统, 任意二元代数具有一个有限完全恒等式系统, 存在三元广群、有限半群和无限群不具有有限完全恒等式系统, 任意有限群具有一个有限完全恒等式系统, 对于所有递归函数代数, 以及**正则事件** (regular event) 代数, 问题 1 无解.

功能元图的等价变换 **功能元图** (diagram of functional elements) 的概念可视为项的概念的推广．在某个基底下的功能元图集合，实现了与具有相应于给定基底的符号运算集合的代数相同的函数集合．因此，关于代数的等价变换问题的结果稍加修改就适用于功能元图的情形．这时，部件就是子图 它与功能元图的差别仅在于它可有几个输出

接触图的等价变换．与项的情形一样，部件的概念就是**触点模式** (contact scheme) 仅需加强图中部件输入中极点集合的定义 两个其极点一一对应的触点模式为等价的，是指一个图中任意极点间的传导率函数与另一个模式中相应极点间的传导率函数相等．如果把一对等价触点模式视为法则方案，其参数是标在图边上的字母，又如果假设这个方案仅仅通过改变这些字母来构成法则，那么所有触点模式的集合不具有有限完全法则方案系统．同时，对任意 n，所有其边上可带有至多 n 个不同字母的触点模式集合将具有一个有限完全的法则方案系统 如果假设特定法则是通过用任何触点模式相应地代换具相同字母的边而生成的，那么也可以为所有触点模式的集合构造一个有限完全法则系统．

自动机的等价变换 对于**有限自动机** (automaton, finite)，不存在有限完全局部变换法则系统．不过，如果利用非局部法则或依赖于特定参数的法则方案，则其问题 1 可能有肯定的解 有限自动机是与正则事件代数相联系的，其元素是可用有限自动机实现（识别）的语句，其符号运算是并 $x \vee y$，拼接 xy 和叠代 x^* 这个代数没有有限完全恒等式系统 不过，由所有包含空语句的事件所构成的子代数，具有有限完全恒等式系统．

算法的等价变换．对于**算法** (algorithm) 的完全集合和功能等价关系，等价变换问题具有否定的解，因为此时功能等价关系不是递推可列的 因此，为得到解，或者算法的集合要受到限制，或者问题的提法需要修改 算法子集合通常是由有限自动机，具有库存记忆或堆栈记忆的自动机，不同类型的离散转换器，拓扑结构或暂态记忆量受限的程序等指定的．有时算法子集合是按照给定类型**可计算函数** (computable function) 的函数准则得到的 后一情形中给定了函数的一个特定基底集合，而基底集合再通过叠加、递推、受限求和等运算方法达到闭合．不过，对于这样得到的算法集合，仅当相应的函数类型相当窄时，功能等价关系才有解

因此发展了其它方法，特别是发展了基于算法方案的研究方法．这些方案与算法的差别基本在于它们设定函数的办法．算法方案等价关系被视为是算法功能等价关系的近似 所以，对算法方案等价变换问题的解，可认为是对算法的相应问题的近似解．不过，仅对接近于有限自动机之类的相当粗略的近似，这时的问题才有解 如果法则系的完全概念放松，对所有算法的集合也可以得到解．例如，去掉法则必须应用有限次的要求 更准确地，一个法则系称为是*极限完全*的，如果通过应用该法则系中的法则，任意两个等价算法可在极限情形，即在无穷多步后，变换为一个（一般是无穷的）计算复形．结果表明，可对在某个简单基底上处处有定义的程序的功能完全集合，构造一个有限极限完全的局部法则方案系统．极限完全性的真正意义，特别在于具有这个性质的系统对于计算有限函数程序集合在通常意义下也是完全的．

在控制系统的优化问题起重要作用的是有向变换，其最后结果是最优控制系统或接近于最优的系统 特别地，对*单调变换* (monotone transformations) 可能性的研究引起了极大的兴趣．它在每一步都不增加控制系统在某种意义下的复杂性．

参考文献

[1] Янов, Ю И,《Mitt Math Ges DDR》, 1973, No 2-3

[2] Янов, Ю И,《Проблемы кибернетики》, 1962, 8, 75-90

[3] Мурский, В Л,《Докл АН СССР》, **163** (1965), 4, 815-818

[4] Мурский, В Л,《Проблемы кибернетики》, 1961, 5, 61-76

[5] Мурский, В Л,《Проблемы кибернетики》, 1965, 15, 101-116

[6A] Янов, Ю И,《Проблемы кибернетики》, 1958, 1, 75-127

[6B] Янов, Ю И,《Проблемы кибернетики》, 1980, 37, 215-238

Ю И Янов 撰 夏小华 译

同变上同调 [**equivariant cohomology, эквивариантные когомологии**]

一种将群作用考虑在内的**上同调** (cohomology) 更确切地说，在 G *空间* (G-spaces)（即拓扑空间，在它上有群 G 的连续作用）与同变映射的范畴上，同变上同调是一序列逆变函子 H_G^n（取值于交换群的范畴）与自然变换

$$H_G^n(L) \to H_G^{n+1}(K, L),\ L \subseteq K,$$

具有下列性质 a) 空间对的同变同伦映射诱导群 H_G^n 的相同的同态，b) 如下形状的包含映射

$$(K, K \cap L) \subseteq (K \cup L, L)$$

诱导同构

$$H_G^n(K \cup L, L) \to H_G^n(K, K \cap L)$$

以及 c) 对于每个空间对 (K, L) 下列的上同调序列是正合的

$$\to H_G^n(K,L) \to H_G^n(K) \to H_G^n(L) \to H_G^{n+1}(K,L) \to$$

设 π $E_G \to B_G$ 为万有 G 纤维化 (G-fibration), K_G 为以 K 为纤维相配于万有纤维空间 π 的纤维化 (即在 $E_G \times K$ 上令 G 作用为 $g(l, k) = (lg^{-1}, gk)$ 而得到的商空间称为 K_G), 则函子 $H_G^n(K) = H^n(K_G)$ 给出一种同变上同调理论, 这里 H^n 是任意一种上同调理论.

对于一个给定的群 G, 群 $H_G^n(G/F)$ 的集体与一切可能的由 G 的子群包含关系 $F_1 \subseteq F_2$ 所诱导的同态合起来常被称作 H_G^* 理论的系数系统 (system of coefficients) 在某些情形下, 函子 H_G^n 由系数系统唯一确定(例如, 当 G 为有限群且对一切 $n>0$ 有 $H_G^n(G/F)=0$ 时).

参考文献

[1] Bredon, G E, Equivariant cohomology theories, Springer, 1967

[2] Hsiang, W Y, Cohomology theory of topological transformation groups, Springer, 1975

Е Г Скляренко 撰

【补注】 同变上同调的主要用途是在同变阻碍理论 (equivariant obstruction theory), 以及同变同伦论 (equivariant homotopy theory) 中某些问题诸如 G Carlsson ([A1]) 对 Segal 猜想 (Segal conjecture) 的解答 (亦见 [A2] 与同伦 (homotopy))

一个非常普遍的现象是 对于许多数学分支中的种种构造与结果宜于考虑将它们推广到族的情形与同变的情形. 而这种种推广又时常反过来成为研究非同变与非族式情形的重要工具. 一个例子就是用同变 K 理论于 Atiyah-Singer 指标定理及不动点定理的证明, 可见 [A3]

因此, 许多理论具有同变的变种, 比如相应于上同调论就有像同变同伦论 ([A1]), 同变 K 理论 (equivariant K-theory) ([A3], [A4]), 同变配边理论 (equivariant cobordism) ([A5], [A7]) 等等变体的变种. 许多定理与构造有相应的同变体, 诸如同变割补术 (equivariant surgery) ([A1], [A7]), 同变平滑 (equivariant smoothing) ([A6]) 以及同变横截性 (equivariant transversality) ([A7]), 等等.

参考文献

[A1] Carlsson, G, Equivariant stable homotopy and Segal's Burnside ring conjecture, *Ann of Math*, **120** (1984), 189 – 224

[A2] Lewis, L, G., May, J P and Steinberger, M, Equivariant stable homotopy theory, Lecture notes in math, 1213, Springer, 1986 With contributions by J E, McClure

[A3] Petrie, T and Randall, J D, Transformation groups on manifolds, M Dekker, 1984

[A4] Tom Dieck, T, Transformation groups and representation theory, Springer, 1979

[A5] Petrie, T, Pseudoequivalences of G-manifolds, in R J Milgram (ed) Algebraic and geometric topology, Vol 1, Amer Math Soc, 1978, 169 – 210

[A6] Lashof, R and Rothenberg, M, G-smoothing theory, in R J Milgram (ed) Algebraic and geometric topology, Vol 1, Amer Math Soc, 1978, 211 – 266

[A7] Browder, W and Quinn, F, A surgery theory for G-maniflods and stratified sets, in Manifolds-Tokyo, Univ Tokyo Press, 1973, 27 – 36

孙以丰 译

同变估计量 [equivariant estimator, эквивариантная оценка], 亦称同变估计

一种统计点估计量, 它关于样本空间给定一对一变换群保持统计估计问题的结构.

假定随机向量 $X=(X_1, \quad, X_n)$ 的分量 $X_1, \quad, X_n$ 独立同分布, 取值于样本空间 $(\mathfrak{X}, \mathscr{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbf{R}^k$, 需要估计未知参数 θ 的真值. 其次, 假定一对一变换群 $G=\{g\}$ 作用于 $\mathfrak{X}$, 使得对一切 $g \in G$, 有

$$g\mathfrak{X}=\mathfrak{X} \quad \text{和} \quad g\mathscr{B}_{\mathfrak{X}}=\mathscr{B}_{\mathfrak{X}}.$$

群 G 本身又导出了参数空间 Θ 上的变换群 $\bar{G}=\{\bar{g}\}$, 称 $\bar{G}$ 为诱导群 (induced group), 它的元素由下式确定

$$\mathsf{P}_\theta(B)=\mathsf{P}_{\bar{g}\theta}(gB), \text{ 对一切 } g \in G, \ B \in \mathscr{B}_{\mathfrak{X}}$$

假定 $\bar{G}$ 是 Θ 上的一对一变换群, 使得对一切 $\bar{g} \in \bar{G}$, 有

$$\bar{g}\Theta=\Theta$$

在这些条件下, 若 θ 的点估计 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X)$ 满足条件

$$\hat{\theta}(gX)=\bar{g}\hat{\theta}(X), \text{ 对一切 } g \in G,$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的同变估计量, 或者说 $\hat{\theta}$ 关于群 G 保持了参数 θ 的统计估计问题的结构.

在损失函数关于 G 不变的假定下, 已获得了同变估计理论中最感兴趣的结果.

参考文献

[1] Zacks, S, The theory of statistical inference, Wiley, 1971

[2] Lehmann, E, Testing statistical hypothesis, Wiley, 1986

М С Никулин 撰 吴启光 译 陶 波 校

Eratosthenes 筛法 [Eratosthenes, sieve of, эратосфена решето]

Eratosthenes (公元前 3 世纪) 提出的从自然数序列中消去合数的一种方法 Eratosthenes 筛法的实质如下所述. 首先画掉数 1 这时, 剩下的第一个数 2 是一个

素数 然后画掉一切可被 2 整除的数 这时，剩下的第一个数 3 是一个素数．然后画掉一切可被 3 整除的数 这时，剩下的第一个数 5 是一个素数 这样继续下去，便可得到一个含任意多个素数的序列 Eratosthenes 筛法已发展成为其他一些更强的筛法（例如，见 **Brun 筛法**(Brun sieve))

Б М Бредихин 撰 张鸿林 译

Erdös 问题 [Erdös problem , эрдеша задача]

在 n 维 Euclid 空间 E^n 中超过 2^n 个点的一集合的存在性问题，其中的任何三点组成一非钝角三角形 (Erdös 性质 (Erdös property)) 这个问题是 P Erdös 提出的 (见[1])，他还作出猜测 (已在[2]中证明) 这个问题的答案是否定的，并且具有 Erdös 性质的集合包含 2^n 个元素，当且仅当该集合由 E^n 中一长方体的顶点集构成 这个断言的证明也解决了所谓的 Klee 问题 (Klee problem) 如果多面体 $K \subset E^n$ 的任意两个顶点落在 K 的不同的平行支撑超平面中 (Klee 性质 (Klee property))，那么 K 的顶点数 $m(K)$ 是多少 如果集合 $N \subset E^n$ 具有 Erdös 性质，则 N 的凸包 $M=\operatorname{conv} N$ 是具有 Klee 性质的多面体，并且 $m(M)$ 等于 N 的基数．如果多面体 K 具有 Klee 性质，则 $m(K) \leqslant 2^n$ 在所有具有 Klee 性质的多面体的集合中，等式 $m(K)=2^n$ 描述了 n 维平行多面体的特征．

Erdös 问题与 **Hadwiger 假设** (Hadwiger hypothesis) $b(M)=m(M)$ 有联系．

参考文献

[1] Erdös, P, Some unsolved problems, *Michigan J Math*, **4** (1957), 291–300

[2] Danzer, L and Grünbaum, B, Ueber zwei Probleme bezüglich konvexer Körpern von P Erdos und von V L Klee, *Math Z*, **79** (1962), 95–99

П С Солтан 撰

【补注】 Erdös 问题 ($n=3$) 最早是在[A1]中提出的，Klee 问题则是在[A2]中提出的．

参考文献

[A1] Erdös, P, Problem 4306, *Amer Math Monthly*, **55** (1948), 431

[A2] Klee, V L, Unsolved problems in intuitive geometry, Seattle, 1960 Mimeographed notes

姜国英 译

遍历集 [ergodic set , эргодическое множество]

对应于正规化遍历**不变测度**(invariant measure) μ 的**拓扑动力系统**(topological dynamical system) $\{S_t\}$ (**流**(**连续时动力系统**(flow (continuous-time dynamical system)) 或**瀑布** (cascade))) 的**相空间**(phase space) X(可度量化紧统)中的遍历集是指 X 中这样的点 x 的集合，满足

a) 对任何连续函数 f $X \to \mathbf{R}$，"时平均"

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(S_t x)\,dt \to \int_X f d\mu,\ T \to \infty,$$

b) 对 x 的每个邻域 U, $\mu(U)>0$

称一点为拟正则的(quasi-regular)，如果对此点 a) 中时平均的极限关于每个连续函数 f 存在．对于这样的点，极限取 $\int f d\mu$ 的形式，这里 μ 是某一正规化不变测度，依赖于 x 但不必是遍历的．若 b) 对这种 μ 成立，则相应的点称为稠密点(density point)，若 μ 是遍历的，则此点称为传递的(transitive)，当两个条件都成立时，此点称为正则的(regular) 非正则点集关于任何正规化不变测度有零测度．正则点集相应于不同的 μ 分为遍历集的分划是将动力系统分解为遍历分量这一思想的最强实现(对系统附加较强限制时此论断成立)．

遍历集为 Н Н Боголюбов 与 Н М. Крылов ([1]) 所引进 关于各种推广与有关问题的论述可参看**不变测度**(invariant measure) 1) 与**度量传递性**(metric transitivity) 条目的参考文献

参考文献

[1] Krylov, N and Bogoliouboff, N, La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non-lineare, *Ann of Math Ser* (2), **38** (1937), 65–113

Д В Аносов 撰

【补注】 关于遍历集的较好论述可参看[A1] 与之密切相关的是泛点(generic point) 概念 (关于正规化不变测度 μ)：这样的拟正则点 x，使对每个连续函数 f $X \to \mathbf{R}$, a) 中极限为 $\int f d\mu$，这里 μ 是给定测度．

参考文献

[A1] Oxtoby, J C, Ergodic sets, *Bull Amer Math Soc*, **58** (1952), 116–136

郑维行 译

遍历定理 [ergodic theorem , эргодическая теорема]

见**遍历理论** (ergodic theory)．

遍历理论 [ergodic theory , эргодическая теория]，动力系统的度量理论(metric theory of dynamical systems)

动力系统理论的一个分支，它研究具有**不变测度**(invariant measure) 的系统以及有关问题．

1) 在遍历理论的"抽象"或"一般"部分中，人们考察可测动力系统．在最一般意义下，它指的是三元组(W, G, F)，这里 W 是**可测空间**(measurable space)("相空间")，G 为具有可数基的局部紧 Hausdorff 群(或半群)，而 F $G \times W \to W$ 是一个可测映射，它定义 G 在 W 上的一个(左)作用 若 $w \in W$, e 为 G 的单位元，且 $g, h \in G$，则(用乘法作为 G 中的运算)

$F(e, w) = w$, 且 $F(gh, w) = F(g, F(h, w))$ (*)

(这里, 假定对 $G \times W$ 赋予作为 G 与 W 的直积的可测空间结构, 并且假定 G 中 **Borel 集** (Borel set) 取为可测集. 在这些假定下, 后一概念的几种变形 (见 **Borel 测度** (Borel measure), **Baire 集** (Baire set)) 是等价的)

用 T_g 表示变换 $w \mapsto F(g, w)$, 则可将 (*) 写为 $T_{gh} = T_g T_h$ 的形式 (也可考虑右作用, 此时 $T_{gh} = T_h T_g$) 除了不变测度的存在性 (可能带有一些特殊性质) 必须特别讨论的情形以外, 在遍历理论中通常假定 W 为**测度空间** (measure space) (W, μ) 这里 μ 是在 T_g 作用下不变的 σ 有限或有限测度 若 $A \subset W$ 为可测集, 则 $\mu(T_g^{-1}A) = \mu(A)$ 有限测度通常是标准化的, 最常见的是 (W, μ) 为 **Lebesgue 空间** (Lebesgue space) 至于 G, 几种基本情形是 $G = \mathbf{Z}$ 或 $G = \mathbf{N}$ (**瀑布** (cascade)) 或 $G = \mathbf{R}$ (**流** (**连续时间动力系统**) (flow (continuous-time dynamical system))) 据此可以讨论具有 (离散或连续) "经典时间" 的情形, 以便符合 g 在具体问题中的实际意义. (类似地, 在其他情况, 有时也说 "时间" (但 "非经典的"), 这时 "时间" 一词并非指通常意义. 它可以有另外的物理意义, 例如表示平移不变的物理系统的空间移位. 遍历理论尤其对顺从群 (因而更加对交换群) G 有进展, 在很多方面 (虽然不是全部), 这与经典时间情况相类似 关于非顺从群 G, 情况就不同了 它较少彻底研究) 下面考虑基本情形 $\{T_t\}$ 为 Lebesgue 空间 (W, μ) 中保持 μ 的**可测流** (measurable flow) 或瀑布

在"抽象"遍历理论中, 人们研究反映其长周期时间性态 (如**遍历性** (ergodicity) 或**混合** (mixing)) 的动力系统的各种统计性质以及与系统 (关于**度量同构** (metric isomorphism)) 的度量分类有关的问题, 而且这两类问题乃是密切联系的.

由于非遍历系统分裂为遍历分量 (见**度量传递性** (metric transitivity)), 两类问题只需对遍历系统来进行研究 "抽象"遍历理论的基本部分包括下面六个方向

a) 遍历理论作为独立分支的出现与 **von Neumann 遍历定理** (von Neumann ergodic theorem), **Birkhoff 遍历定理** (Birkhoff ergodic theorem) 以及它们的度量性质的识别有关. 因此, 上述定理的种种变形与推广便涌现出来, 尽管常与动力系统没有多大联系, 它们仍被称为遍历定理 (ergodic theorems) (在此意义下, 它们超出遍历理论原来的框架) (见**极大遍历定理** (maximal ergodic theorem), **算子遍历定理** (operator ergodic theorem), **Ornstein-Chacon 遍历定理** (Ornstein-Chacon ergodic theorem)) 可是对遍历理论本身来说, 这些精心细作意义不大

b) 动力系统的谱理论 (spectral theory of dynamical systems), 即研究与**动力系统的谱** (spectrum of a dynamical system) 有关的问题.

c) **动力系统的熵理论** (entropy theory of a dynamical system).

d) **周期变换逼近** (approximation by periodic transformations)

e) 时间改变与单调等价 (角谷等价 (Kakutani equivalence))

f) 轨道理论与有关问题.

在应用上最重要的是 b) 与 c) (关于流, 粗略地说, e) 与 f) 的思想是把依赖于相空间中轨道位置的流的性质从依赖于轨道对时间参数化的性质分离出来. e) 与 f) 的差别为 在 e) 中轨道被当作具有特定正向的连续曲线, 从而容许参数化的类是限制的, 而在 f) 中轨道只作为一个点集, 因此参数化可以不连续, 并且彼此不必是单调相关的 确切的定义如下

在流 $\{T_t\}$ 中的时间改变 (change of time) 在于向新的流 $\{S_s\}$ 的转移, 对此新的流使点 w 落入位置 $T_t w$ 的时间为 $\int_0^t a(T_\tau w)\,d\tau$, 这里 $a, 1/a \in L_1(W, \mu)$, $a > 0 \bmod 0$ (流 $\{S_s\}$ 有不变测度 $\lambda(A) = \int_A (1/a)\,d\mu$) 这时称 $\{T_t\}$ 与 $\{S_s\}$ 为单调等价的 (monotonically equivalent) 一种等价定义是 两个流为单调等价, 如果它们度量同构于由某一测度空间的同一自同构 (但一般说, 由不同的正函数) 作出的**特殊流** (special flow) 两个自同构 T 与 S (以及瀑布 $\{T^n\}$ 与 $\{S^n\}$) 称为单调等价的 (monotonically equivalent), 如果它们度量同构于由同一自同构作出的**特殊自同构** (special automorphism) 两动力系统称为轨道等价的 (trajectory equivalent), 如果存在将一个系统的轨道引入另一系统 (作为点集) 的相空间之间的度量同构.

在 e) 中人们分析下列问题· 流的性质在时间改变下变化有多大? 特别地, 能否找到一种改变使新的流具有某种特殊性质? (此问题可以在一般情形下或对具体的流提出, 时间改变可以附加某些特殊条件) 并且, 对系统关于单调等价性的分类究竟能说些什么?

关于具"经典"时间系统的轨道等价性是没有意义的. 若不变测度连续, 则任何两个遍历流或瀑布是轨道等价的. 然而, 对具有 "非经典" 时间的系统, 轨道等价性导致实质性理论

2) 在遍历理论的 "应用" 部分, 人们考察种种特殊的动力系统 (与它们的类), 它们产生于数学与物理的各种分支中. (历史上遍历理论的出现是与统计物理相联系的 (见**动力系统** (dynamical system), **统计物理中的数学问题** (statistical physics, mathematical

problems in) 近来，同此课题的新联系已呈现出来，例如，参见上面最后提及的条目中有关 Gibbs 测度的论述.) 这里人们对有关系统研究像 1) 中那样的统计性质与分类的问题,可是此时不能从一开始就假定所论系统是遍历的. 相反，它的遍历性问题的阐明照例是研究的必要(且经常为困难)的步骤，即使当较强的统计性质被完全建立的时候.

在数论与统计物理中有这样的情况 人们不是关心遍历理论的概念或结果的应用，而是关心与遍历理论有某种密切关系的论证的用途. 最后，动力系统理论特别是遍历理论的思想，有助于解释某些数值试验结果 (见**奇异吸引子** (strange attractor))

参考文献

[1] Hopf, E , Ergodentheorie, 4, Springer, 1937

[2] Рохлин, В А , 《Успехи матем наук》, **4** (1949), 2, 57 – 128

[3] Halmos, P R , Lectures on ergodic theory, Math Soc of Japan, 1956

[4] 《Успехи матем наук》, **22** (1967), 5, 3 – 172

[5] Billingsley, P , Ergodic theory and information, Wiley, 1965

[6] Вершик, А М , Юзвинский, С А , в кн Итоги науки Математический анализ 1967, М , 1969, 133 – 187

[7] Синай, Я Г , Введение в эргодическую теорию, Ер , 1973 (英译本 Sinai, Ya G , Introduction to ergodic theory, Princeton Univ Press, 1976)

[8] Каток, А Б , Синай, Я Г , Степин, А М , в кн Итоги науки и техники Математический анализ, М , **13** (1975), 129 – 262

[9] Ornstein, D , Ergodic theory, randomness, and dynamical systems, Yale Univ Press, 1974

[10] Корнфельд, И П , Синай, Я Г , Фомин, С В , эргодическая теория, М , 1980 (英译本 Cornfeld, I P , Fomin, S V , Sinaǐ, Ya G , Ergodic theory, Springer, 1982)

[11] Furstenberg, H , Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory, Princeton Univ Press, 1981

[12] Zimmer, R J , Ergodic theory and semisimple groups, Birkhäuser, 1984

Д В Аносов 撰

【补注】 关于遍历理论与动力系统理论的其他分支 (紧空间上的同胚，光滑流等) 的联系，见 [A2], [A3], [A7] 与 [A9]. 关于 (几乎) 所有已知的遍历定理，见 [A5] 遍历理论在数论上的应用，见 [11]. 对半单群中格论的应用 (Margulis 的工作)，见 [A4].

至于遍历理论的其他应用，见 [A1], [A6] 与 [A8]. 物理系统中的遍历问题与混合性质在 [12] 中都有讨论.

参考文献

[A1] Arnol'd V I and Avez, V , Ergodic problems of classical mechanics, Benjamin, 1968 (译自俄文).

[A2] Bowen, R , Equilibrium states and ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, Springer, 1975

[A3] Denken, M , Grillenberg, C and Sigmund, K , Ergodic theory on compact spaces, Springer, 1976

[A4] Zaslowsky, G M , Chaos in dynamic systems, Harwood Acad Publ , 1985 (译自俄文)

[A5] Krengel, U , Ergodic theorems, de Gruyter, 1985

[A6] Mackey, G W , Ergodic theory and its significance for statistical mechanics and probability theory, *Adv in Math* , **12** (1974), 178 – 268

[A7] Mané, R , Ergodic theory and differentiable dynamics, Springer, 1987 (译自葡萄牙文)

[A8] Ruelle, D , Thermodynamic formalism, Addison-Wesley, 1978

[A9] Veech, W A , Topological dynamics, *Bull Amer Math Soc* , **83** (1977), 775 – 830

[A10] Oseledec, V I , Multiplicative ergodic theorem, Characteristic Lyapunov exponents of dynamical systems, *Trudy Moskov Mat Obshch* , **19** (1968), 179 – 210 (俄文)

郑维行 译 沈永欢、王声望 校

非交换遍历理论 [ergodic theory, non-commutative, эргодическая теория некоммутативная]

算子代数理论的一分支 其中按**遍历理论** (ergodic theory) 观点来研究 C^* **代数** (C^*-algebra) 的自同构

在非交换遍历理论中所考察问题的范围与迄今 (1984) 得到的结果基本上可分成三类. 第一类的结果与构造完全的外共轭不变系有关 (两个自同构 θ_1 与 θ_2 称为外共轭的 (outer conjugate), 若存在自同构 σ 使 $\theta_1\sigma\theta_2^{-1}\sigma^{-1}$ 为内自同构) 相应的分类问题对于 II 型与 III_λ 型 ($0<\lambda<1$) 的近似有限因子 (见**因子** (factor)) 情形已经解决 (见 [1], [2])

属于第二类的有不少论文，讨论在单参数自同构群下不变的平衡态 (代数中的态 (state in an algebra) 是指该代数上的正线性正规化泛函) 的性质. 特别，人们考虑 Gibbs 态 (见 [3]) 的存在与唯一性问题 与此类问题密切相关的是关于遍历定理 (例如，见 [4], [5]) 的非交换推广的研究

第三类结果是关于自同构的熵理论. 对于有限 W^* 代数 (见 **von Neumann 代数** (von Neumann algebra)) 的自同构，已经构造出一种不变量 ([6]), 它推广了度量动力系统的**熵** (entropy) 关于态 φ 的任意 W^* 代数的自同构的熵也已经被研究过 ([7]).

参考文献

[1] Connes, A , Outer conjugacy classes of automorphisms of factors, *Ann Sci Ecole Norm Sup* , **8** (1975), 383 – 419

[2] Голодец, В Я, Модулярные опраторы и асимтотическая коммутативность в алгебрах фон неймана,《Успехи матем наук》, **33** (1978), 1, 43–94

[3] Araki, H, C^*-algebras and applications to physics, Lecture notes in math, 650, Springer, 1978, 66–84

[4] Синай, Я Г и Аншелевич, В В, Некоторые вопросы некоммутативной эргодической теории,《Успехи матем наук》, **31** (1976), 4, 151–167

[5] Lance, E C, Ergodic theorems for convex sets and operator algebras, *Invent Math*, **37** (1976), 201–214

[6] Connes, A and Størmer, E, Entropy for automorphisms of II_1 von Neumann algebras, *Acta Math*, **134** (1975), 289–306

[7] Степин, А М и Шухов, А Г,《Изв ВУЗов Математика》, **8** (1982), 52–60

А М Степин 撰 郑维行 译

遍历性 [ergodicity, эргодичность]，*动力系统的*

遍历理论 (ergodic theory) 中的一性质．原先它是依下列方式对具有有限**不变测度** (invariant measure) μ **的瀑布** (cascade) $\{T^k\}$ **或流 (连续时动力系统** ((flow) continuous-time dynamical system)) $\{T_t\}$ 定义的 若在相空间 W 上给定函数 $f \in L_1(W, \mu)$, 则对几乎所有的点 w, 沿此点的轨道的时平均存在，即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k w)$$

或

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^T f(T_t w)\,dt$$

存在，且与空间平均 (即 $(\int f d\mu)/\mu(W)$) 相合 此时人们也说 μ 的遍历性．特别，对每个可测集 $A \subset W$，停留在 A 中轨道的平均时与 $\mu(A)$ 几乎处处成比例，(事实上，此性质等价于遍历性) 当 **Birkhoff 遍历定理** (Birkhoff ergodic theorem) 被证明后，则显见遍历性等价于**度量传递性** (metric transitivity) 因此，人们说到遍历性时指的是**度量传递性**，而在更一般情形，去说时平均与空间平均相等已不再适宜了 (具有无限不变或拟不变测度的系统，不仅有流与瀑布，而且有更一般的变换群与半群)．

Д В Аносов 撰 郑维行 译

Erlang 分布 [Erlang distribution, эрланга распределение]

集中在 (0, ∞) 上具有密度

$$p(x) = \frac{(n\mu)^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-n\mu x},\ x > 0,$$

的概率分布，其中整数 $n \geqslant 1$ 和实数 $\mu > 0$ 是参数．Erlang 分布的特征函数具有形式

$$\left[1 - \frac{it}{n\mu}\right]^{-n},$$

其数学期望和方差分别为 $1/\mu$ 和 $1/n\mu^2$

Erlang 分布是 **Γ 分布** (gamma distribution) 的特殊情形：$p(x) = \alpha g_\lambda(\alpha x)$，此处 $g_\lambda(x)$ 是 $\lambda = n$ 时的 Γ 分布的密度，$\alpha = n\mu$ 对 $n = 1$，Erlang 分布就是参数为 μ 的**指数分布** (exponential distribution) 具有参数 n 和 μ 的 Erlang 分布是 n 个具有参数为 $n\mu$ 的指数分布的独立随机变量和的分布 当 $n \to \infty$ 时，Erlang 分布趋向于在点 $1/\mu$ 的**退化分布** (degenerate distribution)

Erlang 分布从 Γ 分布类中区分出来是由于它在排队论中的应用．在许多随机排队过程中，Erlang 分布作为随机事件之间的间隔或排队时间的分布而出现．有时 Erlang 分布定义为具有密度

$$\frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\alpha x},\ x > 0$$

的 Γ 分布．

此分布冠以 Erlang 的名字，因为 A．Erlang 首先建立了排队问题中的数学模型

参考文献

[1] Saaty, T L, On elements of queueing theory with applications, McGraw-Hill, 1961

А В Прохоров 撰 刘秀芳 译

埃尔兰根纲领 [Erlangen program, Эрлангенская программа]

一种统一解释各种几何学 (例如，Euclid 几何学、仿射几何学、射影几何学) 的观点．它首先由 F Klein 在 1872 年德国埃尔兰根大学的就职演讲中提出，后来以 Vergleichende Betrachtungen uber neuere geometrische Forschungen ([1]) 为标题发表．

埃尔兰根纲领的实质如下．众所周知，Euclid 几何讨论在刚体运动下不变的图形性质，如果一个图形可通过一个刚体运动变成另一个图形，则称这两个图形是相等的．但是我们也可把运动群换为其他几何变换的集合 如果通过这个集合中的一个变换将一个图形变成另一个，则称这两个图形是"相等的" 于是就引出另一种"几何学"，它是研究在这种变换之下不变的图形性质．所谓"相等"必须满足下面三个自然的条件 1) 每一图形 F 与自身"相等"，2) 如果图形 F 和图形 F_1 "相等"，则 F_1 也和 F "相等"，3) 如果 F 和 F_1 "相等"，F_1 又和 F_2 "相等"，则 F 和 F_2 "相等" 因而要求所述变换的集合是一个**群** (group) 当群已给定，研究在它的一切变换下，图形不变性质的理论称为这个群的几何学

采用不同的变换群，导出不同的几何学．因此，运动群的研究导出通常的 Euclid 几何学，当运动换为仿射变换或射影变换时，结果就是仿射几何学或射影几何学．以 A Cayley 的思想为基础，Klein 证明·如果从射影变换着手，将某一圆周 (或任何其他圆锥

曲线)变到它自身，则得到非 Euclid 的 Лобачевский 几何学．Klein 采用类似的方式，将相当多的其他几何学纳入他讨论的范畴

埃尔兰根纲领不包括某些重要的几何分支，例如 **Riemann 几何学** (Riemann geometry) 然而，它对几何学后来的发展具有实质上的促进作用．

参考文献

[1] Klein, F , Vergleichende Betrachtungen uber neuere geometrische Forschungen, *Math Ann* , **43** (1983), 63 – 100 (亦见 Gesammelte Abh Vol 1, Springer, 1921, 460 – 497)

[2] Klein, F , Elementary mathematics from advanced stand-point, Dover, reprint, 1945 (译自德文)

[3] Klein, F , Vorlesungen uber hohere Geometrie, Springer, 1926

[4] Ефимов, Н В , Высшая геометрия, 6 изд , М , 1978

ВСЭ-3

【补注】

参考文献

[A1] Greenberg, M , Euclidean and Non-Euclidean geometry, Freeman, 1980

马传渔 译 黄正中 校

Ермаков准则 [Ermakov criterion, Ермакова признак]，关于正数项级数收敛性的

设当 $x\geqslant 1$ 时 $f(x)$ 是一个正的递增函数 如果对于这些 x 值和 $\lambda<1$, 不等式

$$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \leqslant \lambda$$

成立，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

收敛；如果

$$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \geqslant 1,$$

则此级数发散 特别是，如果极限

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} < 1\ (\text{或} > 1)$$

存在，则此级数收敛（发散）．这个准则是 В. П. Ермаков ([1]) 建立的．

参考文献

[1] Ермаков, В П , Новый признак сходимости и расходимости бесконечных знакопостоянных рядов, К , 1872

Л Д Кудрявцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bromwich, T J , An introduction to the theory of infinite series, Macmillan, 1947

张鸿林 译

译码错误概率 [erroneous decoding, probability of, ошибочного декодирования вероятность]

表征**通信信道** (communication channel) 正确复现信息的一种可能测度 为了传输一个信源的信息 ξ, 这个信源以概率分布 $p_m=\mathrm{P}\{\xi=m\}(m=1,\cdots,M)$ 取 M 个不同的可能值，则必须采用某一种通信信道 因此，对一定的**编码与译码** (coding and decoding) (亦见**信息的传输** (information, transmission of)) 方法，译码错误概率 $P_{e\,m}(m=1,\ \ ,M)$ 定义为

$$P_{e\,m}=\mathrm{P}\{\widetilde{\xi}\neq m\mid\xi=m\},$$

式中 $\widetilde{\xi}$ 为信道输出端的译码信息 变量

$$P_e=\mathrm{P}\{\widetilde{\xi}\neq\xi\}=\sum_{m=1}^{M}p_m,P_{e\,m}$$

称为平均译码错误概率 (mean probability of erroneous decoding) 人们特别感兴趣的是对最优译码错误概率 (optimal probability of erroneous decoding) P_e^{opt} 的研究，该概率定义为

$$P_e^{\mathrm{opt}}=\inf P_e$$

码的下确界决定于所有可能的编译码方法．由于最佳编码方法通常是未知的，难以获得 P_e^{opt} 的精确表达式，因此研究信道中消息长度增加时 P_e^{opt} 的渐近特性是有意义的 更确切地说，是研究如下情况 假定在时间上离散的通信信道中应用长为 N 的一段，且置 $R=(\ln M)/N$, 当 $N\to\infty$ 和 $R=$ 常数（这意味着消息长度增加而传输率不变）时，这时必须研究 P_e^{opt} 的渐近特性．如果信道是时间上离散的均匀**无记忆信道** (memoryless channel)，且输入、输出信号分量的值空间 Y 和 $\widetilde{Y}$ 是有限的，则 $P_e^{\mathrm{opt}}=P_e^{\mathrm{opt}}(N,R)$ 的上、下界是已知的

$$\exp\{-N[E_{sp}(R-\alpha(N))+\beta(N)]\}\leqslant$$
$$\leqslant P_e^{\mathrm{opt}}(N,R)\leqslant\exp\{-NE_r(R)\}\qquad(1)$$

式中，当 N 增加时，$\alpha(N)$ 和 $\beta(N)$ 趋于零，而函数 $E_r(R)$ 和 $E_{sp}(R)$ 分别定义为

$$E_r(R)=\max_{0\leqslant\rho\leqslant 1}\max_{q(\cdot)}[E_0(\rho,q(\cdot))-\rho R],\qquad(2)$$

$$E_{sp}(R)=\sup_{\rho>0}\max_{q(\ )}[E_0(\rho,q(\cdot))-\rho R],\qquad(3)$$

式中

$$E_0(\rho,q(\cdot))=-\ln\sum_{\widetilde{y}\in\widetilde{Y}}\Big[\sum_{y\in Y}q(y)\,q(y,\widetilde{y})^{1/(1+\rho)}\Big]^{1+\rho}$$

这里，$q(\cdot)=\{q(y)\ \ y\in Y\}$ 是 Y 上的任意概率分布，$q(y,\widetilde{y})=\mathrm{P}\{\eta_k=\widetilde{y}\mid\widetilde{\eta}_k=y\}$, $y\in Y,\widetilde{y}\in\widetilde{Y}$, 而 η_k 和 $\widetilde{\eta}_k$ 是所研究的无记忆信道的输入和输出信号的分量，如所周知，当 $0\leqslant R\leqslant C$, C 为**信道传输速率** (transmission rate of a

channel) 时，由式 (2) 和 (3) 定义的 $E_r(R)$ 和 $E_{sp}(R)$ 是正的，上凸的，R 的单调递减函数，而且，当 $R \geqslant R_{cr}$ 时，则 $E_r(R)=E_{sp}(R)$，这里 R_{cr} 是一个由信道传输矩阵定义的量，并称为一个给定的无记忆信道的临界速率 (critical speed) 于是，对于值 $R, R_{cr} \leqslant R < C$，式(1)中 P_e^{opt} 的上、下界逐渐重合 因此，对于 R 的这一个取值范围，由

$$E(R)=\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{-\ln P_e^{\text{opt}}(N,R)}{N}$$

定义的信道可靠性函数 (reliability function of the channel) 的精确值是已知的 对于值 R, $0 \leqslant R < R_{cr}$，任意无记忆信道的 $E(R)$ 的精确值仍是未知的 (1983)，尽管式 (1) 中的上、下界还能得到改善 对于一大类信道，$P_e^{\text{opt}}(N,R)$ 的指数递减特性已被证明

参考文献

[1] Gallager, R, Information theory and reliable communication, 1-2, Wiley, 1968-1972

[2] Feinstein, A, Foundations of information theory, McGraw-Hill, 1958 (中译本 A 范恩斯坦，信息论基础，科学出版社，1964)

Р Л Добрушин, В В Прелов 撰 周荫清 译

误差 [error, погрешность]

差 $x-a$，其中 a 为一给定数，它被认为是精确值为 x 的某个量的近似值 也称差 $|x-a|$ 为绝对误差 (absolute error). 称 $|x-a|$ 和 $|a|$ 的比值为 a 的相对误差 (relative error). 为了表征误差，通常用它的界. 一个数 $\Delta(a)$ 使得

$$|x-a| \leqslant \Delta(a)$$

称为绝对误差界 (bound on the absolute error) 一个数 $\delta(a)$ 使得

$$\left|\frac{x-a}{a}\right| \leqslant \delta(a)$$

称为相对误差界 (bound on the relative error) 相对误差界通常用百分数表示 最小可能的数取作 $\Delta(a)$ 和 $\delta(a)$.

数 a 为 x 的近似值且其绝对误差界为 $\Delta(a)$ 通常表述为

$$x=a\pm\Delta(a)$$

相对误差的类似关系式写作

$$x=a(1\pm\delta(a))$$

绝对和相对误差界指出 x 和 a 之间最大可能的偏差，有时，人们也常用到误差的属性，它与误差的特点有关 (例如，测量误差) 及 x 和 a 之间不同差值出现的频率，概率方法用于后一种处理方法 (见**误差理论** (errors, theory of)).

在问题的数值解中，解的误差是由于公式和解法的不准确性造成的 由于实际过程的数学表述不准确性造成的误差称为模型误差 (error of the model)，由初始数据设置中的不准确性造成的误差称为输入数据误差 (input-data error)，由解法不准确性造成的误差称为方法论误差 (methodalogical error)，由计算不准确性造成的误差称为计算误差 (computational error) (舍入误差 (rounding error)) 有时把模型误差和输入数据误差合称为固有误差 (inherent error).

在计算过程中，初始误差随着计算依次传递并累积起来产生新的误差 误差在计算过程中的发生和传播是一个专门研究的课题 (见**计算数学** (computational mathematics))

参考文献

[1] Березин, И С, Жидков, Н П, Методы вычислений, 3 изд, т 1, М 1966 (英译本 Berezin, I S and Zhidkov, N P, Computing methods, Pergamon, 1973)

[2] Бахвалов, Н С, Численные методы, 2 изд, М 1975 (英译本 Bakhvalov, N S, Numerical methods analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977)

[3] Воеводин, В В, Вычислительные основы линейной алгебры, М, 1977

Г Д Ким 撰

【补注】 除有限位算术运算引起的误差外，还有离散化误差 (discretization errors) (当用差分方程代替微分方程时) 或者截断误差 (truncation errors) (把无穷过程，如级数，变为有限时) 也都是数值分析中主要的研究来源，见**差分法** (difference methods)

参考文献

[A1] Wilkinson, J H, Rounding errors in algebraic processes, Prentice-Hall, 1963

蔡大用 译

纠错码 [error-correcting code, код с исправлением ошибок]

在一个有噪声**通信信道** (communication channel) 上传输的一个消息集，该集中的每一消息的邻域 (即该消息的最可能的失真形态的集合) 都不与其他消息的邻域相交 纠错码的这一性质可以使人们能纠正那些属于该消息邻域的失真消息 (信道输出端接收到的) 的错误 (即恢复传输的消息). 纠错码的元素 (码字) 用于表示**信息源** (information, source of) 的信息符号序列的编码 编码就是以特定形式并引入附加信息即**冗余度** (redundancy) 来表示信息序列. 冗余度通常是以某种方式通过加到信息之后的附加符号而引入的 例如，可将符号序列分成固定长度为 k 且相互独立的若干组，然后用更大的长度为 n 的不同的组来代替他们，这些长度为 n 的组就是所谓纠错分组码 (error-correcting block code) 的元素 人们还知道引入冗余度和构成与其相关的纠错码的一些其他方法

([1])

纠错分组码的码字取自赋予度量 λ 的某一确定的 n 维向量集 L^n，而一个码字的邻域是以该码字为球心的球．这个球的半径决定了该分组码的纠错能力．度量 λ 取决于码要纠正错误的性质．下面仅讨论最一般的一些分组码．

为了尽可能地在信道中传输最大数量的信息，对于规定的纠错能力，必须使用具有最大数量码元（码字）的码．这类码的构造是纠错码理论的基本问题之一 关于这一问题的研究，仅在下面所讨论的某些有限集 L^n 方面取得了长足的进展．同时，某些无穷空间上的码，例如，欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的球，在理论和应用方面的研究都是令人感兴趣的

在纠错码的实际应用中，存在着将待传输的信息映射到纠错码的元素集合，和从接收元素 x' 确定被传输的元素 x 的问题 第一个问题称为编码问题（problem of encoding)，第二个问题称为译码问题（problem of decoding)．编码和译码的复杂性在很大程度上取决于所用纠错码的特性．这就导致了对一类相对狭义的码，如下面要讨论的二元线性码的研究

广泛研究的这一类码是 Hamming 度量下的 q 元分组码．这是因为他们得到了大量的应用，而且构造他们的方法和熟知的数学结构有关．这些码的码字属于集合 B_q^n，而 B_q^n 是坐标取自一个 q 元集的所有 n 长向量构成的集合．B_q^n 中两向量 x, y 间的 Hamming 距离 (Hamming distance) $d(x, y)$ 是指满足 $x_i \neq y_i$ 的位置 i 的数目．向量 x 的以 t（t 为整数）为半径的邻域 $U_t(x)$ 是由 B_q^n 中所有与 x 至多有 t 个不同坐标的向量构成，即 $U_t(x)$ 是以 x 为球心，t 为半径的用 d 来度量的球．特别地，$U_1(x)$ 是由 $(q-1)n+1$ 个向量构成．对于任意集 $K \subset B_q^n$，函数 $d(K)=\min_{x, y\in K, x\neq y} d(x, y)$ 称为 q 元码 K 的最小距离（minimum distance)．如果 $d(K) \geqslant 2t+1$，那么码 K 是一个可纠 t 个错误的码．当这一不等式成立时，每个邻域 $U_t(x)$, $x\in K$ 和 K 中所有其他向量 y 的邻域 $U_t(y)$ 不相交．

对于 q 为某一素数的任一次幂的情况，q 元码的研究已取得重大进展 在这种情况下，坐标集是取自含 q 个元素的有限域 $\mathrm{GF}(q)$，并且这一概念的代数性质也被用上了．下面，假定 $\mathrm{GF}(q)$ 的元素是集 B_q^n 中元素的坐标，则集 B_q^n 为 $\mathrm{GF}(q)$ 上的线性空间．如果码 K 的向量构成 B_q^n 的一线性子空间，则称该码为线性的 (linear). 线性码 K 既可由它的基底也可由它的线性对偶空间的基底来表示．后一种方法是最普遍的一种表示法，其列构成 K 的对偶空间基底的矩阵 A，称为 K 的奇偶校验矩阵（parity-check matrix)．对于所有 $x\in K, xA^T=0$，其中 A^T 为 A 的转置．下文中，n 表示码长，k 表示线性码的维数，d 表示最小距离 B_2^n 中的码称为二进制码（binary code)

为了评价具体码的性能，人们研究了函数 $A(n,d)$ 的特性——最小距离为 d，长度为 n 的码的向量的最大数目．对于大 d，$2d\geqslant n$，和小 $d, d=$ 常数，$n\to\infty$ 的情况，函数 $A(n,d)$ 的研究相对充分一些．在第一种情况下，当 $2d=n$ 时，$A(n,d)$ 至多为 $2n$，当 $2d-n>0$ 时，至多为 $2d/(2d-n)$，在第二种情况下，当 $d=2t+1$ 时，$A(n,d)$ 的阶次为 $n^{-t}2^n$ 如果 $d=3$，$n=2^l-1$，则 $A(n,3)=2^n/(n+1)$

满足最后这一等式的线性码称为二进制 Hamming 码（binary Hamming code) 二进制 Hamming 码（纠正一个错误）具有如下性质 以各码为中心，$t=1$ 为半径的球是互不相交的，但同时又充满整个 B_2^n 空间．这样的码称为完满码（perfect code)．众所周知，除了 Hamming 码和具有相同参数的码外，只有一种非平凡二进制完满码

在 $n\to\infty$，$d/n\to\delta$，$0<\delta<\dfrac{1}{2}$ 的情况下，研究了函数

$$\overline{\lim}\ \frac{1}{n}\log_2 A(n,d)=R(\delta)$$

的性质（$A(n,d)$ 的对数渐近性） 对于具有相对距离 δ 的极长码，上式称为信息率（information rate)．事实上，对于 $R(\delta)$ 来说不同的上、下界都是已知的，下界 (Varshamov-Gilbert 界）是

$$R(\delta)\geqslant 1-H(\delta), \tag{*}$$

式中

$$H(\delta)=\delta\log_2\frac{1}{\delta}+(1-\delta)\log_2\frac{1}{1-\delta},$$

并保证具有上述参数的码存在 式 (*) 的证明是非构造性的，对其他界的研究见[6], [7]

下面将讨论得到纠错码的几种构造方法（constructive methods)，即实现起来需要相对少的运算次数的方法．最重要的构造码有 Reed-Solomon 码（RS 码)，Bose-Choudhuri-Hocquenghem 码（BCH 码）和 Reed-Muller 码（RM码） 所有这些码都是线性的．构造前两种码的出发点是基于其元素在 $\mathrm{GF}(q)$ 中的矩阵 A_r，

$$A_r=\begin{Vmatrix} 1 & \cdot & \alpha^{j} & \cdot & \alpha^{q-2} \\ 1 & & \alpha^{2j} & \cdot\ \cdot & \alpha^{2(q-2)} \\ & & & & \\ 1 & \cdot & \alpha^{(r+1)j} & \cdot & \alpha^{(r+1)(q-2)} \end{Vmatrix},$$

式中，α 是 $\mathrm{GF}(q)$ 的本原根．矩阵 A_r 是在 $\mathrm{GF}(q)$ 上具有下列参数 $n=q-1$, $k=q-r$, $d=r$ 的 RS 码 C_r 的校验矩阵．C_r 的距离在所有码长为 $q-1$，维数为 $q-r$ 的线性码中是最大的．二元 BCH 码 H_r 由 $\mathrm{GF}(2^l)$ 上的 RS 码 C_r 的所有向量构成，该码向量均属于 B_2^n，即 $H_r=$

$C_r \cap B_2^n$ 满足 $r=2t+1$ 的 BCH 码 H_r 具有如下参数 $n=2^l-1$, $k\geqslant n-lt$, $d\geqslant 2t+1$ 前面提到的 Hamming 码和 BCH 码 H_3 相同．如果 $t<2^{[(l+1)/2]}$(这里，$[x]$ 表示 x 取整)，则 H_{2t+1} 的维数等于 $n-lt$ BCH 码是循环码 (cyclic code)，即如果向量 x 属于它，则 x 的所有循环移位都属于它 当 $n\to\infty$, $r=$ 常数时，BCH 码的向量数和最佳码的基数为同一数量级，这里，最佳是相对 $A(n,r)$ 而言的．

n 阶二进制 RM 码定义为形如 $(f(\alpha_1),\ \ ,f(\alpha_n))$ 的二进制向量的集合，其中 $n=2^l$, $\alpha_1,\ \ ,\alpha_n$ 是长为 l 的所有可能的二进制向量，f 是遍及所有**逻辑代数** (algebra of logic) 函数的集合，这些函数由含 l 个二进制变量和阶数不超过 r 的 GF(2) 上的多项式表示 RM 码有如下参数 $n=2^l$, $k=\sum_{i=0}^{r}C_l^i$, $d=2^{l-r}$

有 m 个向量的 n 长二进制码 K 的信息率 $R(K)$ 定义为

$$R(K)=\frac{\log_2 m}{n}$$

如果 K 是 k 维线性码，那么 $R(K)=k/n$ 当 $n\to\infty$, $d/n\to\delta$, $\delta>0$ 时，上面列举的方法所构造的码的信息率趋于零 当 $n\to\infty$, $d/n\to\delta$, $\frac{1}{2}>\delta>0$ 时，我们知道所构造的码具有正的信息率，但小于按 (*) 式中的界所建立起来的码的信息率

将纠 t 个错误的码实际用于通信信道中纠错时，需要一台由失真码字 $x'\in U_t(x)$ 确定被传输码字的装置(译码器 (decoder)) 因此，应尽量采用译码器复杂度不太大的纠错码．距离为 $2t+1$ 的二进制码 K 的译码器的复杂度 (complexity of a decoder) 是指，例如，为实现 Boolean 算子 $F(x')=x$, $x'\in U_t(x)$, $x\in K$ 所必需函数元的最小个数 按上面讨论所构造的码就具有复杂度低的译码器 此外，人们还知道一些当 $n\to\infty$, $d/n\to\delta$, $\delta>0$ 时，信息率不趋于零并具有低复杂度译码器的其他纠错码 这类码的例子有级联码和低密度的奇偶校验码．在最简单的情况下，级联码 (cascade code) 是由域 $GF(2^l)$ 上的 RS 码和长为 n_1、维数为 l、距离为 d_1 的二进制码迭代构成的 通过 $GF(2^l)$ 中元素和二进制码的向量之间的某种线性映射方法，建立起一一对应关系．然后，用相应的二进制码的向量替代 RS 码的元．结果，就得到了一个具有参数 $n=n_1(2^l-1)$, $k=l(2^l-r)$, $d\geqslant r_1$ 的二进制线性级联码．最佳结果是用码距大的二进制码代替 RS 码的不同比特得到的 通过这种方法，使用复杂度在 $n\log n$ 量级的译码器，可获得能纠正含有 t 个错误的一个固定段的 n 长码 具有低密度奇偶校验的二进制码集，定义为由一类 $n\times r$ 维二进制矩阵构成的奇偶校验矩阵集 $\{A\}$，这类矩阵的每一行、列分别含有 l 和 h 个元，且 $4<l<h$ 对于给定的 l 和 h，而且 $n\to\infty$，这种集的典型 n 长码，应用复杂度为 $n\log n$ 量级的译码器能纠正含有 t 个错误的一个固定段．级联码和低密度校验码的信息率均低于 (*) 式中的界

集 B_q^n 上用不同于 Hamming 度量的其他一些度量方法的码已经得到了相当广泛的研究．这些研究的方法和结果大体上与 Hamming 度量的相应结果类似．特别地，人们已经研究了度量与同步错误、计算机运算设备 (算术码 (arithmetic codes)) 错误、区段错误、非对称错误以及连续通信信道中的错误有关的各种码 例如，在后一种情况下，集 L^n 是欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中球心在原点的单位球 S^n，而邻域 $U_\varphi(x)$, $x\in S^n$ 是球面 S^{n-1} 被半角为 φ，其轴通过 0 点和 x 点的圆锥所截的表面．还必须指出，自 19 世纪末以来，对于 $\mathbf{R}^n$ 中的码，人们用几何学，以多少有些不同的解释方法进行了研究．

C. Shannon 在信息论方面的研究工作促进了纠错码理论的发展 其中，他指出，原理上存在着在有噪通信信道中，以低于信道容量的速率传输信息达到任意小的错误概率的可能性 起初，纠错码理论满足了通信工程师们的要求，他们按照信息中错误的数量和模式，在某些限制下用数学结构来保证信息传输的可靠性 随后，纠错误码理论的成果和方法在其他领域也得到了应用．尤其是在数学上，获得了 Euclid 空间中填充球密度的最佳估计 (到 1978 年)，对于几乎所有的 Boolean 函数，在以典型的分离形式估计它们的复杂性方面已经取得了重大进展，在组合学中已构造出一些新的对象，函数元的自纠错图样也已构造出来，等等

参考文献

[1] Peterson, W W and weldon, E J, Error-correcting codes, M I T, 1972

[2] Berlekamp, E, Algebraic coding theory, McGraw-Hill, 1968

[3] MacWilliams, F J and Sloane, N J A, The theory of error correcting codes, 1-2, North-Holland, 1977

[4] Блох, Э Л, Зяблов, В В, Обобщенные каскадные коды, М, 1976

[5] Колесник, В Д, Мирончиков, Е Т, Декодирование циклических кодов, М, 1968

[6] Сидельников, В М, 《Пробл передачи информ》, 10 (1974), 2, 43-51

[7] Левенштейн, В И, 《Пробл передачи информ》, 10 (1974), 2, 26-42

[8] Зяблов, В В, Пинскер, М С, 《Пробл передачи информ》, 11 (1975), 1, 23-36

В М Сидельников 撰

【补注】 线性码 K 的对偶线性空间自然是那种标量积 $(x,y)=0$，一切 $x\in K$ 的所有向量 y 构成的空间．这个对偶空间表示为 $K^\perp$

迄今（1987），已知$R(d)$的最佳上界是由 R J McEliece, E. R Rodemich, H Rumsey 和 L R Welch 发现的（见[A3]）．

亦见**码**（code），**算术误差校正码**（code with correction of arithmetical errors），**删除与插入误差校正码**（code with correction of deletions and insertions），**字母编码**（coding, alphabetical），**编码与译码**（coding and decoding）．

正如在主要论文中指出过的那样，编码理论和数学的其他分支密切相关，主要是**数的几何**（geometry of numbers）（亦见[A5]）和**有限域**（finite field）理论．

1982年，M A. Tsfasman, S. G Vlăduts 和 T. Zink 用 V D Goppa 的思想和代数几何构造了一组超过 Gilbert-Varshamov 界（[A4]）的码 这样，亦证明了 $R(\delta)=1-H(\delta)$ 不成立，见（*）式 更详细讨论见 **Goppa 码**（Goppa code）．

参考文献

[A1] Lint, J H van, Introduction to coding theory, Springer, 1982

[A2] Tietavainen, A , On the existence of perfect codes over finite fields, SIAM *J Appl Math* , **24** (1973), 88-96

[A3] McEliece, R J , Rodemich, E R , Rumsey, H and Welch, L R , New upper bounds on the rate of a code via the Delsarte-Macwilliams inequalities, *IEEE Trans inform theory*, **23** (1977) , 157-166

[A4] Tsfasman, M A , Vladuts, S G and Zink, T , Modular curves, shimura curves and Goppa codes, better than Varshanov-Gilbert bound, *Math Nachr*, **109** (1982) , 21-28

[A5] Lekkerkerker, C G and Gruber, P M , Geometry of numbers, North-Holland, 1987

[A6] Hill, R , A first course in coding theory, Clarendon Press, 1986

[A7] Lint, J H van and Geer, G van der, Introduction to coding theory and algebraic geometry, Birkhauser, 1988

[A8] Goppa, V D , Geometry and codes, Kluwer, 1988

[A9] Tsfasman, M A. and Vladuts, S G , Algebraic geometric codes, Kluwer, 1989

周蔚清 译

误差理论 [errors, theory of, ошибок теория]

数理统计（mathematical statistics）的一个分支，它专门研究近似测量所得数值的精度以及测量中的误差．因为每次测量都带有某种误差，所以重复测量同一常量往往得到不同的结果 误差有三种基本的类型 系统误差，过失误差和随机误差 系统误差（systematic errors）或者使测量结果总是偏高，或者总是偏低，它是由某些特定原因（测量仪器不准确，环境的影响等等）引起的，这些原因系统地影响测量结果且沿同一方向改变它们．系统误差可以用数理统计以外的方法来估计（见**观测值的处理**（processing of observations））．过失误差（gross errors）（常造成离群值（outliers））起因于计算错误，抄错测量仪器的读数等等．含有过失误差的测量结果与其他测量结果大不相同，因而通常容易被识别．随机误差（random errors）是由各种各样的偶然性原因引起的，这些原因对每个测量结果的影响难以预料，既可使测量结果偏高，也可使测量结果偏低．

误差理论仅涉及对过失误差和随机误差的研究．误差理论的基本问题是研究随机误差的分布律，利用观测结果来探索未知参数的估计（见**统计估计量**（statistical estimator）），确定这些估计的误差，以及识别过失误差．设 $Y_1, \cdot, Y_n$ 是对某个未知量 μ 的 n 次独立等准确测量的结果 称差

$$\delta_1=Y_1-\mu, \quad ,\delta_n=Y_n-\mu$$

为真实误差（true errors）．根据误差的概率理论，所有 δ_i 都视为随机变量，测量的独立性理解为随机变量 $\delta_1, \cdot, \delta_n$ 是相互独立的．测量的等准确性一般处理为同分布 等准确测量的真实误差是同分布随机变量．真实误差的**数学期望**（mathematical expectation）$b=\mathrm{E}\delta_1= \quad =\mathrm{E}\delta_n$ 称为系统误差（systematic error），而差 $\delta_1-b, \quad ,\delta_n-b$ 称为随机误差（random error）．因此，不存在系统误差意味着 $b=0$，在这种情况下，$\delta_1, \quad ,\delta_n$ 便是随机误差．设 σ 为**标准差**（standard deviation）， 称 $1/\sqrt{2}\ \sigma$ 为精确度（measure of accuracy）（当系统误差存在时，精确度便为 $1/\sqrt{2(\sigma^2+b^2)}$） 测量的等精确性可狭义地理解为，所有测量结果的精确度是相同的 过失误差的发生意味着某些独特的测量结果的等精确性（广义和狭义）遭到破坏 通常，用测量结果的算术平均

$$\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$$

作为未知量 μ 的估计，而差 $\Delta_1=Y_1-\bar{Y}, \quad ,\Delta_n=Y_n-\bar{Y}$ 称为表观误差（apparent errors） 选择 $\bar{Y}$ 作为 μ 的估计是依据下列事实．对于没有系统误差的等精确观测，当观测次数 n 足够大时，$\bar{Y}$ 与未知量 μ 的差异不超过任何小量的概率可任意地接近1（见**大数律**（law of large numbers）），$\bar{Y}$ 不包含系统误差（具有这种性质的估计量称为**无偏估计量**（unbiased estimator）），且它的方差为

$$\mathrm{D}\bar{Y}=\mathrm{E}(\bar{Y}-\mu)^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

经验表明，随机误差 δ_i 实际上常常遵从近似的正态分布（此由概率论中的**极限定理**（limit theorems）可得）．在这种情况下，$\bar{Y}$ 遵从数学期望为 μ，方差为 $\frac{\sigma^2}{n}$ 的近似正态分布．如果 δ_i 的分布是精确的正态分布，则 μ 的其他无偏估计（例如样本中位数（见**中位数（统计学中的）**（median (in statistics））））的方差都不小于 $\mathrm{D}\bar{Y}$ 如果 δ 的分布不是正态分布，则后一性质不必成立

(见 **Rao-Cramér 不等式** (Rao-Cramér inequality) 中的例子).

若各个测量值的方差 σ^2 事先未知，则用

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2$$

作为 σ^2 的估计 ($\mathsf{E}s^2=\sigma^2$，即 s^2 是 σ^2 的无偏估计). 如果随机误差 δ_i 遵从正态分布，则

$$t=\frac{(\bar{Y}-\mu)\sqrt{n}}{s}$$

遵从自由度为 $n-1$ 的 **Student 分布** (Student distribution). 这可用来估计近似等式 $\mu\approx\bar{Y}$ 的误差 (见**最小二乘法** (least squares, method of))

在同样的假定下，变量 $(n-1)s^2/\sigma^2$ 遵从自由度为 $n-1$ 的 **χ^2 分布** ('chi-squared' distribution) 可用它来估计近似等式 $\sigma\approx s$ 的误差. 可以证明，其相对误差不超过数 q 的概率为

$$\omega=F(z_2,n-1)-F(z_1,n-1),$$

此处 $F(z,n-1)$ 是 χ^2 分布函数

$$z_1=\frac{\sqrt{n-1}}{1+q},\quad z_2=\frac{\sqrt{n-1}}{1-q}$$

如果某些测量值包含过失误差，则上述对 μ 和 σ 的估计将给出反常的结果 因此，把包含过失误差的测量值与仅包含随机误差 δ_i 的测量值区分开来是十分重要的 当诸 δ_i 独立且都遵从相同的正态分布时，用来识别含有过失误差的测量值的一种综合性方法已由 Н В Смирнов 提出 ([3])

参考文献

[1] Линник, Ю В, Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд М, 1962

[2] Большев, Л Н, Смирнов, Н В, Таблицы математической статистики, 2 изд М, 1968

[3] Смирнов, Н В, 《Докл АН СССР》, 33 (1941), 5, 346-349

Л Н Большев 撰

【补注】 误差处理的近代发展包括稳健估计 (robust estimation), 离群值检测和处理

离群值 (outlier) 的直观定义是 这样的观测值，它偏离其他观测值如此之远，以致怀疑它是不同观测机制产生的 这包括诸如抄错数据等过失 离群值对许多统计方法是危险的. 处理离群值的一种方法是用离群值检验 (outlier test) 来决定接受或否定下述假设 观测值 x^* 属于来自同一随机变量的样本. 否定假设的观测值将被剔除. 处理离群值的其他方法包括删失 (censoring), 稳健方法的使用和缩尾 (Winsorization) (它是稳健的), 其基本思想是用某个有规则的方法把所有过分远离中心的观测值移到接近较靠中心的观测值的位置 可能产生 (表面上的) 离群值的一种原因是数据来自重尾分布 另一种原因是数据来自两个分布 产生 "好" 观测值的基本分布和附加的污染分布. 离群值的哪一种处理方法合适自然在很大程度上依赖于产生这些离群值的原因. [A1]-[A4]是关于离群值及其处理方法的可供选择的参考文献.

粗略地说，稳健统计力求处理下述问题 许多常做的假定，诸如正态性、线性、独立性、 ，至多不过是实际情况的近似. 因此，人们寻求诸如对基础分布为正态的假定不敏感的检验，统计方法， 譬如，设所使用的统计模型是参数化分布族 $F(\theta)$，它被设想为一个更大的分布族 S 的一部分. 稳健统计的一个主要方面则是研究 $F(\theta)$ 在 S 中变形对所使用的各种统计方法的影响 类似的考虑已促使在数学的其他部分，例如动态系统，对变形的研究. 更一般地，稳健统计涉及这样一些统计概念，它们不仅在参数模型下，而且在其邻域中描述了统计方法的性能

现在，稳健统计是一个很活跃的领域. [A5]-[A7]是可供选择的关于这个课题的著作.

参考文献

[A1] Ferguson, Th S, Rules for rejection of outliers, *Rev Inst Int Stat*, 29 (1961), 29-43

[A2] Hawkins, D M, Identification of outliers, Chapman & Hall, 1980

[A3] Dixon, W J, Simplified estimation from censored normal samples, *Ann Math Stat*, 31 (1960), 385-391

[A4A] Sarhan, A E and Greenberg, B G, Estimation of location and scale parameters by order statistics from singly and doubly censored samples Ⅰ, *Ann Math Stat*, 27 (1956), 427-451

[A4B] Sarhan, A E and Greenberg, B G, Estimation of location and scale parameters by order statistics from singly and doubly censored samples Ⅱ, *Ann Math Stat*, 29 (1958), 79-105

[A5] Huber, P J, Robust Statistics, Wiley, 1981

[A6] Hampel, F R, Ronchetti, E M, Rousseeuw, P J and Stahel, W A, Robust Statistics The approach based on influence functions, Wiley, 1986

[A7] Rey, W J J, Introduction to robust and quasi-robust statistical methods, Springer, 1983

[A8] Federer, W T, Statistics and society Data collection and interpretation, M Dekker, 1973

吴启光 译 陶 波 校

本质映射 [essential mapping, существенное отображение]

把拓扑空间 X 映成闭单形 $\bar{T}^n$ 的连续映射 f，使得在集合 $f^{-1}(\bar{T}^n\setminus T^n)$ 的所有点上和 f 相同的任何连续映射 f_1 $X\to\bar{T}^n$ 都是映成整个 $\bar{T}^n$ 的映射. 例如，把 $\bar{T}^n$ 映成自身的恒等映射是本质映射

参考文献

[1] Александров, П С, Пасынков, Б А Введение в теорию размерности, М, 1973

М И Войцеховский 撰

【补注】 本质映射用来刻画正规空间的覆盖维数 (见**维数** (dimension)). **正规空间** (normal spaces) 的覆盖维数 $\geq n$ 的充要条件是. 存在一个把该空间映成 n 维闭单形 $\overline{T}^n$ 的本质映射.

参考文献

[A1] Engelking, R, Dimension theory, North-Holand & PWN, 1978

胡师度、白苏华 译

本质奇点 [**essential singular point**, **существенно особая точка**]

复变量 z 的解析函数 $f(z)$ 的一个单值性态**孤立奇点** (isolated singular point) a, 在该点处不存在有限或无穷极限 $\lim_{z\to a} f(z)$. 在本质奇点 $a\neq\infty$ 的一个充分小去心邻域 $V=\{z\in\mathbf{C}.0<|z-a|<r\}$ 中, 或当 $a=\infty$ 时在 $V'=\{z\in\mathbf{C}.\ r<|z|<\infty\}$ 中, 函数 $f(z)$ 可展开为 Laurent 级数

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k,\ a\neq\infty,\ z\in V,$$

或相应地

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k}{z^k},\ a=\infty,\ z\in V',$$

在这些级数的主要部分中有无穷多个具有负下标 k 的非零系数 c_k.

Сохоцкий 定理 (Sokhotskiĭ theorem) 断言, 扩张复平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 上的每个复值 w 都是函数 $f(z)$ 在其本质奇点 a 的任何任意小邻域中的极限值. 根据 **Picard 定理** (Picard theorem), 除可能有一个例外值外, $f(z)$ 在其本质奇点 a 的任何邻域内可取到每个有限复值 $w\in\mathbf{C}$ 无穷多次. Сохоцкий 定理也可以用别的方式表述, 即断言函数 $f(z)$ 在其本质奇点 a 处的**聚值集** (cluster set) $C(a;f)$ 与扩张复平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 相同. 另一方面, 对于正则点和极点, 这个集合退化为单个点 $w\in\overline{\mathbf{C}}$. 因而, 在更一般意义下, 解析函数 $f(z)$ 的本质奇点 (essential singular point) 这个名称适用于每个在其上不存在有限或无穷极限 $\lim_{z\to a} f(z)$, 或者说在其上聚值集 $C(a,f)$ 是非退化的奇点 a (不一定是孤立的). 对于这种奇点集中非孤立点的本质奇点, Сохоцкий 定理与 Picard 定理只在某些附加假定下得到了证明. 例如, 对于本质奇点集的一个孤立点 a, 特别对于**亚纯函数** (meromorphic function) 极点集的一个极限点 a, 这些定理仍然成立.

复空间 $\mathbf{C}^n$ $(n\geq 2)$ 的点 $a=(a_1,\ \ ,a_n)$ 称为多复变量 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 的解析函数 $f(z)$ 的一个亚纯点 (point of meromorphy), 如果 $f(z)$ 是 a 的一个邻域 U 中的亚纯函数, 即 $f(z)$ 在 U 内可表示为两个全纯函数之商 $f(z)=p(z)/q(z)$, $z\in U$. $f(z)$ 的非亚纯点的奇点 a 称为 $f(z)$ 的本质奇点 在这些情形中聚值集 $C(a,f)$ 的非退化性不再是本质奇点的特征性质.

参考文献

[1] Маркушевич, А И, Теория аналитических функций, 2 изд, т 1, М, 1967 (中译本 А И 马库雪维奇, 解析函数论, 高等教育出版社, 1957, 第 4 章)

[2] Фукс, Б А, Введение в теорию аналитич функций многих комплексных переменных, М, 1962 (英译本 Fuks, B A, Introduction to the theory of analytic functions of several complex variables, Amer Math Soc., 1965)

Е Д Соломенцев 撰

【补注】 在西方文献中, Сохоцкий 定理称为 Casorati-Weierstrass 定理 (Casorati-Weierstrass theorem).

参考文献

[A1] Saks, S, Zygmund, A, Analytic functions, Elsevier, 1971 (译自波兰文)

沈永欢 译

本质不可判定理论 [**essentially-undecidable theory**, **существенно неразрешимая теория**]

一个算法不可判定的逻辑理论, 它的所有相容扩张也是不可判定的 (见**不可判定性** (undecidability)) 一个**初等理论** (elementary theory) 为本质不可判定理论, 当且仅当它的每一个模型都有一个不可判定的初等理论. 每个完全不可判定理论都是本质不可判定理论, 如**形式算术** (arithmetic, formal). 没有一个具有穷模型的理论可为本质不可判定理论.

一个适当的有穷可公理化的初等理论 S 的本质不可判定性, 通常用于证明一个给定理论 T 的不可判定性 (见[1],[2]). 在这种证明中, S 在 T 的任何模型 M 中被解释. 解释的定义域和 S 命名的元素的值, 均用 T 的语言中相应公式在模型 M 中的值加以定义. 如果该解释为 S 的模型, 则 T 是不可判定的, 而且, 这个理论是遗传不可判定的 (hereditarily undecidable), 即它的与 T 同样署名的所有子理论都是不可判定的. 这个方法用来证明初等谓词逻辑、初等群论、初等域论等的不可判定性 有穷公理化的形式算术常用作本质不可判定理论 S

参考文献

[1] Tarski, A, Mostowski, A and Robinson, R M, Undecidable theories, North-Holland, 1953

[2] Ершов, Ю Л, [и др], 《Успехи матем наук》, **20** (1965), 4, 37-108

[3] Kleene, S C, Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本 S C 克林, 元数学导论, 科学出版社, 1985)

А Л Семеноб 撰 吕义忠 译 莫绍揆 校

艾达尔上同调 [étale cohomology, этальные когомологии]

在**艾达尔拓扑** (étale topology) 中的层的上同调．艾达尔上同调是按标准的方式用导出函子来定义的．设 X 是概形，X_{et} 是 X 上的艾达尔拓扑，则 X_{et} 上的 Abel 群层范畴是有足够多内射对象的 Abel 范畴．整体截面函子 Γ 是左正合的，其导出函子 $\mathscr{F} \mapsto H^q(X, \mathscr{F})$ (这里 $\mathscr{F}$ 是 X_{et} 上的 Abel 群层) 称为上同调函子 (cohomology functor)，这里 $H^0(X, \mathscr{F}) = \Gamma(\mathscr{F}) = \mathscr{F}(X)$．类似地，可定义 $\mathscr{F}$ 相对于态射 $f: X \to Y$ 的高次直接象层 $R^q f_*(\mathscr{F})$．对于高次直接象层，有类似于 **Leray 谱序列** (Leray spectral sequence) 的结论．如果 $\mathscr{F}$ 是非 Abel 群层，则可以定义集合 $H^1(X, \mathscr{F})$ (见**非 Abel 上同调** (non-Abelian cohomology))．

在艾达尔上同调理论中，对于可构造艾达尔 Abel 群层，得到了最重要的结果．其中的核心为有限性定理和基变换定理．设 $f: X \to Y$ 是真态射，$\mathscr{F}$ 是 X 上的可构造层，则层 $R^q f_* \mathscr{F}$ 是可构造的，且 $R^q f_* \mathscr{F}$ 在几何点 $y \to Y$ 的茎同构于茎 $f^{-1}(y) = X \times_Y y$ 的上同调群 $H^q(f^{-1}(y), \mathscr{F})$．假如使用具有紧支集的上同调，则对于有限型态射，也有类似的定理．

如果 X 是代数闭域上的代数簇，则对于 X 上的任意可构造层 $\mathscr{F}$，具有紧支集的上同调群 $H_c^q(X, \mathscr{F})$ 是有限的，且当 $q > 2\dim X$ 时，$H_c^q(X, \mathscr{F})$ 消失．另外，如果 X 是仿射簇，则当 $q > \dim X$ 时，$H^q(X, \mathscr{F}) = 0$．

对于复数域上的簇，可构造层的艾达尔上同调就是在这些层内取值的经典上同调．有下述的光滑态射的特殊化定理 (specialization theorem for a smooth morphism) 成立．假设 $f: X \to Y$ 是概形的光滑真态射，且整数 n 在 Y 上可逆，则层 $R^q f_*(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ 是在 Y 上的局部常层．

对于艾达尔上同调，有类似于 Poincaré 对偶性 (见代数几何学中的**对偶性** (duality)) 和 **Künneth 公式** (Künneth formula) 的结论．每个余维数 i 的代数闭链给出了一个 $2i$ 维上同调类，从而可以建立**陈 (省身) 类** (Chern class) 的理论．

可构造层的艾达尔上同调可用来建立 **l 进上同调** (l-adic cohomology) 和证明关于 **ζ 函数** (zeta-function) 的 Weil 猜想．

参考文献

[1] Grothendieck, A., The cohomology theory of abstract algebraic varieties, in Proc. internat. congress mathematicians Edinburg, 1958, 103–118

[2] Milne, J., Etale cohomology, Princeton Univ. Press, 1980

[3] Deligne, P., Cohomologie étale, SGA4 1/2, Lecture notes in math., 509, Springer, 1977

[4] Grothendieck, A., Cohomologie l-adique et fonctions L, Lecture notes in math., 589, Springer, 1977

[5] Artin, M., Grothendieck, A. and Verdier, J. L., Théorie des topos et cohomologie étale des schémas SGA4, Lecture notes in math., 269, 270, 305, Springer, 1972–1973

В. И. Данилов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Deligne, P., La conjecture de Weil. I, *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 273–308

[A2] Deligne, P., La conjecture de Weil. II, *Publ. Math. IHES*, **52** (1980), 137–252

蔡金星 译

艾达尔态射 [étale morphism, этальный морфизм]

相对维数为 0 的代数簇或概形的光滑态射．概形的艾达尔态射 $f: X \to Y$ 能等价地定义为局部有限可表的**平坦态射** (flat morphism)，使得对于任何点 $y \in Y$，$k(y)$ 概形 $f^{-1}(y) = X \otimes_Y k(y)$ 是有限的和可分的．对于无穷小形变，艾达尔态射具有提升性质．如果 $f: X \to Y$ 是艾达尔态射，Y' 是仿射 Y 概形，Y_0' 是由幂零理想层给出的 Y' 的闭子概形，则自然映射 $\mathrm{Hom}_Y(Y', Y) \to \mathrm{Hom}_Y(Y_0', Y)$ 是一一映射．这个性质刻画了艾达尔态射．最后，艾达尔态射可定义为平坦的和非分歧的态射．(局部有限可表示态射 $f: X \to Y$ 称为非分歧的 (unramified)，如果对角嵌入 $X \to X \times_Y X$ 是局部同构．)

态射的艾达尔性 (如同光滑性和非分歧性一样) 在态射的复合下和在基变换下保持不变．开嵌入是艾达尔态射．艾达尔 Y 概形之间的任何态射是艾达尔态射．对于光滑簇，$f: X \to Y$ 是艾达尔的意味着 f 诱导切空间的一个同构．局部地，艾达尔态射由具有非零导数的多项式给出．

在**艾达尔上同调** (étale cohomology) 理论中，艾达尔态射在定义概形的基本群、**代数空间** (algebraic space) 和 **Hensel 环** (Hensel ring) 中起了重要的作用．

参考文献

[1] Grothendieck, A. and Dieudonné, J., Eléments de géométrie algébrique, *Publ. Math. IHES*, **32** (1967)

[2] Grothendieck, A., Revêtements etales et groupe fondamental SGA1, Lecture notes in math., 224, Springer, 1971

В. И. Данилов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Grothendieck, A. and Dieudonne, J., Eléments de géométrie algébrique. Etude locale des schémas et de morphismes de schémas, *Publ. Math. IHES*, **4** (1965), Part 4, Sect. 17. 6

蔡金星 译

艾达尔拓扑 [étale topology, этальная топология]

Grothendieck 拓扑 (见**拓扑化范畴** (topologized category)) 的最重要的例子，可以用来定义抽象代数簇

和概形的上同调和同伦不变量 设 X 是一个概形．X 上的艾达尔拓扑是对艾达尔 X 概形的范畴 X_{et} 而言，X_{et} 的对象是**艾达尔态射**（étale morphism）$U \to X$，态射是 X 概形的态射．取满足 $U = \bigcup_i f_i(U_i)$ 的有限簇（f_i．$U_i \to U$）作为覆盖，即在 X_{et} 上引进一个拓扑

X_{et} 上的集合（群、Abel 群等）的预层（pre-sheaf）定义为从范畴 X_{et} 到集合（群等）范畴的反变函子 $\mathscr{F}$ 预层 $\mathscr{F}$ 称为层（sheaf），如果对任意覆盖（f_i $U_i \to U$），截面 $s \in \mathscr{F}(U)$ 由它在 U_i 上的限制所确定，且对任意一组相容的截面 $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$，存在唯一截面 $s \in \mathscr{F}(U)$，满足 $f_i^* s = s_i$ **层论**（sheaf theory）中许多标准的概念可以平移到艾达尔层（即 X_{et} 上的层）上．例如，设 f $X \to Y$ 是概形的态射，$\mathscr{F}$ 是 X 上艾达尔层，置

$$(f_* \mathscr{F})(V) = \mathscr{F}(X \times_Y V)$$

则得到所谓 $\mathscr{F}$ 关于态射 f 的直接象（direct image）$f_* \mathscr{F}$ f_* 的左伴随函子 f^* 称为逆象函子（inverse-image functor） 特别地，$\mathscr{F}$ 在几何点 η Spec $K \to X$（这里 K 是代数闭域）的茎定义为集合 $\mathscr{F}_\eta = \eta^* \mathscr{F}(\mathrm{Spec}\, K)$

X_{et} 上层的一个重要的例是 $\mathscr{F}_Z$，它可用某个 X 概形 Z 来表示，即 $\mathscr{F}_Z(U) = \mathrm{Hom}_X(U, Z)$ 如果 Z 是有限艾达尔 X 概形，则层 $\mathscr{F}_Z$ 称为局部常数层（locally constant sheaf） 层 $\mathscr{F}$ 称为可构造的（constructible），如果存在 X 的分成局部闭子概形 X_i 的有限划分，使得限制 $\mathscr{F}|_{X_i}$ 在每个 X_i 上是局部常的．

亦见**艾达尔上同调**（étale cohomology），拓扑范畴的**同伦型**（homotopy type）

参考文献

[1] Манин, Ю И，《Успехи матем наук》，20 (1965), 6, 3－12

[2] Milne, J S, Etale cohomologie, Princeton Univ Press, 1980

[3] Artin, M, Grothendieck, A and Verdier, J L, Théorie des topos et cohomologie étale des schémas SGA4, Lecture notes in math, 269, 270, 305, Springer, 1972－1973

[4] Deligne, P, Cohomologie étale SGA4 1/2, Lecture notes in math, 569, Springer, 1977

В И Данилов 撰 蔡金星 译

Eubulides 悖论 [Eubulides paradox, Эвбулида парадокс]

见**悖论**（antinomy）．

Euclid 算法 [Euclidean algorithm, Евклида алгоритм]

求两个整数、两个多项式（更一般地，**Euclid 环**（Euclidean ring）的两个元）的最大公因数（子）或两个线段的公度的一种方法 在 Euclid 的《原本》（Elements，公元前3世纪）中描述了这种方法

对于两个整数 $a \geqslant b$，Euclid 算法如下所述 由 a 除以 b 的带余数的除法总可得到结果 $a = nb + b_1$，其中商 n 是正整数，余数 b_1 或者是 0 或者是小于 b 的正整数，$0 \leqslant b_1 < b$ 进行一系列除法

$$\left.\begin{aligned} a &= nb + b_1, \\ b &= n_1 b_1 + b_2, \\ b_1 &= n_2 b_2 + b_3, \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

其中 n_i 是正整数，$0 \leqslant b_i < b_{i-1}$，直到余数等于 0 这时，等式系列终止，使得

$$b_{k-2} = n_{k-1} b_{k-1} + b_k, \quad b_{k-1} = n_k b_k.$$

在这个过程中最后的正余数 b_k 就是 a 和 b 的最大公因数．

对于多项式或线段的 Euclid 算法与对于整数的相类似．在不可公度线段的情况下，Euclid 算法是一个无限过程．

БСЭ-3

【补注】 确定两个整数 $a \geqslant b > 0$ 的**最大公因数**（greatest common divisor）的 Euclid 算法的速度是很快的，可以证明，要求的步数最多为

$$\frac{\log a}{\log((1+\sqrt{5})/2)}$$

把这个算法稍作推广，也可用来求方程 $ax + by = \mathrm{g.c.d.}(a, b)$ $(x, y \in \mathbf{Z})$ 的解．

参考文献

[A1] Leveque, W J, Topics in number theory, 1, Addison-Wesley, 1956

张鸿林 译

Euclid 联络 [Euclidean connection, Евклидова связность]

Euclid 向量丛上的微分几何结构，它推广 Riemann 几何中的 **Levi-Civita 联络**（Levi-Civita connection），或 **Riemann 联络**（Riemannian connection）．若光滑向量丛的每个纤维都具有标量积为 < , > 的 Euclid 向量空间结构，使得对于任何光滑截面 X 和 Y，函数 $\langle X, Y\rangle$ 是底空间上的光滑函数，则它称为 Euclid 向量丛．Euclid 向量丛上的线性联络称为 Euclid 联络，若对于两向量的任何平行移动它们的标量积保持常值．这等价于决定每个纤维上标量积 < , > 的度量张量是共变常数．Riemann 空间的切丛上无挠的 Euclid 联络就是 Riemann 联络．有时术语"Euclid 联络"仅用于这种情况，而"Riemann 联络"专指 Levi-Civita 联络．

Ю Г Лумисте 撰

【补注】 Euclid 联络有时也称为**度量联络**（metric connection）

参考文献

[A1] Kobayashi, S and Nomizu, K, Foundations of differential geometry, 1, Interscience, 1963．

[A2] Klingenberg, W, Riemannian geometry, de Gruyter,

1982, Chapt 1 8 沈一兵 译

Euclid域 [Euclidean field, Евклидово поле]

一个有序域，其中每个正元素都是平方元．例如，实数域 **R** 是 Euclid 域，有理数域 **Q** 不是 Euclid 域．

В Л Попов 撰

【补注】 人们还在第二种意义下使用 Euclid 域（Euclidean field）这个短语（特别是对于二次数域）．一个数域 K（即 **Q** 的有限扩域）称为 Euclid 域，如果它的整数环 A 是 **Euclid 环**（Euclidean ring）．设 m 是无平方因子的整数，则二次域 $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ 是 Euclid 域，当且仅当 $m=-1, \pm2, \pm3, 5, 6, \pm7, \pm11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 57$ 或 73（见 [A1]，第 VI 章）．

参考文献

[A1] Weiss, E, Algebraic number theory McGraw-Hill, 1963

赵春来 译 冯绪宁 校

Euclid几何学 [Euclidean geometry, Евклидова геометрия]

以在 **Euclid 的《几何原本》**（Elements of Euclid）一书中最先系统表述的公理体系（虽然并不十分严格）为基础所建立的空间几何学 Euclid 几何学的空间通常被描述为三类对象即所谓“点”、“线”、“面”的集合，它们之间的关系是关联、顺序（在 之间）、全等（即运动的概念）和连续性 平行公理（**第五公设**（fifth postulate））在 Euclid 几何学的公理系统中占有特殊的地位．Euclid 几何学的第一个足够精确的公理化是 D Hilbert 给出的（见 **Hilbert公理系统**（Hilbert system of axioms））．还存在 Hilbert 公理系统的修正以及其他各种 Euclid 几何学公理系统 例如，**向量公理系统**（vector axiomatics），其中把向量的概念取作基本概念之一．另一方面，在平面 Euclid 几何学的公理系统中，可以把对称关系取作为一个基本概念（见[5]）

参考文献

[1] Hilbert, D, Grundlagen der Geometrie, Springer, 1913（中译本 D 希尔伯特，几何基础，科学出版社，上册，1987）

[2] Каган, В Ф, Основания геометрии, ч 1, М-Л, 1949

[3] Погорелов, А В, Основания геометрии, 3 изд, М, 1968

[4] Энциклопедия элементарной математики, кн 4, Геометрия, М, 1963

[5] Bachmann, F, Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungbegriff, Springer, 1973

А Б Иванов 撰

【补注】 Hilbert 的专著 [1] 的英译本是 [A1]

参考文献

[A1] Hilbert, D, Foundations of geometry, Open Court, LaSalle, 1971

[A2] Berger, M, Geometry, 1, Springer, 1987（中译本 M 贝尔热，几何，第一册，科学出版社，1989）

[A3] Greenberg, M, Euclidean and non-Euclidean geometry, Freeman, 1980

[A4] Busemann, H, Recent synthetic geometry, Springer, 1970

[A5] Choquet, G, Geometry in a modern setting, Kershaw, 1969

张鸿林 译

Euclid素数定理 [Euclidean prime number theorem, Евклида теорема о простых числах]

素数的集合是无限的（Euclid 的《几何原本》（Elements），卷 IX，命题 20） **Чебышев 定理（关于素数的）**（Chebyshev theorems (on prime numbers)）和**素数分布**（distribution of prime numbers）的渐近律给出关于自然数序列中素数集合的更确切的信息．

С М Воронин 撰

【补注】 Euclid 素数定理的证明是很简单的．假设只存在有限个素数 $p_1, \ldots, p_k$ 考虑数 $N=p_1\cdots p_k+1$．因为 $N>1$，且已假设素数是有限的，所以 N 必定可被某个素数，譬如说 p_i 整除，即 p_i 可以整除 $N=p_1\cdots p_i\cdots p_k+1$，因此 p_i 可以整除 1 这个矛盾证明，必须存在无限多个素数．

张鸿林 译

Euclid环 [Euclidean ring, Евклидово кольцо]

有幺元的**整环**（integral domain），对于它的每个非零元素 a，都有一个非负整数 $n(a)$ 与之对应，满足下述要求 对任意两个元素 $a, b, b\neq0$，存在元素 q 和 r，使得

$$a=bq+r,$$

其中 $r=0$ 或 $n(r)<n(b)$

每个 Euclid 环都是**主理想环**（principal ideal ring），因此是**唯一分解环**（factorial ring），但是，存在着不是 Euclid 环的主理想环 整数环（绝对值 $|a|$ 作为 $n(a)$），还有域上的一元多项式环（$n(a)$ 是多项式的次数）是 Euclid 环．在任一 Euclid 环中，**Euclid 算法**（Euclidean algorithm）可以用来求两个元素的最大公因子

参考文献

[1] Курош, А Г, Лекции по общей алгебре 2 изд, М, 1973（英译本 Kurosh, A G, Lectures on general algebra, Chelsea, 1963）

О А Иванова 撰 赵春来 译 冯绪宁 校

Euclid空间 [Euclidean space, Евклидово пространство]

一个空间，它的性质由 **Euclid 几何学**（Euclidean geometry）公理来描述 在更一般的意义下，Euclid 空间是有限维实**向量空间**（vector space）$\mathbf{R}^n$，具有**内积**（inner product）(x, y)，$x, y\in\mathbf{R}^n$，在适当选取的（Des-

cartes）坐标系

$$x=(x_1, \quad, x_n) \text{ 和 } y=(y_1, \quad, y_n)$$

中，内积由下列公式给出

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Е Д Соломенцев 撰

【补注】 由于把 $n=2$ 的情况称为 Euclid 平面，有时也把 $n=3$ 的情况相应地称为 Euclid 空间，例如，见[A1]

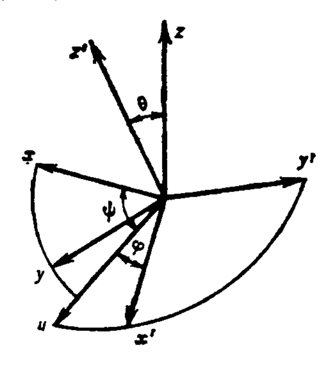
参考文献

[A1] Berger, M , Geometry 1, Springer, 1987（中译本 M 贝尔热，几何，第一册，科学出版社，1989）

张鸿林 译

Euler 角[Euler angles; Эйлеровы углы]

为确定一个 Descartes 直角坐标系 $Oxyz$ 相对于另一个具有相同原点及方位的坐标系 $Ox'y'z'$ 的位置所需的三个角 φ, ψ, θ Euler 角可以看作为使这两个坐标系最终重合，前一个坐标系必须绕后一个坐标系的轴相继旋转的角（见图）.



设 u 是与平面 $Oxyz$ 和 $Ox'y'$ 的交线重合的轴，其方位使三条直线 Oz，Oz' 和 u 构成右手系．这时，ψ 是 Ox 和 u 之间的夹角，在平面 Oxy 上从轴 Ox 量起（在由 Ox 到 Oy 最小旋转的方向上），θ 是 Oz 和 Oz' 之间不超过 π 的夹角，φ 是 u 和 Ox' 之间的夹角，在平面 $Ox'y'$ 上从轴 u 量起（在由 Ox' 到 Oy' 最小旋轴方向上）．在坐标 x, y, z 和 x', y', z' 之间存在下列关系式

$$x'=(\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\cos\theta\sin\varphi)x'+$$
$$+(-\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\theta\cos\varphi)y'+(\sin\psi\sin\theta)z',$$
$$y=(\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\cos\theta\sin\varphi)x'+$$
$$+(-\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\theta\cos\varphi)y'+(-\cos\varphi\sin\theta)z',$$
$$z=(\sin\theta\sin\varphi)x'+(\sin\theta\cos\varphi)y'+(\cos\theta)z'.$$

这些角是 L Euler 引入的（1748）

Д Д Соколов 撰

【补注】 关于其他公式以及应用，见[A1]–[A3]

参考文献

[A1] Landau, L D and Lifshitz, E M , Mechanics, Pergamon, 1965（译自俄文，中译本 Л Д 朗道、E M 栗弗席兹，力学，高等教育出版社，1959）

[A2] Gallavotti, G , The elements of mechanics, Springer, 1983

[A3] Goldstein, H , Classical mechanics, Addison-Wesley, 1959

张鸿林 译

Euler 示性数 [Euler characteristic，эйлерова характеристика]，有限 CW 复形 K 的

整数

$$\chi(K)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \alpha_k,$$

其中 α_k 是 K 中 k 维胞腔的个数．取这个名称是为了纪念 L Euler，他在 1758 年证明 一个凸多面体的顶点数 V，棱数 E 以及面数 F 之间的关系是公式 $V-E+F=2$ R Descartes 是知道这个关系的（1620），不过形式不明显．原来，

$$\chi(K)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k p^k,$$

其中 p^k 是复形 K 的 k 维 **Betti 数**（Betti number）（Euler-Poincaré 公式（Euler-Poincaré formula）) K 的 Euler 示性数是 K 的同调不变量、同伦不变量以及拓扑不变量．特别是，它不依赖于空间剖分成胞腔的方式．从而，例如可以界说任意紧多面体的 Euler 示性数，即是指它的任何三角剖分的 Euler 示性数．另一方面，利用 Euler-Poincaré 公式可以把 Euler 示性数的概念推广到更大一类空间及空间偶上，只要公式右端仍然有意义．对于任意的域 F，广义 Euler-Poincaré 公式成立，这时 Euler 示性数是由以 F 作为系数群的同调群在 F 上的维数来表示的

$$\chi(K)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dim_F(H_k(K,F))$$

设 p $A\to B$ 是一个局部平凡的纤维表示，纤维为 C 如果空间 A, B 和 C 满足某些条件，则它们的 Euler 示性数的关系是 $\chi(A)=\chi(B)\chi(C)$ 特别是，两个空间的直积的 Euler 示性数等于这两个空间的 Euler 示性数之积．关系 $\chi(A\cup B)=\chi(A)+\chi(B)-\chi(A\cap B)$ 对任何切除三元组 $(A\cup B, A, B)$ 成立，从而可以计算所有紧二维流形的 Euler 示性数．有 g 个环柄及 l 个剔除开圆盘的球面，其 Euler 示性数为 $2-2g-l$，而有 m 个 Mobius 带及 l 个剔除圆盘的球面，其 Euler 示性数为 $2-m-l$ 任何奇维数的紧可定向流形的 Euler 示性数等于其边界的 Euler 示性数之半．特别是，奇维数的可定向闭流形的 Euler 示性数为零，因为其边界是空集

С В Матвеев 撰

【补注】 如果 f $K\to K$ 同伦于 K 的恒同映射，则 Lefschetz 不动点定理（Lefschetz fixed-point theorem）

(见 **Lefschetz 定理** (Lefschetz theorem), [A1]) 说, 若 $\chi(K)$ 非零, 则 f 必有**不动点** (fixed point)

参考文献

[A1] Spanier, E H , Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966

[A2] Munkres, J R , Elements of algebraic topology, Addison-Wesley, 1984

胡师度、白苏华 译

Euler 类 [Euler class, Эйлеров класс]

对于相配于一个向量丛的球丛构作截面时所遇到的第一级**阻碍** (obstruction) 见**示性类** (characteristic class)

А Ф Харшиладзе 著

【补注】 定向球丛的 Gysin 序列中有一个同态是乘以 Euler 类 (也称定向类 (orientation class)) ([A1]) 定向紧致 n 维**流形** (manifold) 的 Euler 示性数可从**切丛** (tangent bundle) 的 Euler 类算出 ([A1] p 348)

参考文献

[A1] Spanier, E H , Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966

孙以丰 译

Euler 常数 [Euler constant, Эйлера постоянная]

由下列极限定义的数 c

$$c=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\quad+\frac{1}{n}-\ln n\right]\approx$$

$$\approx 0\,57721566490\quad,$$

L Euler (1740) 研究过, 由于序列

$$1+\frac{1}{2}+\quad+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$$

是单调递增的和上有界的, 可知 Euler 常数存在 Euler 常数的数论性质尚未研究; 甚至还不知道 (1988) 它是否是有理数

Л Д Кудрявцев 撰

【补注】 事实上, 关系式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}-\ln x=c+O\left(\frac{1}{x}\right)$$

成立, 见 [A1], 22 5

参考文献

[A1] Hardy, G H and Wright, E M , An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ Press, 1979

张鸿林 译

Euler 准则 [Euler criterion, Эйлера критерий]

若整数 a 不能被素数 $p>2$ 整除, 则同余式

$$a^{(p-1)/2}\equiv\left(\frac{a}{p}\right)(\mathrm{mod}\,p)$$

成立, 其中的 $\left(\frac{a}{p}\right)$ 是 **Legendre 符号** (Legendre symbol) 这样, Euler 准则就给出了整数 $a\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)$ 是模 p 的**二次剩余** (quadratic residue) 或二次非剩余的充分必要条件 这是 L Euler 在 1761 年证明的 (见 [1]) .

Euler 还得到了一个更一般的结论 整数 $a\,(a\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p))$ 是模素数 p 的 n 次剩余, 当且仅当

$$a^{(p-1)/\delta}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p),$$

其中 $\delta=(n,\ p-1)$

这两个结论容易推广到有限域的情形 .

参考文献

[1] Euler, L , Adnotationum ad calculum integralem Euleri, in Opera Omnia Ser 1, Vol 12, Teubner, 1914, 493 – 538

[2] Виноградов, И М , Основы теории чисел, 9 изд , М , 1981 (英译本 Vinogradov, I M , Elements of number theory, Dover reprint, 1954)

С А Степанов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hardy, G H and Wright, E M , An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ Press, 1979

潘承彪 译 戚鸣皋 校

Euler 方程 [Euler equation, Эйлера уравнение]

1) 下列形式的 n 阶线性常微分方程

$$\sum_{i=0}^{n}a_i x^i\frac{d^iy}{dx^i}=f(x),\tag{1}$$

其中 $a_i\,(i=0,1,\quad,n)$ 是常数, 且 $a_n\neq 0$ L Euler 从 1740 年开始详细地研究了这个方程

经过自变量变换 $x=e^t$, 当 $x>0$ 时, 可将方程 (1) 化为 n 阶常系数线性方程

$$\sum_{i=0}^{n}a_iD(D-1)\quad(D-i+1)y=f(e^t),\quad D=\frac{d}{dt}$$

最后这个方程的**特征方程** (characteristic equation) 是 Euler 方程 (1) 的指标方程 (indicial equation) . 点 $x=0$ 是齐次 Euler 方程的**正则奇点** (regular singular point) 在半轴 $x>0$ 上, 实齐次方程 (1) 的基本 (实) 解组由形如

$$x^\alpha\cos(\beta\ln x)\ln^m x,\quad x^\alpha\sin(\beta\ln x)\ln^m x\tag{2}$$

的函数组成 当 $x<0$ 时, 对 (1) 应作变换 $x=-e^t$, 而在 (2) 中, x 要由 $|x|$ 来代替 .

比 (1) 更一般的方程是 Lagrange 方程 (Lagrange equation)

$$\sum_{j=0}^{n}a_j(\alpha x+\beta)^jy^{(j)}=f(x),$$

其中 α,β 和 a_j 是常数, 且 $\alpha\neq 0$, $a_n\neq 0$, 这个方程通过变换

$$\alpha x+\beta=e^t\quad 或\quad \alpha x+\beta=-e^t$$

也可化为常系数线性方程

参考文献

[1] Kamke, E , Handbuch der gewohnliche Differentialgleichungen, Chelsea, reprint, 1947 (中译本 E 卡姆克, 常微分方程手册, 科学出版社, 1980) H X Розов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ince, E L , Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956

2) Euler 方程是**变分学** (variational calculus) 问题中的一个极值的必要条件, 它是 L Euler得到的 (1744). 后来, J L Lagrange (1759) 又用不同的方法导出了这个方程. 因此, 它有时也称为 Euler-Lagrange方程 (Euler-Lagrange equation) Euler方程是使泛函的一阶变分等于零的必要条件.

变分学的问题之一是求泛函

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x})\, dt \tag{1}$$

在已给定的端点条件

$$x(t_1) = x_1 \qquad x(t_2) = x_2 \tag{2}$$

下的极值. 如果一个连续可微函数 $x(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$ 是 (1) 和 (2) 的解, 则 $x(t)$ 满足 Euler 方程 (Euler equation)

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0, \tag{3}$$

或者展开形式

$$F_x - F_{t\dot{x}} - F_{x\dot{x}}\dot{x} - F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} = 0 \tag{4}$$

方程 (3) 或 (4) 的光滑解称为极值曲线 (extremal). 如果在极值曲线的点 (t, x) 上 $F_{\dot{x}\dot{x}} \neq 0$, 则在这一点上极值曲线具有连续的二阶导数 $\ddot{x}$ 在其一切点上 $F_{\dot{x}\dot{x}} \neq 0$ 的极值曲线称为非奇异的 (non-singular). 对于非奇异极值曲线, Euler 方程能够写成可解出二阶导数 $\ddot{x}$ 的形式.

变分问题 (1), (2)的解不一定是连续可微的. 一般地说, 最优解可以是分段可微函数 这时, 在 $x(t)$ 的角点上, **Weierstrass-Erdmann 隅角条件** (Weierstrass-Erdmann corner condition)必须成立, 它保证在通过角点时 $F_{\dot{x}}$ 和 $F - \dot{x}F_{\dot{x}}$ 的连续性, 而在相邻的两角点之间的线段上, 函数 $x(t)$ 必须满足 Euler 方程. 由极值曲线的各段组成的、在角点上满足 Weierstrass-Erdmann 隅角条件的分段光滑曲线, 称为折极值曲线 (polygonal (broken) extremals) 一般地说, Euler 微分方程是二阶方程, 因而它的通解依赖于两个任意常数 c_1 和 c_2

$$x = f(t, c_1, c_2).$$

这两个任意常数可以由边界条件 (2) 来确定

$$f(t_1, c_1, c_2) = x_1, \quad f(t_2, c_1, c_2) = x_2 \tag{5}$$

如果泛函依赖于多个函数, 即

$$J(x^1, \quad , x^n) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x^1, \quad , x^n, \dot{x}^1, \quad , \dot{x}^n)\, dt, \tag{6}$$

则得到的不是一个 Euler 方程, 而是 n 个 Euler 方程的方程组.

$$F_{x^i} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}^i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad , n. \tag{7}$$

方程组 (7) 的通解依赖于 $2n$ 个任意常数, 它们由给定的 $2n$ 个边界条件来确定 (在具有固定端点的问题中)

在具有变动端点的变分问题中, 极值曲线的左端点和右端点能够在给定的超曲面上移动, 为得到类型 (5)的封闭关系式组所缺少的边界条件由必要的**横截条件** (transversality condition) 来确定.

对于含有高阶导数 (而不是像在 (1) 和 (6) 中只含一阶导数) 的泛函, 类似于 Euler 方程的必要条件可以写成 Euler-Poisson 微分方程的形式 (见[1]).

在求依赖于多变量函数的泛函的极值的变分问题中, 类似于 Euler 方程的必要条件写成 Euler-Остроградский 方程的形式, 这是一个偏微分方程 (见[2])

在求条件极值的变分问题中, 利用 **Lagrange 乘子** (Lagrange multipliers) 得到 Euler 方程组 例如, 对于 **Bolza 问题** (Bolza problem), 需要求依赖于 n 个函数 $x = (x^1; \quad , x^n)$ 的泛函

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x, \dot{x})\,dt + g(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) \tag{8}$$

在微分约束

$$\varphi_i(t, x, \dot{x}) = 0, \; i = 1, \quad , m, \; m < n \tag{9}$$

和边界条件

$$\begin{aligned} &\psi_\mu(t_1, x(t_1), \; t_2, x(t_2)) = 0, \\ &\mu = 1, \quad , p, \quad p \leqslant 2n+2 \end{aligned} \tag{10}$$

下的极值, 利用 Lagrange 乘子 λ_0 和 $\lambda_i(t)$ $(i = 1, \quad , m)$, 由 f 和 φ_i 构造函数

$$F(t, x, \dot{x}, \lambda) = \lambda_0 f(t, x, \dot{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(t, x, \dot{x}),$$

Euler 方程可以写成下列形式

$$\left.\begin{aligned} &F_{\lambda_i} - \frac{d}{dt} F_{\dot{\lambda}_i} \equiv \varphi_i(t, x, \dot{x}) = 0, \; i = 1, \cdot \quad , m, \\ &F_{x^i} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}^i} = 0, \; i = 1, \cdot \quad , n \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

因此，变分问题 (8)－(10) 的最优解必须满足 $(m+n)$ 个 Euler 微分方程的方程组 (11)，其中前 m 个方程与给定的约束条件 (9) 相同．再利用必要的横截条件，得到一个封闭的边值问题，以确定变分问题 (8)－(10) 的解

除了 Euler 方程和横截条件以外，变分问题的解还必须满足一些其他边界条件，即 Clebsch (Legendre) 条件，Weierstrass 条件和 Jacobi 条件

参考文献

[1] Ахиезер, Н И ,Лекции по вариационному исчислению, М , 1955 (英译本 Akhiezer, N I , The calculus of variations, Blaisdell, 1962)

[2] Лаврентьев, М А , Люстерник, Л А , Курс вариационного исчисления, 2 изд , М -Л , 1950 (中译本 М А. 拉夫连齐耶夫, Л А 留斯捷尔尼克，变分学教程，高等教育出版社，1955)

И Б Вапнярский 撰

3) Euler 方程是下列形式的方程

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}=0,$$

其中

$$X(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_1x+a_4,$$

$$Y(y)=a_0y^4+a_1y^3+a_2y^2+a_3y+a_4$$

L Euler 从 1753 年起在几篇文章中研究了这个方程．他证明这个方程的通解具有形式 $F(x,y)=0$，其中 $F(x,y)$ 是 x 和 y 的四次对称多项式 　　БС -3

【补注】 在流体力学中，运动方程组也称为 Euler 方程 (Euler equations)

例如，对于无粘性流体，Euler 运动方程 (Euler equations of motion) 是

$$\rho\left[\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\right]=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\rho X_i,$$

其中 t 是时间，ρ 是流体的密度，p 是压力，X_i 是每单位质量的体积力的第 i 个分量，u_i 是在 x_i 方向上的速度分量，$i=1,2,3$ 这里，x_1，x_2，x_3 是 Descartes 坐标，在上面的方程中，重复指标表示求和．

最后，下列形式的偏微分方程称为 Euler 偏微分方程 (Euler partial differential equations)

$$\frac{\partial^2F}{\partial t_1\partial t_2}+\frac{1}{t_1-t_2}\left[a\frac{\partial}{\partial t_1}-b\frac{\partial}{\partial t_2}\right]F=0, \quad \text{(A1)}$$

其中 a,b 为常数．它的某些解可以表示为积分

$$\int\frac{dx}{(Q(x))^{1/n}},$$

这个积分取在由依赖于两个参数 t_1,t_2 的 $Y^n=Q(X,t_1,t_2)$ 给出的 Riemann 曲面上 (其中 $Q(X,t_1,t_2)$ 是 X 的多项式)

在这些解的单值性与二维单位球上的自守函数之间存在联系 关于这个论题的大量材料，见 [A3] Euler 偏微分方程 (A1) 也称为 Euler-Darboux-Poisson 方程 (Euler-Darboux-Poisson equation) (见**双曲型方程和方程组的混合边值问题** (mixed and boundary value problems for hyperbolic equations and systems)) 和 Euler-Poisson-Darboux 方程 (Euler-Poisson-Darboux equation) (见**奇异系数的偏微分方程** (differential equation, partial, with singular coefficients))

参考文献

[A1] Chorin, A J and Marsden, J E , A mathematical introduction to fluid dynamics, Springer, 1979

[A2] Yih, C -S , Stratified flows, Acad Press, 1980

[A3] Holzapfel, R -P , Geometry and arithmetic around Euler partial differential equations, Reidel, 1986

张鸿林 译

Euler 公式 [Euler formula, эйлера формула]

通过一个曲面的主曲率 k_1 和 k_2 表示它在给定方向 l 上的法曲率 k_l 的公式

$$k_l=k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi,$$

其中 φ 是方向 l 和对应于主曲率 k_1 的主方向之间的夹角

这个公式是 L Euler 证明的 (1760)

Д Д Соколов 撰

【补注】 亦见**法曲率** (normal curvature)，**主曲率** (principal curvature)

参考文献

[A1] Carmo, M do, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, 1976

[A2] Blaschke, W and Leichtweiss, K , Elementare Differential-geometrie, Springer, 1973

张鸿林 译

Euler 公式 [Euler formulas, эйлера формулы]

联系指数函数和三角函数的一些公式

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,$$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

这些公式对于复变量 z 的一切值都成立．特别是，对于实数值 $z=x$，Euler 公式变为

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

这些公式是 L Euler 在 [1] 中发表的

参考文献

[1] Euler, L, *Miscellanea Berolinensia*, 7 (1743), 193−242

[2] Euler, L, Einleitung in die analysis des Unendlichen, Springer, 1983 (译自拉丁文)

[3] Маркушевич, А И, Краткий курс аналитических функций, 4 изд, М, 1978 (中译本 А И 马尔库舍维奇，解析函数简明教程，高等教育出版社，1959)

Е Д Соломенцев 撰 张鸿林 译

Euler-Fourier 公式 [Euler-Fourier formulas, Эйлера-Фурье формулы]

Fourier 级数 (Fourier series) 的系数的公式.

【补注】 如果 f 是实轴上的周期为 2π 的函数，且 $\int_0^{2\pi}|f(x)|dx<\infty$，则 Euler-Fourier 公式是

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad(n\geqslant 0),$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad(n\geqslant 1)$$

和

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-inx}dx$$

形式级数

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

和

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$$

二者都称为 f 的 **Fourier 级数** (Fourier series). 它们具有相同的部分和 对于一切 x 和一切 $N\geqslant 1$，有

$$\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{inx}=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

系数 c_n 也记为 $\hat{f}(n)$ 张鸿林 译

Euler 函数 [Euler function, Эйлера функция]

算术函数 φ，它在 n 处的值等于不超过 n 且与 n 互素的正整数的个数 Euler 函数是积性的，即 $\varphi(1)=1$，且当 $(m,n)=1$ 时 $\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$. 函数 $\varphi(n)$ 满足关系式

$$\sum_{d/n}\varphi(d)=n,$$

$$c\frac{n}{\ln\ln n}\leqslant\varphi(n)\leqslant n,$$

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi(n)=\frac{3}{\pi^2}x^2+O(x\ln x)$$

这个函数是由 L Euler (1763) 引进的.

参考文献

[1] Chandrasekharan, K, Introduction to analytic number theory, Springer, 1968

С А Степанов 撰

【补注】 函数 $\varphi(n)$ 可以用公式 $\varphi(n)=\prod_{p/n}(1-p^{-1})$ 来计算，这里的乘积展布在所有整除 n 的素数上，见 [A1].

本条目中的渐近公式的证明，及公式

$$\lim_{n\to\infty}\inf\varphi(n)\frac{\ln\ln n}{n}=e^{-\gamma}$$

的证明亦见 [A1] 的 18 4 和 18.5，其中的 γ 是 **Euler 常数** (Euler constant).

参考文献

[A1] Hardy, G H, Wright, E M, An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ Press, 1979

潘承彪 译 戚鸣皋 校

Euler 恒等式 [Euler identity, Эйлера тождество]

关系式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

其中 $s>1$ 是任意实数且乘积展布在全体素数 p 上. 对所有的复数 $s=\sigma+it\,(\sigma>1)$，Euler 恒等式也成立.

Euler 恒等式可推广为如下的形式.

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\prod_p(1-f(p))^{-1}.$$

对每个完全积性算术函数 $f(n)$，当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 绝对收敛时，上述等式成立

Euler 恒等式还有另一种推广. 设 **Dirichlet 级数** (Dirichlet series)

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},\quad s=\sigma+it,\quad\sigma>k+1,$$

对应于权为 $2k$ 的模函数

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{2\pi inz}$$

(它是 Hecke 算子的特征函数)，这时有公式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}=\prod_p(1-a_pp^{-s}+p^{2k-1-2s})^{-1}.$$

参考文献

[1] Chandrasekharan, K, Introduction to analytic number theory, Springer, 1968.

[2] Lang, S, Introduction to modular forms, Springer, 1976

С А Степанов 撰

【补注】 积

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

称为 Euler 积 (Euler product) 与模形式有关的 Hecke 算子见**模形式** (modular form) 关于完全乘性算术函数见**乘性算术函数** (multiplicative arithmetic function).

参考文献

[A1] Titchmarsh, E C, The theory of the Riemann zeta-function, Clarendon, 1951 潘承彪 译 戚鸣皋 校

Euler 积分 [Euler integrals, Эйлеровы интегралы]

积分

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\quad p,q>0,$$

称为第一类 Euler 积分 (Euler integral of the first kind) 或 **B 函数** (beta-function), 和

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx,$$

称为第二类 Euler 积分 (Euler integral of the second kind) (当 $s>0$ 时, 这个积分收敛, 它是 **Γ 函数** (gamma function)) 的一种表示.

L. Euler (1729-1731) 研究过这两个积分.

Л Д Кудрявцев 撰 张鸿林 译

Euler-Lagrange 方程 [Euler-Lagrange equation, Эйлера Лагранжа уравнение], 极小曲面 $z=z(x,y)$ 的下面形式的方程

$$\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+$$

$$+\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

它由 J L. Lagrange (1760) 导出且由 J Meusnier 解释为曲面 $z=z(x,y)$ 的平均曲率等于零的条件, 它的特解由 G Monge 求得. С Н. Бернштейн 对 Euler-Lagrange 方程作了系统的研究, 他指出 Euler-Lagrange 方程是一个 $p=2$ 类的拟线性椭圆型方程, 因此它的解具有一系列明显区别于线性方程解的性质 例如, 这些性质包括 在不事先假定解在奇点邻域中的有界性的情形下, 解的孤立奇点的可去性, 在同样条件下成立的最大值原理, 用 $z(x,y)$ 在圆心的值去得到对 z 在圆盘的任意紧子域中的一致先验估计的不可能性 (即不存在 Harnack 不等式的确切类似物), 与 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem) 有关的事实, 定义在全平面上的 Euler-Lagrange 方程非线性解的不存在性 (**Бернштейн 定理** (Bernstein theorem)) 等等

Euler-Lagrange 方程可以关于维数推广 相应于 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中极小超曲面 $z=z(x_1,\ \ ,x_n)$ 的方程有如下形式

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x_i}}{\sqrt{1+|\nabla z|^2}}\right]=0,\quad \nabla z=\left(\frac{\partial z}{\partial x_1},\ \ ,\frac{\partial z}{\partial x_n}\right).$$

对此方程 ($n\geqslant 3$) 研究了 Dirichlet 问题的可解性, 证明了解的奇异性的可去性, 如果它们集中在区域内部的一个 $n-1$ 维 Hausdoff 测度的零测集上, 对 $n\leqslant 7$ 证明了 Бернштейн 定理的正确性, 对 $n\geqslant 8$ 举出了反例.

И Х Сабитов 撰

【补注】 Бернштейн 的文章见 [A3].

参考文献

[A1] Giusti, E, Minimal surfaces and functions of bounded variation, Birkhauser, 1984

[A2] Nitsche, J C C, Vorlesungen über minimalflächen, Springer, 1975

[A3] Bernstein, S N (S N Bernshtein), Sur les surfaces définies au moyen de leur courbure moyenne ou totale, *Ann Sci Ecole Norm Sup*, **27** (1910), 233-256.

[A4] Bombieri, E, Degiorgi, E and Giusti, E, Minimal cones and the Bernstein problem, *Inv Math*, **7** (1969), 243-268 孙和生 译 陆柱家 校

Euler-MacLaurin 公式 [Euler-MacLaurin formula, Эйлера-Маклорена формула]

把一个级数的部分和同它的通项的积分和导数联系起来的求和公式

$$\sum_{k=p}^{m-1}\varphi(k)=\int_p^m \varphi(t)dt+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{B_\nu}{\nu!}\{\varphi^{(\nu-1)}(m)-\varphi^{(\nu-1)}(p)\}+R_n,$$

其中 B_ν 是 **Bernoulli 数** (Bernoulli numbers), R_n 是余项. 应用 **Bernoulli 多项式** (Bernoulli polynomials) $b_n(t)$, $b_n(0)=B_n$, 可以把余项写成下列形式

$$R_n=-\frac{1}{n!}\int_0^1[B_n(t)-B_n]\sum_{k=p}^{m-1}\varphi^{(n)}(k+1-t)dt$$

当 $n=2s$ 时, 余项 R_{2s} 可以通过 Bernoulli 数来表示

$$R_{2s}=\frac{B_{2s}}{(2s)!}\sum_{k=p}^{m-1}\varphi^{(2s)}(k+\theta),\quad 0<\theta<1$$

如果导数 $\varphi^{(2s)}(t)$ 和 $\varphi^{(2s+1)}(t)$ 同号, 而且在 $[p,m]$ 上不变号, 则

$$R_{2s}=\theta\frac{B_{2s}}{(2s)!}[\varphi^{(2s-1)}(m)-\varphi^{(2s-1)}(p)],\ 0\leqslant\theta\leqslant 1$$

此外, 如果

$$\lim_{x\to\infty}\varphi^{(2s-1)}(x)=0,$$

则 Euler-MacLaurin 公式成为

$$\sum_{k=p}^{m-1}\varphi(k)=c+\int_p^m\varphi(t)t+$$

$$+\sum_{k=1}^{2s-2}\frac{B_k}{k!}\varphi^{(k-1)}(m)+\theta\frac{B_{2s}}{(2s)!}\varphi^{(2s-1)}(m),\ 0<\theta<1$$

这个公式可以用来推导 **Stirling 公式** (Stirling formula)，在这种情况下，$\varphi(x)=\ln x$，c 是 **Euler 常数** (Euler constant)．Euler-MacLaurin 公式也可推广到多重和的情况．

Euler-MacLaurin 公式可应用于定积分的近似计算、级数收敛性的研究、和的计算、以及函数的 Taylor 级数展开 例如，当 $m=1$，$p=0$，$n=2m+1$ 和 $\varphi(x)=\cos(xt-t/2)$ 时，由 Euler-MacLaurin 公式可以得到表达式

$$\frac{t}{2}\cotan\frac{t}{2}=\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{\nu}\frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!}B_{2\nu}+$$

$$+\frac{(-1)^{m+1}t^{2m+1}}{2\sin(t/2)}\int_0^1\frac{B_{2m+1}(t)}{(2m+1)!}\sin\left[x-\frac{1}{2}\right]t\,dx.$$

Euler-MacLaurin 公式在渐近展开研究、数论估计、和**有限差分法** (finite-difference calculus) 等方面起着重要的作用．

有时还采用下列形式的 Euler-MacLaurin 公式

$$\sum_0^n\varphi_n(t)=\int_0^n\varphi(x)dx+\frac{1}{2}(\varphi_0+\varphi_n)+$$

$$+\int_0^n\left[x-[x]-\frac{1}{2}\right]\varphi^{1}(x)dx$$

Euler-MacLaurin 公式首先是由 L Euler ([1]) 以下列形式得到的

$$S=\int t\,dn+\alpha t+\beta\frac{dt}{dn}+\gamma\frac{d^2t}{dn^2}+\delta\frac{d^3t}{dn^3}+\varepsilon\frac{d^4t}{dn^4}+\ ,$$

其中 S 是通项为 $t(n)$ 的级数的前若干项之和，当 $n=0$ 时 $S=t=0$，而各项的系数则由下列递推公式来确定:

$$\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=\frac{\alpha}{2!}-\frac{1}{3!}=\frac{1}{12},\ \gamma=\frac{\beta}{2!}-\frac{\alpha}{3!}+\frac{1}{4!}=0,$$

$$\delta=\frac{\gamma}{2!}-\frac{\beta}{3!}+\frac{\alpha}{4!}-\frac{1}{5!}=-\frac{1}{720},\ \varepsilon=0,\ \gamma=0,\ \cdot$$

这个公式后来又由 C. MacLaurin 独立地发现了([2])

参考文献

[1] Euler, L , *Comment, Acad Sci Imp Petrop* , **6** (1738), 68–97

[2] MacLaurin, C , A treatise of functions, 1–2, Edinburgh, 1742

[3] Hardy, G H , Divergent series, Clarendon, 1949

[4] Nörlund, N E , Vorlesungen über Differenzenrechung, Springer, 1924

[5] Гельфонд, А О , Исчисление конечных разностей, 3 изд , М , 1967

Ю Н Субботин 撰

【补注】 Euler-MacLaurin 求和公式在数值求积法 (quadrature) 方面的应用，在 [A1] 和 [A2] 中都有讨论．用有限差分代替各个导数，可以得到 Bessel, Gauss 和 Gregory 的求积法则

参考文献

[A1] Hildebrand, F B , Introduction to numerical analysis, McGraw-Hill, 1974

[A2] Steffensen, J F , Interpolation, Chelsea, reprint, 1950

张鸿林 译

Euler 法 [Euler method; Эйлера метод]

数值求解常微分方程的一种很简单的有限差分方法．给定微分方程

$$y'=f(x,y) \tag{1}$$

和初始条件

$$y(x_0)=y_0$$

在 x 轴上选一个充分小的步长 h 并构造点列 $x_i=x_0+ih$，$i=0,1,$ ，然后用一条折线 (**Euler 折线** (Euler polygonal line)) 代替所求的积分曲线，该折线在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是由其端点坐标按公式

$$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i),\ i=0,1, \tag{2}$$

决定的一段直线．如果 (1) 的右端函数 $f(x,y)$ 是连续的，那么当 $h\to 0$ 时，在一个充分小的区间 $[x_0, x_0+H]$ 上 Euler 折线序列一致收敛到未知曲线 $y(x)$．

Euler 法在于在每个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上将微分方程 (1) 的积分用其 Taylor 级数的前二项来表示

$$y(x_i+h)=y(x_i)+hy'(x_i),\ i=0,1,$$

它每一步的误差为 h^2 阶．

用各种修正方法可以使 Euler 法更加精细．例如，用关系式

$$y_{i+1}=y_i+hf(x_{i+1/2},y_{i+1/2}),\ i=0,1,\ \cdot \tag{3}$$

代替 (2) 计算坐标值，这样就得到改进的折线法，其中

$$x_{i+1/2}=x_i+\frac{h}{2},\ y_{i+1/2}=y_i+\frac{h}{2}f(x_i,y_i) \tag{4}$$

即用到了积分曲线场在折线段中点 (4) 处的方向

另一种修正方法给出了改进的 Euler-Cauchy 法

(Euler-Cauchy method)

$$y_{i+1}=y_i+h\frac{f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},\bar{y}_{i+1})}{2},$$

$$i=0,1,\quad, \tag{5}$$

其中

$$\bar{y}_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i).$$

后一种方法还可通过使用如下的迭代格式改进$\bar{y}_{i+1}$之值而更加精细

$$y_{i+1}^{(k)}=y_i+\frac{h}{2}[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1}^{(k-1)})],$$

$$k=1,2,\quad, \tag{6}$$

其中第零次近似值为

$$y_{i+1}^{(0)}=y_i+hf(x_i,y_i)$$

用 (6) 迭代计算直到两次相邻的近似值$y_{i+1}^{(k)}$和$y_{i+1}^{(k+1)}$在指定的十进位数上相重合为止 如果三、四次迭代后仍未能达到这一目的，步长h就应该取得更小一些．带有迭代计算坐标值的 Euler 法每一步的误差为h^3阶

Euler 法及其各种修正方案可以用于求解由n个微分方程

$$y_k'=f_k(x,y_1,\cdot\ ,y_n),\ k=1,\quad ,n$$

和初始条件

$$y_k(x_0)=y_{k_0}$$

构成的方程组的一般情况 Euler 法的数值算法很容易在计算机上编程序

这个方法是 L. Euler (1768) 提出的．

参考文献

[1] Демидович, Б П , Марон, И А , Основы вычислительной математики, М , 1960

И Б Вапнярский 撰

【补注】 在西方，只有 (2) 式定义的方法称为 Euler 法，更准确地称为 Euler 向前法 (Euler forward method) 类似的隐式

$$y_{i+1}=y_i+hf(x_{i+1},y_{i+1})$$

称为 Euler 向后法 (Euler backward method)．由 (3) 式定义的方法通常称之为中点法 (midpoint method)，而 (3) 和 (4) 式合在一起通称为 Runge 法 (Runge method) [A4]，或者变形 Euler 法 (modified Euler method)，它被看作是最古老的 Runge-Kutta 类型的方法 (Runge-Kutta 法的特点是每一步都要多次计算右端函数f，见 **Runge-Kutta 法** (Runge-Kutta method))．方法 (5) 中如果由 Euler 向前方法预估y_{i+1}，则称其为 Heun 二阶方法 (Heun second-order method)，否则称其为梯形法则 (trapezoidal rule)．

方法 (6) 可以视为梯形法则的迭代求解．

虽然在实际计算时不推荐使用 Euler 法 (2)，但它可以作为理论研究的模型以及与其他更复杂方法进行比较的工具 (见 [A1], [A2])．

参考文献

[A1] Butcher, J C , The numerical analysis of ordinary differential equations, Runge-Kutta and general linear methods, Wiley, 1987

[A2] Euler, L , Institutionum calculi integralis Vol Primum (1768), Opera Omnia Series Prima, 11, Teubner, 1913

[A3] Henrici, P , Discrete variable methods in ordinary differential equations, Wiley, 1962

[A4] Runge, C , Ueber die numerische Auflosung von Differentialgleichungen, *Math Ann* , **46** (1895), 167 − 178

[A5] Hall, G and Watt, J M , Modern numerical methods for ordinary differential equations, Clarendon Press, 1976

蔡大用 译 李家楷 校

Euler 数 [Euler numbers, Эйлеровы числа]

展开式

$$\frac{1}{\cosh z}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n\frac{z^n}{n!}$$

中的系数E_n Euler 数有如下形式的递推公式·

$$(E+1)^n+(E-1)^n=0,\ E_0=1,$$

这里利用形式的记号$E^n\equiv E_n$．因而，$E_{2n+1}=0$，E_{4n}是正整数及E_{4n+2}是负整数，$n=0,1,\cdot\ ,$ $E_2=-1$，$E_4=5$，$E_6=-61$，$E_8=1385$，及$E_{10}=-50521$．下面的公式给出了 Euler 数与 **Bernoulli 数** (Bernoulli numbers) B_n之间的联系

$$E_{n-1}=\frac{(4B-1)^n-(4B-3)^n}{2n},$$

$$E_{2n}=\frac{4^{2n+1}}{2n+1}\left(B-\frac{1}{4}\right)^{2n+1}.$$

Euler 数被用于级数的求和 例如，

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}=\frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}(2n)!}|E_{2n}|$$

有时也把$|E_{2n}|$称为 Euler 数

这些数是由 L Euler (1755) 引进的．

参考文献

[1] Euler, L , "Institutiones calculi differentialis", in Opera Omnia, Series prima opera mathematica, Vol 10, Teubner, 1980

[2] Градштейн, И С , Рыжик, И М , Таблицы интегралов, сумы, рядов и произведений, 5 изд , М -Л ,

1971(英译本 Gradshtein, I S, Ryzhik, I M, Table of integrals, series and products, Acad Press, 1980).

Е Д Соломенцев 撰

【补注】 符号公式 $(E+1)^n+(E-1)^n=0$ 应该这样来理解：首先展开左边成为方幂 E^m 的和式，然后用 E_m 代替 E^m. 对联系 Bernoulli 数与 Euler 数的公式也同样地理解．从 **Euler 多项式** (Euler polynomials) $E_n(x)$ 得到 Euler 数 $E_n=2^n E_n(1/2)$

参考文献

[A1] Segun, A, Abramowitz, M, Handbook of mathematical functions, Appl Math Ser, 55, Nat Bur Stand, 1970

潘承彪 译 戚鸣皋 校

Euler 多项式 [Euler polynomials, Эйлера многочлены]

形如

$$E_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{E_k}{2^k}\left[x-\frac{1}{2}\right]^{n-k}$$

的多项式，其中 E_k 为 **Euler 数** (Euler numbers). Euler 多项式可按下列公式依次计算

$$E_n(x)+\sum_{s=0}^{n}\begin{bmatrix} h \\ s \end{bmatrix}E_s(x)=2x^n$$

特别是，

$$E_0(x)=1,\quad E_1(x)=x-\frac{1}{2},\quad E_2(x)=x(x-1).$$

Euler 多项式满足微分方程

$$E_n(x+1)+E_n(x)=2x^n,$$

并属于 **Appell 多项式** (Appell polynomials) 类，即满足关系式

$$\frac{d}{dx}E_n(x)=nE_{n-1}(x)$$

Euler 多项式的母函数是

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n(x)}{n!}t^n$$

Euler 多项式具有 Fourier 展开式

$$E_n(x)=\frac{n!}{\pi^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos[(2k+1)\pi x+(n+1)\pi/2]}{(2k+1)^{n+1}},\qquad (*)$$

$$0\leqslant x\leqslant 1,\quad n\geqslant 1$$

当 n 为奇数时，Euler 多项式满足关系式

$$E_n(1-x)=(-1)^n E_n(x),$$

$$E_n(mx)=m^n\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k E_n\left[x+\frac{k}{m}\right],$$

当 n 为偶数时，则满足关系式

$$E_n(mx)=-\frac{2m^n}{n+1}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k B_{n+1}\left[x+\frac{k}{m}\right],$$

其中 B_{n+1} 是 **Bernoulli 多项式** (Bernoulli polynomials) 与 (*) 的右端重合的周期函数是 **Колмогоров 不等式** (Kolmogorov inequality) 和其他一些函数论的极值问题中的极值函数．广义 Euler 函数也已被研究．

参考文献

[1] Euler, L, Opera omnia series prima opera mathematica institutions calculi differentials, Teubner, 1980 (译自拉丁文，俄译本 Эйлер, Л, Дефференциальное исчисление, М.-Л, 1949)

[2] Norlund, N E, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Springer, 1924

Ю Н Субботин 撰

【补注】 此外，Euler 多项式还满足等式

$$E_n(x+h)=$$

$$=E_n(x)+\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}hE_{n-1}(x)+\cdots+\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}h^{n-1}E_1(x)+E_0(x),$$

可用符号简写为

$$E_n(x+h)=\{E(x)+h\}^n.$$

此式右端应读作 首先把右端展开为表达式 $\binom{n}{t}\{E(x)\}^t h^{n-t}$ 之和，然后用 $E_t(x)$ 代替 $\{E(x)\}^t$.

采用同样的符号表示法，对每个多项式 $p(x)$，有

$$p(E(x)+1)+p(E(x))=2p(x)$$

张鸿林 译

Euler 积 [Euler product, Эйлера произведение]

无穷积

$$\prod_p\left[1-\frac{1}{p^s}\right]^{-1},$$

其中 s 是实数，p 遍及一切素数．对于一切 $s>1$, Euler 积绝对收敛．对于复数 $s=\sigma+it$ 的类似乘积，当 $\sigma>1$ 时绝对收敛，并且在这个区域内定义 Riemann ζ 函数

$$\zeta(s)=\prod_p\left[1-\frac{1}{p^s}\right]^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

С А Степанов 撰

【补注】 亦见 **Euler 恒等式** (Euler identity) 和 **ζ 函数** (zeta-function).

张鸿林 译

Euler 级数 [Euler series, Эйлера ряд]

表达式

$$\sum_p\frac{1}{p},$$

其中的和取遍一切素数 p L. Euler (1748) 证明这个级数发散，因而对于素数集合的无限性给出了另一个证

明．Euler级数的部分和满足渐近关系

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}=\ln\ln x+C+O\left[\frac{1}{\ln x}\right],$$

其中 $C=0.261\,497$ C A Степанов 撰

【补注】 上述渐近关系的推导，见[A1]

参考文献

[A1] Hardy, G H and Wright, E M, An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ Press, 1979

张鸿林 译

Euler线 [Euler straight line, Эйлера прямая]

通过一个三角形三高线的交点 H、三中线的交点 S 及其内切圆的圆心 O 的直线 如果Euler线通过三角形的一个顶点，则此三角形或是等腰三角形，或是直角三角形，或是等腰直角三角形 Euler线上的一些线段满足关系式

$$OH\quad SH=1\quad 2$$

L Euler (1765) 首先研究了这一直线

П С Моденов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Coxeter, H S M, Introduction to geometry, Wiley, 1963

张鸿林 译

Euler代换 [Euler substitutions, Эйлера подстановка]

积分

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\;)dx \tag{1}$$

中的变量代换 $x=x(t)$，它们能把这个积分化为有理函数的积分，其中 $R(\cdot,\cdot)$ 为其变元的有理函数．存在三种类型的 Euler代换．

第一Euler代换 (first Euler substitution)：如果 $a>0$，则

$$\sqrt{ax^2+bx+c}\;=\pm x\sqrt{a}\;\pm t$$

第二Euler代换 (second Euler substitution) 如果二次三项式 ax^2+bx+c 的两个根 x_1 和 x_2 是实数，则

$$\sqrt{ax^2+bx+c}\;=\pm t(x-x_1)$$

第三Euler代换 (third Euler substitution) 如果 $c>0$，则

$$\sqrt{ax^2+bx+c}\;=\pm\sqrt{c}\;\pm xt$$

(在每种情况下，等式右端可以选取任何符号组合) 三种Euler代换都可使原积分变量 x 和根式 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 表示为新变量 t 的有理式

前两个Euler代换可以把积分 (1) 化为在任何使 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 只取实值的区间上的有理函数的积分．

Euler代换的几何意义是 二次曲线

$$y^2=ax^2+bx+c \tag{2}$$

具有有理参数表示式，因为如果把通过曲线(2)上一点 (x_0,y_0) 的直线束 $y-y_0=t(x-x_0)$ 的角系数取作参数 t，则这条曲线上点的坐标能够用参数 t 的有理式来表示．在 $a>0$ 的情况下，即当曲线 (2) 是双曲线时，为了得到第一Euler代换，应当把由这条双曲线的渐近线方向确定的无穷远点之一取作点 (x_0,y_0)，当二次三项式 ax^2+bx+c 的两个根 x_1 和 x_2 为实数时，为了得到第二Euler代换，应当把点 $(x_1,0)$ 和 $(x_2,0)$ 之一取作点 (x_0,y_0)，最后，当 $c>0$ 时，为了得到第三Euler代换，应当把曲线(2)和纵坐标轴的交点之一，即点 $(0,\pm\sqrt{c}\;)$ 之一取作点 (x_0,y_0)．

Л Д Кудрявцев 撰 张鸿林 译

Euler求和法 [Euler summation method, Эйлера метод суммирования]

数项级数和函数项级数的求和法之一．级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n \tag{*}$$

按Euler求和法是可和的 ((E,q) 可和的)，其和为 S，如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(q+1)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}q^{n-k}S_k=S,$$

其中 $q>1$，$S_k=\sum_{n=0}^{k}a_n$

对于 $q=1$ 的情况，L Euler首先应用这种方法求缓慢收敛的级数或发散级数之和．后来，K Knopp ([1]) 把这种方法推广到 q 取任意值的情况，所以对于任意的 q，它又称为Euler-Knopp求和法 (Euler-Knopp summation method)．当 $q\geqslant0$ 时，这种求和法是正则的 (见**正则求和法** (regular summation methods)，如果一个级数是 (E,q) 可和的，则它也是 (E,q') 可和的，$q'>q>1$，且具有相同的和 (见**求和法的包含** (inclusion of summation methods))．当 $q=0$ 时，如果级数 (*) 按Euler求和法是可和的，则它是收敛的．如果这个级数是 (E,q) 可和的，则它的项 a_n 满足条件 $a_n=0\;((2q+1)^n)$，$q\geqslant0$ Euler求和法也适用于由幂级数定义的函数在其收敛圆盘外的解析延拓．例如，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ 在中心为 $-q$ 半径为 $q+1$ 的圆盘内是 (E,q) 可和的，其和为 $1/(1-z)$

参考文献

[1] Knopp, K, Ueber das Eulersche Summierung-sverfahren,

Math Z, **15** (1922), 226－253

[2] Knopp, K, Ueber das Eulersche Summierung-sverfahren 11, *Math Z*, **18** (1923), 125－156

[3] Hardy, G H, Divergent series, Clarendon, 1949

[4] Барон, С, Введение в теорию суммируемости рядов, 2 изд, Таллин, 1977

И И Волков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Zeller, K and Beekmann, W, Theorie der Limitierung-sver fahren, Springer, 1970

张鸿林 译

Euler 定理 [Euler theorem, Эйлера теорема]

对于每个凸多面体，其顶点数 V 加上面数 F 减去棱数 E 等于 2

$$V+F-E=2 \qquad (*)$$

对亏格为 0 的多面体，Euler 定理成立，对于亏格为 p 的多面体，关系式

$$V+F-E=2-2p$$

成立 这个定理是 L Euler (1758) 证明的，R Descartes (1620) 已经知道关系式 (*).

А Б Иванов 撰 张鸿林 译

Euler 变换 [Euler transformation, Эйлера преобразование]

1) 级数的 Euler 变换. 如果给定级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n, \qquad (1)$$

则级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}} \qquad (2)$$

称为由级数 (1) 通过 Euler 变换而得到的. 这里

$$\Delta^n a_0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a_k$$

如果级数 (1) 收敛，则级数 (2) 也收敛，且其和与级数 (1) 相同 如果级数 (2) 收敛 (这时级数 (1) 可能发散)，则级数 (1) 称为 Euler 可和的 (Euler summable)

如果级数 (1) 收敛，$a_n>1$，而序列

$$\Delta^k a_n=\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}a_{n+l},\ k=0,1,2,$$

是单调的，且

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant q>\frac{1}{2},$$

则级数 (2) 比级数 (1) 收敛得快 (见**收敛性的类型** (convergence, types of))

Л Д Кудрявцев 撰

2) Euler 变换是积分变换

$$w(z)=\int_C (z-t)^{\alpha}v(t)dt, \qquad (1)$$

其中 C 是复平面 t 上的周线. 这个变换是 L. Euler 提出的 (1769)

Euler 变换可应用于下列形式的线性常微分方程:

$$Lw=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j w^{(j)}\sum_{k=0}^{n-j}\begin{bmatrix}n+\beta-j-1\\ n-k-j\end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot Q_j^{(n-k-j)}(z)=0, \qquad (2)$$

其中 $Q_j(z)$ 是次数 $\leqslant n-j$ 的多项式，β 是常数 任何下列形式的线性方程都能写成形式 (2).

$$P_n(z)w^{(n)}+P_{n-1}(z)w^{(n-1)}+\quad +P_0(z)w=0,$$

其中 $P_j(z)$ 是次数 $\leqslant j$ 的多项式，而 $P_n(z)$ 的次数为 n 方程

$$Mv\equiv\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\,(Q_{n-j}(z)v)^{(j)}=0$$

称为 (2) 的 Euler 变换 如果 $w(z)$ 由 (1) 来定义，$\alpha=\beta+n-1$，则

$$Lw=\int_C (z-t)^{\alpha}M(v)dt,$$

如果由分部积分得到的积分外的项等于零. 由此可知，如果 $M(v)=0$，则 $w(z)$ 是方程 (2) 的解.

如果当 $j>q$，$q<n$ 时 $Q_j(z)\equiv 0$，则通过 Euler 变换可以降低方程 (2) 的阶数. 当 $q=0$ 和 $q=1$ 时，方程 (2) 可被积分 (见 **Pochhammer 方程** (Pochhammer equation)).

参考文献

[1] Ince, E L, Ordinary differential equations, reprint, 1956

[2] Kamke, E, Differentialgleichungen Losungsmethoden und Losungen, I Gewohnliche Differentialgleichungen, Teubner, 1943 (中译本 E. 卡姆克，常微分方程手册，科学出版社，1980)

М В Федорюк 撰

3) 第一类 Euler 变换 (Euler transformation of the first kind) 是积分变换

$$I^{\mu}f(x)=\mathfrak{R}_{\mu}\{f(t),x\}=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^x f(t)(x-t)^{\mu-1}dt,$$

其中 μ 和 x 是复变量，而积分路径是线段 $t=x\tau$，$0<\tau<1$.

第一类 Euler 变换也称为 μ 阶分数阶 Riemann-Liouville 积分 (Riemann-Liouville integral). (Riemann-Liouville 积分有时指的是积分

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_x^a f(t)\ (t-x)^{\mu-1}dt=\mathfrak{R}_{\mu}\{f(a-t),a-x\},$$

其中 a 是一个复数)

如果$f(x)$ 和 $g(x)$ 满足某些条件，则有

$$I^0 f(x)=f(x),$$

$$I^\mu[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha I^\mu f(x)+\beta I^\mu g(x),$$

其中 α 和 β 是复常数，而

$$I^\mu[I^\nu f(x)]=I^{\mu+\nu}f(x),$$

$$I^n f(x)=\int_0^x dt_1 \quad \int_0^{t_{n-2}} dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n,$$

$$I^{-n}f(x)=\frac{d^n}{dx^n}f(x),\ n=1,2,$$

第二类 Euler 变换(Euler transformation of the second kind)是积分变换

$$K^\mu f(x)=\mathfrak{M}_\mu\{f(t),x\}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_x^\infty f(t)(t-x)^{\mu-1}dt,$$

其中 μ 和 x 是复变量，而积分路径是射线 $t=x\tau$, $\tau>1$, 或 $t=x+\tau$, $\tau>0$ 在某些条件下，有

$$K^0 f(x)=f(x),$$

$$K^\mu[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha K^\mu f(x)+\beta K^\mu(x),$$

其中 α 和 β 是复常数，而

$$K^\mu[K^\nu f(x)]=K^{\mu+\nu}f(x),$$

$$K^n f(x)=\int_x^\infty dt_1 \quad \int_{t_{n-2}}^\infty dt_{n-1}\int_{t_{n-1}}^\infty f(t_n)dt_n,$$

$$K^{-n}f(x)=\frac{d^n}{dx^n}f(x),\ n=1,2,$$

第二类 Euler 变换有时称为 μ 阶分数阶 Weyl **积分**(Weyl integral)

对于广义函数也引入了上述变换.

参考文献

[1] Брычков, Ю А , Прудников, А П , Интегральные преобразования обобщенных функций, М , 1977 (英译本 Brychkov, Yu A and Prudnikov, A P , Integral transformations of generalized functions, Gordon & Breach, 1988)

Ю А Брычков, А П Прудников 撰

【补注】 亦见**分数阶积分和微分**(fractional integration and differentiation)

参考文献

[A1] Erdelyi, A , et al , Tables of integral transformations, McGraw-Hill, 1954, Chapt 13

[A2] McBride, A C , Fractional calculus and integral transforms of generalized functions, Pitman, 1979

张鸿林 译

偶函数 [even function , четная функция]

一个函数 $f(x)$, 当自变量 x 变号时它不变号，即满足条件 $f(-x)=f(x)$ 的函数. 偶函数的图形关于 y 轴是对称的

【补注】 一个函数$f(x)$, 如果当自变量 x 变号时它也变号，即满足条件 $f(x)=-f(-x)$, 则称为**奇函数**(odd function)

张鸿林 译

偶数 [even number, четное число]

能被2整除(无余数)的数.

【补注】 不能被2整除的数(即被2除余数为1的数)称为**奇数**(odd number)

张鸿林 译

Everett 插值公式 [Everett interpolation formula, Эверетта интерполяционная формула]

给出插值多项式的一种方法，该插值多项式是从关于结点

$$x_0, x_0+h, x_0-h, \quad , x_0+nh, x_0-nh, x_0+(n+1)h$$

在 $x=x_0+th$ 处向前插值的 **Gauss 插值公式** (Gauss interpolation formula), 即

$$G_{2n+1}(x)=G_{2n+1}(x_0+th)=f_0+tf_{1/2}^1+\frac{t(t-1)}{2!}f_0^2+\quad+$$

$$+\frac{t(t^2-1)\quad[t^2-(n-1)^2](t^2-n^2)}{(2n+1)!}f_{1/2}^{2n+1}$$

得到的，且不带奇数阶的有限差分，这些差分通过关系式

$$f_{1/2}^{2k+1}=f_1^{2k}-f_0^{2k}$$

而消去．把同类项相加就产生了 Everett 插值公式

$$E_{2n+1}(x_0+th)=S_0(u)+S_1(t), \tag{1}$$

其中 $u=1-t$, 而且

$$S_q(t)=f_q t+f_q^2\frac{t(t^2-1)}{3!}+\quad+f_q^{2n}\frac{t(t^2-1)\quad(t^2-n^2)}{(2n+1)!} \tag{2}$$

与其他形式的插值多项式相比，公式 (1) 在加密函数表时大约省去一半所需的工作量，例如，当给定在 x_0+kh 处的一个函数表，用它来产生同一个函数在点 x_0+kh' 处的函数表时，其中 $h'=h/l$, l 是整数，对于 $0<t<1$, $f(x_0-th)$ 诸值可由公式

$$f(x_0-th)=S_0(u)+S_{-1}(t)$$

计算，$S_0(u)$ 则用于求 $f(x_0\pm th)$ 两组值．

手工计算时，对于 $n=2$ 的情形，(2) 中 f_q^4 的系数建议用

$$-k\,\frac{t(t^2-1)}{3!}$$

去近似，并计算

$$\overline{S}_q(t)=f_q t+[f_q^2-\frac{k}{20}f_q^4]\,\frac{t(t^2-1)}{3!}$$

代替 $S_q(t)$．参数 k 可由下面条件选择，例如，使得

$$\sup|E_5(x_0+th)-\overline{E}_5(x_0+th)|$$

的主要部分取极小值，其中

$$\overline{E}_5(x_0+th)=\overline{S}_0(u)+\overline{S}_1(t),\quad u=1-t\ .$$

在这种情况下，$k=3\,6785$．

参考文献

[1] Березин, И С, Жидков, Н П, Методы вычислений, 3 изд, т 1, М, 1966 (英译本 Berezin, I S and Zhidkov, N P, Computing methods, Pergamon, 1973).

[2] Бахвалов, Н С, Численные методы, 2 изд, М, 1975 (英译本 Bakhvalov, N S, Numerical methods analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977)

М К Самарин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Davis, P J, Interpolation and approximation, Dover, reprint, 1975

[A2] Thomson, A J, Table of the coefficients of Everett's central difference interpolation formula, Cambridge Univ, Press, 1965

蔡大用 译

处处稠密集 A [**everywhere-dense set**, **всюду плотное множество**]，拓扑空间 X 中的

符合性质 $[A]=X$ 的集合 A，其中 $[A]$ 表示 A 的闭包．换句话说，X 中任何非空开集都至少含有 A 的一点．也使用"稠密集"(dense set)一词．

А А Мальцев 撰 胡师度、白苏华 译

渐屈线（平面曲线的）[**evolute (of a plane curve)**; **эволюта плоской кривой**]

已知曲线 γ 的曲率中心的集合 $\overline{\gamma}$．若 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$(其中 s 是 γ 的弧长参数)是 γ 的方程，则它的渐屈线的方程有如下形状

$$\tilde{\mathbf{r}}=\mathbf{r}+\frac{1}{k}\nu,$$

其中 k 是曲率而 ν 是 γ 的单位法向量．下图显示了三种典型情形下渐屈线的构造

a)若沿整条曲线 k' 有固定符号且 k 不为零，

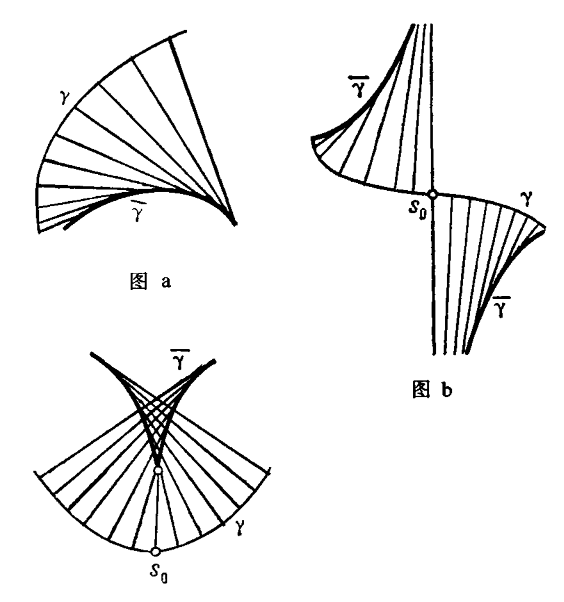


图 a

图 b

图 c

b)若沿整条曲线 k' 有固定符号且 k 在 $s=s_0$ 处为零；

c)若对于 $s<s_0$，$k'>0$；对于 $s>s_0$，$k'<0$，$k'(s_0)=0$，并且 k 不为零（渐屈线上对应于 $s=s_0$ 的点是尖点）

与 γ 的曲线段 $s_1\leqslant s\leqslant s_2$ 对应的渐屈线的弧长是

$$\tilde{s}(s_1,s_2)=\left|\frac{1}{k(s_2)}-\frac{1}{k(s_1)}\right|$$

渐屈线是 γ 的法线族的包络 曲线 γ 称为它的渐屈线的渐伸线（见**渐伸线（平面曲线的）**(evolvent (of a plane curve)))

Д Д Соколов 撰

【补注】 若 γ' 是 γ 的渐屈线，则 γ 是 γ' 的渐伸线，见**渐伸线（平面曲线的）**(evolvent (of a plane curve))．

参考文献

[A1] Muller, H-R, Kinematik, de Gruyter, 1963

[A2] Berger, M and Gostiaux, B, Differential geometry, Springer, 1988, p 305

[A3] Coolidge, J, Algebraic plane curves, Dover, reprint, 1959, p 195

[A4] Berger, M, Geometry, 1, Springer, 1987, 253－254

[A5] Guggenheimer, H, Differential geometry, McGraw-Hill, 1963, p 25, 60.

沈一兵 译

渐屈面 [**evolute (surface)**, **эволюта**]，焦曲面(focal surface)

沿已知曲面 F 的一族曲率线，由 F 的法线作成的可展曲面的尖棱构成的集合．渐屈面由两叶 F_u 和 F_v 组成，其中每叶是对应的曲率线族 u 或 v 的法曲率中心集合．曲面本身称为它的渐屈面的渐伸面(evolvent)(渐伸曲面(evolvent surface))．例如，环面的渐屈面

是它的旋转轴和由它的转动的圆的中心描出的圆周

F_u 和 F_v 的径向量 R_u 和 R_v 分别是

$$R_u = r+\rho_u n, \quad R_v = r+\rho_v n,$$

其中 ρ_u 和 ρ_v 是曲率线 u 和 v 的法曲率半径，r 是曲面 F 的径向量，n 是 F 的单位法向量 .

平行于已知曲面 F 的切平面且通过曲率线的法曲率中心连线的中点的平面的包络称为平均渐屈面 (mean evolute) (平均包络曲面 (mean enveloping surface)) Φ 它的径向量是 $R_m = r+(H/K)n$，其中 H 和 K 分别是 F 的平均曲率和 Gauss 曲率，因此，F 和 Φ 是平行曲面. 此外，若 Δ' 是关于 F 的第三基本形式的 Laplace 算子，$w=(rn)$，则 $\Delta' w=-2\cdot(w+H/K)$ 若 $w=-H/K$，即若平均渐屈面蜕化为平面，则 F 称为 Bonnet 曲面 (Bonnet surface)，若 $w+H/K=cw$，则 F 与 Φ 相似，并称为 Goursat 曲面 (Goursat surface) 特别，当 $c=1$ 时便得**极小曲面** (minimal surface).

И Х Сабитов 撰

【补注】 曲面的渐屈面的两叶可作为端点映射的临界值点集来得到，端点映射定义在曲面的**法丛** (normal bundle) 上，并且对于 r 处的法向量 v，在空间中指定映射值为 $r+v$. 能容易地推广这概念来定义较高维和较高余维的焦点集或渐屈子流形 .

参考文献

[A1] Darboux, G , Leçons sur la theorie générale des surfaces et ses applications géométriques du calcul infinitesimal, 1, Gauthier-Villars, 1887

[A2] Berger, M and Gostiaux, B , Differential geometry manifolds, curves and surfaces, Springer, 1988

沈一兵 译

发展方程 [evolution equation, эволюционное уравнение]

能被理解为系统按时间演化 (发展) 的微分法则的方程 这个术语没有一个精确的定义，而且它的含义不仅仅依赖方程本身，还依赖问题所使用的表达式 发展方程的特征是可能从规定的初始条件出发构造解，该初始条件可理解为该系统初始状态的描述 发展方程类首先包括常微分方程以及形如

$$u'=f(t,u), \quad u''=f(t,u,u') \qquad (*)$$

的方程组，其中，$u(t)$ 能被自然地认为是 Cauchy 问题的解，这些方程描述具有有限多个自由度的系统的发展 对后效的考虑产生了积分微分 Volterra 方程或具有延迟变量的微分方程 . 描述发生在连续介质中的过程归结为双曲型、抛物型和相关型偏微分方程，除 Cauchy 问题外，还可以提出混合 (初始边值) 问题 . 如果将这种方程的解 $u(x,t)$ 看成某个依赖参数 t 的 x 的函数空间中的元素，那么就得到形如 (*) 的抽象微分方程 所有这些方程以及与它们对应的差分方程，通常属于发展方程类 .

模拟真实过程引出发展方程对普通问题的表述 (举例来说，解的稳定性问题)，并且有时对它们的研究提供方法 (例如，建立守恒定律或总能量消耗的数学模拟的技术) 方程的发展特性有助于获得它的数值解，因为值 $u(t_k)$ $(t_0<t_1< \quad)$ 对充分小的步长 Δt_k 能从初始条件开始，用逐步重建的方式得到 . 因此，在数值计算中有关介质定常状态的许多问题成为发展问题当 $t\to\infty$ 时的极限情形 . (例如，具有给定边界条件的 **Laplace 方程** (Laplace equation) $\Delta u=0$ 的解是满足同样边界条件和任意初始条件的方程 $\partial u/\partial t=\Delta u$ 解的极限；在这种情况下，人们论及发展方程解的稳定化)

А Д Мышкис 撰

【补注】

参考文献

[A1] Walker, J A , Dynamical systems and evolution equations, Plenum, 1980

周芝英 译 叶彦谦 校

发展算子 [evolution operator, эволюционный оператор]

两个变量 t 及 s 的线性算子函数 $U(t, s)$，满足性质 1) $U(s,s)=I$, 2) $U(t,\tau)\bigcup(\tau,s)=U(t,s)$, 以及 3) $U(t,\tau)=U^{-1}(\tau,t)$

М И Войцеховский 撰

【补注】 一般地，一个发展算子可以定义为满足 1) 及 2) 的 (不必为线性的) 算子函数 $U(t, s)$ 如果 t, s 不受限制，3) 自动地满足 . 如果 t, s 属于一个无穷维空间，$t\geqslant s$ 是一个自然的限制，而且算子的逆根本不必存在

参考文献

[A1] Pazy, A , Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer, Chapt 5

王声望 译 郑维行 校

展开面 [evolvent, развертка]

1) 展开面是与可展曲面上给定区域等距对应的平面区域 例如，锥面沿一条母线切开的展开面是平面扇形 展开面的近似构造可利用画法几何图解地得到 .

2) 多面体表面的展开面是一组多边形 (展开面的面) 以及粘合它们的边的规则，它定义一个**多面体度量** (polyhedral metric) 等距于多面体表面的内部几何 . 展开面的面未必一定与曲面的实际面重合 当位于曲面上时它们可以折迭起来

В А Залгаллер 撰

【补注】

参考文献

[A1] Blaschke, W and Leichtweiss, K , Elementare Differentialgeometrie, Springer, 1973

沈一兵 译

渐伸线（平面曲线的）[evolvent (of a plane curve)或 involute,эвольвента（плоской кривой）]

指定给平面曲线γ的曲线$\bar{\gamma}$，使得γ是$\bar{\gamma}$的**渐屈线**(evolute)．若$\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$(其中s是γ的弧长参数)是γ的方程，则它的渐伸线方程有下列形状

$$\bar{\mathbf{r}}=\mathbf{r}(s)+(c-s)\tau(s),$$

其中c是任意常数和τ是γ的单位切向量．下图显示了在两种典型情形下渐伸线的构造 a)对于任何$s<c$,γ的曲率$k(s)$不为零（渐伸线是正则曲线），b)仅当$s=s_1$和$k'(s_1)\neq 0$时$k(s)$才为零（渐伸线上对应于$s=s_1$的点是第二类尖点）

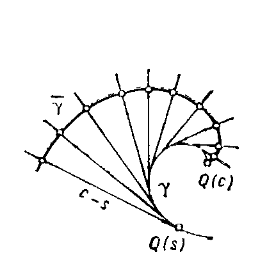


图 a

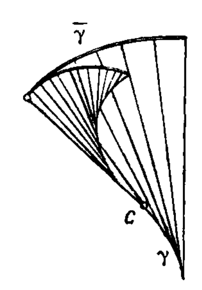


图 b

关于曲面的渐开面，见**渐屈面**(evolute (surface))

Д Д Соколов 撰

【补注】 渐伸线在传动机构中起作用．

参考文献也可见**渐屈线**(evolute)．

参考文献

[A1] Strubecker, K , Dıfferentıal geometry, 1, de Gruyter, 1964

[A2] Berger, M and Gostıaux, B , Dıfferentıal geometry, Sprınger, 1988, p 305

[A3] Coolıdge, J , A treatıse of algebraıc plane curves, Dover, reprınt, 1959, p 195．

[A4] Guggenheımer, H , Dıfferentıal geometry, McGraw-Hıll, 1963, p 25, 60

[A5] Berger, M , Geometry, 1, Sprınger, 1987, 253－254 (中译本 M 贝尔热，几何，第一卷，科学出版社，1987)

沈一兵 译

正合自同态[exact endomorphism，точный эндоморфизм], Lebesgue空间(X,μ)的

(X,μ)的一个自同态（见**度量同构**(metrıc ısomorphısm)），使得仅有的mod 0**可测分解**(measurable decomposıtıon)，按mod 0粗于一切$T^{-n}\varepsilon$时(这里ε是分解为点的分解)是以X每个元素作仅有元的平凡分解．一种等价定义是 没有在T下不变的可测分解(即满足$T^{-1}\xi=\xi \bmod 0$, 不变一词以前称全不变(totally ınvarıant)) 这样的自同态例子有单边Bernoullı位移与**扩张映射**(expandıng mappıng)

正合自同态有强遍历性质，这与K系统情形相类似(两者是相关的 有一个将自同构对应于某个自同态的构造——它的自然扩张(natural extensıon)，对正合自同态来说，后者是一个K自同构)．见**K系统**(K-system)

参考文献

[1] Рохлин, В А , Точный эндоморфизм пространства лебега 《Изв АН СССР Сер матем》, **25** (1961), 4, 499－530

[2] Корнфельд, И П , Синай, Я Г , Фомин, С В , Эргодическая теория, М , 1980(英译本 Cornfeld, I P , Sınaı, Ya G and Fomın, S V , Ergodıc theory, Sprınger, 1982)

Д В Аносов 撰

【补注】 人们也用（可测）分划(measurable partıtıon)来代替（可测）分解

通常的定义如下．**Lebesgue空间**(Lebesgue space)(X,μ)的**自同态**(endomorphısm)T称为正合的，如果$\bigcap_{n=0}^{\infty}T^{-n}\mathscr{B}=\mathscr{N}$，这里$\mathscr{B}$为$(X,\mu)$中给定的$\sigma$代数而$\mathscr{N}$为测度0或1的子集类的$\sigma$代数．关于某个测度扩张映射为正合的这一结果的证明，可见，例如[A1]，第Ⅲ 1节

参考文献

[A1] Mañé, R , Ergodıc theory and dıfferentıable dynamıcs, Sprınger, 1987

郑维行 译

正合函子[exact functor，точный функтор]

一个函子，它与有限极限和上极限都可交换．更准确地说，在Abel范畴$\mathfrak{A}$与$\mathfrak{B}$之间的一个加性函子称为正合的(exact)，如果它将$\mathfrak{A}$内的一个短正合列

$$0\to A\to B\to C\to 0$$

映射成$\mathfrak{B}$内的一个短正合列

$$0\to F(A)\to F(B)\to F(C)\to 0 .$$

如果$\mathfrak{A}$与$\mathfrak{B}$为非Abel范畴，而

$$A\overset{\varepsilon_1}{\underset{\varepsilon_2}{\rightrightarrows}}B\overset{\nu}{\to}C$$

是$\mathfrak{A}$内的一个交换图式，其中$(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$是$\nu$的核对，而$\nu$是核对$(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$的余核，那么，函子$F$ $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$有时称为正合的，如果它把上述的$\mathfrak{A}$内交换图式映射成$\mathfrak{B}$内的一个具有相同性质的交换图式

М Ш Цаленко 撰

【补注】 在范畴的一般理论中，一个函子通常称为左正合的(left exact)，如果它保持（即可交换于）所有的有限极限，称为右正合的(rıght exact)，如果它保持所有的有限上极限，称为正合的(exact)，如果它既是左又是右正合的 在Abel范畴之间的一个加性函子自动地保持有限积与余积，所以这样函子的正合性问题化

为是否保持核与余核的问题，或者等价地，是否保持正合列的问题——这就是起名的原因 对于非 Abel 范畴，对于名词“正合”有好几种矛盾的用法，包括上述本条目的最后一句话，但是本补注的第一句话是最广泛地被了解的

在俄文文献中，在名词“正合函子”与“忠实函子”之间有某些混淆．亦见**忠实函子**(faithful functor)以及在那里给出的参考文献． 周伯埙 译

正合序列 [**exact sequence, точная последовательность**]

Abel 范畴 $\mathfrak{A}$ 的对象与态射 α_j 的序列

$$\longrightarrow A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_{n+2} \longrightarrow$$

其中

$$\operatorname{Ker}\alpha_{n+1} = \operatorname{Im}\alpha_n$$

正合序列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 称为短的 (short)，它是由一个对象 B，B 的一个子对象 A，以及相应的商对象 C 所组成的． В Е Говоров 撰

【补注】 正合序列常出现也常用于（上）同调的研究 例如，有一对对象 (X, A) 的长同调正合序列 (long homology exact sequence)

$$\to H_r(A) \to H_r(X) \to H_r(X, A) \to H_{r-1}(A) \to \quad ,$$

这里 A 是 X 的一个子对象，与长上同调正合序列 (long cohomology exact sequence)

$$\to H^{r-1}(A) \to H^r(x, A) \to H^r(x) \to H^r(x-A) \to$$

类似的长正合序列也出现在种种同调与上同调的理论中 见**同调论** (homology theory)，**上同调** (cohomology)，**上同调序列** (cohomology sequence)，**同调序列** (homology sequence)，以及关于各种对象的（上）同调的一些论述，如**代数的上同调** (cohomology of algebras)，**群的上同调** (cohomology of groups)，**Lie 代数的上同调** (cohomology of Lie algebras)

形如 $0 \to A_1 \to A \to A_2$ 的正合序列有时称为左短正合序列 (left short exact sequence)，而形如 $A_1 \to A \to A_2 \to 0$ 的正合序列称为右短正合序列 (right short exact sequence) 在一个 Abel 范畴中，态射 α $X \to Y$ 的正合序列 (exact sequence of a morphism) 是下列的正合序列

$$0 \to \operatorname{Ker}\alpha \to X \to Y \to \operatorname{Coker}\alpha \to 0$$

周伯埙 译

优环 [**excellent ring, превосходное кольцо**]

满足下述三条公理的交换 **Noether 环** (Noetherian ring) 众所周知，**几何环** (geometric ring) 具有一般 Noether 环所没有的一系列好的性质．优环的概念是几何环的最重要的性质的公理化的概括

优环 A 的公理

A1 环 A 是泛链环．(环 A 称为链环 (chain ring)，如果对于它的任意两个素理想 $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$，所有素理想饱合链 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \quad \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}'$ 的长度都相等．环 A 称为泛链环 (universal chain ring)，如果任一多项式环 $A[T_1, \quad, T_k]$ 都是链环)

A2 A 的形式纤维是几何正则的，即对任一素理想 $\mathfrak{p} \subset A$ 以及由 A 到域 K 的任一同态，环 $\hat{A}_\mathfrak{p} \otimes_A K$ 都是正则的．此处 $\hat{A}_\mathfrak{p}$ 是局部环 $A_\mathfrak{p}$ 的完全化．

A3 对任一整的有限 A 代数 B，存在非零元素 $b \in B$，使得分式环 $B[b^{-1}]$ 是正则的．

优环具有下述性质

1) 对于优环 A，概型 Spec$A$ 的正则（正规）点的集合是开集

2) 如果优局部环 A 是既约的（正规的或等维的），则它的完全化 $\hat{A}$ 也是这样的环

3) 优环 A 在 A 的分式域的有限扩张中的整闭包是有限的 A 代数．

4) 如果 A 是优环，则任一有限型的 A 代数也是优环．

优环的两个重要例子是完全局部环（或解析环）和分式域的特征为零的 Dedekind 环．所以优环是一大类环，特别地，包含着域及整数环 $\mathbf{Z}$ 上的有限型代数 一个环 A 的优性与概形 Spec A 的奇点的分解的可能性密切相关（见 [1] 和 [2]）．

参考文献

[1] Grothendieck, A and Dieudonne, J, Elements de géometrie algébrique, *Publ Math IHES*, 2 (1965)

[2] Hironaka, H, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I, *Ann of Math*, 79 (1964), 1, 109－203

В И Данилов 撰

【补注】 **链环** (chain ring) 也称为悬链环 (catenarian ring) 一个素理想序列 $\mathfrak{p}_0 \subset \quad \subset \mathfrak{p}_n$ 称为饱和的 (saturated)，如果不存在素理想 $\mathfrak{q}$ 及整数 $i \in \{0, \quad, n-1\}$ 使得 $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}_{i+1}$，这里的两个包含关系都是严格的．优环是泛日本环 (universal Japanese ring)．一个整环 A 是 N_2，如果对于 A 的分式域 K 的任一有限扩张 L/K，A 在 L 中的整闭包 A_L 是有限 A 模，一个环 B 称为泛日本环，如果它是 Noether 环，且对 B 的任一素理想 $\mathfrak{p}$，$B/\mathfrak{p}$ 是 N_2．泛日本环的其他专用名称有 永田环 (Nagata ring)，伪几何环 (pseudo-geometric ring) 见**几何环** (geometric ring) 赵春来 译 冯绪宁 校

例外解析集 [**exceptional analytic set, исключительное**

аналитическое множество]

复空间 X 中的一个解析集 A，且存在一个解析映射 $f\cdot X\to Y$ 使得 $f(A)=y$ 是复空间 Y 中的一个点，同时 $f\ X\backslash A\to Y\backslash\{y\}$ 是一个解析同构．这个修正 f 称为 A 到 y 的收缩（contraction）

刻画例外集的问题是由代数几何学中关于**双有理变换**（birational transformation），（亦见**例外子簇**（exceptional subvariety））的研究中提出来的．在解析几何学中已找到例外集的十分一般的判别准则．更精确地说，设 A 是复空间 X 中的正维数的连通紧解析集．集合 A 是例外集，当且仅当在 X 中有它的一个相对紧伪凸邻域，A 是其中的极大紧解析子集．

设 $\mathfrak{M}$ 是理想的凝聚层，它的零点集与 A 重合，N 是对偶于 $\mathfrak{M}$ 的 X 上的线性空间在 A 上的限制（见**解析向量丛**（vector bundle, analytic））．为了 A 是例外的，只须 N 是弱负的（见**正向量丛**（positive vector bundle））．如果 X 是一个流形而 A 是它的子流形，则 N 就是 A 上的法丛　有时丛 N 是弱负也是必要的（例如 A 是余维数为 1 的同构于 $P^k(\mathbf{C})$ 的子流形，或 X 是一个二维流形）　特别地，复曲面 X 上的曲线 A 是例外的，当且仅当它的不可约分支的相交矩阵 (A_iA_j) 是负定的（见[1]，[2]）．一个例外解析集 $A\subset X$ 的邻域的结构完全决定于环空间 $(A,\ \mathcal{O}_X/\mathfrak{M}^\mu|_A)$，此处 μ 充分大．例外解析集具有下面的传递性条件·如果 $B\subset A$ 是 X 内的一个紧解析空间，并且在 A 是例外的，而 A 在 X 是例外的，则 B 在 X 是例外的（[6]）．例外解析集的概念有相应的推广　粗略来讲，考虑一族解析集在复空间的一解析族内的同时收缩．在这个情况下，一个类似于上面提到的 Grauert 判别准则的结果是成立的（见[2]）．

另一个例外解析集概念的自然推广如下．设 A 是 X 的一个子空间且给定一个真满全纯映射 $\varphi\ .\ A\to B$　X 沿着 φ 的收缩（contraction）是一个真满全纯映射 $f\ X\to Y$，这里 Y 包含 B 作为它的子空间，使得 $f|_A=\varphi$，且 f 诱导了一个同构 $X\backslash A\to Y\backslash B$　如果 X 是一个维数 $\geqslant 3$ 的流形，A 是其中余维为 1 的紧子流形，且 φ 是一个以 $P^r(\mathbf{C})$ $(r>1)$ 为纤维的纤维映射，则 X 可以沿着 φ 收缩到一个流形 Y 上的充分必要条件是· A 上的法丛 N（在这个情况下 N 和相应于除子 A 的丛重合）必须在每个纤维 $\varphi^{-1}(b)\cong P^r(\mathbf{C})$ 上诱导一个丛 $-L$，这里 L 是由 $P^r(\mathbf{C})$ 内的超平面决定的．相应的收缩是中心在 B 的单项变换的逆（见[3]）　另一方面，对每个修正 $f\ X\to Y$，这里 Y 是一个流形，$B=f(A)$ 是它的一个子流形，$\dim B<\dim A$，且 $f\ X\backslash A\to Y\backslash B$ 是一个同构，映射 $f|_A$ 是一个以 $P^r(\mathbf{C})$ 为纤维的纤维映射．对沿着 φ 的可收缩性，以及对更一般情况的判别准则已经知道（见[4]）　如果 A 是一个 X 内的例外集且是它的全纯收缩核（例如 A 是一个弱负向量丛的零截面），则 X 有沿着任意 φ 的收缩．此外，如果收缩 $X\to A$ 的纤维的维数至少等于 $\dim A+2$ 时，人们可以从通过收缩得到的 Y 来完全恢复原来的空间（[5]）．

参考文献

[1] Grauert, H , Ueber Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, *Math Ann* , **146** (1962), 331 – 368

[2] Ancona, V , Un teorema di contrattibilità relativa, *Boll Unione Mat Ital* , **9** (1974), 3, 785 – 790

[3] Fujiki, A and Nakano, S , Supplement to "on the inverse of monoidal transformation", *Publ Res Inst Math Sci* , **7** (1972), 3, 637 – 644

[4] Fujiki, A , On the blowing down of analytic spaces, *Publ Res Inst Math Sci* , **10**,(1975), 2, 473 – 507

[5] Takijima, K and Suzuki, T , On the trivial extension of equivalence relations on analytic spaces, *Trans Amer Math Soc* , **219** (1976), 369 – 377

[6] Krasnov, V A , Transitivity of exceptional subspaces, *Math USSR -Izv* , **9** (1975), 1, 13 – 20

А Л Онищик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hartshorne, R , Algebraic geometry, Springer, 1977

陈志华 译

例外子簇 [**exceptional subvariety**, **исключительное подмногообразие**]

代数闭域上**代数簇**（algebraic variety）X 的闭子簇 Y，满足　存在真**双有理态射**（birational morphism）$f\ X\to X_1$，Y 在 f 下的象 Y_1 是维数较小的子簇，并且 $f.X\backslash Y\to X_1\backslash f(Y)$ 是同构（亦见**真态射**（proper morphism））　态射 f 称为 Y 到 $Y_1=f(Y)$ 上的收缩（contraction）　这个概念是代数空间**修正**（modification）的特殊情形（[3]）　如果 X, X_1, Y, Y_1 是光滑不可约簇，则 Y 称为第一类例外子簇（exceptional subvariety of the first kind）　如果 Y 在 X 中的余维数是 1，则称 Y 是例外除子（exceptional divisor）．代数曲面上的例外除子称为例外曲线（exceptional curve）

例外子簇的概念能自然地推广到概形、代数空间和复解析空间上　对应的态射称为收缩（contraction），也能自然地推广第一类例外子簇的概念　复解析空间中的例外子簇亦称为**例外解析集**（exceptional analytic set）．

刻画环绕簇内的例外子簇是双有理几何学的基本问题之一．历史上，第一个这样的刻画的例子是 Enriques - Castelnuovo 准则（Enriques - Castelnuovo criterion）　光滑曲面 X 上不可约完全曲线 Y 是第一类例外子簇，当且仅当 Y 同构于射影直线 P^1，且 Y 在 X 上的

自交数 $(Y \cdot Y)$ 等于 -1 (见[1], [9]) 这个准则能推广到二维正则概形的一维子概形上 (见[6], [10]). 如果 $Y=\sum_{i=1}^{m} Y_i$ 是光滑射影曲面 X 上具有不可约分支 Y_i 的任意连通完全曲线, 则 Y 是例外除子的必要 (但不充分) 条件是矩阵 $(Y_i \cdot Y_j)$ 是负定的 (见[2]) 在光滑复曲面上的连通复曲线, 或者二维光滑代数空间上的连通完全曲线的情形, 刻画例外子簇的类似条件是充分必要的

收缩到点的 Enriques - Castelnuovo 准则的高维推广具有如下形式 ([5]) 光滑代数簇 X 的不可约完全子簇 Y 是收缩到点的第一类例外子簇, 如果下面两个条件成立 1) $Y \simeq P^r$, 这里 $r=\dim X-1$, 及 2) Y 在 X 中的法丛 $N_{Y/X}$ 由除子 $-H$ 定义, 这里 H 是 P^r 中的超平面 在这种情况下, X_1 是射影的 . 对应的收缩 f 是中心在点 $f(Y)$ 的**单项变换** (monoidal transformation) (见[7], [8]) .

在解析的情况下, 已经发现了复流形 X 的连通紧复子流形 Y 是第一类例外子簇的充分必要条件, 对应的收缩 f 一定是中心在 $Y_1=f(Y)$ 的单项变换 (见**例外解析集** (exceptional analytic set)) 对于代数簇, 相应的条件是必要的, 但不总是充分的

设 $f\ X \to X_1$ 是射影代数簇 X 中的第一类例外子簇 Y 到代数簇 X_1 中的零维子簇 Y_1 上的收缩, 则 X_1 不必是射影的 . 而且, 如果 X 和 Y 是定义在复数域上的代数簇, 则在第一类例外子簇 Y 的解析收缩 f 下, 簇 X_1 一般地在任何点处都不必是代数的 .

考虑例外子簇 (不必是第一类的) 收缩到点的问题, 光滑代数空间 X 的完全连通代数子空间 Y 是例外的必要条件是法丛 $N_{Y/X}$ 是负的 (对于 $\dim X>2$, 这个条件不是充分的) . 对于复空间, 类似的结论也成立

在代数空间的情况下, 例外性的最一般的准则是 在 Noether 代数空间的范畴中, X 的子空间 Y 是例外子簇, 当且仅当在形式代数空间的范畴中, 形式完全化 $\hat{Y}$ 在 $\hat{X}$ 中是例外子簇 ([3]) 换句话说, 代数子空间能收缩, 当且仅当与之对应的形式完全化也能收缩

参考文献

[1] Алгебраические поверхности, М , 1965, 《Тр Метем ин - та АН СССР》 (英译本 Algebraic surfaces, *Proc Steklov Inst Math* , **75** (1967))

[2] Artin, M , Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces, *Amer J Math* , **84** (1962) , 485 - 496

[3] Artin, M , Algebraization of formal moduli II Existence of modifications, *Ann of Math* , **91** (1970) , 1, 88 - 135

[4] Grauert, H , Ueber Modificationen und exceptionelle analytische Mengen, *Math Ann* , **146** (1962) , 331 - 368

[5] Kodaira, K , On Kahler varieties of restricted type (an intrinsic characterization of algebraic varieties), *Ann of Math* , **60** (1954) , 28 - 48

[6] Lichtenbaum, S , Curves over discrete valuation rings, *Amer J Math* , **90** (1968) , 2, 380 - 405

[7] Nakano, S , On the inverse of monodial transformations, *Publ Res Inst Math Sci* , **6** (1971) , 3, 483 - 502

[8] Fujiki, A and Nakano, S , Supplement to 'On the inverse of monoidal transformations' , *Publ Res Inst Math Sci* , **7** (1972) , 637 - 644

[9] Шафаревич, И Р , Основы алгебраической геометрии, М , 1972 (英译本 Shafarevich, I R , Basic algebraic geometry, Springer, 1977)

[10] Shafarevich, I R , Lectures on minimal models and birational transformations of two - dimensional schemes, Tata Inst Fundam Res , Bombay, 1966

В А Исковских 撰 蔡金星 译

例外值 [exceptional value, исключительное значение]

值分布论中的一个概念 设 $f(z)$ 是全 z 平面上的亚纯函数, $n(r,a,f)$ 是它在圆盘 $|z|\leqslant r$ 上 a 点的数目 (按其重数计算) . 根据 R Nevanlinna 第一基本定理 (见[1]), 当 $r\to\infty$ 时, 有

$$N(r,a,f)+m(r,a,f)=T(r,f)+O(1),$$

其中 $T(r,f)$ 是特征函数, 它不依赖于 a , $N(r,a,f)$ 是计数函数 ($n(r,a,f)$ 的对数平均), $m(r,a,f)>0$ 是表示 f 的值在 $|z|=r$ 上向 a 平均追近的函数 (见**值分布论** (value-distribution theory)) 对绝大部分 a 值, 当 $r\to\infty$ 时量 $N(r,a,f)$ 与 $T(r,f)$ 是渐近等价的 . 一个 (有限或无穷的) 数 a 称为例外值 (exceptional value), 如果当 $r\to\infty$ 时上述等价性不成立 . 例外值有几种不同的类型 .

数 a 称为 f 的 Poincaré 意义下的例外值 (exceptional value in the sense of Poincaré), 如果 f 在全平面上的 a 点数为有限 (见[1], [2]), 特别是如果对任何 z 有 $f(z)\neq a$.

数 a 称为 f 的 Borel 意义下的例外值 (exceptional value in the sense of Borel), 如果当 $r\to\infty$ 时 $n(r,a,f)$ 的增长在某种意义下慢于 $T(r,f)$ (见[1], [2])

数 a 称为 f 的 Nevanlinna 意义下的例外值 (exceptional value in the sense of Nevanlinna) (见[1]), 如果其亏量 (见**亏值** (defective value))

$$\delta(a,f)=1-\lim_{r\to\infty}\sup\frac{N(r,a,f)}{T(r,f)}>0$$

数 a 称为 f 的 Valiron 意义下的例外值 (exceptional value in the sense of Valiron), 如果

$$\Delta(a,f)=1-\lim_{r\to\infty}\inf\frac{N(r,a,f)}{T(r,f)}>0$$

满足下述条件的数 a 也称为 f 的例外值

$$\beta(a,f)=\lim_{r\to\infty}\inf\frac{\max_{|z|=r}\ln^{+}(1/|f(z)-a|)}{T(r,f)}>0.$$

量 $\beta(a,f)$（f 的正偏差（positive deviation））刻画了 $f(z)$ 对于 a 的渐近逼近速率（见[3]）

参考文献

[1] Nevanlinna, R, Analytic functions, Springer, 1970（译自德文）

[2] Гольдберг, А А, Островский, И В, Распределение значений мероморфных функций, М, 1970.

[3] Петренко, В П,《Изв АН СССР Сер матем》, 33 (1969), 2, 414－454

В П Петренко 撰

【补注】 f 的 a 点是使得 $f(z)=a$ 的点.

【译注】

参考文献

[1] 庄圻泰，亚纯函数的奇异方向，科学出版社，1982

[2] 杨乐，值分布论及其新研究，科学出版社，1982

沈永欢 译

超越系数 [excess coefficient, эксцесса коэффициент]

刻画**单峰分布**（unimodal distribution）概率密度曲线的陡峭程度的数字特征 它被用来作为该分布偏离正态分布的一种度量 超越系数 γ_2 定义为

$$\gamma_2=\beta_2-3,$$

此处 $\beta_2=\mu_4/\mu_2^2$ 是第二 Pearson 系数（见 **Pearson 分布**（pearson distribution）），μ_2 和 μ_4 分别是概率分布的二阶和四阶中心矩. 利用二阶和四阶半不变量（累积量）κ_2 和 κ_4，超越系数可表为

$$\gamma_2=\frac{\kappa_4}{\kappa_2^2}.$$

若 $\gamma_2=0$，则称该概率分布密度具有正态超越系数（normal excess），因为正态分布的超越系数为零. 当 $\gamma_2>0$ 时，称概率分布具有正超越系数（positive excess）. 通常，正超越系数对应于这样的情况 该分布密度曲线在众数的一邻域内比正态曲线尖和高. 当 $\gamma_2<0$ 时，称密度具有负超越系数（negative excess），此时概率密度曲线在众数的一邻域内比正态曲线低平.

如果 $X_1,\cdot,X_n$ 是遵从同一连续概率分布的独立随机变量，则称统计量

$$\hat{\gamma}_2=\frac{1}{n(s^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^4-3$$

为样本超越系数（sample excess），此处

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

当 X_i 的分布律未知时，样本超越系数 $\hat{\gamma}_2$ 用来作为 γ_2 的点估计. 在随机变量 $X_1,\ \ ,X_n$ 遵从正态分布的情形下，当 $n\to\infty$ 时，样本超越系数 $\hat{\gamma}_2$ 的渐近分布是正态的，且

$$\mathsf{E}\hat{\gamma}_2=-\frac{6}{n+1},$$

$$\operatorname{Var}\hat{\gamma}_2=\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}=\frac{24}{n}\left[1-\frac{225}{15n+24}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$

这就是为什么当 $\hat{\gamma}_2$ 的观测值与零大不相同时，人们应当认为 X_i 的分布不是正态的理由. 在实践中，这被用来检验假设 $H_0\ \gamma_2\neq0$，该假设相当于 X_i 的分布偏离正态分布.

参考文献

[1] Kendall, M G and Stuart, A, The advanced theory of statistics Distribution theory, Griffin, 1969

[2] Cramér, H, Mathematical methods of statistics, Princeton Univ Press, 1946（中译本 H 克拉美，统计数学方法，上海科学技术出版社，1966）

[3] Большев, Л Н, Смирнов, Н В, Таблицы математической статистики, 3 изд, М, 1983

М С Никулин 撰

【补注】 超越系数常称为峰度系数（coefficient of kurtosis）或简称峰度（kurtosis）.

正态超越系数、正超越系数或负超越系数的密度常常称为零峰度的密度（density of zero kurtosis）、正峰度的密度（density of positive kurtosis）或负峰度的密度（density of negative kurtosis），而正（负）峰度的密度也称为尖峰（leptokurtic）（扁峰（platykurtic））密度.

吴启光 译 陶 波 校

三角角盈 [excess of a triangle, избыток треугольника]，球面角盈（spherical excess），角盈（excess）

一个球面三角形三内角之和与两直角之间的差 一个球面三角形的角盈正比于它的面积 S. $S=R^2\varepsilon$，其中 R 是包含这个球面三角形的球的半径.

А Б Иванов 撰

【补注】 这个概念有时称为**三角角朒**（triangle, defect of a）.

参考文献

[A1] Berger, M, Geometry, II, Springer, 1987（中译本 M 贝尔热，几何，第二册，科学出版社，1989）

[A2] Coxeter, H S M, Non-Euclidean geometry, Univ of Toronto Press, 1957

[A3] Greenberg, M, Euclidean and Non-Euclidean geometry, Freeman, 1980

张鸿林 译

过分函数 [excessive function, эксцессивная функция]

Марков 过程的过分函数是非负上调和函数的类比

假定在可测空间 (E, $\mathscr{B}$) 上给定一个具有一步转移概率 $\mathrm{P}(x, B)$ ($x \in E$, $B \in \mathscr{B}$) 的 Марков 链，如果 $\mathscr{B}$ 可测函数 f $E \to [0, \infty]$ 在 E 中处处满足

$$\int_E f(y)\mathrm{P}(x, dy) \leqslant f(x),$$

则称 f 为此链的**过分函数** (excessive function) 对于具有至多可数的状态集的不可分链，当且仅当至少有一个态是非常返时存在非常数的过分函数.

对 (E, $\mathscr{B}$) 上具有**转移函数** (transition function) $P(t, x, B)$ 的齐次 Марков 过程 $X = (x_t, \zeta, \mathscr{F}_t, \mathrm{P}_x)$，过分函数的定义稍微复杂一些. 集 B 属于 σ 代数 $\mathscr{B}$，如果对任意 $\mathscr{B}$ 上有限测度 μ，可以找到 $\mathscr{B}$ 中元 B_μ^1 和 B_μ^2 使得 $B_\mu^1 \subset B \subset B_\mu^2$ 而 $\mu(B_\mu^2 \setminus B_\mu^1) = 0$ 称函数 f $E \to [0, \infty]$ 是**过分的** (excessive)，如果它是 $\mathscr{B}$ 可测的且对 $t \geqslant 0$ 及 E 中的一切 x 有

$$P^t f(x) = \int f(y) P(t, x, dy) \leqslant f(x)$$

和

$$f(x) = \lim_{s \downarrow 0} P^s f(x)$$

对某区域 $E \subset \mathbf{R}^n$ 中 Wiener 过程的一部分 (见**Марков 过程的泛函** (functional of Markov process))，过分函数类与增补上函数 $f(x) \equiv \infty$ 的上调和函数类相同

在局部紧可分空间 E 上的标准过程 X 的情形下，对过分函数 $f(x)$，不等式

$$M_x f(x_\tau) \leqslant f(x)$$

对一切 $x \in E$ 成立，这里 τ 是 Марков 时，M_x 是相应于测度 P_x 在集 $\tau < \zeta$ 上的积分 过分函数的另一经常使用的性质是 在区间 $[0, \zeta]$ 上函数 $f(x_t)$ 是 P_x 几乎必然右连续的 (见 [3])

过分函数 $f(x) < \infty$ 称为**调和的** (harmonic)，如果对一切 τ, $f(x) \equiv M_x f(x_\tau)$，其中 τ 是过程对于任何给定的紧集 $K \subset E$ 的首出时. 按定义，**位势** (potential) 是任何满足

$$\lim_{n \to \infty} M_x f(x_{\tau_n}) = 0$$

的取有限值的过分函数 f，这里 $\tau_n (n \geqslant 1)$ 是任意选择的一列 Марков 时，当 $n \to \infty$ 时 $\tau_n \to \zeta$ 对于在区域 $E \subset \mathbf{R}^n$ 中的 Wiener 过程的部分，调和函数和位势分别是经典意义下 E 上的非负调和函数和集中在 E 上的 Borel 测度的 Green 位势

位势的一个例子是在 X 中满足 $M_x \gamma_\zeta < \infty$ 的可加泛函 $\gamma_t \geqslant 0$ 的位势 $M_x \gamma_\zeta$. 一个过分函数 $f(x) < \infty$ 是可加泛函的位势，当且仅当

$$\lim_{n \to \infty} M_x f(x_{\tau_n}) = 0,$$

其中 τ_n 是首先进入集合 $\{x \ f(x) \geqslant n\}$ 的时间.

在调和空间的 Brélot 公理理论的框架中，所有非负上调和函数都是某一标准过程的过分函数.

参考文献

[1A] Hunt, G A, Markov processes and potential Ⅰ, *Illinois J Math*, **1** (1957), 1, 44 – 93

[1B] Hunt, G A, Markov processes and potential Ⅱ, *Illinois J Math*, **1** (1957), 3, 316 – 369

[1C] Hunt, G A,, Markov processes and potentials Ⅲ, *Illinois J Math*, **2** (1958), 2, 151 – 213

[2] Ширяев, А Н, Статистический последовательный анализ, 2 изд, М, 1976 (英译本 Shiryaev, A N, statistical sequential analysis, Amer Math ed Soc, 1973)

[3] Дынкин, Е Б, Марковские процессы, М, 1963 (英译本 Dynkin, E B, Markov Processes, Springer, 1965)

[4] Getoor, R K, Markov processes, Ray processes and right processes, Springer, 1975

[5] Шур, М Г, 《Матем, заметки》, **13** (1973), 4, 587 – 596

[6] Meyer, P A, Fonctionelles multiplicatives et additives de Markov, *Ann Inst Fourier*, **12** (1962), 125 – 230

[7] Meyer, P A, Brélot's axiomatic theory of the Dirichlet Problem and Hunt's theory, *Ann Inst* Fourier, **13** (1963), 357 – 372

М Г Шур 撰

【补注】 过分函数的定义及其性质的研究归功于 G A Hunt ([1]) R M Blumenthal 和 R K. Getoor ([A1]) 使用了经由预解式的另一种定义. 新近的参考文献是 [A2]-[A4] 关于调和空间的 Brélot 理论见 [A5]

参考文献

[A1] Blumenthal, R M and Getoor, R K, Markov processes and potential theory, Acad Press, 1968

[A2] Fukushima, M, Dirichlet forms and Markov processes, North-Holland, 1980

[A3] Chung, K L, Lectures from Markov processes to Brownian motion, Springer, 1982

[A4] Doob, J L, Classical potential theory and its probabitistic counterpart, Springer, 1984

[A5] Brélot, M, Eléments de la théorie classique du potential, Sorbonne Univ Centre Doc Univ, Paris, 1959

刘秀芳 译

互斥析取 [**exclusive disjunction**, **разделительная дизъюнкция**]

一个逻辑联接词，由两个命题 A 和 B 用互斥析取联接词 $\dot{\vee}$ 联接得命题 $A \dot{\vee} B$，$A \dot{\vee} B$ 真当且仅当 A 真并且 B 假，或者 A 假并且 B 真. 其他情况下视它为假. 因此互斥析取可以用通常的 (非互斥) 析取表

示为

$$A \dot{\vee} B \Leftrightarrow (A \vee B) \& \neg(A \wedge B)$$

В Н Гришин 撰 卢景波 译

穷竭法 [exhaustion, method of, исчерпывания метод]

古代数学家为了确定面积和体积而使用的一种证明方法．“穷竭法”这个名称是在17世纪引入的．

借助穷竭法进行证明的典型方式可以用现代术语叙述如下 为了确定量 A，构造某一量的序列 C_1，C_2， ，使得

$$C_n < A, \qquad (1)$$

假设 B 是已知的，且满足

$$C_n < B, \qquad (2)$$

并假设对于任何整数 K 和一切足够大的 n，不等式

$$K(A - C_n) < D, \quad K(B - C_n) < D \qquad (3)$$

成立，其中 D 为常数 从现代观点来看，为了从 (3) 过渡到

$$A = B, \qquad (4)$$

只须注意到 (1)－(3) 蕴含

$$\lim_{n\to\infty}(A - C_n) = 0, \ \lim_{n\to\infty}(B - C_n) = 0,$$

$$A = \lim_{n\to\infty} C_n = B$$

但是古代数学家没有发展极限理论 (见**极限** (**limit**))，这里他们采用了归谬法 (reductio ad absurdum)，即证明两个不等式 $A < B$，$A > B$ 都不能成立 为了否定不等式 $A < B$，他们利用 **Archimedes 公理** (Archimedean axiom) 证明 对于 $R = B - A$，存在 K，使得 $KR > D$，并且由于 (1)，得到

$$K(B - C_n) > K(B - A) > D,$$

这同(3)中的第二个不等式相矛盾．同样，可以否定 $A > B$ 因此，只有(4)成立

穷竭法以及它所根据的公理的引入，应归功于克尼杜斯的 Eudoxus Eudoxus 大量地运用这一方法，而 Archimedes 则按多种方式非常巧妙地应用了这个方法 例如，为了确定抛物线弓形的面积 A，Archimedes 构造了逐步“穷竭”面积 A 的一系列弓形面积 C_1，C_2，

这里，

$$C_2 = C_1 + \frac{1}{4} C_1,$$

$$C_n = C_1 + \frac{1}{4} C_1 + \quad + \frac{1}{4^{n-1}} C_1$$

代替取极限

$$A = \lim_{n\to\infty} C_n = \left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdot\right] C_1 = \frac{4}{3} C_1,$$

Archimedes 在几何上证明 对于任何 n，

$$A - C_n < \frac{1}{4^{n-1}} C_1$$

引入面积

$$B = \frac{4}{3} C_1,$$

他得到

$$B - C_n = \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}} C_1,$$

按照上面叙述的推理过程，最后他证明

$$A = B = \frac{4}{3} C_1.$$

БСЭ-3

【补注】

参考文献

[A1] Boyer, C B, A history of mathematics, Wiley, 1688

【译注】

参考文献

[B1] Edwards, C H, The historical development of the calculus, Springer-Verlag, 1979 (中译本 C H 爱德华，微积分发展史，北京出版社，1987)

张鸿林 译

区域的穷竭 [exhaustion of a domain, исчерпание области]，区域逼近序列 (approximating sequence of domains)

对于拓扑空间 X 中给定的区域 D，穷竭是 (依某种意义正则的) 区域序列 $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D$，使得 $\overline{D}_k \subset D_{k+1}$，$\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = D$ 对于复空间 $\mathbf{C}^n$ 中任一区域 D，存在由比如逐段光滑曲线 (在 $\mathbf{C}^1$ 的情形下) 或逐片光滑曲面 (在 $\mathbf{C}^n$ $(n>1)$ 的情形下) 围成的区域 D_k 作成的穷竭．对于任一 Riemann 曲面 S，存在多面体穷竭 (polyhedral exhaustion) $\{\Pi_k\}_{k=1}^{\infty}$，它由多面体区域 (polyhedral domain) Π_k 组成，其每一单个区域都是 S 的一个**三角剖分** (triangulation) 中有限个三角形的连通并集；而且 $\overline{\Pi}_k \subset \Pi_{k+1}$，$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_k = S$，且每个区域的边界添上开集 $S \backslash \overline{\Pi}_k$，当 k 充分大时，恰好是 Π_k 的边界围线之一．

参考文献

[1] Стоилов, С, Теория функций комплексного переменного, пер с рум, т 2, М, 1962, гл 5 и сл

Е Д Соломенцев 撰

【补注】 任一伪凸域 (见**伪凸和伪凹** (pseudo-convex and pseudo-concave))，可以用光滑、严格伪凸域穷竭

的事实在高维复分析中具有带根本性的重要地位，见[A2]

参考文献

[A1] Sprnger, G, Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1957

[A2] Ahlfors, L V and Sario, L, Riemann surfaces, Princeton Univ Press, 1960, Chapt 1,

[A3] Krantz, S G, Function theory of several complex variables, Wiley, 1982 杨维奇 译

存在量词 [**existential quantifier**, **существования квантор**]

用来构造命题的一种逻辑运算，表示“对某个 x”（“存在一个 x 满足”） 在形式语言中，存在量词被记作 $\exists x$, $(\exists x)$, $\bigcup_x$, $\bigvee_x$, $\sum_x$

В Е Плиско 撰

【补注】

参考文献

[A1] Grzegorczyk, A, An outline of mathematical logic, Reidel, 1974 沈复兴 译

扩张映射 [**expanding mapping**, **растягивающее отображение**]

一个由闭流形 M 到它自身上的可微映射 f，在其作用下所有切向量的长度（在某种，因而在任何 Riemann 度量的意义下）依指数速率增长，即存在常数 $C>0$ 与 $\lambda>1$，使对一切 $X\in TM$ 与一切 $n>0$，

$$\| Tf^n(X)\| \geqslant C\lambda^n \| X\|$$

此概念也有不带可微性条件的变形，它能概括许多以前研究过的一维情形的例子作为特例．扩张映射的性质类似于 **Y系统**（Y-system）的性质，并且部分性质甚至还简单些(例如，C^2类的扩张映射恒有作为正密度用局部坐标定义的有限不变测度）．

参考文献

[1] Shub, M, Endomorphisms of compact differentiable manifolds, *Amer J Math* **91** (1969), 1, 175 – 199

[2] Walters, P, Invariant measures and equilibrium states for some mappings which expand distances, *Trans Amer Math Soc* **236** (1978), 121 – 153

[3] Krzyzewski, K, A remark on expanding mappings, *Colloq Math*, **41** (1979), 2, 291 – 295

[4] Krzyzewski, K, Some results on expanding mappings, *Astérisque* **50** (1977), 205 – 218

[5] Krzyzewski, K, On analytic invariant measures for expanding mappings, *Colloq Math*, **46** (1982), 1, 56 – 65

[6] Gromov, M, Groups of polynomial growth and expanding maps, *Publ Math IHES*, **53** (1981), 53 – 78

Д В Аносов 撰

【补注】 Y 系统在西方文献中通常称为 Аносов 系统 (Anosov system)

参考文献

[A1] Shub, M, Expanding maps, in S S Chern and S Smale (eds) Global analysis, Proc Symp Pure Math, Vol 14, Amer Math Soc, 1970, 273 – 276

郑维行 译 沈永欢、王声望 校

群的指数 [**exponent of a group**, **экспонента группы**]

使得在给定的群中恒等式 $x^n=1$ 成立的最小正整数

О А Иванова 撰 张鸿林 译

指数分布 [**exponential distribution**, **показательное распределение**]

用密度

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases} \tag{1}$$

定义的随机变量 X 的连续分布 密度 $p(x)$ 依赖于正的尺度参数 λ 矩的公式是 $\mathsf{E}X^n=\frac{n!}{\lambda^n}$，特别地，其期望 $\mathsf{E}X=1/\lambda$，方差 $\mathsf{D}X=1/\lambda^2$，特征函数是 $(1-it/\lambda)^{-1}$

指数分布属于用密度

$$p(x)=\frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x},\ x\geqslant 0,\ \alpha>0$$

定义的 Γ 分布族（见 **Γ 分布**（gamma-distribution)）密度（1）的 n 重卷积等于具有同样的参数 λ 和 $\alpha=n$ 的 Γ 密度

指数分布是唯一的具有无后效性质的分布 对任意 $x>0$, $y>0$ 有

$$\mathsf{P}\{X>x+y\,|\,X>y\}=\mathsf{P}\{X>x\}. \tag{2}$$

其中 $\mathsf{P}(X>x+y\,|\,X>y)$ 是在 $X>y$ 的条件下，事件 $X>x+y$ 的条件概率 性质(2)也称为无记忆性．

在一个齐次 **Poisson 过程**（Poisson process）中，两个相继事件之间的时间间隔具有指数分布．反之，具有指数寿命(1)的更新过程是 Poisson 过程．指数分布常出现在更新过程的叠加或扩张的极限过程中，也出现在临界分支过程中各种随机轨道模式的高水平相交问题中．

上述特性解释了指数分布被广泛地应用于排队论和可靠性理论中的缘由．假定各个设备的寿命是具有指数分布的独立随机变量，性质(2)能使我们用连续时间的有限或可数 Марков 链来检验一个排队系统 类似地，人们在可靠性理论中也使用 Марков 链，这时每个设备的无故障工作时间常常能看成彼此独立并具有指数分布

参考文献

[1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1971

Б. А. Севастьянов 撰

【补注】 在 Poisson 过程中无记忆性与 **Марков 性质** (Markov property) 相联系.

参考文献

[A1] Ross, S. M., Stochastic processes, Wiley, 1983

[A2] Gnedenko, B. V., Belyayev, Yu. K., Solovyev, A. D., Mathematical methods of reliability theory, Acad. Press, 1969 (译自俄文)

刘秀芳 译

指数函数 [**exponential function** 或 exponent, **показательная функция**]

函数

$$y = e^z \equiv \exp z,$$

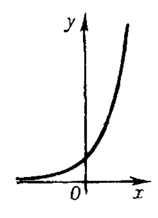
其中 e 是自然对数的底, 亦称 Napier 数. 对于任何(实数或复数)值 z, 这个函数定义为

$$e^z = \lim_{n \to \infty}\left[1 + \frac{z}{n}\right]^n, \qquad (1)$$

它具有下列性质. 对于任何值 z_1 和 z_2,

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \text{ 和 } (e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$$

当 x 为实数时, $y = e^x$ 的图形(指数曲线 (exponential curve)) 通过点 (0, 1), 并且渐近地趋向于 x 轴(见图).



在数学分析中, 对于实数 x 和 $a > 0 (a \neq 1)$ 来考虑指数函数 $y = a^x$, 这个函数与(基本)指数函数 $y = e^x$ 之间存在下列关系:

$$a^x = e^{x \ln a}$$

指数函数 $y = a^x$ 对于一切 x 有定义, 并且是正的、单调的(当 $a > 1$ 时为递增的, 当 $0 < a < 1$ 时为递减的)、连续的和无限可微的, 并且

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

特别是,

$$(e^x)' = e^x, \quad \int e^x dx = e^x + C,$$

并且在每一点的邻域内, 指数函数能够展开为幂级数, 例如

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (2)$$

指数函数 $y = a^x$ 的图形与 $y = (1/a)^x$ 的图形关于纵坐标轴是对称的. 如果 $a > 1$, 则当 $x \to +\infty$ 时, a^x 比 x 的任何幂都增加得快, 而当 $x \to -\infty$ 时, 它比 $1/x$ 的任何幂都更快地趋向于零, 即对于任何自然数 $b > 0$, 有

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{|x|^b} = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} |x|^b a^x = 0$$

指数函数的反函数是**对数函数** (logarithmic function).

如果 a 和 z 都是复数, 则指数函数 a^z 与(基本)指数函数 $w = e^z$ 之间存在下列关系

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a},$$

其中 $\operatorname{Ln} a$ 是复数 a 的对数.

指数函数 $w = e^z$ 是超越函数, 并且是 $y = e^x$ 的从实轴到复平面的解析开拓.

指数函数不仅能由 (1) 来定义, 也能由在整个复平面上收敛的级数 (2) 来定义, 或者由 Euler 公式 (Euler formula)

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

来定义. 函数 e^z 是周期为 $2\pi i$ 的周期函数: $e^{z+2\pi i} = e^z$. 函数 e^z 可以取一切复数值, 只有 0 除外, 对于任何复数 $a \neq 0$, 方程 $e^z = a$ 具有无穷多个解. 这些解是

$$z = \operatorname{Ln} a = \ln|a| + i \operatorname{Arg} a$$

函数 e^z 是基本初等函数之一. 利用这个函数可以表示三角函数、双曲函数等.

Ю. В. Сидоров 撰

【补注】 亦见 **Euler 公式** (Euler formulas).

由(1), 或者等价地, 由(2) (以 z 代替 x) 定义的基本指数函数 $z \mapsto \exp(z)$ 是单值的, 但是, 复数 $a \neq 0$ 的幂 $z \mapsto a^z$ 是多值的, 因为 $z \mapsto \operatorname{Ln} z$ 表示 $z \mapsto \exp(z)$ 的"多值反函数". 因为通常把 $\exp(z)$ 简写为 e^z, 所以恒等式

$$(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$$

的左端是多值的, 而右端是单值的. 这个恒等式容易出错, 应当仔细对待, 否则会出现荒谬的结果, 例如

$$1 = 1^{1/2} = (e^{2\pi i})^{1/2} = e^{\pi i} = -1$$

考虑对数函数的单值分支(见**解析函数的分支** (branch of an analytic function)), 或者在**完全解析函数** (complete analytic function) Ln 的连带 Riemann 曲面

上来考虑这个函数，可能出现很棘手的表示法和大量混乱情况 对于固定的 $a\in\mathbf{C}\backslash 0$，$\mathrm{Ln}\,a$ 的任何值都定义一个指数函数

$$a^{z}=e^{z(\mathrm{Ln}\,a\text{的值})}$$

参考文献

[A1] Stromberg, K , Introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981

[A2] Dieudonne, J , Foundations of modern analysis, 1, Acad Prees, 1969 (J 迪厄多内，现代分析基础，第一卷，科学出版社，1982)

[A3] Маркушевич, А И , Теория аналитческих функций, 2 изд , М , 1967 (中译本 А И 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1959)

张鸿林 译

实指数函数 [exponential function, real, экспоненциальная функция]

函数 $y=e^{x}$，也可写成 $y=\exp x$ 有时对于任何底 $a>0$，函数 $y=a^{x}$ 也称为指数函数 БС Э-3

【补注】 亦见**指数函数** (exponential function)，e(**数**) (e(number)) 指数函数的反函数是**对数函数** (logarithmic function) (亦见**数的对数** (logarithm of a number)) 指数函数在一点上的值也称为这一点的**反对数** (antilogarithm) 更一般地，形如 a^{b} 的表达式称为幂 (power) (形如 $x\to a^{x}$ 的表达式称为幂函数 (power function))，a 称为底 (base)，b 称为指数 (exponent)

张鸿林 译

指数映射 [exponential mapping , экспоненциальное отображение]

流形 M 的切空间到 M 中的映射 它由 M 上已给的**联络** (connection) 定义，并且是作为直线到自身中的映射的通常的指数函数的不寻常的推广．

1) 设 M 是一个具有仿射联络的 C^{∞} 流形，p 是 M 中的一个点，M_{p} 是 M 在 p 处的切空间，X 是 M_{p} 中的非零向量，且 $t\to\gamma_{X}(t)$ 是过 p 点的 X 方向上的测地线 存在点 0 在 M_{p} 中的一个开邻域 N_{0} 和点 p 在 M 中的一个开邻域 N_{p}，使得映射 $X\to\gamma_{X}(1)$ 是 N_{0} 到 N_{p} 上的微分同胚 这个映射称为在 p 处的指数映射并用 exp 表示 一个邻域 N_{0} 称为正规的 (normal)，如果 1) 映射 exp 将 N_{0} 微分同胚地映到 N_{p} 上，2) $X\in N_{0}$ 及 $0\leqslant t\leqslant 1$ 蕴含 $tX\in N_{0}$ 在此情形下就称 N_{p} 是点 p 在流形 M 中的正规邻域 每个 $p\in M$ 有凸的正规邻域 N_{p} 如此邻域中的任意两个点恰好被一条 N_{p} 中的测地线段连接 如果 M 是完全 Riemann 流形，则 exp 是 M_{p} 到 M 上的满射．

2) 设 G 是有单位元 e 的 Lie 群，$\mathfrak{g}$ 是相应的 G 在 e 点的切向量组成的 Lie 代数．对每个向量 $X\in\mathfrak{g}$，有唯一的群 $\mathbf{R}$ 到 G 中的微分同态 θ，使得 $\theta(\mathbf{R})$ 在 e 处的切向量恰好与 X 重合 映射 $X\to\exp X=\theta(1)$ 称为代数 $\mathfrak{g}$ 到群 G 中的指数映射 存在点 0 在 $\mathfrak{g}$ 中的开邻域 N_{0} 及 e 在 G 中的开邻域 N_{e}，使得 exp 是 N_{0} 到 N_{e} 上的微分同胚 设 $X_{1},\ \ ,X_{n}$ 是代数 $\mathfrak{g}$ 的某个基．映射 $\exp(x_{1}X_{1}+\ \ +x_{n}X_{n})\to(x_{1},\ \ ,x_{n})$ 是 N_{e} 上的坐标系统，这些坐标称为典范的 (canonical)

Lie 群 G 的指数映射的概念也可从另一种观点来探讨．在 G 上相对于左移群不变的所有仿射联络的集合和双线性函数 $\alpha\ \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 的集合之间存在一一对应．这就得出了 代数 $\mathfrak{g}$ 到群 G 中的指数映射 exp 与流形 G 在 e 点处 $\mathfrak{g}$ 的切空间到该流形关于对应于任何斜对称双线性函数 α 的左不变仿射联络的映射 exp 一致

参考文献

[1] Helgason, S , Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad Press, 1978

А С Феденко 撰 薛春华 译 徐森林 校

指数拓扑 [exponential topology , экспоненциальная топология]

拓扑空间 X 的所有闭子集构成的集合 $\exp X=2^{X}$ 上满足下述条件的最弱的拓扑 若 A 是开集，则 $\exp A$ 是 ($\exp X$ 中的) 开集，若 A 是闭集，则 $\exp A$ 是 ($\exp X$ 中的) 闭集 若 $A\subseteq X$，则 $\exp A$ 表示 A 的所有在 X 中为闭的子集的集合．

例．一个度量空间的所有有界闭子集构成的集合，配备 **Hausdorff 度量** (Hausdorff metric) 后成为度量空间，其拓扑结构为指数拓扑

一般的定义 设 $U_{1},\ \ ,U_{n}$ 是 X 中任意有限多个非空开集，指数拓扑的基由形如

$$\langle U_{1},\ \cdot\ ,U_{n}\rangle=$$

$$=\{\hat{F}\in\exp X\ \ F\subseteq\bigcup_{1}^{n}U_{i},\ F\cap U_{i}\neq\phi,\ i=1,\ \ ,n\}$$

的集合组成，其中 $\hat{F}$ 表示 $\exp X$ 中与已知闭集 $F\subseteq X$ 相应的点 配备指数拓扑后，空间 $\exp X$ 称为空间 X 的指数 (exponent of the space) 若 X 是 T_{1} 空间，则 $\exp X$ 亦然．若 X 是正则空间，则 $\exp X$ 是 Hausdorff 空间．若 X 是正规空间，则 $\exp X$ 是完全正则空间 就指数拓扑而言，正规性等价于紧性．若空间 X 是紧的，则 $\exp X$ 亦然 若 X 是二进紧统，且 X 的权不超过 $\aleph_{1}$，则 $\exp X$ 也是二进紧统．另一方面，权大于或等于 $\aleph_{2}$ 的任何紧统，其指数不是二进紧统，Peano 连续统的指数是度量紧统类中的绝对收缩核，从而是线段的连续象 可是，不可数权的指数不是 Тихонов 方体 I^{τ} 的连续象 设 $f\ \ X\to Y$ 是一个闭映射，把空间 X 映成空间 Y，则映射 $\exp f\ \ \exp X\to$

exp Y 定义为(exp$f$) $(\hat{F})=\widehat{(f(F))}$，称为指数映射(exponential mapping) 若f $X\to Y$ 是连续映射，把紧统 X 映成紧统 Y，则 f 是开映射的充要条件为. exp f 是开映射．函子 exp X 的作用是从紧统与连续映射的范畴到同一个范畴，这是一个指数型协变函子．这里，与对象 X 及态射 f 相应的是其指数 exp X 及 exp f.

参考文献

[1] Kuratowski, K , Topology, 1－2, Acad Press, 1966－1968(译自法文) Б А Ефимов 撰

【补注】 指数拓扑最好称为 Vietoris 拓扑 (Vietoris topology)，空间的指数通常称为**超空间** (hyperspace) [A1] 中证明 Peano 连续统的超空间实际上同胚于 Hilbert 立方体.

参考文献

[A1] Curtis, D W and Schori, A M , Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes, *Fund Math*, **101** (1978), 19－38 胡师度、白苏华 译

扩充复平面 [extended complex plane, расширенная комплексная плоскость]

通过添加无穷远点 ∞ 紧化的复 z 平面 $\mathbf{C}$，记作 $\overline{\mathbf{C}}$ $\mathbf{C}$ 中任一圆的外部，即任一形如 $\{\infty\}\cup\{z\in\mathbf{C}\ \ |z-z_0|>R\}(R\geqslant 0)$的集合，成为 ∞ 的一个邻域．扩充复平面是平面 $\mathbf{C}$ 的 **Александров 紧化** (Aleksandrov compactification)，并与 **Riemann 球面** (Riemann sphere) 同胚且保角等价．$\overline{\mathbf{C}}$ 上的球面度量 (spherical metric) 或弦度量 (chordal metric) 由

$$\rho(z,w)=\frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\ \sqrt{1+|w|^2}}\ ,\ z,w\in\mathbf{C},$$

$$\rho(z,\infty)=\frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

给出

参考文献

[1] Маркушевич, А И, Теория аналитических функций, 2 изд т 1－2, М, 1967－1968(中译本 А И 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957)

[2] Шабат, Б В, Введение в комплексный анализ, 2 изд, ч 1－2, М, 1976 Е Д Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Conway, J B , Functions of one complex variable, Springer, 1978(中译本 J B 康威，单复变函数，上海科学技术出版社，1985) 沈永欢 译

微分域的扩张 [extension of a differential field, расширение дифференциального поля]

具有微分法集合 Δ 的微分域 $F\supset F_0$，其中 F_0 是一个**微分域** (differential field)，Δ 的元素在 F_0 上的限制的集合与 F_0 的微分法集合相同．反过来，F_0 称为 F 的微分子域 (differential subfield)

F 的任意一组微分子域的交仍是 F 的微分子域 对于任一集合 $\Sigma\subset F$，存在着含有 Σ 的所有元素以及 F_0 的最小的 F 的微分子域，记作 $F_0\langle\Sigma\rangle$，称为由集合 Σ 生成的域 F_0 的扩张 (Σ 称为域 F_0 上的扩张 $F_0\langle\Sigma\rangle$ 的生成元集或生成元族) 一个扩张称为有限生成的 (finitely generated)，如果它有一个有限的生成元集，一个扩张称为单生成的 (simply generated)，如果它的生成元集可由一个元素组成 如果 F_1 和 F_2 是 F 的两个微分子域，则子域

$$F_1F_2=F_1\langle F_2\rangle=F_1(F_2)=F_2(F_1)=F_2\langle F_1\rangle$$

是 F 的一个微分子域，称为域 F_1 和 F_2 的合成 (join)

设 Θ 是由 Δ 生成的自由交换半群 (它的元素称为微分算子 (differential operator)) F 的一族元素 $(\alpha_i)_{i\in I}$ 称为在 $F_0\subset F$ 上微分代数相关的 (differentially algebraically dependent)，如果族 $(\theta\alpha_i)_{i\in I\ \theta\in\Theta}$ 在 F_0 上是代数相关的，反之，则称 $(a_i)_{i\in I}$ 在 F_0 上是微分代数无关的 (differentially algebraically independent)，或称为一族微分不定元 (differential indeterminates)．一族元素 $(a_i)_{i\in I}$ 称为在 F_0 上是微分可分相关的 (differentially separably dependent)，如果族 $(\theta\alpha_i)_{i\in I,\ \theta\in\Theta}$ 在 F_0 上是可分相关的，反之，则称 $(\alpha_i)_{i\in I}$ 在 F_0 上是微分可分无关的 (differentially separably independent).

如果一个扩张 F 的每个元素在 F_0 上都是微分代数的，则称 F 在 F_0 上为微分代数的 (differentially algebraic) 类似地，如果 F 的每个元素在 F_0 上都是微分可分的，则称 F 在 F_0 上为微分可分的 (differentially separable) 本原元素定理适用于微分扩张 如果集合 Θ 在 F_0 上是无关的，则 F_0 的每个有限生成的微分可分扩张都可以由一个元素生成

设 J 是一个给定的集合．令 $F_0[(y_{j\theta})_{j\in J\ \theta\in\Theta}]$ 是 F_0 上以 $(y_{j\theta})_{j\in J\ \theta\in\Theta}$ 为不定元族的多项式代数，不定元的指标集合为 $J\times\Theta$ 域 F_0 的任一微分法 $\delta\in\Delta$ 唯一地扩充为 $F_0[(y_{j\theta})_{j\in J\ \theta\in\Theta}]$ 的一个微分，它把 y_{j0} 映到 $y_{j\delta 0}$ 这个微分环称作以 y_j, $j\in J$ 为微分不定元的微分多项式环 (ring of differential polynomials)，记为 $F_0\{(y_j)_{j\in J}\}$ 它的微分分式域 (differential field of fractions) (即具有扩充了的微分法的分式域) 记为 $F_0\langle(y_j)_{j\in J}\rangle$，并把此域中的元素称为 F_0 上的以 $(y_j)_{j\in J}$ 为不定元的微分函数 (defferential function)．对常微分域有类似于 Lüroth 定理 (Lüroth theorem) 的结果 如果 F 是微分域 F_0 上的任一含于 $F_0\langle u\rangle$ 的微分扩张，则 F 中含有一个元素 v，使得 $F=F_0(v)$

对于任一微分域 F，存在可分半泛扩张 (separable semi-universal extension)，即包含 F 的任一有限生成的可分扩张的扩张 进而言之，存在可分泛扩张 (separa-

ble universal extension) U，此即在 F 的含于 U 中的任一有限生成扩张上都是半泛扩张的扩张

在微分域的理论中，不存在通常的域的代数闭域这一概念的直接类比．此对象在一定程度上被约束闭域所代替．这种域 F 的主要性质是 任意一组有限多个系数在 F 中的代数微分方程及不等式，若有一解在 F 的某个域扩张上是有理的，则必有一个解在 F 上是有理的 F 的某个扩张中的一族元素 $\eta=(\eta_j)_{j\in J}$ 称为在 F 上是约束的 (constrained)，如果存在微分多项式 $c\in F\{(y_j)_{j\in J}\}$，使得 $c(\eta)\neq 0$，但对于点 η 在 F 上的任一非泛的微分特殊化 η' 都有 $c(\eta')=0$. F 的扩张 $\mathscr{G}$ 称为在 F 上是约束的 (constrained)，如果任意一组有限多个元素 η_1, , $\eta_n\in\mathscr{G}$ 在 F 上都是约束的 这等价于说 $\mathscr{G}$ 的任一元素在 F 上都是约束的 没有非平凡的约束扩张的微分域称为约束闭的 (constainedly closed)．这样的域的一个例子是特征零的泛微分域（有理数域 $\mathbf{Q}$ 的泛域扩张） 任一特征零的微分域都有约束闭包 (constrained closure)，即含有 F 的任一其他的约束闭扩张之中的 F 的约束闭扩张

在通常域扩张中的**正规扩张** (normal extension) 的概念可以由几种不同的方式引入微分代数 在微分 Galois 理论中，扮演基础角色的是强正规扩张 设 U 是一个以 K 为常数域的确定的特征零的泛微分域．以下假定所有将要考虑的域都含于 U，并且所有的同构都是微分同构，即它们与 Δ 中的算子可交换 设 F 和 $\mathscr{G}$ 是微分域，U 在它们上是泛的．设 C 是 $\mathscr{G}$ 的常数域．域 $\mathscr{G}$ 的同构 σ 称为强的 (strong)，如果 σ 保持 C 的每个元素不变，且 $\sigma\mathscr{G}\subset\mathscr{G}K$, $\mathscr{G}\subset\sigma\mathscr{G}K$（即 $\mathscr{G}K=\mathscr{G}\sigma K$） F 的强正规扩张 (strongly normal extension) 即是 F 的有限生成扩张 $\mathscr{G}$，且 $\mathscr{G}$ 在 F 上的每个同构都是强的．强正规扩张是约束的．F 的强正规扩张 $\mathscr{G}$ 的强同构集合有一个定义在 K 上的自然的代数群结构（记为 $\mathrm{Gal}(\mathscr{G}/F)$） 这就是扩张 $\mathscr{G}/F$ 的 **Galois 微分群** (Galois differential group)．强正规扩张的一个特殊情形是 Picard - Vessiot 扩张 (Picard - Vessiot extension)，即保持常数域不变，并且把某个系数在 F 中的齐次线性微分方程组的解的一组基添加到 F 上所得到的扩张．对于这种类型的扩张，$\mathrm{Gal}(\mathscr{G}/F)$ 是代数矩阵群，即群 $\mathrm{GL}(n,K)$ 的一个代数子群，其中 $n>0$ 为某个整数

一些典型的微分代数扩张的 Galois 群具有下述形式

1) 设 $\mathscr{G}=F\langle\alpha\rangle$，其中 α 满足微分方程组 $\delta_i\alpha=a_i\alpha$, $\delta_i\in\Delta$, $a_i\in F$, $i=1$, $\cdot$, m，又设 $\mathscr{G}$ 与 F 的常数域相同，则 $\mathscr{G}$ 是 F 的 Picard - Vessiod 扩张，且 Galois 微分群 $\mathrm{Gal}(\mathscr{G}/F)$ 是 K 的乘法群（即 $\mathrm{GL}(1,K)=K^*$）的一个子群．如果 α 在 F 上是超越的，则 $\mathrm{Gal}(\mathscr{G}/F)\approx K^*$ 如果 α 是代数的，则 α 满足形如 $y^d-b=0$ 的方程，且 $\mathrm{Gal}(\mathscr{G}/F)=\mathbf{Z}_d$（$d$ 次单位根群）．在这种情形下，$\mathscr{G}$ 称为 F 的指数扩张 (extension by an exponent)

2) 设 $\mathscr{G}=F\langle\alpha\rangle$，其中 α 满足微分方程组 $\delta_i\alpha=\alpha_i$, $\delta_i\in\Delta$, $\alpha_i\in F$, $i=1$, , m（这样的元素 α 称为在 F 上本原的 (primitive)），又设 $F\langle\alpha\rangle$ 的常数域与 K 相同．如果 $\alpha\notin F$，则 α 在 F 上是超越的 此时所得到的扩张是 Picard - Vessiot 扩张，且 Galois 群 $\mathrm{Gal}(F\langle\alpha\rangle/F)$ 同构于 K 的加法群 这种扩张称为积分扩张 (extension by an integral)

3) 设 g_2, g_3 是 C 的两个元素，满足 $g_2^3-27g_3^2\neq 0$ 一个元素 $\alpha\in U$ 被称为 F 上的 Weierstruss 元素，如果 α 满足方程组 $(\delta_i\alpha)^2=a_i^2(4\alpha^3-g_2\alpha-g_3)$, $\delta_i\in\Delta$, $a_i\in F$, $1\leqslant i\leqslant m$ 扩张 $\mathscr{G}=F\langle\alpha\rangle$ 是强正规扩张 但当 α 在 F 上超越时，它不是 Picard - Vessiot 扩张．存在单同态

$$c\quad \mathrm{Gal}(F\langle\alpha\rangle/F)\to W_K,$$

其中 W_K 是下述三次曲线上的点构成的群

$$X_0X_2^2-(4X_1^3-g_2X_0^2X_1-g_3X_0^3)=0$$

如果 α 在 F 上是超越的，则 c 是同构．

4) 设 F 是一个微分域，a_1, , $a_n\in F$ 又设 (η_1, , η_n) 是方程 $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+$ $+a_ny=0$ 的零点的基础系，它生成 F 的 Picard - Vessiot 扩张，则 Galois 群 $\mathrm{Gal}(F\langle\eta_1$, , $\eta_n\rangle/F)$ 含于 $\mathrm{SL}(n,K)$，当且仅当 $y'+ay=0$ 在 F 中有非平凡零点．特别地，如果 $F=\mathbf{C}(x)$ 是以 d/dx 为微分的单复变有理函数微分域，且 $B_v=y''+x^{-1}+(1-v^2x^{-2})y$ 是 Bessel 微分多项式，则当 $v-1/2\notin\mathbf{Z}$ 时，相应的扩张的 Galois 群与 $\mathrm{SL}(2,K)$ 相同 如果 $v-1/2\in\mathbf{Z}$，则 Galois 群与 K^* 相同

对任一正整数 n，都可以构造微分域的扩张 $\mathscr{G}\subset F$，使得 $\mathrm{Gal}(\mathscr{G}/F)\approx\mathrm{GL}(n,K)$

在强正规扩张的微分子域的集合与其 Galois 群的代数子群的集合之间有 **Galois 对应** (Galois correspondence)

如同在通常的 Galois 理论中一样，在微分域的情形下有两个一般性的问题是令人感兴趣的．

a) 正问题 给定某微分域 F 的一个强正规扩张 $\mathscr{G}$，确定其 Galois 群

b) 反问题 给定一个微分域 F 和一个代数群 G，刻画具有与 G 同构的 Galois 群的 F 的强正规扩张的集合（特别地，判定此集合是否非空）

对于微分域扩张还有另外一条途径推广其正规性并建立微分 Galois 理论，这要用到微分几何的方法 ([4])

参考文献

[1] Ritt, J F, Differential algebra, Amer Math Soc, 1950
[2] Kolchin, E R, Differential algebra and algebraic groups, Acad Press, 1973
[3] Kaplansky, I, An introduction to differential algebra,

Hermann, 1976

[4] Pommaret, J F, Differential Galois theory, Gordon & Breach, 1983

A B Михалев, E B Панкратьев 撰
赵春来 译 冯绪宁 校

域的扩张 [extension of a field, расширение поля]

一个域，它包含给定域作为子域．记号 K/k 表示 K 是域 k 的扩张．这时，K 也称为 k 的扩张域(overfield)．

设 K/k 和 L/k 是域 k 的两个扩张 一个域同构 φ $K\to L$ 称为扩张的同构(isomorphism of extensions)或域的 k 同构（k-isomorphism of fields)，是指 φ 在 k 上为恒同映射．如果存在一个扩张的同构，则称这两个扩张是同构的 (isomorphic) 若 $K=L$，则 φ 称为扩张 K/k 的自同构 (automorphism of the extension)．一个扩张的所有自同构的集合构成一个群 Aut(K/k) 如果 K/k 是 **Galois 扩张** (Galois extension)，则记这个群为 Gal(K/k) 并称为域 K 在 k 上的 Galois 群 (Galois group)，或扩张 K/k 的 Galois 群 如果 Galois 群是个 Abel 群，则称该扩张为 Abel 的 (Abelian)

域 K 中的元素 α 称为在 k 上是代数的 (algebraic)，如果它满足系数在 k 中的某一代数方程，反之，则称为超越的 (transcendental) 对每个代数元 α，存在唯一的首项系数为 1 的多项式 $f_\alpha(x)$，在多项式环 $k[x]$ 中不可约，使得 $f_\alpha(\alpha)=0$ k 上任一多项式，如果以 α 为根，则必被 $f_\alpha(x)$ 整除 这个多项式称为 α 的极小多项式 (minimal polynomial) 一个扩张 K/k 称为代数的 (algebraic)．如果 K 中每个元素在 k 上是代数的．非代数的扩张称为超越的 (transcendental)．一个代数扩张 K/k，若满足条件· $k[x]$ 中每个不可约多项式如果在 K 中有一个根，则该多项式在 $K[x]$ 中必分解为一次因式之积，那么就称此扩张为正规扩张 (normal extension) 子域 k 称为在 K 中是代数闭的 (algebraically closed)，是指 K 中在 k 上代数的元素一定属于 k． 换句话说，K/k 中的元素都是 k 上超越元 一个域若在其所有扩张中都是代数闭的，就称为**代数闭域** (algebraically closed field)

扩张 K/k 称为有限生成的 (finitely generated) (或有限型扩张 (extension of finite type))，如果存在 K 中有限子集，使得 K 与包含 S 和 k 的最小子域重合．此时我们说 K 由 S 在 k 上生成．如果 K 由一个元素 α 在 k 上生成，则称它为单扩张 (simple extension) 或本原扩张 (primitive extension)，并写为 $K=k(\alpha)$．一个单代数扩张 $k(\alpha)$ 由 α 的极小多项式完全确定．更确切地说，若 $k(\beta)$ 是另一单代数扩张，而 $f_\alpha=f_\beta$，则必存在扩张的同构 $k(\alpha)\to k(\beta)$，将 α 映为 β. 进一步，对任一不可约多项式 $f\in k[X]$，必存在一单扩张 $k(\alpha)$，其极小多项式 $f_\alpha=f$ 这个单扩张可由作商环 $k[X]/fk[X]$ 构作出来．另一方面，对任一单超越扩张 $k(\alpha)$，必有扩张的同构 $k(\alpha)\to k(x)$，这里 $k(x)$ 是 k 上以 x 为变元的有理函数域 任一有限型扩张可以通过作有限步单扩张而得到

扩张 K/k 称为有限的 (finite)，是指 K 作为 k 上向量空间是有限维的，否则称为无限的 (infinite)．这向量空间的维数称为 K/k 的次数 (degree)，记为 $[K\ k]$ 每个有限扩张都是代数扩张，每个有限型代数扩张都是有限的．单代数扩张的次数即等于其相应的极小多项式的次数．另一方面，单超越扩张是无限的

假设给出一个扩张列 $K\subset L\subset M$，则 M/K 是代数的，当且仅当 L/K 和 M/L 均为代数的，进而言之，M/K 是有限的，当且仅当 L/K 和 M/L 均为有限的，并有

$$[M\ K]=[M\ L][L\ K]$$

如果 P/k 和 Q/k 是两个代数扩张，PQ 是 P 与 Q 在它们的公共扩域中的**复合域** (compositum)，则 PQ/k 也是代数的

也可见**可分扩张** (separable extension)，**超越扩张** (transcendental extension)

参考文献

[1] Bourbaki, N, Eléments de mathématique, Algèbre, Masson, 1981, chapt 4-7

[2] Waerden, B L van der, Algebra, 1-2, Springer, 1967-1971 (译自德文 中译本 B L 范德瓦尔登，代数学，I-II，科学出版社，1978)

[3] Zariski, O and Samuel, P, Commutative algebra, 1 Springer, 1975

[4] Lang, S, Algebra, Addison-Wesley, 1974

O A Иванова 撰 冯绪宁 译 裴定一 校

群扩张 [extension of a group, расширение группы]

包含给定子群作为**正规子群** (normal subgroup) 的群 商群通常也是预先指定的，即群 A 通过群 B 的扩张是以 A 作为正规子群且满足 $G/A\cong B$ 的群 G，即成为一个正合列

$$e\to A\to G\xrightarrow{\gamma} B\to e \tag{1}$$

在文献中有时也采用别的术语，例如称 G 为 B 由 A 的扩张 (例如见[2])，满同态 γ $G\to B$ 本身可称为 B 的扩张 (见[1])，或正合列 (1) 称为 A 通过 B 的扩张，或 B 通过 A 的扩张 A 通过 B 的扩张永远存在，虽然它不是由 A 和 B 唯一决定的 由于群论本身及它的应用这两方面的需要刺激了要描述 A 通过 B 所有的扩张，但可相差一种自然的等价．A 通过 B 的两个扩张称为等价的 (equivalent)，若存在下面的交换图式

$$\begin{array}{ccccccccc} e \to & A & \to & G & \to & B & \to e \\ & \| & & \downarrow & & \| & \\ e \to & A & \to & G' & \to & B & \to e \end{array}$$

形如 (1) 的扩张由群 G 中的元素的共轭决定一个同态 α $G \to \mathrm{Aut}\,A$，其中 $\mathrm{Aut}\,A$ 是 A 的自同构群，

$$\alpha(g)a = gag^{-1},$$

使得 $\alpha(A)$ 含于 A 的内自同构群 $\mathrm{Inn}\,A$ 中　因此 α 诱导了同态

$$\beta\ \ B \to \mathrm{Aut}\,A/\mathrm{Inn}\,A$$

三元组 (A, B, β) 称为**抽象扩张核** (abstract kernel of the extension)．给定扩张 (1)，对每个 $b \in B$ 选一个代表 $u(b) \in G$ 使 $\gamma u(b) = b$ 且 $u(1) = 1$　然后，用 $u(b)$ 作共轭就决定了 A 的自同构 $\varphi(b)$,

$$\varphi(b)a = u(b)au(b)^{-1} = {}^{b}a$$

$u(b_1)$ 与 $u(b_2)$ 的积等于 $u(b_1b_2)$，但差一个因子 $f(b_1, b_2) \in A$

$$u(b_1)u(b_2) = f(b_1, b_2)u(b_1, b_2)$$

容易验证这些函数满足条件

$$[\varphi(b_1)f(b_2, b_3)]f(b_1, b_2b_3) = f(b_1, b_2)f(b_1b_2, b_3) \qquad (2)$$

$${}^{b_1}({}^{b_2}a) = {}^{f(b_1\ b_2)}({}^{b_1b_2}a), \qquad (3)$$

其中函数 φ $B \to \mathrm{Aut}\,A$ 蕴含在 (3) 中

给定群 A 和 B 及函数 f $B \times B \to A$，φ $B \to \mathrm{Aut}\,A$ 满足 (2)，(3) 及正规化条件

$$\varphi(1) = 1, \quad f(a, 1) = 1 = f(1, b),$$

这就能用下面的方法定义扩张 (1)．积集 $A \times B$ 在下述运算下形成群

$$(a, b)(a_1, b_1) = (a^{b}a_1 f(b, b_1), bb_1).$$

同态 $a \mapsto (a, 1)$ 及 $(a, b) \mapsto b$ 产生了一个扩张

给定抽象核 (A, B, β)，永远可以找到一个正规化的函数 φ 满足条件 (3)　函数 f 是自然产生的，但条件 (2) 不总是满足．一般地，

$$f(b_2, b_3)f(b_1, b_2b_3) = k(b_1, b_2, b_3)f(b_1, b_2)f(b_1b_2, b_3),$$

其中 $k(b_1, b_2, b_3) \in A$　函数 f $B \times B \to A$ 称为**因子集** (factor set) 而 k $B \times B \times B \to A$ 称为**扩张阻碍** (obstruction to the extension)．若群 A 是 Abel 的，则因子集在自然的合成下形成群 $Z_2(B, A)$，对应于半直积的因子集形成 $Z_2(B, A)$ 的子群 $B_2(B, A)$　商群 $Z_2(B, A)/B_2(B, A)$ 同构于 B 的系数在 A 中的第二同调群．阻碍在第三同调群中有类似的解释．

藉助因子集来研究扩张这种想法很久以前就有了 (O Hölder, 1893)．然而因子集的引入通常与 O Schreier 的名字相联系，他使用它们对扩张进行了第一个系统的研究．R Baer 是不用因子集对群扩张进行不渝研究的第一个人　群扩张理论是**同调代数** (homological algebra) 的基础之一

参考文献

[1] Cartan, H and Eilenberg, S , Homological algebra, Princeton Univ Press, 1956

[2] Кириллов, А А , Элементы теории представлений, М , 1976 (英译本 Kirillov, A A , Elements of the theory of representations, Springer, 1976)

[3] Курош, А Г , Теория групп , 3 изд , М , 1967 (英译本 Kurosh, A G , The theory of groups, 1－2, Chelsea, 1955－1956)

[4] MacLane, S , Homology, Springer, 1963

В Е Говоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Eilenberg, S and MacLane, S , Cohomology theory in abstract groups Ⅱ, *Ann of Math* , **48** (1947), 326－341

石生明 译　许以超 校

Lie 代数的扩张 [**extension of a Lie algebra; расширение алгебры Ли**]，具有核 A 的

Lie 代数 G 连同核为理想 $A \subset G$ 的满态射 φ $G \to S$，其中 S 为一 Lie 代数．此定义等价于特指的一个正合序列

$$0 \to A \to G \xrightarrow{\varphi} S \to 0$$

若有子代数 $S_1 \subset G$，使得 $G = S_1 \oplus A$ (模的直和)，则称此扩张是**分裂的** (split) 这时 φ 导出同构 $S_1 \approx S$，同时可用求导来定义 S 在 A 上的作用．反之，记 $\mathrm{Der}\,A$ 为 A 的求导代数，则任一同态 α $S \to \mathrm{Der}\,A$ 可唯一地确定一个分裂扩张 $S \oplus A$，其乘法为

$$[(s, a), (s', a')] = ([s, s'], \alpha(s)a' - \\ -\alpha(s')a + [a, a'])$$

对 0 特征的域上有限维 Lie 代数成立 Lévy 定理 (Lévy theorem)　当 S 半单时，则 S 的任何扩张是分裂的

在所有非分裂扩张中，研究最多的是 Abel 扩张，即具有 Abel 核 A 的扩张．此时，G 在 A 上的作用导出 $G/A \cong S$ 在 A 上的作用，即 A 是 S 模　对域上 Lie 代数 S，任一以 S 模 A 作为核的 Abel 扩张均有形式 $S \oplus A$，其乘法由

$$[(s, a), (s', a')] = ([s, s'], \alpha(s)a' - \\ -\alpha(s')a + \psi(s, s'))$$

给出，这里 ψ 是某个线性映射 $S\wedge S\to A$ Jacobi 等式等价于ψ，是一个二维上闭链(或2上闭链，见**Lie代数的上同调**(cohomology of Lie algebras)) 由上同调的上闭链所决定的扩张在自然方式下等价 特别，一个扩张是分裂的当且仅当 ψ 上同调于零 所以具有核为 A 的代数 S 的 Abel扩张均可由上同调群 $H^2(S, A)$来描述．研究具有可解核的扩张可简化为研究 Abel扩张的情形

参考文献

[1] Jacobson, N, Lie algebras, Interscience, 1962 (中译本 N 贾柯勃逊，李代数，上海科学技术出版社，1964)

A K Толпыго 撰 许永华、朱胜林 译 牛凤文 校

模的扩张 [**extension of a module**, **расширение модуля**]

任一个包有给定的模 A 作为子模的模 X. 通常还令商模 X/A固定 于是，一个模 A通过模 B的扩张就是一个**正合序列**(exact sequence)

$$0\to A\to X\to B\to 0$$

这样的模总是存在的(例如，模 A和 B的直和)，但不一定由 A 和 B唯一确定 在模理论和模的应用中都需要描述模 A通过模 B的所有不同的扩张．为了这个目的，人们定义了模 A通过 B的扩张类之间的等价关系及等价类集合上的二元运算(称为**Baer 乘法** (Baer multiplication))．于是等价类集成为一个 Abel 群 $Ext_R^2(A,B)$，其中 R是使 A为其上模的环．这个构造法可扩展为A通过 B的 n重扩张(n-fold extensions)，即扩张成形如

$$0\to A\to X_{n-1}\to \quad \to X_0\to B\to 0$$

的正合序列，它对应于群 $\mathrm{Ext}_R^n(A,B)$．群

$$\mathrm{Ext}_R^n(A, B),\ n=1, 2,$$

是函子 $\mathrm{Hom}_R(A,B)$的导出函子，可由 A的投射化解或 B的内射化解算出来 A的一个扩张 X称为本质的(essential)，是指满足 $S\cap A=0$的 X的子模 S只有 $S=0$ 每个模都有一极大的本质扩张，这就是含有它的最小**内射模**(injective module)

参见**群的扩张**(extension of a group)

В Е Говоров 撰

【附注】 含有模 A 的最小内射模称为 A 的内射包(injective hull 或 injective envelope) 这个概念可以在任一 Abel范畴中定义(见[A1])．其对偶概念是投射覆叠(projective cover)

参考文献

[A1] Faith, C, Algebra rings, modules and Categories, Springer, 1973

冯绪宁 译 裴定一 校

半群的扩张 [**extension of a semi-group**; **расширение полугруппы**]

包含某给定半群 A作为子半群的半群 S 通常我们关心用某种方式与给定半群 A相联系的扩张，发展得最好的理论是理想扩张(包含 A作为理想的半群) 对半群 A的理想扩张 S的每个元 s，可以指定它的左和右平移 λ_s, ρ_s $\lambda_s x=sx$, $x\rho_s=xs(x\in A)$，令 $\tau=\tau_s=(\lambda_s, \rho_s)$ 映射 τ是 S 到 A 的平移包 $T(A)$的同态，且当 A是弱可约的情形 τ是同构(见**半群的平移**(translations of semi-groups))．半群τS称为理想扩张 S的型(type of the ideal extension) 在 A的理想扩张中，我们区分出强扩张(strong extensions)和纯扩张(pure extensions)，对前者有 $\tau S=\tau A$，对后者有 $\tau^{-1}\tau A=A$ A的每个理想扩张是它的一个强扩张的纯扩张

A的理想扩张 S称为稠密的(dense)(或本质的(essential))，若 S的在 A上是内射的同态为同构，A有极大的稠密理想扩张 D当且仅当 A是弱可约的 这时，相差到同构，D是唯一的且同构于 $T(A)$ 且这时 A称为 D中的稠密嵌入理想(densely-imbedded ideal)．$T(A)$的含有 τA的子半群，也仅仅这些子半群同构于某弱可约半群 A的稠密理想扩张．

设 S是 A的理想扩张且设商半群 S/A同构于 Q，则 S称为 A的通过 Q的扩张，下列情形已被广泛研究 完全单半群的理想扩张，群通过完全 O单半群的扩张，有消去律的交换半群通过有附加零的群的扩张，等等．一般地，描述半群 A通过 Q的所有理想扩张的问题远未解决．

在 A的其他类型的扩张中，我们要提到那种半群，它有一个同余关系并以 A作为它的一个类，特别的是有单位元的半群的所谓 Schreier 扩张(Schreier extensions)([1])，这类似于群的 Schreier 扩张．在研究半群的各种扩张的形式时(特别地，对可逆半群)，我们用到半群的同调

半群的扩张理论的另一广阔领域是关于半群 A的属于给定类的扩张的存在性的问题．例如任何半群 A可嵌入到完全半群中，到单半群中(对于同余关系)，或到具有零元和单位元的双单半群中(见**单半群**(simple semi-group))，以及任何有限或可数半群可嵌入到有两个生成元的半群中．已经知道了半群 A可嵌入到没有真左理想的半群中，到**逆半群**(inversion semi-group)中，到群中(见**半群的嵌入**(imbedding of semi-groups))的条件．

参考文献

[1] Clifford, A H and Preston, G B, The algebraic theory of semigroups, 1, Amer Math Soc, 1961

[2] Petrich, M, Introduction to semigroups, C Merrill, 1973

Л М Глускин 撰 石生明 译 许以超 校

拓扑空间的扩张 [extension of a topological space, расширение топологического пространства]

一个拓扑空间 Y，使得已知拓扑空间 X 是其中的处处稠密子空间．如果 Y 是紧空间，则称为紧扩张(compact extension)，如果 Y 是 Hausdorff 空间，则称为 Hausdorff 扩张(Hausdorff extension)

М И Войцеховский 撰

【补注】 紧扩张也称**紧化**(compactification)

参考文献

[A1] Cech, E , Topological spaces, Wiley, 1966

胡师度、白苏华 译

结合代数的扩张 [extension of an associative algebra, расширение ассоциативной алгебры]，交换代数 K 上的

K 代数 S 到结合代数 R 上的同态 φ $S \to R$ 若 $\mathrm{Ker}\,\varphi = I$ 是零乘代数，则称此扩张为奇异的(singular) 此时，I 自然成为 R 模 以 I 为核的 R 的全部扩张集合容许一个等价关系（与群、模等相同），记 $F(R, I)$ 为扩张的等价类集合 若代数 R 是 K 投射的，则代数 S 可分解为 K 模的直和，即 $S = I \oplus R$，且 S 的元素可以写成元素对 (u, r)，$u \in I$，$r \in R$，乘法由

$$(u_1, r_1)(u_2, r_2) = (u_1 r_2 + r_1 u_2 + a(r_1, r_2), r_1 r_2)$$

给出，这里 a $R \otimes R \to I$ 乘法结合律使 a 成为闭上链 从扩张至其闭上链的映射定义了 $F(R, I)$ 与系数在 I 中的 R 的第二上同调群 $H^2(R, I)$ 之间的 K 模同构

亦有一种完全不同的定义 人们称包含 R 的任一代数为 R 的一个扩张 这样的扩张常常与特殊构造方式（R 上多项式、R 的局部化、代数 R 的部分分式环等）相关联 亦见**域的扩张**(extension of a field)

参考文献

[1] MacLane, S , Homology, Springer, 1963

[2] Hochschild G , On the cohomology groups of an associative algebra *Ann of Math* , **46**(1945) 58-67

В Е Говоров 撰

【补注】亦称上同调群 $H^2(R, I)$ 为值在 I 中的 R 的 Hochschild 上同调（群）(Hochschild cohomology (group))

朱胜林 译 许永华 牛凤文 校

算子的扩张 [extension of an operator, расширение оператора]

一个**线性算子**(linear operator)，它的图象包含厂一给定线性算子的图象 当算子 B 是一个给定算子 A 的扩张时，写成 $A \subset B$ 在扩张理论中通常的问题为 极大地扩张一个算子而保留某种特殊的性质，或者研究具有各种附加性质的算子的扩张．

例如，设 A 是 Hilbert 空间 H 上的一个给定的等距算子，定义域为 $D(A) \subset H$，且值域为 $R(A) \subset H$，那么 A 的等距扩张一一对应于从 $H_+ = D(A)^\perp$ 到 $H_- = R(A)^\perp$ 的等距映射 特别地，如果 H_+ 与 H_- 的维数相同，那么 A 有酉扩张

对称算子的扩张 研究得最多的（且在应用中最重要的）是 Hilbert 空间上对称算子的自共轭扩张理论 一个算子 T 是对称的，当且仅当 $T \subset T^*$，其中 T^* 是伴随于 T 的算子 这样，T 的任何对称扩张的定义域包含在 $D(T^*)$ 中，且这些扩张都是 T^* 的限制(restrictions) 这就将 T 的对称扩张的描述化为确定它们的定义域 一个子空间 $L \subset D(T^*)$ 是 T 的某个对称扩张的定义域，当且仅当对所有 $x, y \in L$ 有 $(T^*x, y) = (x, T^*y)$ 于是便有

$$D(T^*) = D(T) + N_+ + N_- ,$$

其中 $N_\pm = \mathrm{Ker}(T^* \mp \mathrm{id})$ 是亏子空间(deficiency subspaces, defect subspaces)，它们的维数 $n_\pm = \dim N_\pm$ 称为亏数(deficiency numbers, defect numbers)，且 T 的对称扩张一一对应于由 N_+ 到 N_- 的等距映射，任何一个这样的映射 V 都对应于 T 的一个扩张，具有定义域 $D(T) + \Gamma_V$，其中 Γ_V 是 V 的图象．自共轭扩张对应于酉算子 V，因此，当且仅当亏数相等时它存在

对称算子扩张的定义域，可以方便地借助于所谓(抽象)边界条件来描述．$D(T^*)$ 上的，关于范数 $\langle x \rangle = (\|x^2\| + \|T^*x\|^2)^{1/2}$ 连续的，且在 $D(T)$ 上等于零的任一线性泛函，称为对称算子 T 的一个边界值(boundary value)，对于边界值 f，方程 $f(x) = 0$ 称为边界条件(boundary condition) 边界值由它们在 $N_+ + N_-$ 的值来决定 如果一个对称算子 T 的亏数是有限的，那么它的每一个对称扩张 $\widetilde{T}$ 可由一族边界条件来决定，也就是说，$D(\widetilde{T}) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\, f_i$，其中 f_i 为边界值 决定具有亏数 $n_+ = n_- = n$ 的 T 的自共轭扩张的边界值族可以叙述如下．设 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 及 $\psi_1, \dots, \psi_n$ 分别为 N_+ 及 N_- 的规范正交基，对于 $1 \leqslant i \leqslant n$，置

$$f_i(x) = (T^*x, \varphi_i) - (x, T^*\varphi_i),$$

$$g_i(x) = (T^*x, \psi_i) - (x, T^*\psi_i)$$

那么，T 的任何自共轭扩张 $\widetilde{T}$ 由边界条件

$$D(\widetilde{T}) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\left[f_i - \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} g_j\right]$$

决定，其中 $(\theta_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 是 $n \times n$ 酉矩阵

在某些情形下，人们可以成功地证明自共轭扩张的存在性（且找到某些扩张），而无需解决确定亏子空

间与亏数这一困难问题 例如，设 T 与空间 H 的一个（反酉）对合可交换，那么它有一个自共轭扩张．这在微分算子的理论中经常使用，其中对合取为空间 L_2 中的复共轭．亏数相等也出现在 T 于实轴上具有正则型点这一情形中（λ 称为正则型点（point of regular type），如果对某个 $c>0$ 以及所有 $x\in D(T)$，有 $\|Tx-\lambda x\|\geqslant c\|x\|$）

半有界算子的扩张．一个算子 T 称为按 $a\in\mathbf{R}$ 下半有界的（semi-bounded from below），如果它的数值域（numerical range）$\{(Tx,x)\ \|x\|=1,x\in D(t)\}$ 位于区间 (a,∞) 内，一个算子称为正的（positive），如果它按零下半有界 如果 T 按 a 下半界，那么每一个 $\lambda<a$ 都是正则型的点，它的亏数相等且存在自共轭扩张．我们可构造一个这样的扩张如下 定义于 $D(T)\times D(T)$ 上的半双线性型 $q_T(x,y)=(Tx,y)$ 有闭包 $\overline{q_T}$ 但是，作为一个闭的对称双线性型，$\overline{q_T}$ 有唯一的自共轭算子 $\hat{T}$ 与之对应，使得 $q_{\hat{T}}\subset\overline{q_T}$ 算子 $\hat{T}$ 称为算子 T 的 Friedrichs 扩张（Friedrichs extension）且为半有界的．它的谱的最大下界等于 T 的数值值域的最大下界 这是定义域包含在 $\overline{q_T}$ 的定义域中的唯一的自共轭扩张．利用 Friedrichs 扩张可以描述 T 的其他半有界扩张（如果 T 的亏数有限，则它的所有自共轭扩张都是半有界的） 为此，只需找到正算子的所有正扩张（通过加上单位算子的一个倍数，可将一般情形化为此情形）．设 T 是一个正算子，且设 $L=\operatorname{Ker}T^*$ 那么 T 的正自共轭扩张唯一地对应于 L 上的正有界算子 B，对每一个这样的算子 B，子空间 $D(T)+(\hat{T}^{-1}+B)L$ 是相应扩张的定义域（见[4]）

Friedrichs 扩张的构造可以推广到扇形算子（sectorial operators），即其数值值域含于某个角 $\{z\in\mathbf{C}\ |\arg(z-z_0)|\leqslant\theta<\pi/2\}$ 内的算子这一情形．存在着一个扩张，它是一个极大扇形算子，其数值值域位于同一个角内，且如同 Friedrichs 扩张一样，它是极小的．从一个 Banach 空间到其对偶空间中的算子这一情形也已研究过（见[5]）

耗散扩张．在某些问题中需要构造对称算子的对称扩张．一个典型的结果如下 一个算子 A 称为耗散的（dissipative），如果它的数值值域位于左半平面内，称为极大耗散的（maximal dissipative），如果它是耗散的且无耗散扩张 每一个对称算子有一个形如 iA 的扩张 其中 A 是一个极大耗散算子，所有这些扩张可以借助于 N_+ 到 N_- 中的压缩映射来描述（见[8]）

微分算子的扩张．算子的扩张理论在微分算子的研究中有着重要应用，设

$$l(y)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}(p_i(x)y^{(n-i)})^{(n-i)}$$

为区间 (a,b) 上的一个形式的自共轭微分表示式，令 $D\subset L_2(a,b)$ 为由具有 $0,\ \ ,2n-1$ 阶绝对连续拟导数，且有属于 $L_2(a,b)$ 的 $2n$ 阶拟导数的一切函数组成的子空间，再设 D_0 为 D 的子空间，它由这样的函数组成，其支集不含区间的端点．设 T 为由 $Ty=l(y)$ 给出的算子，$y\in D$，并设 T_0 为它在 D_0 上的限制．那么 T_0 是对称的，$T_0^*=T$，且设 $T_0=T_0,T_0$ 为 T_0 的闭包．在正则情形下（即区间 (a,b) 是有限的，且函数 $1/p_0$ 是可和的），T_0 的定义域由 D 中所有这样的函数构成，其前 $2n-1$ 阶拟导数于区间的端点为零 在奇异情形下，$D(T_0)$ 较难描述（见[2]） T_0 的亏指数相等，在正则情形下均等于 $2n$，而在奇异情形下，它们最多等于 $2n$ 这样，T_0 总有自共轭扩张，它们的谱、谱分解以及预解式都是微分方程理论中研究的基本对象，因为选择这个或那个自共轭扩张，实际上是某一谱问题的精确描述．这在正则情形中特别清楚，当我们将给出 T_0 的一个自共轭扩张的定义域的（抽象）边界条件写成通常边界条件的形式时，情形就是这样

$$\sum_{k=1}^{2n}\alpha_{jk}y^{[k-1]}(a)+\sum_{k=1}^{2n}\beta_{jk}y^{[k-1]}(b)=0,$$

$$j=1,\ \ ,2n,$$

对某些 α_{jk}，β_{jk} 成立（这由如上描述的（抽象）边界条件导出，因为在正则情形下，边界值由 $\varphi_j(y)=y^{[j]}(a)$，$\psi_j(y)=y^{[j]}(b)$ 确定）

对于 $p_0(x)>0$，T_0 是下半有界的，且它的 Friedrichs 扩张对应于边界条件 $y^{[j]}(a)=y^{[j]}(b)=0$，$0\leqslant j\leqslant 2n-1$

在一般情形下，T_0 的自共轭扩张可以刻画如下．对 D 中所有的函数 y 和 z，置

$$[y,z]=\sum_{k=1}^{n}(y^{[k-1]}\bar{z}^{[2n-k]}-y^{[2n-k]}\bar{z}^{[k-1]})$$

那么极限

$$\lim_{x\to a}[y,z]_x=[y,z]_a,\ \lim_{x\to b}[y,z](x)=[y,z]_b$$

存在，且满足

$$[y,z]_b-[y,z]_a=(Ty,z)-(y,Tz)$$

（Lagrange 公式（Lagrange formula））．这样，为了描述 T_0 的自共轭扩张，只需选择亏子空间 N_+ 及 N_- 中的基 $\varphi_1,\ \ ,\varphi_n$ 及 $\psi_1,\ \ ,\psi_n$（假定 $\psi_i=\overline{\varphi_i}$ 是方便的），且将每一个酉矩阵 $(\theta_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 对应于自共轭扩张 T_θ，它的定义域由所有满足边界条件

$$[y,\xi_j]_b-[y,\xi_j]_a=0,\ 1\leqslant j\leqslant n$$

的函数 $y\in D$ 组成，其中

$$\xi_j = \varphi_j - \sum_{i=1}^{n} \theta_{ij} \overline{\varphi_i}$$

对应于边值问题的扩张 半有界算子的扩张在椭圆边值问题中起着中心的作用 例如，设 $l(y)$ 是 n 维空间中某个区域 G 中的二阶椭圆微分表示式，并设 A_0 及 $A = A_0^*$ 分别为这个表示式所决定的极小及极大算子．那么 A_0 是正定的，它的亏指数均为无穷，且亏子空间 $L_0 = \operatorname{Ker} A$（称为 G 上的 l 调和函数空间 (space of l-harmonic functions)）在 G 的边界 ∂G 上有一个作为函数空间的自然实现 这样，A_0 的各种不同的扩张对应于各种不同的边界条件，且因而决定了不同的边值问题 特别地，Friedrichs 扩张 $\hat{A}_0$ 定义于 **Соболев 空间** (Sobolev space) $W_2^2(G)$ 中所有于边界 ∂G 上为零的函数上，且方程 $\hat{A}_0 u = f$ 对应于 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem)，

$$l(u) = f,\ u\big|_{\partial G} = 0$$

偏微分方程理论引起了许多关于对称算子的扩张的一般性问题,例如自伴扩张的唯一性问题(所谓本质自伴性(essential self-adjointness)),可交换的算子(在某种意义下)是否有可交换的扩张,是否存在具有给定性质(例如,关于谱的条件)的中间扩张,等等,(见[7]—[9])

到一个扩大了的 Hilbert 空间中的扩张 一个作用于 Hilbert 空间 H 上的对称算子，可以扩张为某个空间 $H_1 \supset H$ 上的自伴算子（见[10]），所以每一个对称算子均有一个广义谱函数 这是同由空间到空间上的扩张以及膨胀的种种结果相关的（见 [11]） 这样，Hilbert 空间上的压缩 (contraction) 算子（即范数 $\leqslant 1$ 的任何算子)，可以扩张为一个余等距算子（即一个等距算子的伴随)，且乘幂强收敛于零的每一个压缩算子可以扩张为一个后向单侧移位（即单侧移位的伴随） 关于到一个扩大了空间中的扩张的诸结果，可以推广到交换族上、半群上，等等

参考文献

[1] Dunford, N and Schwartz, J T , Linear operators Spectral theory, 2, Interscience, 1963

[2] Наймарк, М А , Линейные дифференциальные операторы, 2 изд , М , 1969 (中译本 M A 纳依玛克，线性微分算子，科学出版社，1964)

[3] Kato, T , Perturbation theory for linear operators, Springer, 1966

[4A] Крейн, М Г , 《Матем сб》, **20** (1947), 431 – 498

[4B] Крейн, М Г , 《Матем сб》, **21** (1947), 365– 404

[5] Бирман, М Ш , 《Матем сб》, **38** (1956), 431– 450

[6] Phillips, R S , Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, *Trans Amer Math Soc* , **90** (1959), 2, 193 – 254

[7] Морен, К, Методы гильбертова пространства, пер с польск , М , 1965

[8] Березанский , Ю М , Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К , 1965

[9] Михлин, С Г , Проблема минимума квадратичного функционала, М -Л , 1952 (中译本 C Г 米赫林，二次泛函的极小问题，科学出版社，1964)

[10] Наймарк М А , 《Изв АН СССР, Сер матем》, 4 (1940), 277 – 318

[11] Szokefalvi-Nagy, B and Foias, C , Harmonic analysis of operators on Hilbert spaces, North-Holland, 1970 (译自法文)

[12] Brown, L , Douglas, R and Fillmore, P , Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C^*-algebras, in Proc Conf Operator Theory, Lecture notes in math , Vol 345, Springer, 1973, 58 – 128

[13] Arveson, W , Notes on extensions of C^*-algebras, *Duke Math J* , **44** (1977), 2, 329 – 355

[14] Reid, M and Simon, B , Methods of contemporary mathematical physics, II , Fourier analysis , self-adjointness, Acad Press, 1975

А И Логинов, В С Шульман 撰

【补注】 符号 $\dotplus$ 是另一个偶而用于（内）直和 $\oplus$ 的符号，即 $V = A \dotplus B$ 意味着 $V = A + B$,且 $A \cap B = \{0\}$.

当处理一个微分表示式

$$l(y) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} (p_i(x) y^{(n-i)})^{(n-i)} \quad \text{(A1)}$$

时，可能发生如下的情况，即使不是所有的导数 $y^{(i)}$ ($i = 1, \ldots, 2n$) 都存在，$l(y)$ 仍有意义，这与系数 $p_0, \ldots, p_n$ 可能的不可微性有关．因此，对应于上面的表示式 (A1)，人们通过公式

$$y^{[k]} = \frac{d^k y}{dx^k} = y^{(k)} \text{ 对于 } k = 1, \ldots, n-1,$$

$$y^{[n]} = p_0 y^{(n)},$$

$$y^{[n+k]} = p_k y^{(n-k)} - \frac{d}{dx}(y^{[n+k-1]}),\ k = 1, \ldots, n$$

来定义 y 的拟导数 (quasi-derivatives) $y^{[1]}, \ldots, y^{[2n]}$ 此外，还置 $y^{[0]} = y$ 这样，$l(y) = y^{[2n]}$

存在着另一类问题，它们沿用扩张问题的名称 这些是矩阵的扩张问题 (matrix extension problems) 和算子扩张问题 (operator extension problems)，其中矩阵（算子）没有完全被给定而要求按如下方法来“填满”那些缺少的“元”，使得所得矩阵（算子）有某些指定的性质．例如，在 Carathéodory-Toeplitz 问题的一个有限变形中，围绕一个 $n \times n$ 矩阵 A 的对角线，人们已经给出一个带 $a_{ij} = a_{i-j}$, $|i-j| \leqslant r$

$<n-1$，使得 $a_j=\overline{a}_{-j}$（以及某些其他的必要条件），而要求找到其余的 $a_{r+1}, \ldots, a_{n-1}$，使得所得矩阵有非负定的实部．另有一个对应的无穷变形，它在信号分析中是重要的．

与**算子的插值**（interpolation of operators）有关的那些问题，在**矩阵的扩张问题**（matrix extension problems）以及**算子和矩阵函数的扩张**（operator and matrix function extensions）中讨论． 卢声望 译 郑维行 校

区域扩张原理 [extension of domain, principle of, расширения области принцип]，Carleman 原理（Carleman principle）

区域 D 的边界 Γ 的弧 α 的**调和测度**（harmonic measure）$\omega(z,\alpha,D)$，当 D 越过弧 $\beta\subset\Gamma$，$(\alpha\cup\beta=\Gamma)$ 扩张时只会增大．更精确地说，设复数 z 平面中区域 D 的边界 Γ 由有限条 Jordan 曲线组成，设 α 是 Γ 的一部分，由 Γ 的有限条弧段组成，并设 D' 是区域 D 越过补弧 $\beta=\Gamma\setminus\alpha$ 的扩张（extension of the domain），即 $D\subset D'$，且 α 是 D' 的边界 Γ' 的一部分，则对于调和测度有不等式 $\omega(z,\alpha,D)\leqslant\omega(z,\alpha,D')$，$z\in D$，其中等号仅当 $D'=D$ 时成立．关于 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant2)$ 或 $\mathbf{C}^n(n\geqslant1)$ 中的区域，调和测度的区域扩张原理也成立．

区域扩张原理在涉及调和测度估计的各种问题中有重要应用．例如，T. Carleman（[1]）曾用区域扩张原理得到 Carleman - Milloux 问题（Carleman - Milloux problem）的解．该问题为：设单连通域 D 是边界 Γ 由有限条 Jordan 弧组成，ζ 是 Γ 上一点，或者 $\zeta\notin\overline{D}$，设 $\Delta=\{z:|z-\zeta|<R\}$ 是以 ζ 为心以 R 为半径的圆盘，并设 α 是 Γ 在 $\Delta_R=\Delta\cap D$ 内的部分．需要找出调和测度 $\omega(z,\alpha,\Delta_R)$ 的一个仅依赖于 R 和 $|z-\zeta|$ 的下界，$z\in\Delta_R$．解答由下式给出，

$$\omega(z,\alpha,\Delta_R)\geqslant\frac{2}{\pi}\ \mathrm{arc\,tan}\left[\frac{2}{\theta(R)}\ \ln\frac{R}{|z-\zeta|}\right], \qquad (1)$$

其中 $\theta(R)$ 是交集

$$\{z:|z-\zeta|=R\}\cap D$$

中的弧的长度之和．因 $\theta(R)\leqslant2\pi$，故有

$$\omega(z,\alpha,\Delta_R)\geqslant\frac{2}{\pi}\ \mathrm{arc\,tan}\left[\frac{1}{\pi}\ \ln\frac{R}{|z-\zeta|}\right],\ z\in\Delta_R \quad (2)$$

Carleman - Milloux 问题有一些推广，公式（1）和（2）也有某些改进（见[3]）．区域扩张原理亦可用来证明 **Lindelöf 定理**（Lindelöf theorem）．H. Milloux 曾给出区域扩张原理及（1），（2）型公式的种种应用（见[2]，亦见[3]，[4]）．

参考文献

[1] Carleman, T., Sur les fonctions inverses des fonctions entières, *Ark. Mat. Ast. Fys.* **15**(1921), no. 10

[2] Milloux, H., Le theoreme de M. Picard, suites des fonctions holomorphes, fonctions meromorphes et fonctions entieres, *J. Math. Pures Appl.* **3** (1924)

[3] Nevanlinna, R., Analytic functions, Springer, 1970（译自德文）

[4] Евграфов, М. А., Аналитические функции, 2 изд., М., 1968（英译本 Evgrafov, M. A., Analytic functions, Saunders, Philadelphia, 1966）

Е. Д. Соломенцев 撰 杨维奇 译

扩张定理 [extension theorems, продолжения теоремы]

关于函数由一集合向更大集合扩张（延拓）的定理，其中要求扩张后的函数满足某些给定的性质．与扩张定理相关的内容首先当推函数的解析延拓问题．

关于连续函数的连续扩张存在定理的一个例子是 Brouwer - Урысон 定理（Brouwer - Urysohn theorem）：设 E 为正规空间 X 的一闭子集并设 $f: E\to\mathbf{R}$ 为连续实值有界函数，则存在连续有界函数 $F: X\to\mathbf{R}$，使在 E 上 $F=f$．关于向量空间中线性泛函扩张的 **Hahn - Banach 定理**（Hahn - Banach theorem）也是一个扩张定理．

在 Euclid 空间，扩张定理主要是解决下面两类问题：1) 从空间中某真子集上定义的函数到整个空间上的扩张．2) 函数从边界向整个区域的扩张．在两种情形均要求扩张函数有一定的光滑性，即要求属于适当的函数类，后者取决于被扩张函数的性质．

假定函数的定义域具有充分光滑的边界，如何把它扩张到整个空间上并保持偏导数的连续性这一问题已由 M. R. Hestenes（[3]）与 H. Whitney（[4]）所解决．设函数 $\varphi_k: \partial G\to\mathbf{R}\ (k=0,\ldots,m)$ 给定在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中区域 G 的 $(n-1)$ 维边界 ∂G 上，构造函数 $u: G\to\mathbf{R}$ 使满足

$$\frac{\partial^k u}{\partial n^k}=\varphi_k,\ k=0,\ldots,m,\ u\in C^r(G) \qquad (*)$$

的问题，其中 n 为 ∂G 的法线方向，曾被 E. E. Levi（[5]），G. Giraud（[6]，[7]）与 M. Gevrey（[8]）所考虑过，这里 φ_k 与 ∂G 的光滑性是用连续性与 **Hölder 空间**（Hölder space）的属性来描述的（可能出现某些奇点）．当自变量趋于 G 的边界 ∂G 时 k 阶偏导数的增长阶也被研究过，其中 $k>m$．

Никольский 和他的学生们（见 [9],[10]）曾对上述两个问题，就各种 $L_p(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 度量空间、各种维数以及各种函数空间中函数的扩张系统地研究过．从具有给定微分 - 差分性质的函数，经扩张后所能得到的微分性的最佳刻画，已经可以用函数空间的系列来描述（见**嵌入定理**（imbedding theorems））．关于问题（*），人们已找到了当自变量趋于流形边界时关于 k 阶导数

($k>m$) 的增长阶的最佳扩张 (见 [11], [12])

通常用积分表示方法来实现将函数与函数系 (*) 由边界扩张到整个区域 扩张函数的简便方法往往是线性的 还有其他方法，例如，把函数展为级数，再将级数的每一项进行扩张 此方法一般是非线性的．有一些情形，线性方法确实不存在 ([13])

参考文献

[1] Hausdorff, F, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914 (中译本 F 豪斯道夫，集论，科学出版社，1960)

[2] Колмогоров, А Н и Фомин, С В, Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд, М, 1981 (中译本 А Н 柯尔莫果洛夫，С В 佛明，函数论与泛函分析初步，高等教育出版社，1992)

[3] Hestenes, M R, Extension of the range of differentiable functions, *Duke Math J*, **8** (1941), 183–192

[4A] Whitney, H, Analytic extension of differentiable functions defined in closed sets, *Trans Amer Math Soc*, **36** (1934), 63–89

[4B] Whitney H, Differentiable functions defined in arbitrary subsets of Euclidean space *Trans Amer Math Soc*, **40** (1936), 309–317

[5] Levi, E E, *Mem Soc Itali XL*, **16** (1909), 3–112

[6] Giraud, G, Sur le probleme de Dirichlet généralise, *Ann Sci Ecole Norm Sup*, **46** (1929), 131–245

[7A] Giraud G, Sur certains problèmes non-lineaires de Neumann et sur certains problèmes non-lineaires mixtes, *Ann Sci Ecole Norm Sup*, **49** (1932), 1–104

[7B] Giraud, G, Sur certains problemes non-lineaires de Neumann et sur certains problèmes non-lineaires mixtes, *Ann Sci Ecole Norm Sup*, **49** (1932), 245–309

[8] Gevrey, M, Les quasi-fonctions de Green et les systemes d'equations aux derivees partielles du type elliptique, *Ann Sci Ecole Norm Sup*, **52** (1935), 39–108

[9] Никольский, С М, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд, М 1977 (英译本 Nikol'skii, S M, Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, Springer, 1975)

[10] Бесов, О В, Ильин, В П и Никольский, С М, Интегральные представления функций и теоремы вложения, М, 1975 (英译本 Besov, O V, Il'in, V P and Nikol'skii, S M, Integral representations of functions and imbedding theorems, Wiley, 1978)

[11] Кудрявцев, Л Д, 《Тр матем ин-та АН СССР》, **55** (1959)

[12A] Успенский, С В, Теоремы вложения и продолжения для одного класса функций, I, 《Сиб матем ж》, **7** (1966), 1, 192–199

[12B] Успенский, С В, Теоремы вложения и продолжения для одного класса функций, II, 《Сиб матем ж》, **7** (1966), 2, 409–418

[13] Буренков, В И, Гольдман, М Л, О продолжении функций из L_p, 《Тр Матем ин-та АН СССР》, **150** (1979), 31–51

Л Д Кудрявцев 撰

【补注】 Brouwer-Урысон 定理通常称为 Tietze-Урысон 定理 (Tietze-Urysohn theorem) 或 Tietze 扩张定理 (Tietze extension theorem) 如果定理中删去两个"有界"，仍然正确

郑维行 译 王斯雷 校

延拓定理 (解析几何学中的) [extension theorems (in analytic geometry), продолжения теоремы в аналитической геометрии]

关于函数、解析层的截面、解析层、解析子集、全纯和亚纯映射从一个集合 A (通常也是解析的) 在**解析空间** (analytic space) X 内的补 $X\setminus A$ 到整个空间 X 的延续 (延拓) 的论断 两个 B Riemann 定理构成关于函数延拓的经典结果

Riemann 第一定理 (Riemann first theorem) 阐明当 X 是一个正规**复空间** (complex space) 和 A 是余维数 $\geqslant 2$ 的一个解析子空间时，$X\setminus A$ 上的每个解析函数能延拓为 X 上的解析函数 Riemann 第二定理 (Riemann second theorem) 阐明每个在 X 上局部有界的在 $X\setminus A$ 上的解析函数 f，当 A 是正规复空间 X 内的一个疏的解析子集时，则能延拓为 X 上的解析函数．这些定理对任意的复空间，以及对凝聚解析层的截面，都有推广 (见**局部上同调** (local cohomology))

关于解析子集的延拓的重要结果是 Remmert-Stein-Shiffman 定理和 Bishop 定理．Remmert-Stein-Shiffman 定理 (Remmert-Stein-Shiffman theorem) 阐明 每个 $X\setminus A$ 内的纯 p 维复解析子集，当 X 是复解析空间而 A 是 $(2p-1)$ 维 **Hausdorff 测度** (Hausdorff measure) 为零的闭子集时，都能扩充为一个在 X 内的纯 p 维复解析子集．Bishop 定理 (Bishop theorem) 阐明 $X\setminus A$ 内每一个纯 p 维复解析子集 V，当 X 是复解析空间，A 是复解析子集，而 V 在 X 内的 A 的某个邻域 U 中体积局部有限时，都能扩充为一个在 X 内的纯 p 维复解析子集 $\bar{V}$

解析映射的可延拓性的判别准则推广了经典的 **Picard 定理** (Picard theorem) 例如，当 X 是复流形，A 是疏的解析集和 Y 是双曲紧复流形时，每个解析映射 f $X\setminus A\to Y$ 能延拓为一个解析映射 $X\to Y$ 每个非处处退化的解析映射 $X\setminus A\to Y$，当 X 是复流形，A 是解析子集而 Y 是具有负第一**陈 (省身) 类** (Chern class) 的紧复流形时，能延拓为一个亚纯映射 $X\to Y$

参考文献

[1] Griffiths, P A and King, J, Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties, *Acta Math*, **130** (1973), 145–220

[2] Kobayashi, S, Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings, M Dekker, 1970

[3] Harvey, R , Holomorphic chains and their boundaries, in Proc Symp Pure Math , Vol 30, Amer Math Soc , 1977, 309 - 382 Д А Пономарев 撰

【补注】 Bishop 定理在几个方向上都有推广 设 X 是 $\mathbf{C}^n$ 的一个开子集而 A 是 X 的一个复解析子集 首先，Skoda 定理 (Skoda theorem) 指出，如果 T 是 $X\setminus A$ 上的双阶为 (p, p) 的一个正闭流动形 (positive closed current)，它在 A 的一个邻域有有限质量，则 T 能延拓成 X 上的一个正闭流动形 (X 上的一个流动形 (current) 是 X 上的具有紧支集的所有 C^∞ 复微分形式所成的空间上在强拓扑下的一个连续性泛函，见 [A1] 和**微分形式** (differential form)) 其次，H El Mir 指出可以取 A 为一个闭完全多重极集 (complete pluripolar set)，它比闭解析集更一般，那么 T 如同上面一样仍能延拓．($\mathbf{C}^n$ 内的一个多重极集 (pluripolar set) A 是这样一个集合使存在一个定义在 A 的某个邻域内的**多重次调和函数** (plurisubharmonic function) φ 满足 $A\subset\{z \quad \varphi(z)=-\infty\}$，后者称为 φ 的 $-\infty$ 集．如果有一个这样的 φ，使 A 等于此 φ 的 $-\infty$ 集，A 就是完全多重极集) N Sibony 又进一步推广这些结果 若 T 是一个在 $X\setminus A$ 上的双阶为 (p, p) 的多正流动形 (pluri-positive current)，它在 A 的一个邻域内有局部有限质量，则能扩充为 X 上一个多正流动形．

从 Skoda 用到的 X 的每个纯 p 维解析子集 V 相伴一个在 V 的正则点上的积分流动形 $[V]$ 的事实，人们重新获得了 Bishop 定理 这是一个双阶 (p, p) 的正闭流动形．运用相伴于正 Lelong 数 (Lelong number) 的集合的解析性的肖(荫堂)定理 (Siu theorem) (见 [A4]) 能反过来从流动形得到解析集 (在 $\mathbf{C}^n$ 内的一个纯 p 维**解析集** (analytic set) A 的一点 a，Lelong 数是一个数

$$n(A, a)=\lim_{r\to 0}\frac{\operatorname{vol}_{2p}A_r}{c(p)r^{2p}}$$

此极限存在 (例如见 [A1])，在这公式中 $c(p)=\pi^p/p!$，是 $\mathbf{C}^n$ 中单位球的体积，又 $A_r=\{z\in A \quad |z-a|<r\}$ (即 A 的包含于以 a 为中心 r 为半径的球内的部分)，亦见 [A1])．

参考文献

[A1] Chirka, E M , Complex analytic sets, Kluwer, 1989 (译自俄文)．

[A2] Sibony, N , Quelques problèmes de prolongement de courants en analyse complexe, *Duke Math J* , **52** (1985), 157 - 197

[A3] Siu, Y T , Techniques of extension of analytic objects, M Dekker, 1974

[A4] Siu, Y T , Analyticity of sets associated to Lelong numbers and extension of closed positive currents, *Inv Math* , **27** (1974), 53 - 156

陈志华 译

外代数 [**exterior algebra, внешняя алгебра**], Grassmann 代数 (Grassmann algebra)，域 k 上的向量空间 V 的

域 k 上一个结合代数，它的运算用符号 $\wedge$ 表示，具有生成元 $1, e_1, \ , e_n$，这里 $e_1, \ , e_n$ 是 V 的一个基，并有定义关系

$$e_i\wedge e_j=-e_j\wedge e_i(i, j=1, \cdot, n), e_i\wedge e_i=0,$$

$$1\wedge e_i=e_i\wedge 1=e_i(i=1, \ , n),\ 1\wedge 1=1$$

外代数不依赖于基的选取，记作 $\wedge V$ $\wedge V$ 中由形如 $e_{i_1}\wedge \ \wedge e_{i_r}$ 的元素所生成的子空间 $\wedge^r V(r=0,1, \ )$ 称为空间 V 的 r 次外幂 (exterior power)．以下等式成立 $\dim\wedge^r V=\binom{n}{r}=C_n^r$, $r=0, \ , n$ $\wedge^r V=0$, $r>n$ 再者，如果 $u\in\wedge^r V$, $v\in\wedge^s V$，则 $v\wedge u=(-1)^{rs}u\wedge v$ 空间 $\wedge^r V$ 的元素称为 r 向量 (r-vectors)，它们可以看成 V 中斜对称 r 次反变张量 (见**外积** (exterior product))

r 向量与 V 中 r 维子空间有紧密关系 V 的向量的两个线性无关组 $x_1, \ , x_r$ 与 $y_1, \ , y_r$ 生成同一子空间，当且仅当 r 向量 $x_1\wedge \ \wedge x_r$ 与 $y_1\wedge \cdot\wedge y_r$ 成比例 这个事实是 H Grassmann 的研究中一个出发点 ([1])．他引入外代数作为代数工具去描述由一维子空间向多维子空间的推广 借助于外代数很容易建立行列式的理论 外代数也可以对于更为一般的对象来定义 例如，对于一个有单位元的交换环 A 上的么模 M 来定义 ([4])．一个模 M 的 r 次外幂 $\wedge^r M(r>0)$ 定义为这个模的 r 次张量幂对于一切形如 $x_1\otimes \ \otimes x_r(x_i\in M)$ 且对某一对 $j\neq k$ 来说，$x_j=x_k$ 的元素所生成的子模的商模 M 的外代数定义为直和 $\wedge M=\oplus_{r\geq 0}\wedge^r M$，这里 $\wedge^0 M=A$，带有自然引进的乘法 在有限维向量空间的情形，这个定义与原来的定义是一致的 一个模的外代数被用于主理想环上模的理论中 ([5])．

域 k 上 n 维向量空间 V 的一个 r 维子空间 L 的 Grassmann 坐标 (Grassmann coordinates) (或 Plücker 坐标 (Plücker coordinates)) 定义为 V 中对应于 L 的 r 向量的坐标，这坐标在成比例的意义下是完全确定的．Grassmann 坐标可以用来将 V 中一切 r 维子空间的集合自然地嵌入维数为 $\binom{n}{r}-1$ 的射影空间内，在这里它作成一个代数簇，称为 **Grassmann 流形** (Grassmann manifold) 这样就得到射影代数簇的若干重要的例子 ([6])

作为微分几何学中基本的形式之一，外代数被用于计算外**微分形式** (differential form) ([7], [8]) 代数拓扑学中许多重要的结果都以外代数的语言来陈述．

例如，设 G 是一个有限维 H 空间 (例如，一个 Lie 群)，系数在一个特征为零的域 k 内的 G 的上同调代数 $H^*(G,k)$ 是一个具有奇数次的生成元的外代数．如果 G 是一个单连通紧 Lie 群，则在 **K 理论** (K-theory) 中所研究的环 $K^*(G)$ 也是一个 (在整数环上的) 外代数

参考文献

[1] Grassmann, H, Gesammelte mathematısche und physıkalısche Werke, 1, Teubner, 1894－1896, Chapt 1, 2

[2] Мальцев, А И, Основы линейной алгебры, 2 изд, М, 1956(中译本 А Н 马力茨夫，线代数基础，高等教育出版社，1959)

[3] Калужнин, Л А, Введение в общую алгебру, М, 1973

[4] Bourbakı, N, Elements of mathematıcs Algebra Multılınear algebra, Addıson-Wesley, 1966, Chapt 2(译自法文)

[5] Bourbakı, N, Elements of mathematıcs Algebra Modules, Rıngs Forms, 2, Addıson-Wesley, 1975, Chapt, 4, 5, 6(译自法文)

[6] Hodge, W V D and Pedoe, D, Methods of algebraıc geometry, 1－3, Cambrıdge Unıv Press, 1947－1954

[7] Фиников, С П, Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М-Л, 1948(中译本 С П 菲尼可夫，嘉当的外形式法，科学出版社，1956)

[8] Sternberg, S, Lectures on dıfferentıal geometry, Prentıce-Hall, 1964

А Л Онищик 撰

【补注】 反交换变量 (antıcommutıng varıables). ($x_ix_j=-x_jx_i$, $x_i^2=0$)有时也称为 Grassmann 变量 (Grassmann varıables)，特别是在**超代数** (superalgebra)，**超流形** (super-manıfold)等场合．此外，也出现 Fermı 粒子变量 (fermıonıc varıables)这个词，特别是在理论物理中．

郝钢新 译

外部和内部边值问题 [exterior and interior boundary value problems; внешняя и внутренняя краевые задачи]

椭圆型偏微分方程在有界（内部）域 D^+ 中，以及相应地，在无界（外部）域 D^- 中的边值问题，这里 D^+ 和 D^- 是由一个同胚于球面的给定的光滑闭曲面 S 划分 Euclıd 空间 $\mathbf{R}^3$ 所成的区域

外部边值问题区别于内部边值问题的基本之点，在于它必须对边值条件补充要求解在无穷远处的确定的性质，以保证解的唯一性，这从所给问题的物理来源的观点来看是很自然的

例如，对 Poısson 方程 $\Delta u=f$(假定函数 f 是充分光滑的且有紧支集)的外部边值问题的情形，要求解 $u(M)$ 在无穷远处是正则的 (regular at ınfinıty) 就足够了，也即要求

$$\lim_{r\to\infty} u(M)=0,\quad r=|OM| \tag{1}$$

对 Poısson 方程 $\Delta u=f$ 的外部边值问题在无界平面域 $D^-\subset\mathbf{R}^2$ 的情形，在无穷远处的正则性条件化为要求解 $u(M)$ 在无穷远处是有界的·

$$u(M)=O(1),\quad r\to\infty. \tag{2}$$

在对 Helmholtz 方程 $\Delta u+k^2u=f(k^2>0)$ 的外部边值问题的情形，在无穷远处的正则性要求对导出唯一解就显得不充分了，而要用所谓的**辐射条件** (radıatıon condıtıons) 对 $\mathbf{R}^3$ 中的区域 D^-，

$$u(M)=O(r^{-1}),$$
$$\frac{\partial u}{\partial r}\pm iku=O(r^{-1}),\ r\to\infty, \tag{3}$$

而对 $D^-\subset\mathbf{R}^2$，

$$u(M)=O(r^{-1/2}),$$
$$\frac{\partial u}{\partial r}\pm iku=O(r^{-1/2}),\ r\to\infty \tag{4}$$

这里，符号的选择依赖于问题的条件和**主基本解** (prıncıpal fundamental solutıon) 的选择．关于在无穷远处的其他条件见**极限吸收原理** (lımıt-absorptıon prıncıple)，**极限振幅原理** (lımıtıng-amplıtude prıncıple)

现在考虑一般线性椭圆型方程

$$Lu\equiv\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f \tag{5}$$

在 Euclıd 空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant2)$ 的区域 D^+ 和 D^- 中的边值问题．这里 D^+ 和 D^- 由 $\mathbf{R}^n$ 中一个同胚于球面的闭光滑超曲面 S 所分离，诸函数 a_{ik}，b_i，c 和 f 都假定充分光滑，且 f 有紧支集．形如 (1) 或 (2) 的在无穷远处的正则性条件，相应地对于 $n\geqslant3$ 或 $n=2$，在外部边值问题中将是充分的，如果算子 L 满足最大值原理，且存在一个唯一的主基本解，特别地，对此必须 $c\leqslant0$ (见[1]，[2]，[3])．一般形式的辐射条件、极限吸收原理和极限振辐原理的可应用性问题，还没有得到彻底的研究 (1977)

除在无穷远处的条件外，外部和内部的边值条件也可因解存在的条件不同而不同．例如，对 Laplace 方程 $\Delta u=0$ 在有界域 $D^+\subset\mathbf{R}^3$ 的内部 **Neumann 问题** (Neumann problem) 的情形下，解存在的必要条件有如下的形式

$$\int_S\psi(M)\,dS=0,$$

其中 $\psi(M)$ 是 Neumann 条件 $\partial u/\partial n=\psi(M)$ 中已给的边界函数 然而对无界域 $D^-\subset\mathbf{R}^3$ 中的外部 Neumann 条件而言，这个条件不再是必要的．

参考文献

[1] Смирнов, В И, Курс высшей математики, т 4, 5 изд, М, 1958(中译本 В И 斯米尔诺夫，高等数学教程，第四卷一、二分册，人民教育出版社，1959，第五卷一、二分册，高等教育出版社，1959)

[2] Владимиров, В С, Уравнения математической физики, 2 изд, М, 1971

[3] Купрадзе, В Д, Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, М-Л, 1950

[4] Купрадзе, В Д, Методы потенциала в теории упругости, М, 1963

[5] Mıranda, C, Partıal dıfferentıal equatıons of ellıptıc

type, Sprınger, 1970(译自意大利文)

Е Д Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Тихонов, А Н, Самарский, А А, Уравнения математической физики, 1977(中译本. А Н 吉洪诺夫, А А 萨马尔斯基, 数学物理方程, 上、下册, 高等教育出版社, 1956).

[A2] John, F, Partıal dıfferentıal equatıons, Sprınger, 1971 (中译本 F 约翰, 偏微分方程, 科学出版社, 1986)

[A3] Garabedıan, P R, Partıal dıfferentıal equatıons, Wıley, 1964

[A4] Петровский, И Г, Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд, 1961(中译本 И Г 彼得罗夫斯基, 偏微分方程讲义, 人民教育出版社, 第2版, 1965).

孙和生 译 陆柱家 校

外形式 [exterior form, внешняя форма], r 次的

向量空间 V 的**外代数**(exterıor algebra) $\wedge V$ 中一个 r 次齐次元素, 即 r 次外幂 $\wedge^r V$ 中的元素. "向量空间 V 上 r 次外形式" 这个词通常表示 V 上一个斜对称 r 线性函数(或斜对称 r 次共变张量) V 上斜对称 r 线性函数空间 $(r=0, 1, \ \ )$ 的直和, 带有**外积**(exterıor product), 是一个与外代数 $\wedge V^*$ 同构的代数.

外形式也理解为一个**微分形式**(dıfferentıal form)

А Л Онищик 撰 郝钢新 译

外形式法[exterior forms, method of; внешних форм метод]

见 **Cartan 外形式法** (Cartan method of exterıor forms).

外法线[exterior normal, внешняя нормаль], 凸曲面的

垂直于**支撑超平面** (supportıng hyperplane) 的向量, 它指向由这支撑超平面所定义的不含该曲面的点的半空间

Е В Шикин 撰

【补注】 类似地可定义立体的外法线, 要作更广泛的了解, 见[A1]

参考文献

[A1] Schneıder, R, Boundary structure and curvature of convex bodıes, ın J Tölke and J M Wılls (eds) Contrıbutıons to geometry, Bırkhäuser, 1979

姜国英 译

外积 [exterior product, внешнее произведение]

定义在域 K 上的 n 维向量空间 V 上的张量的**外代数**(exterıor algebra)中的一个基本运算.

令 $e_1, \ \ , e_n$ 是 V 的一个基, 令 a 和 b 分别是 p 形式和 q 形式

$$a=a^{i_1 \ \ i_p}e_{i_1}\otimes \ \ \otimes e_{i_p},$$
$$b=b^{j_1 \ \ j_q}e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_q}.$$

形式 a 与 b 的外积 (exterıor product) 是张量积 $a\otimes b$ 的**交错**(alternation)所得到的 $(p+q)$ 形式 c 形式 c 记作 $a\wedge b$, 它的坐标是斜对称的

$$c^{k_1 \ \ k_{p+q}}=\frac{1}{p!q!}\delta^{k_1 \ \ \ \ k_{p+q}}_{i_1 \ \ i_p j_1 \ \ j_q}a^{i_1 \ \ i_p}b^{j_1 \ \ j_q},$$

这里 $\delta^{k_1 \ \ k_{p+q}}_{i_1 \ \ j_q}$ 是广义 **Kronecker 符号**(Kronecker symbol)的分量 共变张量的外积用类似的方式定义

外积的基本性质列在下面

1) $(ka)\wedge b=a\wedge(kb)=k(a\wedge b)$, $k\in K$(齐次性),

2) $(a+b)\wedge c=a\wedge c+b\wedge c$(分配性),

3) $(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$ (结合性),

4) $a\wedge b=(-1)^{pq}b\wedge a$, 如果 K 的特征不等于 2, 则等式 $a\wedge a=0$ 对于任意奇数价的形式 a 成立

s 个向量的外积称为一个可分解的 s 向量 (decomposable s-vector) 任意 s 维**多元向量**(poly-vector)是可分解的 s 向量的线性组合. 这个线性组合的分量是向量 $a_1, \ \ , a_s$ 的系数所组成的 $(n\times s)$ 矩阵 (a^i_j) $(1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant s)$ 的 $(s\times s)$ 子式 如果 $s=n$, 则它们的外积有以下形式

$$\alpha_n=a_1\wedge \ \ \wedge a_n=\det(a^i_j)e_1\wedge \ \ \wedge e_n$$

在特征不等于 2 的域上, 等式 $a_1\wedge \ \ \wedge a_n=0$ 成立当且仅当向量 $a_1, \ \ , a_n$ 线性相关. 一个非零可分解的 s 向量 α_s 在 V 中定义一个 s 维定向子空间 A, 平行于向量 $a_1, \ \ , a_s$, 并且把 A 中从一点出发由向量 $a_1, \ \ , a_s$ 所构成的**超平行体**(parallelotope)记作 $[a_1,\cdot \ , a_s]$ 条件 $a\in A$ 与 $a_s\wedge a=0$ 是等价的

参考文献见**外代数**(exterıor algebra).

А П Купцов 撰

【补注】 对于一个 p 次的 a 和一个 q 次的 b, 条件 $a\wedge b=(-1)^{pq}b\wedge a$ 有时也称为分次交换性 (graded commutatıvıty).

郝钢新 译

外插[extrapolation, экстраполяция], 函数的

函数到其定义域边界之外的延拓, 其中延拓了的函数(通常是解析的)属于给定的某个函数类. 一般借助于函数在其定义域中一个有限点集(插值结点 (ınterpolatıon nodes))上的性质建立的公式来完成函数的外插

函数**插值** (ınterpolatıon) 的概念习惯上是外插的反概念(在这个术语限定的含意上), 它是构造性地(可能是近似地)重建函数在其定义域内的值

例 如果给定函数 $f\ [a,b]\to\mathbf{R}$ 在结点 $x_k\in[a,b]$ $(k=0, \ \ ,n)$ 处之值, 那么 Lagrange 插值多项式 $L_n(x)$

(见 **Lagrange 插值公式** (Lagrange interpolation formula)) 在整个实轴 **R** 上有定义，它就是在次数不超过 n 的多项式类中 f 在 $[a, b]$ 之外的外插

有时函数的外插不利用它的整个定义域，而仅用到其中一部分，即，所做的外插仅只是给定函数的一个有限部分的外插．在这种情况下外插公式也给出它定义域中相应点的函数值（一般说来是近似的） 实际问题的求解中，当计算函数在其定义域外某些部分函数值所需的信息不够时，常使用这种方法．

Л Д Кудрявцев 撰 蔡大用 译

极值曲线 [extremal, экстремаль]

Euler 方程 (Euler equation) 的光滑解，Euler 方程是变分学问题中极值的必要条件

在最简单的变分学问题的情形中，即对于泛函

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx, \tag{1}$$

在所有满足边界条件

$$y(x_1)=y_1, \quad y(x_2)=y_2 \tag{2}$$

的曲线 $y(x)$ 中求它的极值的问题，Euler 方程有形式

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0,$$

即它是一个二阶常微分方程．它的显式是

$$F_{y'y'}y''+F_{y'y}y'+F_{y'x}-F_y=0 \tag{3}$$

如果问题(1)，(2) 中的极值由一光滑曲线 $y(x)$ $(x_1\leqslant x\leqslant x_2)$ 达到，那么 $y(x)$ 是一极值曲线，即它是 Euler 方程 (3) 的具有初始条件 $y(x_1)=y_1$ 的解．

当 $F_{y'y'}\neq 0$ $(x_1\leqslant x\leqslant x_2)$ 时，Euler 方程仅有光滑解 (如果 $F(x,y,y')$ 是二次连续可微函数)．如果 $F_{y'y'}$ 可以等于零，那么 Euler 方程的解还可以包括分段光滑曲线．假设一分段光滑曲线 $y(x)$ $(x_1\leqslant x\leqslant x_2)$ 产生出问题 (1)，(2) 中的极值 于是它的每一个光滑部分是一极值曲线，且在角点 $(c, y(c))$ 处应该满足 Weierstrass-Erdmann 必要条件 (见 **Weierstrass-Erdmann 隅角条件** (Weierstrass-Erdmann corner conditions))

$$F_{y'}|_{y(c-0)}=F_{y'}|_{y(c+0)},$$

$$[F-y'F_{y'}]|_{y(c-0)}=[F-y'F_{y'}]|_{y(c+0)}$$

由若干段极值曲线组成的且满足 Weierstrass-Erdmann 隅角条件的分段光滑曲线称作**折极值曲线** (polygonal extremal 或 broken extremal) 如果问题 (1)，(2) 中的极值由一分段光滑曲线达到，那么这曲线是一条折极值曲线 但是，为了简短起见，常常省略术语 "折"，提到泛函 (1) 的极值曲线，就意味着是折极值曲线．

在泛函 $J(y)$ 依赖于几个函数的情形，即 (1) 中的 y 是一个 n 维向量 $y=(y_1, \quad, y_n)$ 的情形下，Euler 方程成为 n 个二阶常微分方程的组

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0, \quad i=1, \quad, n, \tag{4}$$

极值曲线 (折极值曲线) 的定义是类似的．

在关于条件极值问题的更一般的情形下 (见**等周问题** (isoperimetric problem)，**Bolza 问题** (Bolza problem)，**Lagrange 问题** (Lagrange problem)，以及 **Mayer 问题** (Mayer problem))，极值曲线是利用乘子法则来定义的

例如，假设一分段光滑曲线 $y(x)=(y_1(x), \quad, y_n(x))$ 实现 Lagrange 问题

$$\left.\begin{aligned} J(y)=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')dx, \\ f \quad \mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_\beta(x,y,y')=0, \quad \beta=1, \quad, m<n, \\ \varphi_\beta \quad \mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\psi_k(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2))=0, k=1, \quad, p\leqslant 2n+1 \tag{7}$$

中的极值．于是，由乘子法则，存在这样的常数 (一般说来，不等于零) λ_0 和这样的乘子 $\lambda_i(x)$，$(i=1, \quad, m)$ 使得向量函数 $y(x)$ 是泛函

$$I(y,x)=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y',\lambda)dx \tag{8}$$

的通常的 (非条件的) 极值曲线，其中

$$F(x,y,y',\lambda)=\lambda_0 f+\lambda_1\varphi_1+ \quad +\lambda_m\varphi_m.$$

泛函 (8) 的非条件极值问题的 Euler 方程组

$$F_{\lambda_\beta}-\frac{d}{dx}F_{\lambda_\beta'}=\varphi_\beta(x,y,y')=0, \quad \beta=1, \quad, m, \tag{9}$$

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0, i=1, \quad, n, \tag{10}$$

包括(9)的 m 个与约束 (6) 一致的方程，以及 (10) 的 n 个附加方程，(10) 和 (9) 一起 (在给定的初始条件下) 可定出未知函数 $y_1(x)$， $, y_n(x)$，$\lambda_1(x)$， $, \lambda_m(x)$

关于泛函 (8) 的非条件极值问题改写的 Euler 方程组 (9)，(10) 的光滑 (分段光滑) 解称作条件极值问题 (5)，(6) 的极值曲线 (折极值曲线)

一曲线是极值曲线这一性质，并不是这曲线实现泛函极值的唯一的必要条件．这由下面的事实可以解

释 Euler方程是作为泛函的第一变分等于零的必要条件导出的，因此这里仍有研究泛函的第二变分的符号的问题 极值曲线的进一步的研究借助于 Lagrange，Weierstrass 和 Jacobi 的必要条件，也借助于基于构造一极值曲线场的充分条件

参考文献

[1] Bliss, G A , Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ Press, 1947

[2] Лаврентьев, М А , Люстерник, Л А , Курс вариационного исчисления, 2 изд , М -Л , 1950

И Б Вапнярский 撰

【补注】 Euler方程还称作 Euler-Lagrange 方程 (Euler-Lagrange equation) .

参考文献

[A1] Fleming, W H and Rishel, R W , Deterministic and stochastic optimal control, Springer, 1975

[A2] Gel'fand, I M and Fomin, S V , Calculus of variations, Prentice-Hall, 1963 (译自俄文)

[A3] Weinstock, R , Calculus of variations, McGraw-Hill, 1952

孙和生 译 陆柱家 校

极值曲线场 [extremal field ,экстремалей поле]

变量 $x, y_1, \quad , y_n$ 的 $(n+1)$ 维空间中的一个区域，它被泛函

$$J=\int_{(A)}^{(B)} F(x,y_1, \quad ,y_n,y_1', \quad ,y_n')dx \tag{1}$$

的一族不相交的 n 参数极值曲线所覆盖，其中 A 和 B 是极值曲线族通过的起点和终点 .

正常的（或一般的）和中心的极值曲线场是不同的情形 正常极值曲线场 (proper extremal field) 对应于这样的情形，这族极值曲线横截于某个曲面

$$\varphi(x,y_1,\cdot \quad ,y_n)=0, \tag{2}$$

即在这曲面上满足横截条件

$$\frac{F-\sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}}{\varphi_x}=\frac{F_{y_1}}{\varphi_{y_1}}= \quad =\frac{F_{y_n}}{\varphi_{y_n}} \tag{3}$$

也就是说，对正常极值曲线场，(1)中的点 A（或 B）属于曲面 (2)，且在其上满足条件 (3)

中心极值曲线场 (central extremal field) 对应于这样的情形，这族极值曲线是由场外一点，例如由一公共的起始点 A 发出的 .

极值曲线场的斜率 (slope of an extremal field) 是向量函数 $u(x,y)=(u_1(x,y), \quad ,u_n(x,y))$，它在场的每一点 $(x,y)\ =(x,y_1, \quad ,y_n)$ 处就是向量 $y'(x)=(y_1'(x), \quad ,y_n'(x))$.

对具有活动端点的问题，当 $y(x)$ 是一极值曲线时，积分 (1) 的微分有形式

$$dJ=\left[\left(F-\sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i}\right)dx+\sum_{i=1}^{n} F_{y_i} dy_i\right]_{x_1}^{x_2}, \tag{4}$$

其中微分 dx 和 dy 沿着活动端点 $A(x_1,y(x_1))$ 和 $B(x_2, y(x_2))$ 的位移线计算，而 y' 是极值曲线 $y(x)$ 的切线的角系数

(4) 中方括号中的表达式可以写成

$$-Hdx+\sum_{i=1}^{n} p_i dy_i, \tag{5}$$

这里

$$H=-F(x,y,u(x,y))+\sum_{i=1}^{n} u_i(x,y)F_{y_i}(x,y,u(x,y)),$$

$$p_i=F_{y_i'}(x,y,u(x,y)) .$$

在一个极值曲线场中表达式(5)是变量 $x, y_1, \cdot , y_n$ 的某个函数的全微分，这是因为等式

$$-\frac{\partial H}{\partial y_i}=\frac{\partial p_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial y_k}=\frac{\partial p_k}{\partial y_i}, \quad i,k=1, \quad ,n,$$

成立 这个函数，准确到一个常数项，是曲线积分

$$\int_C -H(x,y,p)dx+\sum_{i=1}^{n} p_i dy_i, \tag{6}$$

它称作 Hilbert 不变积分 (invariant Hilbert integral). (6) 中 C 是连接点 A 和 B 且落在极值曲线场中的任意曲线 $y(x)$. 术语“不变的”着重强调这样的事实 积分 (6) 不依赖于曲线 C 的选择，而仅由给定的端点所决定 .

Hilbert 积分 (6) 可写成等价形式

$$\int_C [F(x,y,u)-\sum_{i=1}^{n} u_i F_{y_i}(x,y,u(x,y))]dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} F_{y_i}(x,y,u)dy_i=$$

$$=\int_C \left[F(x,y,u)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dy_i}{dx}-u_i\right)F_{y_i}(x,y,u)\right]dx \tag{7}$$

如果取极值曲线 E 作为比较曲线 C，那么 $\frac{dy_i}{dx}=u_i$，因此对 Hilbert 积分 (7) 得到表达式

$$\int_E F(x,y,u(x,y))\ dx, \tag{8}$$

它与点 A 和 B 之间的测地距离相一致，这个距离被定义为泛函 (1) 在连接点 A 和 B 的极值曲线上的值 .

极值曲线场和 Hilbert 不变积分之间的上述性质是由 K Weierstrass 发展的极值的充分条件理论的基础

它使得在研究泛函增量

$$\Delta J = J(C) - J(E) \tag{9}$$

的符号时，泛函 $J(E)$ 沿一条极值曲线（假定它被极值曲线场所围）的值，可用连接同样两点的比较曲线 C 上的 Hilbert 不变积分来表达　这样，泛函（9）的增量可表为比较曲线 C 上的曲线积分

$$\Delta J = \int_C [F(x,y,y') - F(x,y,u) - \sum_{i=1}^{n} (y_i' - u_i) F_{y_i'}(x,y,u)] dx = \int_C \mathscr{E}(x,y,u,y')\, dx \tag{10}$$

(10) 中的被积函数 $\mathscr{E}(x,y,u,y')$ 称作 Weierstrass $\mathscr{E}$ 函数　如果对 y' 的任意有限值这个函数在极值曲线场的任意点上是非负的（非正的），那么在极值曲线 E 上达到泛函（1）在连接点 A 和 B 的所有比较曲线族上的强最小值（最大值）.

参考文献

[1] Bliss, G A , Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ Press, 1947

[2] Лаврентьев, М А , Люстерник, Л А , Курс вариационного исчисления, 2 изд , М -Л , 1950

[3] Ахиезер, Н И , Лекции по вариационному исчислению, М , 1955 (英译本 Akhiezer, N I , The calculus of variations, Blaisdell, 1962)　　И Б Вапнярский 撰

【补注】 还可论及变分问题的平稳曲线场 (field of stationary curves)，这是一个与上述变分问题的极值曲线场的概念完全类似地定义的概念　相应地还有平稳曲线场的斜率函数 (slope function)，亦见**极值曲线族** (extremal set)

Weierstrass 的方法见 **Weierstrass 条件** (Weierstrass conditions) 和 **Weierstrass $\mathscr{E}$ 函数** (Weierstrass $\mathscr{E}$-function)

极值曲线场英文还用 "field of extremals"

参考文献

[A1] Fleming, W H and Rishel, R W , Deterministic and stochastic optimal control, Springer, 1975

[A2] Gel'fand, I M and Fomin, S V , Calculus of variations, Prentice-Hall, 1963 (译自俄文)

[A3] Courant, R and Hilbert, D , Methods of mathematical physics, 1-2, Interscience, 1953-1962 (中译本 R 柯朗, D 希尔伯特, 数学物理方法, Ⅰ, Ⅱ, 科学出版社, 1977)　　孙和生 译　陆柱家 校

极值长度 [extremal length, экстремальная длина]，曲线族的

一个概念，同曲线族的模的概念一起是共形不变量定义的一种推广形式，并且是**极值度量法** (extremal metric, method of the) 的基础

设 Γ 是 **Riemann 曲面** (Riemann surface) R 上的一族局部可求长曲线　若存在 R 上给定的**共形不变度量** (conformally-invariant metric)) $\rho(z)|dz|$ 的非空类 P，使得 $\rho(z)$ 在 z 平面内关于每个局部单值化参数 $z(=x+iy)$ 为平方可积，且若

$$A_\rho(R) = \iint_R \rho^2(z)\, dx\, dy \quad 与 \quad L_\rho(\Gamma) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \int_\gamma \rho(z)|dz|$$

不同时等于 0 或 ∞（上述每个积分均理解为 Lebesgue 积分），则关于 Γ 的参模问题 (modulus problem) 便有定义　在这种情况下，称量

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho\in P} \frac{A_\rho(R)}{[L_\rho(\Gamma)]^2}$$

为曲线族 Γ 的模 (modulus of the family of curves)　称 $M(\Gamma)$ 的倒数为曲线族 Γ 的极值长度 (extremal length of the family of curves Γ)

曲线族的参模问题通常定义如下　设 P_L 是 P 中满足下述条件的 ρ 构成的子类，对于 $\rho\in P_L$ 和 $\gamma\in\Gamma$,

$$\int_\gamma \rho(z)|dz| \geqslant 1$$

若集合 P_L 非空，则称量

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho\in P_L} A_\rho(R)$$

为族 Γ 的模　若 P 非空但 P_L 是空集，则 $M(\Gamma)$ 的值定义为 ∞　下面采用的是上述模的后一种定义

设 Γ 是 Riemann 曲面 R 上的局部可求长曲线族，其参模问题有定义，并设 $M(\Gamma)\neq\infty$，则 P_L 中每个度量都是关于 Γ 的模问题的容许度量 (admissiable metric). 若在 P_L 中存在度量 $\rho^*(z)|dz|$，使得

$$\iint_R [\rho^*(z)]^2 dx\, dy = M(\Gamma),$$

则称该度量为 Γ 的模问题的一个极值度量 (extremal metric).

模的基本性质是它的共形不变性.

定理 1　设 R 和 R_1 是两个共形等价 Riemann 曲面，f 是 R 到 R_1 的单叶共形映射，Γ 是 R 上给定的局部可求长曲线族，Γ_1 是 Γ 在映射 f 下的象曲线族. 若 Γ 的参模问题有定义，且 Γ 的模为 $M(\Gamma)$，则 Γ_1 的参模问题亦有定义，且 $M(\Gamma_1)=M(\Gamma)$

下面的定理表明，如果极值度量存在，那么它本质上是唯一的

定理 2　设 Γ 是 Riemann 曲面 R 上的局部可求长曲线族，假定 Γ 的参模问题有定义，且 $M(\Gamma)\neq\infty$　若 $\rho_1^*(z)|dz|$ 和 $\rho_2^*(z)|dz|$ 是该参模问题的极值度量，则在 R

上除可能有 R 的一个零测度子集外，处处有 $\rho_2^*(z)=\rho_1^*(z)$

曲线族的模的例子

1) 设 D 是具有边 a 和 b 的矩形，设 $\Gamma(\Gamma_1)$ 是 D 内连接长度为 $a(b)$ 的边的局部可求长曲线族，则

$$M(\Gamma)=\frac{a}{b}, \quad M(\Gamma_1)=\frac{b}{a}$$

2) 设 D 是圆环 $r<|z|<1$，设 Γ 是 D 内分隔 D 的边界分支的可求长 Jordan 曲线类，Γ_1 是 D 内连接 D 的边界分支的局部可求长曲线类，则 $M(\Gamma)=(\ln 1/r)/2\pi$, $M(\Gamma_1)=2\pi/(\ln 1/r)$ 在这两种情形下，$M(\Gamma)$ 和 $M(\Gamma_1)$ 是 D 的示性共形不变量．因此，称 $M(\Gamma)$ 为关于类 Γ 的区域 D 的模 (modulus of the domain)，称 $M(\Gamma_1)$ 为关于 Γ_1 的 D 的模

在**拟共形映射** (quasi-conformal mapping) 下曲线族的模之间有熟知的联系 设 Γ 是某个区域 D 中的曲线族，Γ_1 是 Γ 在 D 的 K 拟共形映射下的象，则 Γ 与 Γ_1 的模 $M(\Gamma)$ 与 $M(\Gamma_1)$ 满足不等式

$$K^{-1}M(\Gamma)\leqslant M(\Gamma_1)\leqslant KM(\Gamma)$$

模概念对于多个曲线族的推广在应用中显示出其重要性．设 $\Gamma_1, \quad, \Gamma_n$ 是 Riemann 曲面 R 上的局部可求长曲线族（通常 $\Gamma_1, \quad, \Gamma_n$ 分别是同伦曲线类）．设 $\alpha_1, \quad, \alpha_n$ 是不全为零的非负实数，而设 $P(\{\Gamma_j\},\{\alpha_j\})$ 是 R 上共形不变度量 $\rho(z)|dz|$ 的类，这些 $\rho(z)$ 满足 $\rho^2(z)$ 关于每个局部参数 $z=x+iy$ 可积，并使得对于 $\gamma_j\in\Gamma_j(j=1, \quad, n)$ 有

$$\int_{\gamma_j}\rho(z)|dz|\geqslant\alpha_j$$

若集合 $P(\{\Gamma_j\},\{\alpha_j\})$ 非空，则称关于曲线族 $\{\Gamma_j\}$ 和数集 $\{\alpha_j\}$ 的参模问题 $\mathscr{P}(\{\Gamma_j\},\{\alpha_j\})$ 有定义 在这种情形下，称量

$$M(\{\Gamma_j\},\{\alpha_j\})=\inf_{\rho\in P(\{\Gamma_j\},\{\alpha_j\})}\iint_R\rho^2(z)\,dx\,dy$$

为该问题的模．若在 $P(\{\Gamma_j\},\{\alpha_j\})$ 中存在度量 $\rho^*(z)|dz|$，使得

$$\iint_R[\rho^*(z)]^2dx\,dy=M(\{\Gamma_j\},\{\alpha_j\}),$$

则称该度量为关于参模问题 $\mathscr{P}(\{\Gamma_j\},\{\alpha_j\})$ 的**极值度量**．

如此定义的参模问题也是一个共形不变量 对于这样的模，有类似于定理 2 的唯一性定理 关于参模问题 $\mathscr{P}(\{\Gamma_j\},\{\alpha_j\})$ 的极值度量的存在性，已在相当广泛的假设下被证明．上述定义可推广到曲面 R_1 上的曲线族 $\Gamma_1, \quad, \Gamma_n$ 的情形，R_1 是从 R 除去有限多个点 $a_1, \cdot \quad, a_k$ 而得到的曲面，曲线族 $\Gamma_1, \quad, \Gamma_k(k\leqslant n)$ 由在 R_1 上分别同伦于以所选定的各点为中心半径充分小的圆周的闭 Jordan 曲线组成．这种极值度量问题同前述单连通域 D 关于一点 $a\in D$ 的模概念（见**圆环的模** (modulus of an annulus)），均与平面点集的**容量** (capacity) 理论有关

曲线族的模概念的其他推广与修正亦为人们所知（见[6]－[10]） 这一概念已被推广到空间中的曲线和曲面的情形．已建立了关于这种模的唯一性定理及一系列性质，特别地，已经得到关于空间 K 拟共形映射的一个与 (1) 类似的不等式（见[9]和[10]）

参考文献

[1] Ahlfors, L V and Beurling, A , Conformal invariants and function-theoretic null-sets, *Acta Math* , **83** (1950), 101－129

[2] Jenkins, J , Univalent functions and conformal mappings, Springer, 1958

[3] Ahlfors, L V , Lectures on quasiconformal mappings, v Nostrand, 1966

[4] Jenkins, J A , On the existence of certain general extremal metrics, *Ann of Math* , **66** (1957), 3, 440－453

[5] Кузьмина, Г В , Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы, Л , 1980 (英译本 Kuz'mina, G V , Moduli of families of curves and quadratic differentials, Amer Math Soc , 1982)

[6] Hersch, J , Longeurs extremales et theorie des fonctions, *Comment Math Helv* , **29** (1955), 4, 301－337

[7] Тамразов, П М , 《Докл АН УССР》, 1966, 1, 51－54

[8] Fuglede, B , Extremal length and functional completion, *Acta Math* , **98** (1957), 171－219

[9] Шабат, Б В , 《Докл АН СССР》, **130** (1960), 6, 1210－1213

[10] Сычев, А В , Модули и пространственные квазиконформные отображеная, Новосиб , 1983

Г В Кузьмина 撰 杨维奇 译

极值度量法 [**extremal metric, method of the, экстремальной метрики метод**]

几何函数论中的基本方法之一，同微分几何与拓扑学有密切关系 极值度量方法基于属于特定同伦类的曲线的长度与被其填充的区域的面积之间的关系，此处这些曲线长度和面积是用对应于所研究的特定极值问题的特殊度量来计算的 （关于几何函数论中的极值问题见**单叶函数** (univalent function)）

极值度量方法有多种形式 最初的形式是 Grötzsch **带形法** (Grötzsch strip method)，这是对联系长度和面积的论证方法的带根本性的改进，要用二连通区域和矩形的示性共形不变量来运算（见 **Grötzsch 原理** (Grötzsch principle)）．用他的带形方法，H Grötzsch 得到关于共形和拟共形映射理论的一系列经典结果（见，比如，**Grötzsch 定理** (Grötzsch theorems)）．

极值度量方法发展的最重要阶段是 L V Ahlfors 和

A Beurlmg 关于曲线族**极值长度** (extremal length) 概念的引入, J A. Jenkins 提出的曲线族模概念在多个曲线族情形的推广, 以及在此情形的模问题的极值度量唯一性的证明

在 1939 年与 1941 年间, O Teichmuller 曾给出 (未加证明) 一个一般原理, 断言 几何函数论中极值问题的解以一种确定的方式同某个**二次微分** (quadratic differential) 相联系 极值度量方法发展的最重要的结果之一是 Jenkins 的 "一般系数定理" (见 **Jenkins 定理** (Jenkins theorem) 及[2]) 作为特殊的应用, 该定理包含了几乎所有已知的关于**单叶函数** (univalent function) 的基本结果. Jenkins 的定理中的唯一性结果是精确的, 并已建立了关于无多重极点的二次微分的类似定理 (见[3]) 用这一方法, 关于具有两个和三个不同边界分支的区域的某些极值问题已被解决, 其所有极值映射的集合已被分析得很透澈 (见[4]和[5]) 借助 "一般系数定理" 给出极值问题的解是极值度量方法的一种形式, 在研究工作中用得很多

极值度量方法的另一种具有广泛应用的形式是熟知的参模方法 (moduli method) 这一技巧的基础在于在给定的极值问题与某个关于一个或多个曲线族的参模问题之间建立直接的联系 (见曲线族的**极值长度** (extremal length)), 并且解出该极值度量问题. 一般地说, 有关参模问题的极值度量成为度量 $|Q(z)|^{\frac{1}{2}}|dz|$, 其中 $Q(z)dz^2$ 是一个二次微分, 它的极点由所给问题的条件确定 曲线族模问题的一个直接效用是引出了关于给定区域分为同特定同伦曲线相联系的单连通和二连通域族的极值划分的一系列问题的肯定结果. 后一陈述要追溯到 M A. Лаврентьев 和 Γ M Голузин 的研究工作 (见[5])

极值度量方法同变分方法和**对称化方法** (symmetrization method) 合用亦已获得成功 例如, 同时使用模方法与**内变分方法** (internal variations, methof of), 给出在十分一般的假设下曲线族模问题的极值度量存在性的证明 合用极值度量方法与对称化方法在许多情况下可以证实相应的二次微分的极点分布具有某种对称性, 从而可将给定问题归结为较简单的情况.

极值度量方法还有种种别的形式 其中之一基于求解单叶和多叶映射的极值问题 (对于后者, Teichmuller 原理是不适用的), 系通过直接应用给定区域的某些子集在所述映射下的象的面积表达式来实现, 该面积可视为原来集合在某个新度量下的面积, 用集合本身的面积来表达. 极值度量方法的这一形式在求解有关多连通区域的跨度问题中显得特别有效 (见[7]) 这一方法的一个发展是 Jenkins 的 "特殊系数定理" (见 **Jenkins 定理** (Jenkins theorem))

作为特例, 该定理化为**面积原理** (area principle).

参考文献

[1] Голузин, Γ M, Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд, M, 1966 (中译本 Γ M 戈鲁辛, 复变函数的几何理论, 科学出版社, 1956)

[2] Jenkins, J, Univalent functions and conformal mappings, Springer, 1958

[3A] Тамразов, П M, 《Матем сб》, **72** (1967), 1, 59−71

[3B] Тамразов, П M, 《Матем сб》, **73** (1968), 1, 97−125

[4] Тамразов, П M, 《Тр Томского гос ун-та》, **210** (1969), 6, 111−118

[5] Кузьмина, T B, Модули семейств кривых и квадратичные дефференциалы, Л, 1980 (英译本 Kuz'mina, G V, Moduli of families of curves and quadratic differentials, Amer Math Soc, 1982)

[6] Jenkins, J A, On the existence of certain general extremal metrics, *Ann of Math*, **66** (1957), 3, 440−453

[7] Jenkins, J A, On some span theorems, *Illinois J Math*, **7** (1963), 1, 104−117

[8] Тамразов, П M, 《Матем сб》, **66** (1965), 4, 502−524

[9] Сычев, A B, Модули и пространственные квазиконформные отображения, Новосиб, 1983

[10] Rodin, B, The method of extremal length, *Bull Amer Math Soc*, **80** (1974), 4, 587−606

Γ B Кузьмина 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ahlfors, L V, Conformal invariants, Topics in geometric function theory, McGraw-Hill, 1973

[A2] Pommerenke, Ch, Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht, 1975 (中译本 Ch 泊茂仁克, 单叶函数, 科学出版社, 1987)

杨维奇 译

极值问题 [extremal problem, экстремальная задача]

求函数或泛函的极值的问题, 即要根据加在不同种类的 (相的, 微分的, 积分的, 等等) 泛函或目标函数上的最小值或最大值条件, 对参数或者函数 (控制) 进行选择. 亦见**变分学** (variational calculus), **数学规划** (mathematical programming) 和**最优控制** (optimal control)

陆柱家 译

极值问题, 数值解法 [extremal problems, numerical methods, экстремальные задачи, численные матоды решения]

应用于求函数和泛函的极值 (极大或极小) 的计算数学方法

对于在无穷维函数空间所考虑的极值问题 (例如, 用常或偏微分方程描述的过程的最优控制问题) 的数值解, 可以利用经过适当推广的许多数学规划的方法, 这些方法是对有限个变量的函数的极小化或极大化问题所发展的 同时, 在具体问题中十分重要的是正确选择适当的函数空间, 在此空间中来考虑问

题．在选择这样的空间时通常顾及到物理考虑，容许控制的性质，以及对于一个固定控制的相应的初始边值问题的解的性质等等．

例如，由泛函

$$J(u)=\int_{t_0}^{T} f^0(x(t), u(t), t)dt+F(x(T)) \qquad (1)$$

在条件

$$\dot{x}=f(x, u(t), t),\ t_0\leqslant t\leqslant T,\ x(t_0)=x_0, \qquad (2)$$

$$u=u(t)\in V(t),\ t_0\leqslant t\leqslant T \qquad (3)$$

之下的极小化构成的最优控制问题在函数空间 $L_2^r[t_0, T]$ 中考虑通常是方便的 这里 $x=(x^1, \dots, x^n)$, $u=(u^1, \cdot, u^r)$, $f=(f^1, \cdot, f^n)$，其中 $f^i(x, u, t)(i=0,1, \dots, n)$，$F(x)$ 是一些已给的函数，t_0，T 是已知的时刻，$t_0<T$，x_0 是给定的初始点，对每个 $t\in[t_0, T]$，$V(t)$ 是 Euclid 空间 E^r 中的一个给定的集合，$L_2^r[t_0, T]$ 是 r 维向量函数 $u=u(t)=(u^1(t), \dots, u^r(t))$ $(t_0\leqslant t\leqslant T)$ 的 Hilbert 空间，其中 $u^i(t)$ 和它的平方在 $[t_0, T]$ 上是 Lebesgue 可积函数 $(L_2^1[t_0, T]=L_2[t_0, T])$，此空间中两个函数 $u(t)$ 和 $v(t)$ 的标量积等于

$$<u, v>_{L_2^r}=\int_{t_0}^{T}\sum_{i=1}^{r} u^i(t)v^i(t)dt,$$

范数为

$$\|u\|_{L_2^r}=\left(\int_{t_0}^{T}\sum_{i=1}^{r}|u^i(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

在函数 $f^i(x, u, t)$，$F(x)$ 的确定的光滑性之下，泛函 (1) 的增量可以表为

$$J(u+h)-J(u)=-\int_{t_0}^{T}\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial H(u)}{\partial u^i}h^i(t)dt+R=$$

$$=<-\frac{\partial H(u)}{\partial u},\ h>_{L_2^r}+R,\ R=o(\|h\|_{L_2^r}), \qquad (4)$$

其中

$$H(x,\psi,u,t)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i f^i(x,u,t)-f^0(x,u,t), \qquad (5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=\left(\frac{\partial H}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial u^r}\right),\ \frac{\partial H(u)}{\partial u}=\frac{\partial H}{\partial u}\Big|_{\substack{u=u(t)\\ x=x(t,u)\\ \psi=\psi(t,u)}},$$

$x=x(t,u)$ 是问题 (2) 当 $u=u(t)$ 时的解，$\psi=\psi(t,u)$ 是伴随问题

$$\dot{\psi}_i=-\frac{\partial H}{\partial x^i}\Big|_{\substack{u=u(t)\\ x=x(t,u)}},\ t_0\leqslant t\leqslant T,\ i=1, \dots, n, \qquad (6)$$

$$\psi_i(T)=-\frac{\partial F}{\partial x^i}\Big|_{x=x(T,u)} \qquad (7)$$

的解．由公式 (4) 导出，泛函 (1) 在空间 $L_2^r[t_0, T]$ 中是可微的，且它的梯度是向量函数

$$J'(u)=-\frac{\partial H(u)}{\partial u}\in L_2^r[t_0, T]. \qquad (8)$$

因而，解问题 (1)－(3) 可以应用各种利用泛函梯度的方法．当 $V(t)=E^r$ 时可以应用梯度法

$$u_{k+1}(t)=u_k(t)+\alpha_k\frac{\partial H(u_k)}{\partial u},\ k=0, 1, \dots$$

如果 $V(t)=\{u=(u^1, \dots, u^r)\ \alpha_i(t)\leqslant u^i\leqslant\beta_i(t),\ i=1, \dots, r\}$，其中 $\alpha_i(t)$，$\beta_i(t)$ 是 $L_2[t_0, T]$ 中的已给函数，那么也许可以应用梯度投影法

$$u_{k+1}(t)=P\left(u_k(t)+\alpha_k\frac{\partial H(u_k)}{\partial u}\right),\ k=0,1, \dots,$$

其中

$$P(w)=(w^1(t), \dots, w^r(t)),\ t_0\leqslant t\leqslant T,$$

$$w^i(t)=\begin{cases}\alpha_i(t), & \text{当 } v^i(t)\leqslant\alpha_i(t) \text{ 时},\\ v^i(t), & \text{当 } \alpha_i(t)\leqslant v^i(t)\leqslant\beta_i(t) \text{ 时},\\ \beta_i(t), & \text{当 } v^i(t)>\beta_i(t) \text{ 时},\ i=1, \dots, r\end{cases}$$

可以根据条件 $J(u_{k+1})<J(u_k)$ 选取参数 $\alpha_k>0$．类似地，可以对问题 (1)－(3) 应用条件梯度法，共轭梯度法等等 (见 [4]－[6], [11])．如果问题 (1)－(3) 在补充限制

$$x(t, u)\in G(t),\ t_0\leqslant t\leqslant T \qquad (9)$$

下考虑，其中 $G(t)$ 是 E^n 中的一个给定的集合，那么为了考虑限制 (9)，可以利用**罚函数法** (penalty functions, method of) 例如，如果

$$G(t)=\{x\in E^n\ g_i(x,t)\leqslant 0,\ i=1, \cdot, m,$$

$$g_i(x, t)=0,\ i=m+1, \dots, s\},$$

那么可取

$$P(u)=\int_{t_0}^{T}\left[\sum_{i=1}^{m}(\max\{g_i(x(t;u), t), 0\})^p+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=m+1}^{s}|g_i(x(t,u), t)|^p\right]dt,\ p\geqslant 1$$

作为一个惩罚函数，且代替问题 (1)－(3), (9) 的是泛函 $\Phi_k(u)=J(u)+A_k P(u)$ 在条件 (2), (3) 下的极小化问题，其中 A_k 是惩罚系数，且 $\lim_{k\to\infty}A_k=+\infty$

解问题 (1)－(3), (9) 的其他方法基于 Понтрягин 最大值原理和动态规划 (见 **Понтрягин 最大值原理**

(Pontryagin maximum principle)，**动态规划**（dynamic programming）**和变分学的数值方法**（variational calculus, numerical methods of））

在解线性常微分方程组或线性偏微分方程时为了解二次泛函的极小化问题可以应用矩量法（见[3]，[8]）下面描述的这个方法是应用于泛函

$$J(u)=|x(T,u)-y|^2_{E^n} \qquad (10)$$

的极小化问题的，其中 $x=x(t,u)$ 是问题

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u(t)+f(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant T,\ x(t_0)=x_0 \quad (11)$$

的解，控制 $u=u(t)\in L_2^r[t_0,T]$ 是这样的

$$\|u\|^2_{L_2^r}=\int_{t_0}^{T}|u(t)|^2_{E^r}dt\leqslant R^2, \qquad (12)$$

这里 $A(t)$，$B(t)$，$f(t)$ 分别是已给的 $n\times n$，$n\times r$，$n\times 1$ 阶矩阵，它们在区间 $t_0\leqslant t\leqslant T$ 上有分段连续的元，$0<R\leqslant\infty$，$x,y\in E^n$ 是给定点，$|x|^2_{E^m}=<x,x>_{E^m}$，$<x,y>_{E^m}=\sum_{i=1}^m x^iy^i$ 是 E^m 中的标量积　由 **Lagrange 乘子**（Lagrange multipliers）法则导出，控制 $u=u(t)$ 在问题（10）－(12)中是最优的，当且仅当存在数 $\gamma\geqslant 0$（对约束（12）的 Lagrange 乘子），使得

$$J'(u)+\gamma u=0, \qquad (13)$$

$$\gamma(\|u\|_{L_2^r}-R)=0,\|u\|_{L_2^r}\leqslant R, \qquad (14)$$

这里，当 $R=\infty$ 时，$\gamma=0$．由公式（5）－(8)导出，泛函（10）在 $L_2^r[t_0,T]$ 中的梯度 $J'(u)$ 有下面的形式

$$J'(u)=B^T(t)\psi(t,u),\quad t_0\leqslant t\leqslant T,$$

其中 $\psi=\psi(t,u)$ 是问题

$$\dot{\psi}=-A^T(t)\psi,\quad t_0\leqslant t\leqslant T, \qquad (15)$$

$$\psi(T)=2(x(T,u)-y) \qquad (16)$$

的解，A^T，B^T 分别是矩阵 A，B 的转置　于是条件(13)取形式

$$B^T(t)\psi(t,u)+\gamma u(t)=0,\quad t_0\leqslant t\leqslant T \qquad (17)$$

条件（16）等价于关系式

$$\int_{t_0}^{T}<u(t),B^T(t)p_k(t)>_{E^r}dt-\frac{1}{2}<\psi(T),p_k(T)>_{E^n}=$$

$$=a_k,\quad k=1,\ \ ,n, \qquad (18)$$

其中

$$a_k=<y,p_k(T)>_{E^n}-<x_0,p_k(t_0)>_{E^n}-$$

$$-\int_{t_0}^{T}<f(t),p_k(t)>_{E^r}dt,$$

$p_k(t)$ 是系统（15）在条件 $p_k(T)=e_k=(0,\ \ ,0\ 1,0,\ \ ,0)$（单位向量）下的解　因而，（为了确定问题（10）－(12)中的最优控制 $u=u(t)$，必须解关于函数 $u(t)$，$\psi(t)$ 和数 $\gamma\geqslant 0$ 的系统（14），（15），（17），（18）．当 $R=\infty$ 时，有 $\gamma=0$，$\psi(t)=0$，且条件(18)**化为矩问题**(moment problem)　已知函数 $u(t)$ 关于系统 $\varphi_k(t)=B^T(t)p_k(t)$（$k=1,\ \ ,n$）的矩

$$\int_{t_0}^{T}<u(t),\varphi_k(t)>dt=a_k,\ k=1,\ \ ,n,$$

求函数 $u=u(t)$

系统（14），（15），（17），（18）是关于问题（10）－(12)在 $0<R<\infty$ 时的广义矩问题（见[3]、[8]）

系统（15）的任意解 $\psi(t)$ 可唯一地表为

$$\psi(t)=\sum_{k=1}^{n}\psi_k p_k(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant T\ . \qquad (19)$$

对任一固定的 $\gamma\geqslant 0$，系统（15），（17），（18）存在解 $\psi(t,\gamma)$，$u(t,\gamma)$，且在所有解中可以找到唯一的 $u(t,\gamma)$，它有形式

$$u(t,\gamma)=\sum_{k=1}^{n}u_k B^T(t)p_k(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant T\ . \qquad (20)$$

为了确定 $\psi(t,\gamma)$ 和 $u(t,\gamma)$，必须将表达式（19），(20)代入（17），(18)　其结果是关于 $\psi_1,\ \ ,\psi_n,u_1,\ \ ,u_n$ 的线性代数方程组，从中可以唯一地定出 $\psi_1,\ \ ,\psi_n$，而在系统 $\{B^T(t)p_k(t),k=1,\ \ ,n\}$ 线性相关的情形下，诸量 $u_1,\ \ ,u_n$ 不是唯一确定的　在实际解问题（10）－(12)时，首先令 $\gamma=0$，$\psi(t)=0$ 是可取的，并由(18)定出(20)形的 $u(t,0)$　然后应该验算条件 $\|u(t,0)\|_{L_2^r}\leqslant R$．如果这个不等式满足，那么 $u(t,0)$ 是问题(10)－(12)的最优控制，它在所有的最优控制中有极小范，所有最优控制的集合在此情形下是只限于下面形式的控制

$$u(t)=u(t,0)+v(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant T,$$

其中 $v(t)$ 属于函数系 $\{B^T(t)p_k(t),k=1,\ \ ,n\}$ 的线性包络在 $L_2^r[t_0,T]$ 中的正交补，

$$\|v(t)\|^2_{L_2^r}\leqslant R^2-\|u(t,0)\|^2_{L_2^r}\ .$$

如果 $\|u(t,0)\|_{L_2^r}>R$，那么对 $\gamma>0$ 由(17)，(18)定出(19)，(20)形的解 $\psi(t,\gamma)$ 和 $u(t,\gamma)$，且由方程

$$\|u(t,\gamma)\|_{L_2^r}=R,\quad \gamma>0 \qquad (21)$$

求出 γ，变量 γ 的函数 $\|u(t,\gamma)\|_{L_2^r}$ 是连续的，对 $\gamma>0$ 是严格单调减的，并且 $\lim_{\gamma\to+\infty}\|u(t,0)\|_{L_2^r}=0$，因此由(21)唯一确定得所要求的 $\gamma=\gamma_*$．控制 $u(t,\gamma_*)$ 对问题(10)－(12)是最优的，当 $\|u(t,0)\|_{L_2^r}>R$ 时，这问题没

有其他的最优控制

矩量法还应用于系统(11)和其他线性系统的高速问题的解(见[3],[8]).

上述方法还广泛用于用偏微分方程描述过程的最优控制问题的数值解

最优控制问题的许多解法的数值实现,以所碰到的初始边值问题(见**边值问题**,**偏微分方程的数值解法**(boundary value problem, numerical methods for partial differential equations))或积分近似计算(见**数值积分法**(integration, numerical))的这种或那种近似解法为前提 因而原来的最优控制问题代之以依赖于某些参数(例如,差分网格的步长)的某一族逼近问题 关于逼近问题的构造问题和收敛性的研究,见[5]

广泛一类极值问题是提得不适定的(见**不适定问题**(ill-posed problems)),它们的解决必须利用**正则化方法**(regularization method))(见[5],[13])

参考文献

[1] Алексеев, В М, Тихомиров, В М, Фомин, С В, Оптимальное управление, М, 1979 (英译本 Alekseev, V M, Tikhomirov, V M and Fomin, S V, Optimal control, Consultants Bureau, 1987)

[2] Бейко, И В, Бублик, Б Н, Зинько, П Н, Методы и алгоритмы решения задач оптимизация, К, 1983

[3] Бутковский, А Г, Методы управления системами с распределенными параметрами, М, 1975

[4] Васильев, Ф П, Численные методы решения экстремальных задач, М, 1980.

[5] Васильев, Ф П, Методы решения экстремальных задач, М, 1981

[6] Евтушенко, Ю Г, Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации, М, 1982 (英译本 Evtushenko, Yu G, Numerical optimization techniques, Optimization Software, 1985).

[7] Егоров, А И, Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами, М, 1978

[8] Красовский, Н Н, Теория управления движением, М, 1968

[9] Lions, J L, Optimal control of systems governed by partial differential equations, Springer, 1971 (译自法文)

[10] Поляк, Б Т, Введение в оптимизацию, М, 1983

[11] Céa, J, Lectures on optimization, theory and algorithms, Springer, 1978

[12] Сиразетдинов, Т К, Оптимизация систем с распределенными параметрами, М, 1977

[13] Тихонов, А Н, Арсенин, В Я, Методы решения некорректных задач, 2 изд, М, 1979 (英译本 Tikhonov, A N and Arsenin, V Ya, Solutions of ill-posed problems, Winston, 1977).

[14] Федоренко, Р П, Приближенное решение задач оптимального управления, М, 1978

[15] Ekeland, I and Téman, R, Analyse convexe et problèmes variationnels, Dunod, 1974.

Ф П Васильев 撰

【补注】 $g_i(x,t)\leq 0$ 或 $g_i(x,t)=0$ 类型的约束通常称为状态约束(state constraints).在**最优控制**(optimal control)问题数值解的有效方法之中,可以在直接法和间接法之间找出某些区别 利用直接法(direct methods)的最优控制问题被直接处理成一个极小化问题,即该方法从解的一个初始近似出发,沿着搜索方向通过极小化(用一个"惩罚"项增大的)目标泛函(见**目标函数**(objective function)),解逐步得到改善.通过问题的线性化来得到搜索方向.在间接法(indirect methods)中,对于最优控制问题的解必须成立的最优性条件被用来导出一个多点边值问题.该最优控制问题的解将也是这个多点边值问题的解,因此多点边值问题的数值解就产生最优控制问题解的一个候选者

大多数直接法是梯度型的,即它们是有限维非线性规划问题的熟知的**梯度法**(gradient method)的函数空间类似物(见[A1]) 这些方法可以推广到类牛顿法[A1][A2](见**牛顿法**(Newton method)) 正如上面正文中所指出的,状态约束可以通过惩罚函数手段来处理 但是,数值结果表明,这种手段对状态约束最优控制问题的解导致一种无效且不正确的方法([A3]) 处理状态约束的其他方法是利用二次松弛变量的松弛变量变换(slack-variable transformation)技巧([A4])

熟知的间接法基于利用多重打靶的多点边值问题的数值解法([A3],[A5])(见**打靶法**(shooting method)).对具有状态约束的最优控制问题,多点边值问题的微分方程的右端项在连接点(junction points)处一般是间断的,连接点是这样的点,在那里不等式约束从起作用的约束变为不起作用的约束或相反 这些间断性需要特别的注意([A1])

一般地,直接法和间接法的性质多少有些互补,直接法往往有一个相对大的收敛区域,并且往往是相对地不准确的,而间接法一般有一个相对小的收敛区域,且往往是相对地准确的

参考文献

[A1] Bryson, A E and Ho, Y-C, Applied optimal control, Hemisphere, 1975

[A2] Edge, E R and Powers, W F, Function-space quasi-Newton algorithms for optimal control problems with bounded controls and singular arcs, *J Optimization Theory and Appl*, **20** (1976), 455–479

[A3] Well, K H, Uebungen zu den optimale Steuerungen, in Syllabus of the course "Optimierungsverfahren" of the Carl Cranz Geselschaft, Oberpfaffenhofen, FRG, 1983

[A4] Jacobson, D H and Lele, M M, A transformation technique for optimal control problems with a state variable constraint, *IEEE Trans Automatic Control*, **14**

(1969), 5
[A5] Maurer, H , An optimal control problem with bounded state variables and control appearing linearly, *SIAM J Control Optimization*, **15** (1977), 345 − 362
[A6] Bertsekas, D P , Constrained optimization and Lagrange multiplier methods, Acad Press, 1982
[A7] Falb, P L and Jong, J L de, Some successive approximation methods in control and oscillation theory, Acad Press, 1969 孙和生 译 陆柱家 校

函数的极值性质 [extremal properties of functions; экстремальные свойства функций]

一些个别函数的性质，使得它们成为某些极值问题的解 数学分析中出现的大多数特殊函数能够用某种极值性质来刻画 例如，体现**多项式的极值性质** (extremal properties of polynomials) 的有经典的 **Laguerre 多项式** (Laguerre polynomials), **Legendre 多项式** (Legendre polynomials), **Чебышев 多项式** (Chebychev polynomials), **Hermite 多项式** (Hermite polynomials) 以及 **Jacobi 多项式** (Jacobi polynomials), 它们可用在加权 L_2 空间中与零有极小偏差来刻画．这些经典多项式往往出现在分析学的较远领域中，作为各种极值问题的解 例如，**Чебышев 多项式** (Chebychev polynomials) 是关于多项式导数的不等式问题的极值 (见 [1] 和 **Марков 不等式** (Markov inequality))．其他特殊函数也有类似情况 许多特殊函数是微分算子的本征函数，即它们是某种**等周问题** (isoperimetric problem) 的解 在这方面，众所周知的特殊函数与一个不变结构 (见**抽象调和分析** (harmonic analysis, abstract)) 的存在性有某种联系，当它们是移位不变的 **Laplace-Beltrami 方程** (Laplace-Beltrami equation) 的本征函数时．对于三角多项式、球函数、柱函数等 (见 [2]) 也是如此．函数的极值性质的多数情况可以用某种精确的不等式形式叙述．

和逼近论极值性质问题有关的有 **Бернштейн 不等式** (Bernstein inequality), **Bohr-Favard 不等式** (Bohr-Favard inequality) 等．特别是，Bohr-Favard 不等式反映了 **Bernoulli 多项式** (Bernoulli polynomials) 的极值性质．函数的极值性质在逼近论 (见 [6] 和 [7]) 和数值积分理论中被研究

样条 (spline) 可由种种极值性质来刻画 (见 [9]) 许多特殊样条都有一些涉及函数类的逼近和插值的极值性质 (见 [7] 和 [8]) 函数的许多极值性质在复分析中被研究 尤其是 **Koebe 函数** (Koebe function), 它是单叶函数理论中一些问题的极值函数 亦见**等周不等式** (isoperimetric inequality) 和**嵌入定理** (imbedding theorems)

参考文献

[1] Бернштейн, С Н , Экстремальные свойства полиномой и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, ч I, Л - М , 1937
[2] Виленкин, Н Я , Специальные функции и теория представлений групп, М , 1965 (英译本 Vilenkin, N Ya, Special functions and the theory of group representations, Amer Math Soc , 1968)
[3] Hardy, G H , Littlewood, J E and Pólya, G , Inequalities, Cambridge Univ Press, 1952 (中译本 G H 哈代, J E 李特伍德, G 波利亚, 不等式, 科学出版社, 1965)
[4] Beckenbach, E F and Bellman, R , Inequalities, Springer, 1961
[5] Mitrinović, D S , Analytic inequalities, Springer, 1970 (译自克罗地亚文, 中译本 Mitrinović, D S , 分析不等式, 广西人民出版社, 1986)
[6] Корнейчук, Н П , Экстремальные задачи теории приближений, М , 1976
[7] Тихомиров, В М , Некоторые вопросы теории приближений, М , 1976
[8] Никольский, С М , Квадратурные формулы, 3 изд , М , 1979 (中译本 С М 尼考尔斯基著, 求积公式, 高等教育出版社, 1959)
[9] Ahlberg, J H , Nielson, E and Walsh, J , The theory of splines and its applications, Acad Press, 1967

В М Тихомиров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Shapiro, H S , Topics in approximation theory, Springer, 1971 杨吟林 译 郑维行 校

多项式的极值性质 [extremal properties of polynomials, экстремальные свойства полиномов]

代数、三角或广义多项式的一些性质，使得它们是某些极值问题的解．

例如，在所有首系数为 2^{n-1} 的 n 次代数多项式中 **Чебышев 多项式** (Chebyshev polynomials) $T_n(x) = \cos(n \arccos x) = 2^{n-1}x^n +$ 在空间 $C([-1,1])$ 中有最小范数 (П Л Чебышев, 1853), 因此它们是下列极值问题的解

$$\max_{x \in [-1\ 1]} |2^{n-1}x^n + a_1 x^{n-1} + \quad + a_n| \to \inf_{a=(a_1 \quad a_n)} .$$

换言之，在所有首系数等于 2^{n-1} 的 n 次多项式中多项式 T_n 在空间 $C([-1,1])$ 中与零相差最小．

多项式空间中极值问题主要在空间 $L_p([a, b])$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 中来研究 在这方面，大多数现有的结果与 $p=1$, 2 和 ∞ 情形有关 (C 的度量)．特别这些度量被用于寻求与零相差最小的多项式的显式 在 L_1 度量下它们是第二类 Чебышев 多项式，在 L_2 度量下则得到 **Legendre 多项式** (Legendre polynomials), 关于 C 度量见上述结果．在加权 L_2 空间中与零相差最小的经典

正交多项式集 (**Laguerre 多项式** (Laguerre polynomials), **Hermite 多项式** (Hermite polynomials), **Jacobi 多项式** (Jacobi polynomials)) 也已被描述

Е И Золотарев (1877) 考虑了下述问题 在 C 度量下确定与零相差最小的形如 $x^n+\sigma x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$ (首两个系数固定) 的多项式, 他找到了解决这个问题的单参数多项式族且用椭圆函数来表示它们.

Чебышев 多项式是关于导数不等式问题的极值, 即精确的 **Марков 不等式** (Markov inequality) (其中 P_n 是一个次数 $\leqslant n$ 的多项式)

$$\|P_n^{(k)}\|_{C([-1,1])}\leqslant|T_n^{(k)}(1)|\cdot\|P_n\|_{C([-1,1])} \qquad (*)$$

成立, 对 T_n 等式成立. 对 $k=1$, 不等式 (*) 是 В А. Марков 证明的 (1889), 而对 k 的所有其他值是 В А Марков 证明的 (1892) 关于三角多项式情形的类似不等式见 **Бернштейн 不等式** (Bernstein inequality).

在一致度量下代数与三角多项式的某些极值性质适用于 Чебышев 函数系 (见 [2]) 有关多项式的极值问题与极值性质的理论见 [6].

参考文献

[1] Чебышев, П Л, Полн собр соч, т 2–3, М - Л, 1947–1948 (英译本 Chebychev, P L, Oeuvres, 1–2, Chelsea, reprint, No date)

[2] Бернштейн, С Н, Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, ч 1, Л - М, 1937

[3] Гончаров, В Л, Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд, М, 1954

[4] Ахиезер, Н И, Лекции по теории аппроксимации, 2 изд, М, 1965 (英译本 Achiezer, N I [N I Akhiezer], Theory of approximation, F ungar, 1956 (中译本 Н И 阿赫叶惹尔, 逼近论讲义, 科学出版社, 1957)

[5] Вороновская, Е В, Метод функционалов и его приложения, Л, 1963 (英译本 Voronovskaya, E V, The functional method and its applications, Amer Math Soc, 1970)

[6] Тихомиров, В М, Некоторые вапросы теории приближений, М, 1976

В М Тихомиров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cheney, E W, Introduction to approximation theory, Chelsea, reprint, 1982

[A2] Натансон, И П, Конструктивная теория функций, Гостехиздат, 1949 (中译本 И П 纳唐松, 函数构造论, 上、中、下册, 科学出版社, 1965).

[A3] Rivlin, T J, The chebychev polynomials, Wiley, 1974

[A4] Shapiro, H S, Topics in approximation theory, Springer, 1971

[A5] Lorentz, G G, Approximation of functions, Holt, Rinehart & Winston, 1966

杨吟林 译 郑维行 校

极值曲线族 [extremal set, экстремалей семейство]

Euler 方程 (Euler equation) 解的全体, 它们依赖于 n 个任意常数, 互不相交地填满 $(n+1)$ 维空间的某个部分. 这里 n 是未知函数 $y_i(x)$ ($i=1,\cdots,n$) 的个数, 被极小化的泛函

$$J(y_1,\cdots,y_n)=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y_1,\cdots,y_n,y_1',\cdots,y_n')dx$$

依赖于这些函数, 而 Euler 方程在向量意义下被理解, 即它是 n 个二阶常微分方程的组

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0,\quad i=1,\cdots,n$$

下面介绍两种构造极值曲线族的方法

假设考虑一束由 $(n+1)$ 维空间中给定点 $M_0(x_0, y_0)$ 发出的极值曲线 如果这束极值曲线在点 M_0 的某个邻域中 (除 M_0 点外) 互不相交, 那么它们在这个邻域中就构成一个极值曲线族 (中心极值曲线族 (central extremal set))

构造极值曲线的另一方法是构造横截于 $(n+1)$ 维空间中由方程

$$\varphi(x,y)=0$$

给出的曲面 S_0 的极值曲线族. 如果在这曲面的每个点上横截条件

$$\frac{F-\sum_{i=1}^{n}y_i'F_{y_i'}}{\varphi_x}=\frac{F_{y_1'}}{\varphi_{y_1}}=\cdots=\frac{F_{y_n'}}{\varphi_{y_n}}$$

(总共 n 个条件) 决定 n 个导数 y_i', $i=1,\cdots,n$ 的值, 那么取这些值作为导数的初始值, 可以通过曲面 S_0 的一点引出一条与曲面 S_0 横截相交的极值曲线. 如果在这曲面的邻域中所指出的极值曲线互不相交, 那么它们就构成一个极值曲线族 (正常的极值曲线族 (proper extremal set)).

构造极值曲线族是考虑与构造**极值曲线** (extremal) 场有关的问题时的出发点 一个极值曲线族是**极值曲线场** (extremal field), 如果存在一个依赖于一个参数、且与这个极值曲线族横截相交的曲面族

参考文献

[1] Смирнов, В И, Курс высшей математики, 3 изд, т 4, М, 1957 (中译本 В И 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第四卷一分册, 二分册, 人民教育出版社, 1958)

И Б Вапнярский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gel'fand, I M and Fomin, S V, Calculus of variations, Prentice-Hall, 1963 (译自俄文)

孙和生 译 陆柱家 校

极不连通空间 [**extremally - disconnected space , экстре - мально несвязное пространство**]

一种空间，其中每个开集的闭包也都是开集．在正则的极不连通空间中，不存在无重复项的收敛序列 因此，在度量空间中，只有离散度量空间才是极不连通的 不过，极不连通空间还是相当广泛的· 每个 Тихонов 空间均可表为某个极不连通的 Тихонов 空间在**完满不可约映射** (perfect irreducible mapping) 下的象(见拓扑空间的**绝对形** (absolute)) 这就是说，极不连通性不是完满映射下保持的性质 可是，极不连通空间在连续开映射下的象却是极不连通空间．

所有正则的极不连通空间都是零维空间，但是与零维性不同，极不连通性却不被任意的子空间继承，甚至不被闭子空间继承 然而，极不连通空间的处处稠密子空间却总是极不连通的 极不连通性与拓扑齐性不能很好地结合起来．特别是，每个极不连通的拓扑齐性紧统都是有限的 不过，在**连续统假设** (continuum hypothesis) 下，却存在拓扑群，其空间是非离散的极不连通 Hausdorff 空间 极不连通的 Hausdorff 拓扑群的每个紧子空间都是有限的．因此，每个极不连通拓扑群，其空间若为 k 空间，则是离散群．

参考文献

[1] Архангельский, А В , Пономарев, В И , Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М , 1974 (英译本 Arkhangel'skii , A V and Ponomarev, V I , Fundamentals of general topology , Problems and exercises , Reidel , 1984),

А В Архангельский 撰

【补注】 代替“无重复项的收敛序列”也使用“非平凡收敛序列”这个说法．

通过 Stone 对偶 (见 **Boole 代数** (Boolean algebra)) 可见，极不连通紧统相当于复 Boole 代数

关于齐性的讨论见**齐性空间** (homogeneous space)

胡师度、白苏华 译

极值 [**extremum , экстремум**]

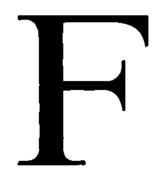
实值函数的极大值或极小值 (见**极大点和极小点** (maximum and minimum points)) 在变分学中，当研究泛函的最大值或最小值时也使用“极值”这一术语．

А Б Иванов 撰

【补注】 亦见**函数的极大值和极小值** (maximum and minimum of a function)

在**变分学** (variational calculus) 中，使得一个泛函达到其极大值 (或极小值) 的曲线，常常称为**极值曲线** (extremal)

张鸿林 译



F分布 [F-distribution, F-распределение]

见 **Fisher F分布** (Fisher F-distribution)

Faber 多项式 [Faber polynomials, Фабера многочлены]

用来表示复区域中解析函数的一个经典基本系.假设含有多于一个点的有界连续统 K 的余集是扩张复平面 $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ 上的单连通域 D,函数 $w=\Phi(z)$, $z\in D$ 是 D 到区域 $|w|>1$ 上并满足条件 $\Phi(\infty)=\infty$, $\Phi'(\infty)>0$ 的共形单叶映射,则 Faber 多项式系 $\{\Phi_n(z)\}$ 可定义为函数系 $\{\Phi^n(z)\}$ 在点 $z=\infty$ 的邻域内 Laurent 展开式中 z 的非负次项之和.对于 K 的 Faber 多项式也可定义为展开式

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Phi_n(z)}{w^{n+1}},\quad z\in K,\ |w|>1 \qquad (1)$$

中的系数,其中函数 $\zeta=\Psi(w)$ 是 $w=\Phi(\zeta)$ 的反函数.如果 K 是圆盘 $|z|\leqslant 1$,则 $\Phi_n(z)=z^n$.在 K 为线段 $[-1,1]$ 的情形下,Faber 多项式是第一类 **Чебышев 多项式** (Chebyshev polynomials).这些多项式是由 G. Faber 引进的 ([1]).

如果 K 是由可求长 Jordan 曲线 Γ 所围单连通域 G 的闭包,函数 $f(z)$ 在 G 内解析,在闭域 $\overline{G}$ 上连续,且在 Γ 上具有有界变差,则它在 G 内可展开为 Faber 级数 (Faber series)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Phi_n(z),\quad z\in G \qquad (2)$$

此级数在 G 内部,即在 G 的每个闭子集上一致收敛,此展开式中的系数由公式

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\Phi'(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)}\,d\zeta$$

确定.如果 Γ 具有连续转动切线,切线对实轴的倾角作为弧长的函数满足 Lipschitz 条件,则 Faber 级数 (2) 在闭域 $\overline{G}$ 上一致收敛.在关于 Γ 的同样条件下,对每个在 G 内解析、在 $\overline{G}$ 上连续的函数 $f(z)$,Lebesgue 不等式

$$\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n}a_k\Phi_k(z)\right|\leqslant c_1E_n(f,\overline{G})\ln n,\ z\in\overline{G}$$

成立,其中常数 c_1 与 n 及 z 无关,而 $E_n(f,\overline{G})$ 是 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 上用次数不超过 n 的多项式逼近时的最佳一致逼近.

在式 (1) 左端的分子中可以引进权函数 $g[\Psi(w)]$,其中 $g(z)$ 在 D 内解析,不恒等于零且 $g(\infty)>0$.此时展开式 (1) 中的系数称为广义 Faber 多项式 (generalized Faber polynomial).

参考文献

[1] Faber, G., Ueber polynomische Entwicklungen, *Math. Ann.*, **57** (1903), 389–408

[2] Суетин, П. К., в сб., Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, М., **5** (1975), 73–140

[3] Суетин, П. К., Фабера многочлены, М., 1984

П. К. Суетин 撰

【补注】 [A1] 是涉及**复变函数逼近** (approximation of functions of a complex variable) 的一般参考文献,其中有一节论述 Faber 展开式 (Faber expansion).

参考文献

[A1] Gaier, D., Vorlesungen über Approximation im Komplexen, Birkhäuser, 1980 (中译本: D. 加意耳,复变函数逼近论,湖南教育出版社,1985)

[A2] Curtiss, J. H., Faber polynomials and Faber series, *Amer. Math. Monthly*, **78** (1971), 577–596

[A3] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1967 (中译本: А. И. 马库雪维

奇，解析函数论，高等教育出版社，1957, 第5章)

沈永欢 译

Faber-Schauder 系 [Faber-Schauder system，Фабера-Шаудера система]

区间$[a, b]$上的函数系$\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$，其构造要用到在$[a,b]$上处处稠密的一个任意的可数点列$\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$，$w_1=a$，$w_2=b$，作法如下．设在$[a, b]$上$\varphi_1(t)\equiv 1$ $\varphi_2(t)$是$[a, b]$上的线性函数且满足$\varphi_2(a)=0$，$\varphi_2(b)=1$ 当$n>2$时，用点w_1， ， w_{n-1}将$[a,b]$分成$n-2$个小区间并找出其中包含点w_n的区间$[w_i, w_k]$，$w_i<w_k$ 然后令$\varphi_n(w_i)=\varphi_n(w_k)=0$，$\varphi_n(w_n)=1$，且在$[w_i, w_n]$和$[w_n, w_k]$上线性地延拓$\varphi_n(t)$ 在(w_i, w_k)之外令$\varphi_n(t)$等于0

在$a=0$，$b=1$且$\{w_n\}$是$[0, 1]$上所有二进有理点的序列（依自然的排序法，即0，1，1/2，1/4，3/4， ，$1/2^m$，$3/2^m$， ，$(2^m-1)/2^m$， ）的情况下，函数系$\{\varphi_n(t)\}$(用$\{F_n(t)\}$表示)首次出现在G Faber的著作中（[1]） 他将$\{F_n(t)\}$(用另一种正规化）看作**Haar 系**（Haar system）增补了等于1的函数后的不定积分系．一般情形时的$\{\varphi_n(t)\}$的构造是由J Schauder提供的，因此，Faber-Schauder 系也称为Schauder 系（Schauder system）

函数系$\{\varphi_n(t)\}$是$[a, b]$上所有连续函数f(具有范数$\|f\|=\max_{a\leq t\leq b}|f(t)|$)的空间$C[a, b]$的一组基（见[1]，[2]或[3]） 如果对$[0, 1]$上的Faber系$\{F_n(t)\}$施行Schmidt正交化过程，则得到**Franklin 系**（Franklin system）.

Faber-Schauder 系是连续函数空间的基的第一个例子

参考文献

[1] Faber, G , Ueber die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar, *Jahresber Deutsch Math Verein* , **19**(1910), 104-112

[2] Schauder, J , Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystem, *Math Z* , **28**(1928), 317-320

[3] Kaczmarz, S and Steinhaus, H , Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea, reprint, 1951

Б И Голубов 撰

【补注】上文中的（Gram-）Schmidt正交化过程参见**正交化**（orthogonalization），**正交化法**（orthogonalization method）

参考文献

[A1] Semadeni, Z , Schauder bases in Banach spaces of continuous functions, Springer, 1982

朱学贤 译 潘文杰 校

Fabry 定理 [Fabry theorem，Фабри теорема]

1) Fabry 间隙定理（Fabry gap theorem） 如果具有收敛半径$R(0<R<\infty)$的幂级数

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^{\lambda n}$$

中的指数λ_n满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=0,$$

则圆$|z|=R$上的所有点都是$f(z)$的奇点．此定理可推广到Dirichlet级数

2) Fabry 商定理（Fabry quotient theorem） 如果具有单位收敛半径的幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

的系数满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=s,$$

则$z=s$是$f(z)$的奇点

定理1)和2)是由E Fabry得到的（[1]）

参考文献

[1] Fabry, E , Sur Les points singuliers d'une fonction donée par son développement en serie et l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très genéraux, *Ann Sci Ecole Norm Sup* , **13**(1896), 367-399.

[2] Bieberbach, L , Analytische Fortsetzung, Springer, 1955

[3] Леонтьев, А Ф , Ряды экспонент, М , 1976 .

А Ф Леонтьев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Landau, F , Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, in Das Kontinuum und andere Monographien, Chelsea, reprint, 1973

[A2] Dienes, P , The Taylor series, Oxford Univ Press & Dover, 1957

沈永欢 译

面 [face，грань]，多面体的

作为多面体表面的一部分而由多面体的棱围成的平面多边形

张鸿林 译

因子 [factor，фактор]

Hilbert 空间H上的线性算子代数$B(H, H)$的对合子代数$\mathfrak{A}$，它对于算子的弱收敛（weak convergence）是闭的，且有如下性质：它的中心（即在$\mathfrak{A}$内并与$\mathfrak{A}$内的每个算子都可交换的算子的全体）由单位算子的标量倍数组成

如果$\mathfrak{A}$是一个因子，那么对H的大多数子空间F，可以定义F相对于$\mathfrak{A}$的维数$\dim_{\mathfrak{A}}F$的概念．它是一个不变量，但不是在任何等距同构$\mathscr{S}$下不变，而仅是在给定的因子中那些具有附加自然性质（例如$\dim_{\mathfrak{A}}(F_1\oplus F_2)=\dim_{\mathfrak{A}}F_1+\dim_{\mathfrak{A}}F_2$）的等距同构下

不变．对应于 $\dim_{\mathfrak{A}} F$ 可以取的值，所有因子划分为五类．例如，对类 Π_∞ 的因子，它可以取 $[0, \infty]$ 中任意值　　　　М И Войцеховский 撰

【补注】 对合代数（involutive algebra）是 **C** 上赋予了对合（involution）的代数 关于各类因子可见 **von Neumann 代数**（von Neumann algebra）

参考文献

[A1] Pedersen, G K, C^*-algebras and their automorphism groups, Acad Press, 1979

[A2] Dixmier, J, C^*-algebras, North Holland, 1977（译自法文）

余庆余 译

因子分析 [factor analysis, факторный анализ]

多元统计分析的一个分支，它组合诸数理统计方法来减少被考察的多维指标 $\mathbf{x}=(x_1, \quad , x_p)'$ 的维数，也就是通过研究分量 x_i，x_j $(i, j=1, \quad , p)$ 之间的相关结构来构造模型，使人们能由很少的 $m (m \ll p)$ 个（不能直接观测的）所谓公共因子 $\mathbf{f}=(f_1, \quad , f_m)'$（在某个随机预测误差 ε 范围内）确定 $\mathbf{x}$ 的 p 个可分析分量的值．

这一问题的最简单模式是具有正交公共因子和不相关残差的因子分析的正态线性模型

$$x_k=\sum_{j=1}^{m} q_{kj} f_j+\varepsilon_k, \quad k=1, \quad , p, \tag{1}$$

或者用矩阵记号，

$$\mathbf{x}=\mathbf{q}\mathbf{f}+\varepsilon, \tag{1'}$$

这里线性变换的 $(p \times m)$ 系数矩阵 $\mathbf{q}$ 称为公共因子对变量 $\mathbf{x}$ 的载荷矩阵（loading matrix）

假定特殊残差（预测误差）向量 $\varepsilon=(\varepsilon_1, \quad , \varepsilon_p)$ 遵从均值向量为零、协方差阵为未知对角阵 V_ε 的 p 维正态分布．根据所论问题的特有性质，可把公共因子向量 $\mathbf{f}$ 看作其协方差阵 $V_{\mathbf{f}}$ 为单位阵（即 $V_{\mathbf{f}}=I_m$）的 m 维随机向量，或者看作（相互正交且标准化的）非随机未知参数向量，其值随观测值变化

如果假定变量已事先中心化（即 $\mathrm{E}\mathbf{x}=0$），则由（1′）式和已做的假定，立即得到向量 $\mathbf{x}$ 和 ε 的协方差阵与载荷矩阵的关系式

$$V_{\mathbf{x}}=\mathbf{q}\mathbf{q}'+V_\varepsilon \tag{2}$$

在进行实际的统计分析时，研究者仅能（依据观测值 $\mathbf{x}_1, \quad , \mathbf{x}_n$）给出协方差阵 $V_{\mathbf{x}}$ 的元素的估计，而载荷矩阵 $\mathbf{q}$ 的元素 q_{ki} 和特殊残差 ε_k 的方差 $v_{kk}=\mathrm{D}\varepsilon_k$ 都是未知的，有待于确定

因此，在进行因子分析时，研究者必须解决下列的主要问题

a) 是否存在形如（1）的模型，或者使用此种模型是否合理 远非每个协方差阵 $V_{\mathbf{x}}$ 都能表示为形式（2） 这个问题归结为检验下述假设 向量 $\mathbf{x}$ 各分量之间存在特殊的相关结构．

b) 形如（1）的模型是否唯一（或等同）．确定和解释模型的主要困难在于，当 $m>1$ 时，结构参数和因子本身都不是唯一确定的．如果 $(\mathbf{q}, V_\varepsilon)$ 满足（2），则对于 $m \times m$ 正交阵 $\mathbf{c}$，$(\mathbf{c}\mathbf{q}, V_\varepsilon)$ 也满足（2）．通常需要弄清，预先对 $\mathbf{q}$ 和 V_ε 做哪些附加限制，待分析的模型的参数 $\mathbf{q}$，$\mathbf{f}$ 和 V_ε 才是唯一的 对因子模型的解作正交变换的可能性，也使人们能够获得最合乎自然解释的解．

c) 未知结构参数 $\mathbf{q}$ 和 V_ε 的（基于观测值 $\mathbf{x}_1, \quad , \mathbf{x}_n$ 的）统计估计．

d) 检验关于模型类型（线性、非线性等）和结构参数值的一系列假设，例如，关于公共因子个数的假设，关于所选择的模型与现有观测结果的适合性的假设，关于系数 q_{ij} 不为零的统计显著性假设等．

e) 不可观测的公共因子 $\mathbf{f}$ 的值的统计估计量的构造

f) 统计估计和假设检验方法在计算上的实现

在理论上解答所列问题的大部分工作已在上述因子分析的正态线性模型范围内开展．

然而在实际应用中，人们广泛地使用更一般的因子分析模型 非线性模型，由非定量变量构成的模型，处理初始数据的三维（原始数据的两个通常量度——维数 p 和观测数 n——加上另一空间或时间坐标）矩阵模型 通常，没有对这些模型的性质作任何使人信服的数理统计分析，而只是基于启发性或半启发性的计算

参考文献

[1] Harman, H H, Modern factor analysis, Univ of Chicage Press, 1976

[2] Айвазян, С А, Бежаева, З Н, Староверов, О В, Классификация многомерных наблюдений, М, 1974

[3] Spearman, C, *Amer J Psychology*, **15**(1974), 201－293

[4] Anderson, T W and Rubin, H, Statistical inference in factor analysis, in Proc 3rd Berkeley Symp Math Statist, Vol 5, Univ California Press, 1956, 111－150

[5] Rao, C R, Estimation and tests of significance in factor analysis, *Psychometrika*, **20**(1955), 93－111

С А Айвазян 撰

【补注】 现今有非常大量的因子分析文献 例如，见刊物《心理测验学》（Psychometrika）和 [A1] 在上述主要文章中描述的古典因子分析模型，当今被认为是线性结构模型类（linear structured models）的特殊成员（见 [A2]，[A3]）

参考文献

[A1] Lawley, J N and Maxwell, A E, Factor analysis as a statistical method, Butterworth, 1971

[A2] Joreskog, K G and Sorbom, D, Lisrel Ⅳ. Analysis of linear structural relationships by maximum likelihood, instrumental variables, and least squares methods, Scien-

tific Software, 1984

[A3] Evertt, B S, An introduction to latent variable methods, Chapman & Hall, 1984

吴启光 译 陶 波 校

因子表示 [factor representation, факторпредставление]

Hilbert空间 H 上的群或代数 X 的**线性表示**(linear representation) π, 它使 H 上由族 $\pi(X)$ 生成的 **von Neumann 代数**(von Neumann algebra)是一个**因子**(factor) 如果这个因子是 Ⅰ 型的(分别地, Ⅱ, Ⅲ, II_1, II_∞ 型等), 那么 π 称作 Ⅰ 型的因子表示等等

А И Штерн 撰 余庆余 译

阶乘 [factorial, факториал]

在非负整数集上定义的函数, 对于 n, 其值等于从1到 n 的自然数之积, 即 $1\cdot 2 \cdots n$, 记作 $n!$ (按定义, $0!=1$) 对于大的 n 值, 阶乘的近似表达式由 **Stirling 公式**(Stirling formula)给出. 阶乘等于 n 个元素的排列的个数. 更一般的表达式

$$(a)_\mu = a(a+1) \cdots (a+\mu-1)$$

也称为阶乘, 其中 a 是复数, μ 是自然数, 而 $(a_0)=1$ 亦见 **Γ函数**(gamma-function) БС Э-3

【补注】 因为 $n!$ 等于 n 个元素的排列个数, 所以阶乘广泛地应用于组合学、概率论、数理统计等方面 见**组合分析**(combinatorial analysis), **组合**(combination), **二项式系数**(binomial coefficients) 张鸿林 译

唯一分解环 [factorial ring, факториальное кольцо]

具有唯一因子分解的环 更确切地说, 一个唯一分解环 A 是一个**整环**(integral domain), 在其中可找到一组不可约元素系 P, 使得每个非零元 $a\in A$ 有一个唯一分解

$$a=u\prod_{p\in P} p^{n(p)},$$

其中 u 是可逆元, 这些非负整指数 $n(p)$ 只对有限个 $p\in P$ 是非零的. A 中一个元素称为不可约的(irreducible), 是指若 $p=uv$, 则 u 和 v 中总有一个是 A 中可逆元, 同时 p 不是 A 中可逆元.

在唯一分解环中, 任何两个元素都有最大公因元和最小公倍元 一个环 A 是唯一分解环, 当且仅当 A 是 **Krull 环**(Krull ring) 且满足下面等价条件之一 1) A 的每个除子理想是主理想, 2) 每个高度为1的素理想是主理想, 3) 每个非空的主理想族有极大元, 且任二主理想之交是主理想. 每个主理想环是唯一分解环 一个 Dedekind 环是唯一分解环, 当且仅当它是主理想环. 若 S 是唯一分解环 A 中一个乘性系, 则分式环 $S^{-1}A$ 是唯一分解环 一个 Zariski 环 R 是唯一分解环, 如果它的完全化 $\hat{R}$ 是唯一分解环

唯一分解环的商环和子环未必是唯一分解环 唯一分解环上的多项式环以及域上或离散赋范环上的形式幂级数环都是唯一分解环. 但唯一分解环上的形式幂级数环未必是唯一分解环

一个整环是唯一分解环, 当且仅当它的乘法半群是 **Gauss 半群**(Gauss semi-group) 据此, 唯一分解环也称为 Gauss 环(Gauss rings)

参考文献

[1] Bourbaki, N, Elements of Mathematics Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972 (译自法文)

Л В Кузьмин 撰

【补注】 关于高度的概念见**理想的高度**(height of an ideal)

一个 Zariski 环(Zariski ring) R 是一个 **Noether 环**(Noetherian ring), 有一个**理想**(ideal) $\mathfrak{a}$, 使得 R 中每个理想在 $\mathfrak{a}$-adic 拓扑(见 **adic 拓扑**(adic topology))下都是闭的 后面条件可换成 每个元素 $r\in R$, 如 $1-r\in\mathfrak{a}$, 则 r 必是可逆元 一个 Zariski 环 $(R, \mathfrak{a})$ 是完全的, 是指它在 $\mathfrak{a}$-adic 拓扑下是完全的拓扑空间 Zariski 环 $(R, \mathfrak{a})$ 的完全化是指拓扑空间在 $\mathfrak{a}$-adic 拓扑下的完全化 这个完全化 $\bar{R}$ 是一个 Zariski 环(取理想为 $\mathfrak{a}\bar{R}$).

冯绪宁 译 裴定一 校

因子分解 [factorization, факторизация], 图论中的

把一个图(graph)分解为某种形式的边不相交的生成子图. 在一般情形下, 图的一个因子是具有给定性质的生成子图 这种性质的一个例子就是正则性 一个 k 度正则生成子图称为一个 k 因子(k-factor), 一个1因子也称为一个完满匹配(perfect matching) 一个图称为可 k 因子分解的(k-factorizable 或 k-factorable), 如果它可以表示为边不相交的 k 因子的并

在图论中研究一个任意图的各类型的因子的存在性问题, 因子的个数问题, 以及对不同类图进行给定类型的因子分解的可能性问题. 例如, 已经证明顶点数为偶数的完全图和二部的顶点数相同的**二部图**(graph, bipartite)都是可1因子分解的. 一个连通图可2因子分解, 当且仅当它是一个偶数度的正则图. 一个图 G 有一个1因子, 当且仅当它的顶点数是偶数且没有顶点集的一个子集 U, 使图 $G\setminus U$ 中顶点数是奇数的分支数超过 $|U|$, 这里的图 $G\setminus U$ 是从图 G 中去掉属于 U 的所有顶点而得到的图. 每个2连通3度正则图可以分解为边不相交的一个1因子和1个2因子.

非正则因子的例子是生成树(见**树**(tree))和生成林(forest), 生成可平面子图(见**图的嵌入**(graph imbedding))等. 与把图分解为生成林有关的一种数值特征

称为荫度（arboricity），它是边不相交且其并为原图的生成林的最小个数．任意图 G 的荫度等于

$$\max_k \left\{ \frac{g_k}{k-1} \right\},$$

式中 g_k 是 G 的 k 顶点子图中的最大边数．

参考文献

[1] Harary, F., Graph theory, Addison-Wesley, 1969, Chapt, 9(中译本 F 哈拉里，图论，上海科学技术出版社，1980)　　A A Сапоженко 译

【补注】 一个图 $G=(V, E)$ 的生成子图(spanning subgraph)是一个子图 $G_1=(V_1, E_1)$，其顶点集 V_1 等于 G 的顶点集 V

上文所引的 1 因子定理（1-factor theorem）是 W. T Tutte 得到的．给出一个顶点函数 f，一个因子 F 称为一个 f 因子(f-factor)，如果对于每个 $v\in V$，V 为 G 的顶点集，有 $d(v|F)=f(x)$ Tutte 也证明了一个 f 因子定理(f-factor theorem) 关于上述的 2 因子的结果是 J Peterson 得出的［A1］ 全部这些结果的一个综述由 Tutte 给出［A2］ ［A3］是新近的综述论文

参考文献

[A1] Petersen, J., Die Theorie der Regularen Graphen, *Acta Math*, **15** (1891), 193 – 220

[A2] Tutte, W T, Graph factors, *Combinatorica*, **1** (1981), 79 – 97

[A3] Akiyama, J and Kano, M, Factors and factorizations of graphs - a survey, *J Graph Theory*, **9** (1985), 1 – 42　　钟 集 译 李 乔 校

因子分解恒等式［factorization identities，факторизационные тождества］，在随机游动理论中的

给出**随机游动**（random walk）不同特征之间联系的多参数恒等式系统．如称之为边界泛函的特性——与游动到达边界有关的随机变量，例如游动上界，首次到达该上界的时刻，首次逸出的大小等等．

之所以称为因子分解恒等式，是因为这些恒等式是由因子分解得到的，即通过把函数 $1-zf(\lambda)$ 在 λ 为实数，$|z|\leqslant 1$ 时表示成两个因子的乘积，其一是在上半平面 $\mathrm{Im}\,\lambda>0$ 解析、有界、恒不为零且直到边界连续的函数，而另一个是在下半平面上具有同样性质的函数．这里 $f(\lambda)$ 是生成随机游动的随机变量的特征函数．这一分解在相差一个常数因子的意义下唯一（见 **Wiener-Hopf 法**（Wiener-Hopf method）），这就容许我们把经由概率考虑得到的这种类型的不同的因式分解中相应的因子看成同样的，并用随机游动边界泛函的联合分布的特征函数表示出来．

从因子分解恒等式，可以得到与随机游动理论相关的许多新的或已知的结果．例如，**强大数律**（strong law of large numbers）和**反正弦律**（arcsine law）

参考文献

[1] Spitzer, F., Principles of random walk, Springer, 1976

[2] Боровков, А А, Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М, 1972 (英译本 Borovkov, A A, Stochastic Processes in queueing theory, Springer, 1976)　　К А Боровков 撰

【补注】 对于与线性滤波理论中的谱因子分解相关的问题见［A1］

参考文献

[A1] Gihman, I I and Skorohod, A V, The theory of stochastic processes, 1, Springer, 1971 (中译本 И И 基赫曼和 A V 斯科罗霍德随机过程论，第一卷，科学出版社，1986)　　刘秀芳 译

因子分解定理［factorization theorem，факторизационная теорема］，因子分解准则（factorization criterion）

统计理论中的一个定理，它给出一个统计量 T 关于概率分布族 $\{P_\theta\}$ 充分的必要充分条件（见**充分统计量**（sufficient statistic））．

设 X 是取值于样本空间 $(\mathfrak{X}, \mathscr{B}, P_\theta)$ $(\theta\in\Theta)$ 的随机向量，概率分布族 $\{P_\theta\}$ 被某测度 μ 控制，令

$$p=(x,\theta)=\frac{dP_\theta(x)}{d\mu}, \quad \theta\in\Theta.$$

设 $T=T(X)$ 是基于观测向量 X 的统计量，它将可测空间 $(\mathfrak{X}, \mathscr{B})$ 映射到可测空间 $(\mathscr{Y}, \mathscr{A})$．在这些假定下，可提出如下问题．何时 T 关于分布族 $\{P_\theta\}$ 是充分的？作为对这一问题的回答，因子分解定理断言：对于存在充分统计量的分布族 $\{P_\theta\}$ 而言，统计量 T 关于它充分的必要充分条件是，对每一个 $\theta\in\Theta$，概率密度 $p(x,\theta)$ 能作如下分解

$$p(x,\theta)=g(x)h(T(x),\theta), \qquad (*)$$

其中 $g(\cdot)$ 是 $(\mathfrak{X}, \mathscr{B})$ 上的 $\mathscr{B}$ 可测函数，$h(\cdot,\theta)$ 是 $(\mathfrak{Y}\ \mathscr{A})$ 上的 $\mathscr{A}$ 可测函数．因子分解定理除了给出充分性的判别法则以外，在很多场合还能用来确定充分统计量 T 的具体形式，因为密度 $p(x,\theta)$ 必然分解成公式 $(*)$ 的形式．在实际中，通常更多地是讨论似然函数 $L(\theta)=p(X,\theta)$，而不是密度 $p(x,\theta)$ 讨论似然函数时，条件 $(*)$ 具有显含 T 的形式 $L(\theta)=g(X)h(T;\theta)$

参考文献

[1] Fischer, R A, On the mathematical foundations of theoretical statistics, *Philos Trans Roy Soc London Ser A*, **222** (1922), 309 – 368

[2] Neyman, J, Su un teorema concernente le cosiddette statistiche sufficienti, *Giorn Istit Ital Att*, **6** (1935), 320 – 334

[3] Lehmann, E L, Testing statistical hypotheses, Wiley, 1959

[4] Ибрагимов, И А, Хасьминский, Р З, Асимптотичес-

кая теория оценивания, М, 1979 (英译本 Ibragimov, I A and Has'minskii, R Z [R Z Khas'minskii], Statistical estimation asymptotic theory, Springer, 1981)

[5] Halmos, P R and Savage, L J, Application of the Radon-Nikodym theorem to the theory of sufficient statistics, *Ann of Math Statist*, **20** (1949), 225-241

М С Никулин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cox, D R and Hinkley, D V, Theoretical statistics, Chapman & Hall, 1974, p 21

陶 波 译 李国英 校

Фаддеев 方程 [Faddeev equation, Фаддеева уравнение]

量子力学中描述三粒子散射的一个线性积分方程.

三粒子散射与二粒子散射的基本不同点在于有可能形成粒子的束缚态. 因此, Sommerfeld 条件类型的在无穷远处的通常辐射条件, 这里不能应用

在 Л Д Фаддеев 于 1960 年提出和研究了一个积分方程后, 通过该方程的解可以重新获得满足无穷远处适当的物理条件的 **Schrodinger 方程** (Schrodinger equation) 的解, 从而使三粒子系统的数学研究成为可能

采用缩写式向量记号, Фаддеев 方程具有下列形式

$$X = X^0 + \left\| \begin{matrix} 0 & G_1 & G_1 \\ G_2 & 0 & G_2 \\ G_3 & G_3 & 0 \end{matrix} \right\| X, \quad X = \left\| \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{matrix} \right\|, \qquad (*)$$

其中 $G_i = V_i(E+\Delta-V_i)^{-1}$, E 是系统的能量, V_i 是粒子对相互作用势能, 而向量函数 X^0 由散射的初始数据确定 若散射问题是通过右边为 f 的 Schrodinger 方程 $(E-\hat{H})\psi = f$ 所表述, 其中 $\hat{H}$ 是三粒子 Hamilton 量

$$\hat{H} = -\Delta + V_1(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) + V_2(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3) + V_3(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1),$$

则在方程 (*) 中人们必须选取 $X_i^0 - G_i f$ 于是散射问题的解可以通过 Фаддеев 方程的解 X 用下列公式表达

$$\psi = (E+\Delta)^{-1}[f + \sum_i X_i]$$

在关于势 V_i 的合适条件下, 方程 (*) 是 Fredholm 类型方程 (见 [1]) 而且, 方程 (*) 可用于证明关于 Schrodinger 算子的本征函数展开的定理, 用于给出散射问题的非定态表述的基础, 以及用于构造酉散射算子

Фаддеев 方程广泛应用于原子物理学、核物理学和基本粒子物理学中. 曾经求得它的相对论性形式, 以及还曾求得对 N 粒子系统情况下的推广 与 Schrodinger 方程比较起来, Фаддеев 方程的一个重要优点是有可能有效地去计算方程的解

参考文献

[1] Фаддеев, Л Д, Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц, М - Л, 1963

[2] Schmid, E and Ziegelmann, H, The quantum-mechanical three-body problem, Braunschweig, 1974

В П Маслов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ferreira, et al (eds), Models and methods in few body physics, Proc Lisboa 1986, Springer

[A2] Lim, T K (ed), Few body methods, principles and applications, World Scientific Press, 1985

[A3] Few body systems in particle and nuclear physics Proc 11-th Conf Tokyo, August 1986, *Nuclear Physics*, **A 463** (1987), no 1-2

徐锡申 译

Fagnano 问题 [Fagnano problem, Фаньяно задача]

下述问题 在给定的锐角三角形中作一个内接三角形, 使其周长为最小 解答是所谓垂心三角形 (orthocentric triangle), 即以给定三角形的三高线的垂足为顶点的三角形 这个问题是 G Fagnano dei Toschi 于 1775 年提出的 П С Моденов 撰 张鸿林 译

忠实自同态 [faithful endomorphism, точный эндоморфизм]

【补注】 一个很少使用的译自俄文的名词, 表示**正合自同态** (exact endomorphism) 概念 张鸿林 译

忠实函子 [faithful functor, точный функтор]

【补注】 一种函子 (functor), 它在 "Hom 集上是单射的" 明确地说, 函子 F $\mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ 称为忠实的 (faithful), 如果对 $\mathfrak{C}$ 中任何两个具有相同的定义域与上域的态射 α, β $A \to B$, 方程 $F\alpha = F\beta$ 总蕴涵着 $\alpha = \beta$ 这个名称是由群的表示理论引出来的 一个群 G 的一个置换 (相应的, R 线性) 表示是忠实的, 当且仅当看作一个函子 $G \to \mathrm{Set}$ (相应地 $G \to \mathrm{Mod}_R$) 时是忠实的 一个忠实函子反映了单射性 (即, 若 $F\alpha$ 是单的, 则 α 也必是单的) 与满射性, 因此如果定义范畴 $\mathfrak{C}$ 是平衡的 (balanced) (即有这样的性质 任何态射若既是单的又是满的, 它就必然是同构), 那么, 它也反映同构性 一个函子若有后一性质就称为保守的 (conservative), 可是, 有些作者将这个条件包括在忠实性的定义中

在俄文文献中, 名词 "忠实函子" 与 "正合函子" 之间似乎有些混淆, 亦见**正合函子** (exact functor)

参考文献

[A1] Mitchell, B, Theory of categories, Acad, Press, 1965

周伯埙 译 刘木兰 校

忠实表示 [faithful representation, точное представление]

一个表示，它是一个单态射

А И Штерн 撰 许以超 译

扇 [fan, веер]，有限性展形 (finitary spread)

一个展形(见**展形（直觉主义逻辑中的）**(spread (in intuitionistic logic)))π，对π的任何结点$\langle n_1, \quad , n_m\rangle$只存在有限个自然数$k$，使得$\langle n_1, \quad , n_m, k\rangle$是$\pi$的结点

在形式直觉主义数学分析的语言中，函数 Fan(a)表示函数a定义一个扇，记为

$$\mathrm{Spr}(a)\&\forall x(a(x)=0\supset\exists y\forall z(a(x^*\hat{z})= =0\supset z\leqslant y)), \qquad (*)$$

其中Spr(a)的意义为函数a定义一个展形

Brouwer 扇定理 (Brouwer fan theorem) 如果存在一个规则，借助于它，能够把一定的对象——如自然数——指配给扇的每个元素，则存在一个自然数z，使得对这扇的每个元素，这个对象由元素的前z个值所定义 Brouwer 定理用于证明许多特殊的直觉主义结论，例如一个闭区间上定义的每个实函数的一致连续性．在形式直觉主义数学分析中，通常借助于**坝归纳** (bar induction)和 Brouwer 连续原理(见**直觉主义** (intuitionism))可以证明 Brouwer 扇定理．在这个形式理论的语言中，扇定理可写为

$$\mathrm{Fan}(a)\&(\forall\alpha\in a)\exists x\varphi(\alpha, x)\supset$$
$$\supset\exists z(\forall\alpha\in a)\exists x(\forall\beta\in a)(\bar{\alpha}(z)=\bar{\beta}(z)\supset\varphi(\beta, x))$$

参考文献

[1] Kleene, S C and Vesley, R E, The foundations of intuitionistic mathematics, especially in relation to recursive functions, North-Holland, 1965

А Г Драгалин 撰

【补注】 公式(*)可以读成 扇a的一个元素是一个无限序列α，其所有有限初始截段都属于a

参考文献

[A1] Troelstra, A S, Choice sequences, Clarendon Press, 1977

眭跃飞 译

Fano 公设 [Fano postulate, Фано постулат]

G Fano 于 1892 年建立的一个射影几何命题．它包含这样的事实 四角形的对边点 (diagonal points) 是不共线的．Fano 假设等价于 与所述射影几何相关的体(非交换域)K的特征数不等于 2 例如，当有限射影平面只含有 7 个点和直线时，Fano 假设就不成立．此时，伴随的体K只含有两个元素 0 和 1

М И Войцеховский 撰

【补注】 另一方面，A. M Gleason ([A2]) 证明了 若有限射影平面中任意一个四角形的对边点共线，它便是一个域 (特征数为 2) 上的射影平面．

参考文献

[A1] Coxeter, H S, M, Introduction to geometry, Wiley, 1961

[A2] Gleason, A M, Finite Fano planes, *Amer J Math*, **78**, 1956, 797 - 807

马传渔 译 黄正中 校

Fano 概形 [Fano scheme, Фано схема]，域k上的射影代数簇X的

以在射影空间P^n中的子簇X上的直线族为参数化的代数**概形** (scheme) 射影簇X的 Fano 概形$F(X)$能表示成P^n中直线的 Grassmann 流形$G(2, n+1)$的闭子概形 与三维三次超曲面的 Fano 概形 (见 **Fano 曲面** (Fano surface))相反，任意射影簇的 Fano 概形不一定是非奇异、约化的和不可约的 例如，在 Fermat 四次超曲面$\sum_{i=0}^4 x_i^4=0$上的直线所成的**直纹曲面** (ruled surface) R是由超平面$x_i=\zeta x_j$, $i\neq j$与 Fermat 四次超曲面相截而得到的 40 个锥面组成，这里ζ取遍 8 次本原单位根 每个锥面在R中都是二重的 (见[1]) 因此这个 Fano 簇是可约的，且它的每个分支在一般点处不是约化的

参考文献

[1] Tennison, B, On the quartic threefold, *Proc London Math Soc*, **29** (1974), 714-734

Вик С Куликов 撰 蔡金星 译

Fano 曲面 [Fano surface, Фано поверхность]

以在非奇异三次超曲面$V_3\subset P^4$上的直线族为参数化的曲面．Fano 研究了三维三次超曲面V_3上的直线族$F(V_3)$ ([1])

通过非奇异三次超曲面$V_3\subset P^4$的一般点的V_3上的直线恰有 6 条 Fano 曲面$F(V_3)$是**几何亏格** (geometric genus) $p_g=10$，**非正则性** (irregularity) $q=5$的非奇异、不可约、约化的代数曲面，其拓扑 **Euler 示性数** (Euler characteristic) (在$k=\mathbf{C}$的情况下)等于 27．可以从 Fano 曲面$F(V_3)$来重构三次超曲面V_3 (见[2])

参考文献

[1] Fano, G, Sul sisteme ∞^2 di rette contenuto in une varietà cubica generale dello spacio a quattro dimensioni, *Atti R Accad Sci Torino*, **39** (1903-1904), 778-792

[2] Тюрин, А Н, 《Изв АН СССР Сер матем》, **34** (1970), 6, 1200-1208

[3] Clemens, C and Griffiths, P, The intermediate Jacobian of the cubic threefold, *Ann of Math*, **95** (1972), 281-356

Вик С Куликов 撰 蔡金星 译

Fano 簇 [Fano variety, Фано многообразие]

域 k 上光滑、完全、不可约**代数簇** (algebraic variety) X, 它的反典范层 K_X^{-1} 是丰富的 (见**丰富层** (ample sheaf)) G Fano 对这类簇做了基础的研究 ([1], [2]).

二维 Fano 簇称为 del Pezzo 曲面 (del Pezzo surface), 它是**有理曲面** (rational surface) del Pezzo 曲面的高维模拟——维数大于 2 的 Fano 簇——并不都是有理簇, 例如, 射影空间 P^4 中一般的三次超曲面 人们不知道 (1984) Fano 簇是否都是单有理的

三维 Fano 簇已经透彻地被研究 (见 [3], [5]). 关于维数大于 3 的 Fano 簇, 只知道一些零碎的结果

三维 Fano 簇的 **Picard 群** (Picard group) Pic X 是有限生成的无挠群. 当基域 k 是 **C** 时, Pic X 的秩等于第二 **Betti 数** (Betti number) $b_2(X)$, 不超过 10 (见 [4]) 如果 $b_2(X)\geqslant 6$, 则 Fano 簇同构于 $P^1\times S_{11-b_2(X)}$, 这里 S_d 是阶为 d 的 del Pezzo 曲面 Fano 簇 X 称为本原的 (primitive), 如果不存在到某个光滑簇 X_1 的**单项变换** (monoidal transformation) σ $X\to X_1$, 以非奇异不可约曲线为中心. 如果 X 是本原 Fano 簇, 则 $b_2(X)\leqslant 3$ 如果 $b_2(X)=3$, 则 X 是 $S=P^1\times P^1$ 上的二次纤维空间, 换言之, 存在态射 π $X\to S$, 它的每个纤维同构于二次曲线, 即 P^2 中由二次齐次方程给出的代数概形. $b_2(X)=2$ 的 Fano 簇 X 是射影空间 P^2 上的二次纤维空间 (见 [3]) 在 $b_2(X)=1$ 的情况下, Fano 簇的分类已经给出, 有 18 个类型 (见 [6])

三维 Fano 簇 X 的反典范除子的自交数 $(-K_X^3)\leqslant 64$ 存在除子 $H\in$ Pic X, 使得 $H^{\otimes r}$ 同构于 K_X^{-1} 的最大的整数 $r\geqslant 1$ 称为 Fano 簇的指数 (index of the Fano variety). 三维 Fano 簇的指数可以取值 1, 2, 3 或 4 指数为 4 的 Fano 簇同构于射影空间 P^3 指数为 3 的 Fano 簇同构于光滑二次超曲面 $Q\subset P^4$ 如果 $r=2$, 则自交数 $d=H^3$ 可以取值 $1\leqslant d\leqslant 7$, 且每个值都被某个 Fano 簇取到. 对于指数为 1 的 Fano 簇, 由线性系 $|K_X^{-1}|$ 定义的映射 $\varphi_{K_X^{-1}}$ $X\to P^{\dim|K_X^{-1}|}$ 的次数 $\deg\varphi_{K_X^{-1}}=1$ 或 2 指数为 1, $\deg\varphi_{K_X^{-1}}=2$ 的 Fano 簇的分类已经给出. 如果 $\deg\varphi_{K_X^{-1}}=1$, 则 X 可以实现为射影空间 P^{g+1} 中次数为 $2g-2$ 的子簇 V_{2g-2} 数 g 称为 Fano 簇 V_{2g-2} 的亏格 (genus of the Fano variety), 它等于典范曲线——X 在反典范嵌入到 P^{g+1} 中的截面的亏格 超平面截口的类等于反典范类且生成群 Pic V_{2g-2} 的 Fano 簇 $V_{2g-2}\subset P^{g+1}$ 的分类已经给出 (见 [4], [5])

参考文献

[1] Fano, G, Sulle varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli, in *Proc internat congress mathematicians Bologna*, *Vol* 4, Zanichelli, 1934, 115–119

[2] Fano, G, Si alcune varietà algebriche a tre dimensioni razionali, e aventi curve-sezioni canoniche, *Comment Math Helv* **14** (1942), 202–211

[3] Mori, S and Mukai, S, Classification of Fano 3-folds with $B_2\geqslant 2$, *Manuscripta Math*, **36** (1981), 2, 147–162

[4] Roth, L, Sulle V_3 algebriche su cui l'aggiunzione si estingue, *Atti Accad Naz Lincei Rend Cl Sci Fis Mat Nat*, **9** (1950), 246–250

[5A] Исковских В А, 《Изв АН СССР Сер матем》, **41** (1977), 3, 516–562

[5B] Исковских В А, 《Изв АН СССР Сер матем》, **42** (1978), 3, 506–549

[6] Исковских В А, Итоги науки и техники Современные проблемы математики, т 12, М, 1979, 59–157

Вик С Куликов 撰 蔡金星 译

Farey 序列 [Farey series, Фарея ряд], n 阶的

分母不超过 n 的、分子不超过分母的非负不可约分数的递增序列. 例如, 5 阶 Farey 序列是序列

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},$$

$$\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{1}$$

下述论断成立

1) 如果 a/b 和 a'/b' 是 n 阶 Farey 序列中相继的两项, 则

$$ba'-ab'=1$$

2) 如果 a/b, a''/b'', a'/b' 是 n 阶 Farey 序列中相继的三项, 则

$$\frac{a''}{b''}=\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}$$

3) n 阶 Farey 序列中的项数等于

$$1+\sum_{x=1}^{n}\varphi(x) \qquad (*)$$

J Farey (1816) 研究过这种序列.

参考文献

[1] Бухштаб, А А, Теория чисел, 2 изд, М, 1966

[2] Hall, R R, A note on Farey series, *J London Math Soc*, **2** (1970), 139–148

[3] Hardy, G H and Wright, E M, An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ Press, 1979

В И Нечаев 撰

【补注】 当然, (*) 中的 φ 表示 **Euler 函数** (Euler function)

张鸿林 译

Fatou 弧 [Fatou arc, Фату дуга]

对于复 z 平面的区域 G 中的亚纯函数 $f(z)$, 为 G 的具有下述性质的**可达边界弧** (attainable boundary arc) 它构成某个 Jordan 区域 $g\subset G$ 的边界部分, 而 $f(z)$ 在 g 内有界 有时拓广这一定义, 把 $f(z)$ 在 g 内有界的条件改为更一般的条件 g 在映射 $w=f(z)$ 下

的象在 w 平面上不稠密．解析函数边界性质理论中强化的 Fatou 定理（Fatou theorem）断言，如果 γ 是对于圆盘 $D=\{|z|<1\}$ 内亚纯的函数 $f(z)$ 的 Fatou 弧（甚至可以在拓广意义下），则在几乎每个点 $\zeta\in\gamma$ 处，当 z 在 D 中任一以 ζ 为顶点、由 D 的一对弦形成的角域内趋于 ζ 时，$f(z)$ 具有有限极限

参考文献

[1] Collingwood, E F, Lohwater, A J, The theory of cluster sets, Cambridge Univ Press, 1966

[2] Привалов, И И, Граничные свойства аналитических функций, 2 изд, М-Л, 1950（中译本 И И 普里瓦洛夫，解析函数的边界性质，科学出版社，1956）.

[3] Голузин, Г М, Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд, М, 1966（中译本 Г М 戈鲁辛，复变函数的几何理论，科学出版社，1956）

Е П Долженко 撰　沈永欢 译

Fatou 定理［Fatou theorem，Фату теорема］，复变函数论中的

1）假设调和函数 $u(z)$ $(z=re^{i\varphi})$ 可在单位圆盘 $U=\{z\in\mathbf{C}\ \ |z|<1\}$ 内表示为 Poisson-Stieltjes 积分

$$u(z)=\int\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\mu(\zeta),\quad \zeta=e^{i\theta},$$

其中 μ 是集中于单位圆周 $T=\{\zeta\ \ |\zeta|=1\}$ 上的 Borel 测度，$\int d\mu(\zeta)=1$，则 $u(z)$ 关于 T 上的 Lebesgue 测度几乎处处有**角边界值**（angular boundary value）

这条 Fatou 定理能推广到可在 Ляпунов 区域 $D\subset\mathbf{R}_n$ $(n\geqslant2)$ 内表示为 Poisson-Stieltjes 积分的调和函数 $u(x)$，$x\in\mathbf{R}^n$（见［2］，［3］） 关于多圆柱 $U^n=\{z=(z_1,\ \ ,z_n)\in\mathbf{C}^n\ \ |z_j|<1,\ j=1,\ \ ,n\}$ 中多重调和函数的**径向边界值**（radial boundary value）的 Fatou 定理，见［4］，［5］．

2）如果 $f(z)$ 是 U 中的有界解析函数，则它关于 T 上的 Lebesgue 测度几乎处处有角边界值

这条 Fatou 定理可推广到**有界特征函数**（function of bounded characteristic），见［6］ 存在角边界值 $f(\zeta)$ 的点 $\zeta\in T$ 称为 Fatou 点（Fatou point）．关于 Fatou 定理对于多复变量 $z=(z_1,\ \ ,z_n)$，$n\geqslant2$ 的解析函数 $f(z)$ 的推广，见［7］，对于 $n\geqslant2$，已证实沿复切线方向也有边界值．

3）如果具有单位收敛圆盘 U 的幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ 的系数趋于零 $\lim_{k\to\infty}a_k=0$，则此级数在圆周 T 的任一仅含所给级数和函数的正则边界点的弧 $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 上一致收敛

当 $\lim_{k\to\infty}a_k=0$ 且所给幂级数在弧 $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 上一致收敛时，不能推出此弧上的点是级数和的正则点．

定理 1)，2) 和 3) 为 P Fatou 在［1］中所证明．

参考文献

[1] Fatou, P, Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta Math*, **30**(1906), 335-400.

[2] Привалов, И И, Кузнецов, П И, 《Матем сб》, **6**(1939), 3, 345-376.

[3] Соломенцев, Е Д, 《Чехосл матем ж》, **8**(1958), 520-536

[4] Zygmund, A, Trigonometric series, 1-2, Cambridge Univ Press, 1979

[5] Rudin, W, Function theory in polydiscs, Benjamin, 1969

[6] Привалов, И И, Граничные свойства аналитических функций, 2 изд, М-Л, 1950（中译本 И И 普里瓦洛夫，解析函数的边界性质，科学出版社，1956）

[7] Хенкин, Г М, Чирка, Е М, в сб, Итоги науки и техники Современные проблемы математики, М, **4**(1975), 13-142

Е Д Соломенцев 撰

【补注】 关于 Ляпунов 区域见 **Ляпунов 曲面和曲线**（Lyapunov surfaces and curves）．关于 $\mathbf{C}^n$ 中的 Fatou 定理，见［A3］-［A5］

参考文献

[A1] Landau, E, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, in Das Kontinuum und andere Monographien, Chelsea, reprint, 1973

[A2] Hoffman, K, Banach spaces of analytic functions, Prentice-Hall, 1962

[A3] Rudin, W, Function theory in the unit ball of $\mathbf{C}^n$, Springer, 1980

[A4] Stein, E M, Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables, Princeton Univ Press, 1972

[A5] Nagel, A, Stein, E M, On certain maximal functions and approach regions, *Adv in Math*, **54** (1984), 83-106

沈永欢 译

Fatou 定理（关于 Lebesgue 积分的）［Fatou theorem (on Lebesgue integrals)，Фату теорема］

关于在 Lebesgue 积分下取极限的一个定理· 非负可测（实值）函数序列 $f_1, f_2,$ 在集合 E 上几乎处处收敛于函数 f，则

$$\int_E f(x)\,dx\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx$$

这个定理是 P Fatou 首先证明的（［1］） 在其叙述中，$\liminf_{n\to\infty}$ 常常用 $\sup_n$ 来代替．

参考文献

[1] Fatou, P, Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta Math*, **30** (1906), 335-400

[2] Saks, S, Theory of the integral, Hafner, 1952（译自波兰文）

[3] Натансон, И П, Теория функций вещественной переменной, 3 изд, М, 1974（中译本 И П 那汤松，实变函数论，高等教育出版社，1956）

Т П Лукашенко 撰

【补注】 这个结果通常称为 Fatou 引理(Fatou lemma). 它的更一般的形式是 如果($\mathfrak{X}$, $\mathscr{A}$, μ)是一个测度空间(measure space), f_n $\mathfrak{X}\to[0,\infty]$ 是 $\mathscr{A}$ 可测的, $n=1,2,$, 而对于 $x\in\mathfrak{X}$, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\inf f_n(x)$, 则

$$\int f d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty}\inf\int f_n d\mu$$

这时, 不需要序列收敛.

参考文献

[A1] Hewitt, E and Stromberg, K , Real and abstract analysis, Springer, 1965

[A2] Halmos, P R , Measure theory, V Nostrand, 1950 (中译本 R 哈尔摩斯, 测度论, 科学出版社, 1959)

张鸿林 译

Favard 不等式 [Favard inequality, Фавара неравенство]

不等式

$$\|x\|_{C[0\ 2\pi]}\leqslant MK_r n^{-r},\quad r=1,2,\quad ,\qquad (*)$$

此处

$$K_r=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k(r+1)}(2k+1)^{-r-1},$$

而函数 $x(t)\in W^rMC$ 和每一个阶数不超过 $n-1$ 的三角多项式正交. $r=1$ 时不等式(*)为 H Bohr (1935) 证明, 所以它也称作 Bohr 不等式(Bohr inequality)或 **Bohr-Favard 不等式**(Bohr-Favard inequality). 当 r 是任意正整数时, 不等式(*)是由 J Favard ([1]) 证明的

参考文献

[1] Favard, J , Sur l'approximation des fonctions, periodiques par des polynomes trigonométriques, *C R Acad Sci Paris*, **203** (1936), 1122 - 1124

[2] Тихомиров, В М , Некоторые вопросы теории приближений, М , 1976

Ю Н Субботин 撰

【补注】 关于空间 W^rMC 的定义见 **Favard 问题**(Favard problem) 孙永生 译 葛显良 校

Favard 测度 [Favard measure, Фавара мера]

在 n 维 Euclid 空间 E^n 中子集 M 的 p 阶 $(p<n)$ Favard 测度是 **Hausdorff 测度**(Hausdorff measure)的一种推广, 它由 J Favard ([1]) 引进. 精确的定义是 E^n 中的运动群诱导出它的 $n-p$ 维仿射子空间族上的一个左不变 **Haar 测度**(Haar measure) μ, 唯一确定到常数因子不计, 并且集合 M 诱导出一个函数 f_M, 后者在仿射子空间 τ 上的值等于交集 $\tau\cap M$ 中点的个数. M 的 Favard 测度为 μ 在 f_M 的值, 如果选正规化常数满足条件 对 p 维单位方体 I 有 $\mu(f_I)=1$

集合 M 的 p 阶 Favard 测度不超过它的 Hausdorff p 测度 α, 且在 $\alpha<\infty$ 情形, 它与 α 相同的充要条件是 M 可分解为可数个部分, 其中之一有 Hausdorff p 测度零且其他任一个都位于某个光滑 p 维流形上.

参考文献

[1] Favard, J , Une définition de la longueur et de l'aire, *C R Acad Sci Paris*, **194** (1932), 344 - 346

[2] Federer, H , Geometric measure theory, Springer, 1969

Л Д Иванов 撰 郑维行 译

Favard 问题 [Favard problem, Фавара задача]

计算上确界

$$\sup_{f\in W^rMX}\ \inf_{t_n}\|f(x)-t_n(x)\|_X\qquad (*)$$

的问题, 其中 $t_n(x)$ 是阶数不超过 n 的三角多项式, W^rMX 是一周期函数类, 其中每一函数在 Weyl 意义下的 r 阶导数(见**分数阶积分和微分法**(fractional integration and differentiation)满足不等式 $\|f^{(r)}\|_X\leqslant M$, 而 $X=C[0,2\pi]$ Favard 问题由 J Favard ([1]) 提出. 在这以后, 考虑了一些更广泛的函数类, 做为更广泛结果的一个推论得到了 Favard 问题当 $X=C$, L 及任意 $r>0$ 时的完整解答(见[2], [3]).

参考文献

[1] Favard, J , Sur les meilleurs procedés d'approximation de certain classes, *Bull Sci Math* , **61** (1937), 209 - 224

[2] Стечкин, С Б , 《Изв АН СССР Сер матем》, **20** (1956), 5, 643 - 648

[3] Дзядык, В К , 《Изв АН СССР Сер матем》, **23** (1959), 6, 933 - 950

[4] Корнейчук, Н П , Экстремальные задачи теории приближения, М , 1976

Ю Н Субботин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Feinerman, R P and Newman, D J , Polynomial approximation, Williams & Wilkins, Chapt IV 4

孙永生 译 葛显良 校

Favard 定理 [Favard theorem, Фавара теорема], 关于正交系的

如果对于实数 α_n 和 β_n, 递推关系式

$$P_n(x)=(x-\alpha_n)P_{n-1}(x)-\beta_n P_{n-2}(x),$$

$$P_{-1}(x)=0,\ P_0=1,$$

则存在有界变差函数 $\alpha(x)$, 使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}P_n(x)P_m(x)d\alpha(x)=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ h_n>0, & n=m\end{cases}$$

这个定理是 J Favard ([1]) 证明的 有时, 这个定理也与 J Shohat 的名字相联系

参考文献

[1] Favard, J , Sur les polynomes de Tchebicheff, *C R*

Acad Sci Paris, **200** (1935), 2052 – 2053
[2] Szego, G, Orthogonal polynomials, Amer Math Soc, 1975
Ю Н Субботин 撰 张鸿林 译

羽状空间 [feathered space, перистое пространство], p空间 (p-space)

完全正则的 Hausdorff 空间，在某个 Hausdorff 紧化中具有羽状结构．拓扑空间 Y 的子空间 X 在 Y 中的羽状结构 (feathering) 是 Y 中的开集族组成的可数系统 $\mathscr{P}$，使得对每个点 $x \in X$，关于所有的族 $\gamma \in \mathscr{P}$ 的诸星形 $\mathrm{St}_\gamma(x)$ 之交含于 X 且含有点 x 这里，点 x 关于集族 γ 的星形 (star of a point) $\mathrm{St}_\gamma(x)$ 是 γ 中含有点 x 的所有元素之并．如果空间 X 在它的某个**紧化** (compactification) 中具有羽状结构，那么它在每个 Hausdorff 紧化中也具有羽状结构．如果集合 X 是其包容空间 Y 中一开集序列 U_1, U_2, 的交，则系统 $\{U_1\}$, $\{U_2\}$, 构成子空间 X 在 Y 中的羽状结构．特别，若空间是 Čech 完全的 (Čech complete)，即它是某个 Hausdorff 紧化中的 G_δ 集，那么它是一个羽状空间 所有度量空间都是羽状空间．因此，羽状空间的概念既是局部紧空间概念的推广，也是度量空间概念的推广

羽状空间类在某些运算下是稳定的：羽状空间的可数乘积是羽状空间，羽状空间的闭子空间以及 G_δ 型子空间也都是羽状空间．(Тихонов 空间类中) 羽状空间在完满映射下的原象是羽状空间．假定一个空间是羽状空间，这就在很多方面保证了它具有良好的性态．任何羽状空间都是 k 空间 可数羽状空间具有可数基 此外，如果羽状空间含有可数网，则有可数基 (并且是可度量化的) 在映成羽状空间的连续映射作用下，权不可能增大 当出现羽状结构时，某些其他的基本性质的表现原则上会发生变化，这一点很重要 特别是，仿紧羽状空间的可数乘积仍然是仿紧羽状空间，尽管仿紧性本身在作有限乘积时并不保持 还有，可数多个最终紧的羽状空间之积是最终紧的羽状空间，尽管最终紧性在作有限乘积时并不保持 羽状结构的概念使我们能够刻画可以用完满映射映成度量空间的那些空间的特性．即是，要存在一个完满映射，把 Тихонов 空间 X 映成一个度量空间，其充要条件是 X 是一个仿紧羽状空间 (Архангельский 定理 (Arkhangel'skiĭ theorem)) 仿紧羽状空间在完满映射下的象是一个仿紧羽状空间 (Филиппов 定理 (Filippov theorem))，但却有一个完满映射的例子，把一个羽状空间映成一个非羽状 Тихонов 空间．非仿紧羽状空间的重要例子有：非仿紧局部紧空间以及不可度量化的 Moore 空间 (Moore spaces)，即是具有可数展现的 Тихонов 空间 就拓扑群的空间而言，羽状性蕴涵仿紧性 对于拓扑群有一个简单的羽状判别规则 拓扑群的空间为羽状空间的充要条件是，它含有一个非空的 Hausdorff 紧统，具有可数的定义邻域系 (Пасынков 定理 (Pasynkov theorem)) 当出现羽状结构时，可度量化判定法则可以得到实质性的简化．特别是，如果一个仿紧羽状空间 X 可以连续且一一地映成一个度量空间，则 X 是可度量化的 由此可以证明，Тихонов 空间 X 可度量化的充要条件是 它是一个仿紧羽状空间，具有 G_δ 型对角线 后一条件是说，集合 $\Delta = \{(x, x) . x \in X\}$ 可以表示为 $X \times X$ 中可数多个开集之交．这些以及其他的结果，使我们能把羽状性同仿紧性一样，视为度量空间以及 Hausdorff 紧统的基本而一般的性质之一

参考文献

[1] Архангельский, А В, Пономарев, В И, Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М, 1974 (英译本 Arkhangel'skiĭ, A V and Ponomarev, V I Fundamentals of general topology problems and exercise, Reidel, 1984)
[2] Архангельский, А В, 《Матем сб》, **67** (1965), 1, 55 – 88
[3] Филиппов, В В, 《Докл АН СССР》, **176** (1967), 3, 533 – 535
[4] Пасынков, Б А, 《Докл АН СССР》, **161** (1965), 2, 281 – 284
А В Архангельский 撰

【补注】 在英文文献中，feathering 也称为 pluming (亦见**羽状结构** (feathering))，因而，feathered space 也称为 plumed space (简称 p 空间 (p-space)) 这个术语不应同 P-space 相混，后一术语表示其他一些各式各样的不等价的概念

就仿紧空间而言，羽状空间与森田纪一 ([A1]) 引进的 M 空间 (M-space) 一致．但若没有仿紧性，这两个定义并不等价．详见 [A2]

参考文献

[A1] Morita, K, Products of normal spaces with metric spaces, *Math Ann*, **154** (1964), 365 – 382
[A2] Nagata, J, Modern general topology, North-Holland, 1985
[A3] Gruenhage, G, Generalized metric spaces, in K Kunen and J E Vaughan (eds) Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, 1984, 423 – 501
胡师度、白苏华 译

羽状结构 [feathering, оперение]，空间 X 在包容空间 Y 中的

空间 X 在包容空间 Y 中的开覆盖组成的可数族 P，使得对每个 $x \in X$ 有

$$\bigcap\{\mathrm{St}_\gamma(x) \quad \gamma \in P\} \subset X,$$

这里 $\mathrm{St}_\gamma(x)$ 表示点 x 关于 γ 的星形，即 γ 中含有点 x

的所有元素之并

羽状结构的概念是定义(A B Архангельский 意义下)所谓p空间的基础 空间X称为p空间,如果X在其**Stone-Čech 紧化**(Stone - Čech compactification)或**Wallman 紧化**(Wallman compactification)中具有羽状结构.每个(在Čech 意义下的)完全空间都是p空间 每个p空间都有点式可数型 在p空间中,权的加法定理成立,纯权与权一致 仿紧p空间正好是度量空间的完满原象 具有点式可数基的仿紧p空间是可度量化的,正如具有G_δ型对角线的仿紧p空间是可度量化的 仿紧p空间的完满象及完满原象也都是仿紧p空间. В И Пономарев 撰

【补注】 英文术语中也用 pluming 来代替 feathering p空间亦称**羽状空间**(feathered space)

参考文献

[A1] Gruenhage, G , Generalized metric spaces, in K Kunen and J E Vaughan (eds) Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, 1984, 423 - 501

胡师度、白苏华 译

Федоров群 [Fedorov group, Федоровская группа]

同晶体群(crystallographic group) 它以Е С Федоров命名,1891年左右 Федоров列出了三维空间中所有这种群(见[1])

参考文献

[1] Федоров, Е С , Симметрия и структура кристаллов Основные работы, М , 1949, 111-255

Э Б Винберг 撰

【补注】 部分历史可参见**晶体群**(crystallographic group) 石生明 译 许以超 校

Fejér 多项式 [Fejér polynomial, Фейера полином]

形式为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\cos(2n+k)x-\cos(2n-k)x\right)$$

的三角多项式,或者关于正弦函数的类似多项式. Fejér 多项式可以用来构造这样一些连续函数,使其Fourier 级数具有给定的奇点

参考文献

[1] Бари, Н К , Тригонометрические ряды, М , 1961 (英译本 Bary, N K [N K Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964)

С А Теляковский 撰 张鸿林 译

Fejér 奇异积分 [Fejér singular integral, Фейера сингулярный интеграл]

形式为

$$\sigma_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\Phi_n(t)dt$$

的积分,其中

$$\Phi_n(t)=\frac{1}{2(n+1)}\quad\frac{\sin^2(n+1)t/2}{\sin^2 t/2}$$

是 Fejér 核 Fejer 奇异积分是 **Fejér 和**(Fejér sum) $\sigma_n(f,x)$的积分表示.

参考文献见 **Fejér 和**(Fejér sum)

С А Теляковский 撰 张鸿林 译

Fejér 和 [Fejér sum, Фейера сумма]

关于三角函数系的 Fourier 级数的部分和的一种算术平均

$$\sigma_n(f,x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}s_k(f,x)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

此处a_k, b_k是函数f的 Fourier 系数

如果f连续,那么$\sigma_n(f,x)$一致收敛到$f(x)$, $\sigma_n(f,x)$依L度量收敛到$f(x)$.

如果f属于满足α阶 Lipschitz 条件的函数类,$\alpha<1$,则估计式

$$\|f(x)-\sigma_n(f,x)\|_c=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

成立.这就是说,此时 Fejér 和对f的逼近具有该类函数的最佳逼近阶 但 Fejér 和不能保证更高的逼近度.事实上,估计式

$$\|f(x)-\sigma_n(f,x)\|_c=o\left(\frac{1}{n}\right),$$

当且仅当函数是常数时成立

Fejér 和由 L.Fejér ([1]) 引入

参考文献

[1] Fejér, L , Untersuchungen uber Fouriershe Reihen, *Math Ann* , **58** (1903), 51 - 69

[2] Ахиезер, Н И Лекции по теории аппроксимации, 2, изд , М , 1965 (中译本 Н И 阿赫叶热尔,逼近论讲义,科学出版社,1957)

[3] Zygmund, A , Trigonometric series, 1 - 2, Cambridge Univ Press, 1979

[4] Натансон, И П , Конструктивная теория функций, М -Л , 1949 (中译本 И П 纳唐松,函数构造论,上、中、下册,科学出版社,1965)

[5] Тихомиров, В М , Некоторые вопросы теории приближений, М , 1976

С А Теляковский 撰

【补注】亦见 **Fejér 求和法**(Fejér summation method)

孙水生 译 葛显良 校

Fejér 求和法 [Fejér summation method, Фейера метод суммирования]

一种适用于 Fourier 级数求和的**算术平均求和法** (arithmetical averages, summation method of) 这种方法是 L Fejér 首先应用的 ([1])

函数 $f(x) \in L(-\pi, \pi)$ 的 Fourier 级数

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

按 Fejér 求和法是可和的，其和为函数 $s(x)$，如果

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = s(x),$$

其中

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(x), \qquad (2)$$

而 $s_k(x)$ 是 (1) 的部分和.

如果 x 是函数 $f(x)$ 的连续点或第一类间断点，则这个函数的 Fourier 级数在点 x 上是 Fejér 可和的，其和分别为 $f(x)$ 和 $(f(x+0)+f(x-0))/2$ 如果 $f(x)$ 在某一区间 (a, b) 上是连续的，则它的 Fourier 级数在每个区间 $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ 上是一致 Fejér 可和的，而如果 $f(x)$ 是处处连续的，则它的 Fourier 级数在 $[-\pi, \pi]$ 上是可和的，其和为 $f(x)$ (Fejér 定理 (Fejér theorem))

H Lebesgue ([2]) 加强了这个结果，他证明 对于每个可和函数 $f(x)$，它的 Fourier 级数是几乎处处可和的，其和为 $f(x)$

函数

$$K_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{k}\cos \nu x\right]=$$

$$=\frac{1}{2(n+1)}\left[\frac{\sin(n+1)(x/2)}{\sin(x/2)}\right]^2$$

称为 Fejér 核 (Fejér kernel) 可以用它把 $f(x)$ 的 Fejér 平均 (2) 表示为下列形式

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)K_n(u)\,du$$

参考文献

[1] Fejer, L, Untersuchungen über Fouriersche Reihen, *Math Ann*, **58** (1903), 51 - 69

[2] Lebesgue, H, Recherches sur la convergence de séries de Fourier, *Math Ann*, **61** (1905), 251 - 280

[3] Бари, Н К, Тригонометрические ряды, М, 1961 (英译本 Bary, N K, A treatise on trigonometric series, Pergaman, 1964)

[4] Zygmund, A, Trigonometric series, 1 - 2, Cambridge Univ Press, 1979

И И Волков 撰

【补注】 亦见 **Cesàro 求和法** (Cesàro summation methods)

张鸿林 译

Feller 过程 [Feller process, Феллеровский процесс]

一种齐次 **Марков 过程** (Markov process) $X(t)$ $(t \in T)$ 它取值于具有拓扑 $\mathscr{C}$ 和 Borel σ 代数 $\mathscr{B}$ 的拓扑空间 E，T 是实轴 $\mathbf{R}$ 的一个可加子半群，其**转移函数** (transition function) $P(t, x, B)$，$(t \in T,\ x \in E,\ B \in \mathscr{B})$ 具有某种光滑性质 即对任一有界连续函数 f，函数

$$x \mapsto P^t f(x)=\int f(y)P(t, x, dy)$$

是连续的. 对转移函数的这个要求是自然的，因为作用在有界 Borel 函数空间上的转移算子 P^t, $t\in T$ 保持有界连续函数空间 $C(E)$ 不变，即转移算子半群 $\mathscr{P}=\{P^t, t\in T\}$ 可以看作是作用在 $C(E)$ 上. W Feller 首先研究了这种类型的半群 (1952，见 [1])

一般地说，在拓扑空间上要加一些附加条件. 通常 $(E, \mathscr{C})$ 是局部紧可距离化空间. 在此条件下，满足随机连续条件的 Feller 过程存在一个修正使其成为标准 **Марков 过程** (Markov process)，强 Марков 性质 反之，一个标准 Марков 过程是一个对自然拓扑 $\mathscr{C}_0$ 的 Feller 过程，$\mathscr{C}_0$ 的基由具有如下性质的集 $B \in \mathscr{B}$ 组成 如果过程开始在 B 中，则首出集 B 的时刻几乎必然满足 $\theta(B)>0$ (见 [1])

Feller 过程的一个重要子类是强 Feller 过程 (strong Feller process) (见 [2]) 在此情形下，对转移函数施加了严格的光滑性条件 对每个有界 Borel 函数 f，$x \mapsto P^t f(x)$ 必须是连续的. 此外，如果在有界测度空间内在变差范数意义下函数 $x \to P(t, x, \cdot)$ 是连续的，那么称相应于这个转移函数的 Марков 过程为狭义强 Feller 过程. 如果转移函数 P 和 Q 对应于强 Feller 过程，那么在关于 $(E, \mathscr{C})$ 的通常假定下，它们的复合 $P \cdot Q$ 与一个狭义强 Feller 过程相对应. 非退化的**扩散过程** (diffusion process) 是强 Feller 过程 (见 [3]) 强 Feller 过程的一个自然推广是具有连续分支的 Марков 过程 (见 [4])

如果 T 是自然数的一个子集，那么称 Feller 过程 $X(t)$ $(t\in T)$ 为 Feller 链 (Feller chain) 直线 $\mathbf{R}$ 上的**随机游动** (random walk) 提供了一个 Feller 链的例子 序列 S_n, $n\in T=\{0, 1, 2, \ \}$ 满足条件 $S_{n+1}=S_n+Y_n$, $\{Y_n\}$ 是独立同分布随机变量. 当且仅当 Y_1 的分布具有密度时随机游动 $\{S_n\}$ 是强 Feller 链

具有可数状态的 **Марков 链** (Markov chain) 的状态分类可以自然推广到 Feller 过程. 如果对任意 x 的邻域 U_x 和 y 的邻域 V_y，存在 $t, s\in T$ 使 $P(t, x, V_y)>0$ 且 $P(s, y, U_x)>0$，那么 E 中的两个状态 x

和 y 是互通的(具有可数状态集的链是具离散拓扑的 Feller 链).与经典的**遍历理论**(ergodic theory)相比,Feller 过程的遍历性及其研究方法有一定的特点 伴随着不可约(拓扑不可分)Feller 过程,"最正则"的行为出现了,这是所有状态都互通的 Feller 过程(见[7]) 此时 Feller 过程的遍历性质比较弱.

作为一个例子,可以对照一下具有一般态空间的 Марков 链诸如常返性的一类性质.假定对任何初始状态 $x\in E$ 及 $\mathscr{A}$ 中任何集合 A, $x(t)\in A$ 对无穷多个 t 几乎必然地成立(t 在自然数集中取值).如果 $\mathscr{A}$ 是一个形如 $\mathscr{A}=\{A \ \ \mu(A)>0\}$ 的集类,其中 μ 是某一测度,那么,我们就得到在 Harris 意义下链的常返性(见[8]),并且如果对 Feller 过程选择 $\mathscr{A}$ 为 E 上的拓扑 $\mathscr{C}$,就得到了扩散性(即拓扑常返性) (见[7]) Y_1 具有有限数学期望 $\mathrm{E}Y_1$ 的随机游动 $\{S_n\}$ 是扩散 Feller 链,当且仅当 $\mathrm{E}Y_1=0$,进而若 Y_1 的分布不是算术的,那么仅当对某些 n, S_n 的分布具有绝对连续部分时,$\{S_n\}$ 才是 Harris 意义下常返的.

从形式的观点看,具一般态空间 E 的 Марков 链的理论可以归结为对具有紧态空间 E 的 Feller 链的研究,其中 $\hat{E}$ 是借助于 Gel'fand-Naĭmark 定理而得到的 E 的扩张(见 **Banach 代数**(Banach algebra)和[9]).可是,这种扩张太大了 对于 Марков 链,Feller 扩张还有其他构造方法(见[10])

Feller 过程和 Feller 链的理论是**拓扑动力学**(topological dynamics)的概率推广,因为一个决定性(退化)Feller 过程 $X(t)$, $t\in T$,相当于动力系统 $\{S_t \ \ t\in T\}$,这里从 $T\times E$ 到 E 中的映射 $(t,x)\to S_tx$ 是连续的并且 $X(t)=S_tx$(几乎必然).

参考文献

[1] Дынкин, Е Б , Марковские процессы, М , 1963 (英译本 Dynkin, E B , Markov Processes, 1－2, Springer, 1965)

[2] Гирсанов, И В.,《Теория вероятн и ее примен》, **5** (1960), 3, 314－330

[3] Молчанов, С А ,《Теория Вероятн и ее примен》, **13** (1968), 3, 489－498

[4] Tuominen, P and Tweedie, R , Markov chains with continuous components, *Proc London Math Soc* , **38** (1979), 89－114

[5] Foguel, S , The ergodic theory of positive operators on continuous functions, *Ann Scuola Norm Sup Pisa*, **27** (1973), 1, 19－51

[6] Sine, R , Sample path convergence of stable Markov processes II , *Indiana Univ Mabh J* , **25** (1976), 1, 23－43

[7] Смирнов, С Н ,《Докл АН СССР》, **263** (1982), 3, 554－558

[8] Revuz, D , Markov chains North-Holland, 1975

[9] Жданок, А И , в кн, Топология пространства и их отображения, Рига, 1981, 18－33

[10] Шур, М Г ,《Теория Вероятн и ее примен》, **26** (1981), 3, 496－509

С Н Смирнов 撰

【补注】 在西方 Feller 过程的指标集通常是在 $\mathbf{R}_+$(而不是 $\mathbf{R}$)中.Feller 过程的重要性基于下面三个主要理由

a) 许多自然的(齐次) Марков 过程足 Feller 过程,例如.**扩散过程**(diffusion process)、以及**平稳增量的随机过程**(stochastic process with stationary increments),它们之中有 **Wiener 过程**(Wiener process)和 **Poisson 过程**(Poisson process),

b) Feller 半群(Feller semi-group)的概念(即在正文中定义的**转移算子半群**(transition-operator semi-group) $\mathscr{P}$)是线性算子半群的概率研究与分析研究的结合 (亦见**算子半群**(Semi-group of operators)).

c) 用称为 Ray-Knight 紧化(Ray-Knight compactification)的方法可以把强 Марков 过程看作"几乎" Feller 过程(在态空间上具有一个好的拓扑),于是可以应用后者的光滑性.

参考文献

[A1] Dellacherie, C and Meyer, P A , Probabilities and potential, C, North-Holland, 1988 (translated from the French)

[A2] Feller, W , An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1966, Chapt X

[A3] Loève, M , Probability theory, Princeton Univ Press, 1963, Chapt XIV

[A4] Chung, K L , Lectures from Markov Processes to Brownian motion, Springer, 1982

[A5] Wentzell, A D , A course in the theory of stochastic processes, McGraw-Hill, 1981

[A6] Ethier, S N and Kurtz, T G , Markov Processes, Wiley, 1986

刘秀芳 译

Fermat 大定理 [**Fermat great theorem 或 Fermat big theorem, Ферма теорема**], Fermat 著名定理(Fermat famous theorem), Fermat 最后定理(Fermat last theorem)

对任何自然数 $n>2$ 方程 $x^n+y^n=z^n$(Fermat 方程(Fermat equation))无非零整数解 x,y,z 这一论断.大约在1630年,P Fermat 在他的一本由 Diophantus 所著《算术》(Aritmetika)一书的页边空白处对此作了如下陈述([1]) "不可能把一个立方数分成两个立方数,或者把一个四方数分成两个四方数,而且一般说来,不可能把任一个大于二次幂的方幂数分成两个同次幂的方幂数" 接着他又写道 "我对此找到了一个真正妙不可言的证明,但是这处空白太窄,无法写下它".在 Fermat 的论文中有 $n=4$ 时定理的证明.虽经

众多（职业的及业余的）数学家的努力，迄今（1984年）尚未对一般的情形获得证明 有一个时期，曾以一大笔国际奖金这一欠妥的方式激励人们去证明这一定理，这笔奖金于第一次世界大战末废止

人们一直猜想根本不存在 Fermat 大定理的证明

$n=3$ 时定理由 L Euler (1770) 予以证明，$n=5$ 由 P G L Dirichlet 和 A Legendre (1825) 证明，$n=7$ 由 G Lamé (1839) 证明（见[2]） 只要对 $n=4$ 以及每个素数幂 $n=p>2$ 来证明定理就够了，也就是说，只要证明方程

$$x^p+y^p=z^p \tag{1}$$

没有互素的非零整数解 x，y，z 就够了 还可以假设 x 和 y 与 p 互素 为证明 Fermat 定理，考虑以下两种情形 情形 1 $(xyz,p)=1$，情形 2 $p\mid z$ 第二种情形的证明更为困难，通常用无穷递降法来进行 E Kummer 对证明 Fermat 大定理做出了重要的贡献，他创造了一种全新的方法，此法基于他所建立的**分圆域**（cyclotomic field）的算术理论 它用到这样的事实 在域 $\mathbf{Q}(\zeta)(\zeta=e^{2\pi i/p})$ 中，方程 (1) 的左边分解成线性因子 $x^p+y^p=\prod_{i=1}^{p-1}(x+y\zeta^i)$ 在情形 1 中，这些线性因子是 $\mathbf{Q}(\zeta)$ 中**理想数**（ideal number）的 p 次幂，而在情形 2 中，当 $i>0$ 时，它们与 p 次幂相差一个因子 $(1-\zeta)$ 如果 p 整除诸 **Bernoulli 数**（Bernoulli numbers）B_{2n} $(n=1,\ ,(p-3)/2)$ 的分子，则由正则性判别法知 p 不整除 $\mathbf{Q}(\zeta)$ 的类数 h，且这些理想数皆为主理想 Kummer ([3]) 证明了这种情形的 Fermat 定理 还不知道正则素数 p 究竟有无穷多个还是有限多个（根据 Jensen 定理，非正则素数有无穷多个（[4]） Kummer ([5]) 对某些非正则素数证明了 Fermat 定理，并对所有素数 $p<100$ 证明了此定理为真 在情形 1 他证明了 (1) 式蕴含同余式

$$B_n\left[\frac{d^{p-n}}{dv^{p-n}}\ln(x+e^v y)\right]_{v=0}\equiv 0 \pmod p,$$

$$n=2,4,\ ,p-3,$$

这些同余式对 $x,y,-z$ 的任何置换都真确 因此他证得 如果在情形 1 中方程 (1) 有一个解，则对 $n=3,5$ 有

$$B_{p-n}\equiv 0 \pmod p \tag{2}$$

在情形 2 中 Kummer 证明了 Fermat 定理在下列条件下成立 1) $p\mid h_1$，$p^2\nmid h_1$，其中 h_1 是 $\mathbf{Q}(\zeta)$ 的类数的第一因子（这等价于要求诸数 $B_{2n}\,(2n=2,4,\ ,p-3)$ 的分子中只有一个可以被 p 整除），2) $B_{2np}\not\equiv 0 \pmod{p^3}$，以及 3) 存在一个理想，以它为模，单位

$$E_n=\sum_{i=1}^{(p-3)/2} e_i^{g^{2ni}}$$

和 $\mathbf{Q}(\zeta)$ 中整数的 p 次幂皆不同余，这里 g 是模 p 的一个原根，而

$$e_i=\frac{\zeta^{(g^{i+1})/2}-\zeta^{-(g^{i+1})/2}}{\zeta^{g^i/2}-\zeta^{-g^i/2}}$$

Kummer 的方法在若干论述 Fermat 大定理的文章中（见 [6],[7]）得到极大发展 人们证明了，如果情形 1 对 $n=7,9,11,13,15,17,19$ 有 (1) 成立，则 (2) 成立 在同样的条件下，M Krasner ([8]) 证明了 存在一个数 p_0，当 $p>p_0$ 时，(2) 对所有的数 $n=2k+1$ 皆为真确，其中 $1\leqslant k\leqslant[(\ln p)^{1/3}]$

H Bruckner ([9]) 证明了 诸数 B $(n=2,4,\ ,p-3)$ 中分子能被 p 整除的个数大于 $p^{\frac{1}{2}}-2$ 假设 $p^k\mid h_1$，$p^{k+1}\nmid h_1$ П Н Реморов ([10]) 曾经证明了 存在常数 N_k 和 M_k，$N_k<M_k$，使得对所有 $p<N_k$，$p>M_k$，Fermat 大定理的第一种情形皆为真 M Eichler ([11]) 证明了 情形 1 对 $H<[p^{1/2}]-1$ 为真，这里 H 是 $\mathbf{Q}(\zeta)$ 的正则指数，$p^H\mid h_1$ H Vandiver ([12]) 对 $p\nmid h_2$ 证明了情形 1 的结论，其中 h_2 是 $\mathbf{Q}(\zeta)$ 的类数的第二因子 在 [13] 及 [6] 中，他对情形 2 得到一些有趣的结果．例如，他证明了 Fermat 定理在下列条件下为真 1) $(h_2,p)=1$，2) $B_{np}\not\equiv 0 \pmod{p^3}$（$n=2,4,\ ,p-3$） 下面的定理极其重要 设 p 是一个非正则素数，$2a_1,\ ,2a_s$ 是 $B_2,B_4,\ ,B_{p-3}$ 中分子可被 p 整除的那些 Bernoulli 数的指数，如果诸单位 $e_a\,(a=a_1,\ ,a_s)$ 中没有一个关于模 $\mathfrak{P}$ 与 $\mathbf{Q}(\zeta)$ 中某个整数的 p 次幂同余，则 Fermat 定理为真，这里 $\mathfrak{P}$ 是一个素理想，它整除一个满足 $q\equiv 1 \pmod p$ 的素数 $q<p^2-p$ 由此 Vandiver ([14]) 对非正则素数得到一个可以有效地加以验证的判别法，根据这个判别法用计算机对所有 $p<125000$ 证明了 Fermat 定理（见[15]）．

关于 Fermat 大定理的情形 1 有各种结果．早在 1823 年 Legendre 曾发表了 S Germain 的一个结论 如果存在一个素数 q，使同余式 $\xi^p+\eta^p+\zeta^p\equiv 0 \pmod q$ 没有不被 q 整除的整数解 ξ,η,ζ，且 p 不是模 q 的 p 次幂剩余，则 Fermat 定理的情形 1 成立（见 [2]） 从而他证明了，如果诸数 $2kp+1\ (k\not\equiv 0 \pmod 3),\ k\leqslant 8$ 中至少有一个是素数，则情形 1 成立 这一命题已被推广到对所有 $k\leqslant 55$ A Wieferich ([16]) 发现了如下的判别法 如果 $p\nmid q(2)$，这里 $q(m)=(m^{p-1}-1)/p$ 是 Fermat 商，则情形 1 为真．D Mirimanoff ([17]) 对 $p\nmid q(3)$ 证明了这一结论 此后，其他一些人对 $p\nmid q(m)$ 的所有 p 证明了情形 1，这里 m 是 $\leqslant 43$ 的任何素数 由此就对 $p=a\pm b$ 证得 Fermat 定理的第一种情形，其中 $a,b\in\mathbf{N}$ 的素因子分解式中仅含有 $\leqslant 43$ 的素数 在计算机上计

算表明（[18]），在诸数 $p<6\cdot 10^9$ 只有两个 $p=1093$ 和 $p=3511$ 满足条件 $p|q(2)$，而对这两个数有 $p\nmid q(3)$ 这就对 $p<6\cdot 10^9$ 证明了情形 1 P Furtwangler([19])则以 Eisenstein 互反律为基础，对 Wieferich 与 Mirimanoff 的结果给出了比较简单的新证明 他还证明了，如果 x, y, z 是（1）的解且 $(x,y)=1$，则有 $p|q(r)$，其中或者 $r|x$ 且 $p\nmid x$，或者 $r|y$ 但是 $p\nmid y$，或者 $r|(x\pm y)$ 但是 $p\nmid(x^2-y^2)$

对于 Fermat 定理的情形 1 已知有各种各样其他的判别法 它们都与某种同余式的可解性有关，或者与某种形式素数的存在性有关 如果 $2p$ 既不整除 x，也不整除 y，则方程 $x^{2p}+y^{2p}=z^{2p}$ 不成立（见 [20]） 实际上不可能造出 Fermat 大定理的反例来 K Inkeri([21])证明了，如果整数 $x, y, z\ (0<x<y<z)$ 满足（1），那么 $x>p^{3p-4}/2$，而在情形 1 则有 $x>((2p^3+p)/\ln 3p)^p$

Fermat 大定理可以陈述如下 对每个自然数 $n>2$，除了平凡的点（0, ±1）及（±1, 0）以外，在 Fermat 曲线 $x^n+y^n=1$ 上没有有理点 人们用代数几何的方法研究了 Fermat 曲线上的有理点 根据这些方法证明了(1983)，在每种情形中，Fermat 曲线上有理点的个数必为有限 这得自 **Mordell 猜想**（Mordell conjecture），后者是由 G Faltings([23])证明的．D R Heath-Brown 利用 Mordell 猜想证明了 Fermat 大定理对几乎所有的素数 p 皆成立，见[24] L M Adleman, Foury 与 Heath-Brown 还用**解析数论**（analytic number theory）方法证明了 情形 1 对无穷多个素数 p 成立，见 [25]

可以考虑关于代数整数、整函数、矩阵等的 Fermat 方程 对形如 $x^n+y^n=Dz^n$ 的方程有一个推广的 Fermat 定理

参考文献

[1] Диофант Александрийский, Арифметика и книга о многоугольных числах (译自希腊文), M, 1974

[2] Edwards, H M, Fermat's last theorem A genetic introduction to algebraic number theory, Springer, 1977

[3A] Kummer, E, Bestimmung der Anzahl nicht aquivalenter Classen fur die aus λten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen, *J Reine Angew Math*, **40** (1850), 93 – 116

[3B] Kummmer, E, Zwei besondere Untersuchungen uber die Classen-Anzahl und uber die Einheiten der aus λten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen, *J Reine Angew Math*, **40** (1850), 117 – 129

[3C] Kumer, E, Algemeiner Beweis des Fermat'schen Satzes, dass die Gleichung $x^\lambda+y^\lambda=z^\lambda$ durch ganze Zahlen unlosbar ist, fur diejenige Potenz-Exponenten λ, welche ungerade Primzahlen sind und in den Zahlern der ersten (λ−3)/2 Bernoullischen Zahlen als Faktoren nicht vorkommen, *J Reine Angew Math*, **40** (1850), 130 – 138

[4] Боревич, З И, Шафаревич, И Р, Теория чисел, 2 изд, M, 1972（英译本 Borevich, Z I and Shafarevich, I R, Number Theory, Acad press, 1966）

[5] Kummer, E, Einige Satze uber die aus den Wurzeln der Gleichung $a^\lambda=1$ gebildeten complexen Zahlen, fur den Fall, dass die Klassenanzahl durch λ teilbar ist, nebst Anwendung derselben auf einen weiteren Beweis des letzten Fermat'schen Lehrsatzes, *Abh Akad Wiss Berlin, Math Kl* (1857), 41 – 74

[6] Vandiver, H, Fermat's last theorem, *Amer math Monthly*, **53** (1946), 555 – 578

[7] Ribenboim, P, 13 lectures on Fermat's last theorem, Springer, 1979

[8] Krasner, M, Sur le premier cas du theoreme de Fermat, *C R Acad Sci Paris*, **199** (1934), 256 – 258

[9] Bruckner, H, Zum Beweis des ersten Falles der Fermatschen Vermutung fur pseudo reqularen Primzahlen p, *J Reine Angew Math*, **253** (1972), 15 – 18

[10] Реморов, П Н, «Уч зап ЛГУ Сер матем наук», **144** (1952), 23, 26 – 34

[11] Eichler, M, Eine Bemerkung zur Fermatschen Vermutung, *Acta Arith*, **11** (1965), 129 – 131

[12] Vandiver, H, Fermat's last theorem and the second factor in the cyclotomic class number, *Bull Amer Math Soc*, **40** (1934), 118 – 126

[13] Vandiver, H, On Fermat's last theorem, *Trans Amer Math Soc*, **31** (1929), 613 – 642

[14] Vandiver, H, Examination of methods of attack on the second case of Fermat's last theorem, *Proc Nat Acad Sci USA*, **40** (1954), 732 – 735

[15] Wagstaff, S, The irregular primes to 125000, *Math Comp*, **32** (1978), 583 – 591

[16] Wieferich, A, Zum letzter Fermatschen Theorem, *J Reine Angew, Math*, **136** (1909), 293 – 302

[17] Mirimanoff, D, Zum letzter Fermatschen Theorem, *J Reine Angew Math*, **139** (1911), 309 – 324

[18] Lehmer, D H, On Fermat's quotient, base 2, *Math Comp*, **36** (1981), 289 – 290

[19] Furtwangler, P, Letzter Fermat'scher Satz und Eisenstein'sches Reziprozitatsprinzip, *Sitzungsber Akad Wiss Wien Math-Naturwiss KL* II *a*, **121** (1912), 589 – 592

[20] Terjanian, G, Sur L'equation $x^{2p}+y^{2p}=z^{2p}$, *C R Acad Sci Paris* **A285-B285**, 1977, 16, 973A – 975A（英文摘要）

[21] Inkeri, K, Abschatzungen fur eventuelle Losungen der Gleichung im Fermatschen problem, *Ann Univ Turku Ser A*, **16** (1953), 1, 3 – 9

[22] Постников, M M, Введение в теорию алгебраических чисел, M, 1982

[23] Faltings, G, Endlichkeitssätze für abelsche Varietaten uber Zahlkorpern, *Invent. Math*, **73** (1983), 349 – 366

[24] Heath-Brown, D R, Fermat's last theorem for "almost all" exponents, *Bull London Math Soc*, **17** (1985), 15 – 16

[25] Adleman, L M and Heath-Brown, D R, The first case of Fermat's last theorem, *Invent Math*, **79** (1985), 409 – 416
A B Толстиков 撰

【补注】 实际上，Heath-Brown 与 A Granville 相互独立地证明了 使 Fermat 大定理成立的指数 n 的密率为 1，参见 [A1]

现在（1988）已知，Fermat 大定理对所有的 $n<150000$ 都成立，其第一种情形对直到 714591416091389 的所有素数都成立，见 [A2]

最近（1987），K. Ribet 利用 G Frey 和 J-P Serre 的思想证明了 **椭圆曲线**（elliptic curve）理论中的 Weil-Taniyama 猜想蕴含了 Fermat 大定理．

参考文献

[A1] Wagon, S, Fermat's last theorem, *Math Intelligencer*, **8** (1986), 1, 59 – 61
[A2] Ribenboim, P, Recent results about Fermat's last theorem, *Cand Math Bull*, **20** (1977), 229 – 242

【译注】 1993 年 6 月，A Wiles 在剑桥大学 Newton 数学研究所所作报告中，对于谷山-志村猜想（Taniyama-Shimura conjecture），宣布他证明足够多的椭圆曲线是模曲线，而这蕴涵 Fermat 大定理成立 不久发现证明中有一漏洞．1994 年 9 月，他发现可以通过 Hecke 代数的结构理论绕过这一困难，从而确实证明了 Fermat 大定理

参考文献

[B1] K Rubin and A Silverberg, A report on Wile' Cambridge Lectures, *Bull Amer Math Soc*, **31**(1994), 15—31（中译本·K Rubin and S Silverbery, 有关 Wiles 剑桥演讲的报告，《数学译林》，**14**(1995), 13—24, **106—114**）
[B2] A Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem, *Annals of Math*, **142**(1995), 443—551
[B3] R Taylor and A Wiles, Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras, *Annals of Math*, **142**(1995), 553—572

张明尧 译 徐广善校

Fermat 小定理 [Fermat little theorem, Ферма малая теорема]

对不能被素数 p 整除的整数 a，同余式 $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ 成立 这个定理是由 P Fermat (1640) 建立的 它证明了由模 p 的既约剩余类组成的**乘法群**（multiplicative group）中的每个元素的阶一定整除这个群的阶 Fermat 小定理被 L Euler 推广到任意合数模的情形，他证明了 对每个与给定整数 $m>1$ 互素的整数 a，同余式

$$a^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod m$$

成立，其中的 $\varphi(m)$ 是 **Euler 函数**（Euler function）．Fermat 小定理的另一个推广是 对由 q 个元素组成的有限域 k_q 中的所有元素，等式 $x^q=x$ 成立

参考文献

[1] Виноградов, И М, Основы теории чисел, 9 изд, М, 1981（中译本 И М 维诺格拉陀夫，数论基础，第五版，商务印书馆，1952）

С А Степанов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hardy, G H and Wright, E M, Introduction to the theory of numbers, Oxford Univ Press, 1979

潘承彪 译 戚鸣皋 校

Fermat 原理 [Fermat principle, Ферма принцип]

变分原理，它使得可以求射线，即曲线，沿此曲线传播波动过程．设 $x=x(\sigma)$，$x=x_1, \quad , x_m$，$\sigma_0\leqslant\sigma\leqslant\sigma_1$，是连接点 M_0 和 M_1 的曲线 l 的方程，$c=c(x)>0$ 是在点 x 处波的传播速度 Fermat 原理断言，对连接 M_0 和 M_1 的射线有 $\delta\int ds/c=0$ 这里 δ 是变分符号，$ds=\sqrt{\sum(dx_i)^2}$ 是弧的微分．$\int_{M_0}^{M_1}ds/c$ 的物理意义是由 M_0 到 M_1 沿 l 以速度 $c(x)$ 运动的时间．从 Fermat 原理可导出，当 $c=$常数时的射线的反射，折射和平直性的经典定律 绕射射线，即从屏障边缘传播的射线，和头波射线亦可利用 Fermat 原理求得．由 Fermat 原理决定的射线是**程函方程**（eikonal equation）的特征线 积分 $\int ds/c$ 给出了一个特殊型的 Riemann 度量．射线是对应于这个度量的测地线 Fermat 原理可推广到速度依赖于方向（各向异性介质）的情形 在此情形的射线是某个 Finsler 度量的测地线．

对光线折射问题的 Fermat 原理由 P Fermat（大约在 1600 年）首先陈述

参考文献见**射线法**（ray method）

В М Бабич 撰 孙和生 译 陆柱家 校

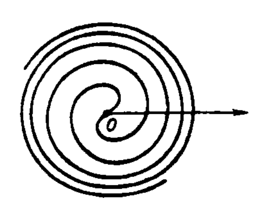
Fermat 螺线 [Fermat spiral, Ферма спираль]

一种平面超越曲线，在极坐标中其方程具有下列形式

$$\rho = a\sqrt{\varphi}$$

对应于每个 φ 值，存在两个 ρ 值—— 一个正的，一个负的 Fermat 螺线关于极点是中心对称的，极点是一个拐点 Fermat 螺线属于所谓代数**螺线**（spirals）类

P Fermat (1636) 最先研究了这种螺线



参考文献

[1] Савелов, А А, Плоские кривые, М, 1960

Д Д Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lawrence, J D, A catalog of special plane curves, Dover, reprnt, 1972 张鸿林 译

Fermat 定理 [Fermat theorem, Ферма теорема]

实值函数局部极值存在的必要条件 假设实值函数 $f(x)$ 在点 $x_0 \in \mathbf{R}$ 的邻域内有定义，且在这一点上是可微的. 如果 $f(x)$ 在 x_0 上有局部极值，则它在 x_0 上的导数等于零 $f'(x_0)=0$ 在几何上，这意味着在点 $(x_0, f(x_0))$ 上 $f(x)$ 的图形的切线是水平的

关于多项式的极值，与其等价的条件是 P Fermat 于 1629 年得到的，但是直到 1679 年才发表.

Л Д Кудрявцев 撰

【补注】 关于数论中的 Fermat 定理，见 **Fermat 大定理** (Fermat great theorem)，**Fermat 小定理** (Fermat little theorem) 张鸿林 译

Fermi 坐标 [Fermi coordinates, Ферми координаты]

Riemann 空间的一种坐标，使得当沿着某条曲线的点计算时，在这坐标下 Riemann 空间**度量张量** (metric tensor) 的分量等同于 Euclid 空间在 Descartes 直角坐标下度量张量的分量 Fermi 坐标的概念可以推广到伪 Riemann 空间，它们也是由 E Fermi 首先引进的 (1922) ([1]) 他证明了，在有 Lorentz 符号差的充分正则的伪 Riemann 流形上，在充分正则的类时曲线的充分小段的邻域内，确实存在着 Fermi 坐标

参考文献

[1] Fermi, E, Sopra i fenomeni che avvengono in vinicinanza di una linea ovaria, *Atti R Accad Lincei Rend Cl Sci Fis Mat Nat*, **31** (1922), 21-51

[2] Рашевский, П К, Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд, М, 1967 (中译本 П К 洛薛夫斯基，黎曼几何与张量解析，高等教育出版社，1955，上、下册) Д Д Соколов 撰

【补注】 利用限制在有固定因果特征标和无自交点的曲线的法丛上的**指数映射** (exponential mapping) 的性质，可在任何**伪 Riemann 空间** (pseudo-Riemannian space) 中证明沿曲线的任意紧致段的 Fermi 坐标的存在性

【译注】 在伪 Riemann 流形中，有固定因果特征标 (causal character) 的曲线是指曲线的切向量有固定的因果特征标，即或为类空，或为类时，或为类光 (零长向量)，这是在广义相对论中用到的概念. 见 [B1]

参考文献

[B1] O'Neill, B, Semi-Riemannian geometry, Acad Press, 1983 沈一兵 译

Fermi-Dirac 统计法 [Fermi-Dirac statistics, Ферми-дирака статистика], Fermi 统计法 (Fermi statistics)

应用于具有半整数自旋 (1/2, 3/2, 5/2, 以 $\hbar = 1\ 05 \times 10^{-27}$ erg·sec 为单位) 的全同粒子系统的量子统计学 它是 E Fermi 于 1926 年提出的，而其量子力学意义是 P Dirac 于 1926 年阐明的 根据 Fermi-Dirac 统计法，在每一量子态上最多只能有一个粒子 (Pauli 原理 (Pauli principle)). 对于服从 Fermi-Dirac 统计法的粒子系统，其状态由相对于粒子排列 (即其坐标与自旋的排列) 为反对称的波函数所描述，而对于 **Bose-Einstein 统计法** (Bose-Einstein statistics)，它们是对称的

理想气体量子状态通过给出系统在动量 p 和自旋 σ 空间中占有能级的总合 $\{n_{p\sigma}\}$ 而决定，其中每一个 $n_{p\sigma}$ 指明具有动量 p 和自旋 σ 的粒子数 在 Fermi-Dirac 统计法的情况下，$n_{p\sigma}$ 可以等于零或 1

气体是很大数目粒子构成的系统，因而它的量子能级分布很稠密，且当体积趋于无穷时趋向连续谱. 按照每个网格中包含 G_i 个能级的小网格来将能级分组是方便的 每一网格对应于一平均能量 ε_i，而能级数 G_i 设为很大 系统的量子力学状态由集合 $\{N_i\}$ 决定，其中 N_i 是网格中的粒子数，即网格中能级的 $n_{p\sigma}$ 之和 网格中不同分布数 (即理想 Fermi-Dirac 气体状态的统计权重) 等于

$$W\{N_i\} = \prod_i \frac{G_i!}{N_i!(G_i - N_i)!} \tag{1}$$

并决定粒子按以占有数 N_1, N_2, 表征的网格分布的几率. 统计权重是考虑到粒子不可分辨性和在每个状态最多有一个粒子的事实，借助组合分析而计算的.

对应给定能量 E 和粒子数 N,

$$E = \sum_i \varepsilon_i N_i,\ N = \sum_i N_i \tag{2}$$

的粒子按量子态的最可几分布，在附加条件 (2) 下由统计权重 (1) 的极值求出. 相应的平均占有数等于

$$\overline{n_i} = \frac{\overline{N_i}}{G_i} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1}, \tag{3}$$

其中 μ 为化学势，$\beta = 1/kT$, k 为 Boltzmann 常数 一个普适常数，$k = 1\ 38 \times 10^{-16}$ erg/deg), T 为绝对温度 β 和 μ 之值从条件 (2) 得到.

理想 Fermi 气体的熵，定义为最可几分布 (3) 的统计权重的对数，

$$S = k \ln W\{\overline{n_i}\} =$$
$$= -k\sum_i G_i\{\overline{n_i}\ln\overline{n_i} + (1-\overline{n_i})\ln(1-\overline{n_i})\},$$

其中 $\sum_i$ 是对所有网格求和. 熵可以用来计算自由能和其他热力学函数.

在非理想 Fermi 气体情况下，热力学函数的计算是复杂的问题，不能归结为组合分析的简单问题．它们的计算是考虑到 Fermi-Dirac 统计法，以 Gibbs 方法为基础．如果系统的 Hamilton 算子 H 已知，则自由能等于

$$F = -kT \ln \operatorname{Tr} \exp\left\{-\frac{H}{kT}\right\},$$

其中矩阵迹算子是在满足 Fermi-Dirac 统计法要求的状态范围内，即在反对称波函数范围内选取．如果对于 H 利用其作用在波函数和占有数空间定义的表达，即转换到第二量子表达，就可以做到

参考文献见 Bose-Einstein 统计法．

Д Н Зубарев 撰

【译注】

关于 Fermi-Dirac 统计法和 Bose-Einstein 统计法的简明而严格的叙述可参见中文文献 [B1]

[B1] W G 维塞特，C H 小克鲁格，物理气体动力学引论，科学出版社，1978，104 – 116 页

沈 青 译

Ferrari 法 [Ferrari method，Феррари метод]

把解一个四次方程化为解一个三次方程和两个二次方程的方法，是 L Ferrari 发现的(1545 年发表)．

对于方程

$$y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0,$$

Ferrari 法如下所述 经过代换 $y = x - a/4$，给定的方程化为

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0, \tag{1}$$

它不含带 x^3 的项 如果引入辅助参数 α，则(1)的左端可以写成

$$x^4 + px^2 + qx + r = \tag{2}$$

$$= (x^2 + \frac{p}{2} + \alpha)^2 - \left[2\alpha x^2 - qx + \left(\alpha^2 + p\alpha + \frac{p^2}{4} - r\right)\right]$$

选取 α 的值，使得方括号里的表达式是完全平方．为此，这个二次三项式的判别式必须为零．这就得到一个关于 α 的**三次方程**(cubic equation)

$$q^2 - 4 \cdot 2\alpha\left[\alpha^2 + p\alpha + \frac{p^2}{4} - r\right] = 0$$

设 α_0 是这个方程的一个根 当 $\alpha = \alpha_0$ 时，(2) 中方括号里的多项式具有一个二重根

$$x_0 = \frac{q}{4\alpha_0},$$

由此得到方程

$$[x^2 + \frac{p}{2} + \alpha_0]^2 - 2\alpha_0(x - x_0)^2 = 0$$

这个四次方程可以分解成两个二次方程 它们的根也是方程(1)的根

参考文献

[1] Курош，А Г，Курс высшей алгебры，11 изд，1975 (中译本 А Г 库洛什，高等代数教程，人民教育出版社，1962)

И В Проскуряков 撰 张鸿林 译

Feynman 积分 [Feynman integral，Фейнмана интеграл]，Feynman 路径积分(Feynman path integral)

对于某个演化过程的跃迁函数(Green 函数)，以**路径积分**(path integral)或**轨道积分**(integral over trajectories)的形式表示的一个总体名称

假设给定一个方程

$$\frac{du}{dt} = Hu, \tag{1}$$

其中 $0 \leqslant t \leqslant T\,(T>0)$ 和 $u(t,\omega)$ 是在 $T \times \Omega$ 上所定义的一个函数，此处 $\Omega \ni \omega$ 是某个空间，而 H 是以适当方式作用于 Ω 上选出的函数空间上的一个线性算子．在许多情况下，方程(1)的跃迁函数 $G(\omega_1, \omega_2, t)$(这就是，半群 $\exp\{tH\}$ $(t \geqslant 0)$ 的核函算子)可以表示成路径积分的形式

$$G(\omega_1, \omega_2, t) = \int\limits_{\substack{\omega \\ \omega(0)=\omega_1 \\ \omega(t)=\omega_2}} \exp\left\{\int_0^t W[\omega(\tau)]d\tau\right\} \mu_{\omega_1, \omega_2, t}(d\omega), \tag{2}$$

其中 $W(\cdot)$ 是定义在 Ω 上的某个函数，积分是遍及"轨道"集合 $\omega(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t)$ 实现的，$\omega(\tau)$ 在 Ω 中取值， 在时刻 0 "离开" ω_1 和在时刻 t "到达" ω_2，而最后，$\mu_{\omega_1,\omega_2,t}$ 是在这个轨道集合上给定的某个测度(或预测度)．积分或者用通常 Lebesque 意义解释，或者用由任何一种路径积分方法所规定的意义解释(见[5]，[6]) 形式 (2) 的积分，以及还有通过某些自然变换(例如，变换积分变量，对"端点" ω_1 和 ω_2 的附加积分，或对 (2) 中出现的其他参量的积分，对这些参量的微分，等等)从它们获得的积分，通称为 Feynman 路径积分

表示 (2) 是由 R P Feynman(见[1])在他所提出的关于量子力学的新鲜解释方面引进的．他考虑的情况为 $\Omega = \mathbf{R}^n$，$n = 1, 2, \cdots$，算子 H 具有形式 $H = iL$，其中 L 是 Sturm-Liouville 微分算子 $Lu = -a\Delta u + Vu$，Δ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Laplace 算子，V 是 $\mathbf{R}^n$ 上所定义的某个函数(势)和 $a > 0$ 这里在对函数 $G(x_1, x_2, t)$ $(x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n,\ t > 0)$ 的表示 (2) 中我们得到 $W = V$，而复准测度 $\mu_{x_1, x_2, t}$(**Feynman 测度**(Feynman measure))在形式为

$$\{x(\tau)\ \ x(0) = x_1,\ x(t) = x_2,\ x(\tau_i) \in G_i,$$
$$i = 1, \cdots, k\}$$

的柱集上给出，其中

$$0<\tau_1< \quad <\tau_k<t,\ G_i\subseteq\mathbf{R}^n,$$
$$i=1, \quad ,k,\ k=1,2,$$

通过遍及集合 $G_1\times \quad \times G_k\subseteq(\mathbf{R}^n)^k$ 积分（关于 $(\mathbf{R}^n)^k$ 上的通常 Lebesque 测度），具有密度

$$\prod_{i=1}^{k+1}[(2\pi ia)(\tau_i-\tau_{i-1})]^{-n/2}\exp\left\{-\frac{(\xi_i-\xi_{i-1})^2}{2ai(\tau_i-\tau_{i-1})}\right\},$$

其中 $\xi_0=x_1$，$\xi_{k+1}=x_2$，$\tau_0=0$，$\tau_{k+1}=t$ Feynman 认为表达式（2）是有限重积分的极限，通过将被积函数的指数中的积分 $\int_0^t W[\omega(\tau)]d\tau$ 用它的某个积分和代替而获得 但他并未给出关于积分的这个定义或方程（2）的有效性的严格基础

随后，M Kac（见 [2]）获得（2），其中 $\mu_{x_1\ x_2\ t}$ 与 **Wiener 测度**（Wiener measure）相同，对算子 $H=-L$ 的情况，其中 L 具有上述形式，带有完全数学严格性 因此（2）通常称为 Feynman-Kac 公式（Feynman-Kac formula）.

Feynman 路径积分，在数理物理学（[3]，[4]，[6]），概率论（[7]）和微分方程理论（[5]）的各种问题中被用作方便和深刻的解析工具

参考文献

[1] Feynman, R P, Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, *Rev Modern Phys*, **20** (1948) 367 − 387

[2] Kac, M, On some connections between probability theory and differential and integral equations, in Proc 2nd Berkeley symp math statist probab, Univ California Press, 1951 189 − 215

[3] Ginibre, J, Some applications of functional integration in statistical mechanics, in C DeWitt and R Stora (eds) Statistical mechanics and quantum field theory, Gordon & Breach, 1971, 327 − 427

[4] Simon, B, The $P(\varphi)_2$-Euclidean (quantum) field theory, Princeton Univ Press, 1974

[5] Далецкий, Ю Л, в кн Итоги науки математический анализ, 1966, М, 1967, 83 − 124

[6] Albeverio, S, and Hφegh-Krohn, R, Mathematical theory of Feynman path integrals, Springer, 1976

[7] Гихман, И И, Скороход, А В, Теория случайных процессов, т 3, М, 1975（英译本 Gikhman, I I, Skorokhod, A V, The theory of stochastic processes, 3 Springer, 1979）

[8] Голубева, В А, 《Успехи матем наук》, **31** (1976), 2, 135 − 202

P A Минлос 撰

【补注】 术语"Feynman 积分"也用于物理学中表示（粒子物理学中当计算辐射条件时产生的）Feynman 图中沿闭圈的一个（寻常）积分 代替 Feynman 路径积分和 Feynman 积分，人们在文献中还发现术语路径积分（path integral），函数积分（functional integral）和（少有）连续积分（continual integral）

参考文献

[A1] Feynman, R P and Hibbs, A R Quantum mechanics and path integrals McGraw-Hill 1965

[A2] Schulman, L S, Techniques and applications of path integration Wiley 1981

[A3] Glimm, J and Jaffe, A Quantum physics, A functional integral point of view, Springer 1981

[A4] Popov, V N Functional integrals in quantum field theory Reidel 1983（译自俄文）

[A5] Antoine, J-P and Tirapegui E (eds) Functional integration Plenum 1980

[A5] Simon, B, Functional integration and quantum physics, Acad Press 1979

徐锡申 译

Feynman 测度 [Feynman measure, Фейнмана мера]

由公式

$$\mu_{x\ T}\{B^A_{\tau_1\ \ \tau_k\ x}\}=\prod_{j=1}^{k}[2\pi ia(\tau_j-\tau_{j-1})]^{-n/2}\times$$
$$\times\int_A\prod_{j=1}^{k+1}\exp\left\{-\frac{1}{2ai}\ \frac{(\xi_j-\xi_{j-1})^2}{(\tau_j-\tau_{j-1})}\right\}d\xi_1\ \ d\xi_{k+1} \tag{1}$$

定义于具有值在 $\mathbf{R}^n(n=1,2,\ \ )$ 内的函数 $x(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T,\ T>0)$ 的空间中柱集上的一个**复预测度**（pre-measure） 这里 $a>0$ 是一参数，$0<\tau_1< \quad <\tau_k<T$，而

$$B^A_{\tau_1\ \ \tau_k\ x}=\{x(t)\ \ x(0)=x=\xi_0,$$
$$\{x(\tau_1),\ \ ,x(\tau_k),\ x(T)\}\in A\},$$
$$x\in\mathbf{R}^n,\ k=0,1,\ \ ,$$

其中 A 是 $(\mathbf{R}^n)^{(k+1)}$ 中的某个 Borel 子集 有时人们还考虑所谓条件 Feynman 测度（conditional Feynman measure）$\mu_{x\ y\ T}$，由测度（1）通过将它限制于具有"端点"在点 $y\in\mathbf{R}^n$ $x(T)=y$ 而得到 测度 $\mu_{x\ T}$，还有测度 $\mu_{x\ y\ T}$，是由 R P Feynman 在关于将半群 $\exp\{itH\}$，其中 H 是一个 Sturm-Liouville 算子，表示成路径积分形式，即 **Feynman 积分**（Feynman integral）形式时引进的

参考文献

[1] Feynman, R P, Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, *Rev Modern Phys*, **20** (1948), 367 − 387

[2] Далецкий, Ю Л, в кн Итоги науки Математический анализ 1966, М, 1967, 83 − 124

[3] Albeverio, S and Hφegh-Krohn, R, Mathematical theory of Feynman path integrals, Springer, 1976

P A Минлос 撰 徐锡申 译

Fibonacci 法 [Fibonacci method, Фибоначчи метод]

通过连续收缩不确定因素区间一维搜索函数极值的一族方法．对问题中函数

$$f(x) \ (x \in (a_0, b_0) \subset \mathbf{R}^1)$$

的唯一限制是在给定区间 (a_0, b_0) 上它具有严格单峰性．

在连续收缩的过程中，在 n 个检测点上计算（或测量）函数 $f(x)$ 的值，n 是事先指定的 结果得到逐渐缩小的不确定因素区间序列

$$(a_0, b_0) \supset \quad \supset (a_n, b_n),$$

它包含所求的极值点 对任一个严格单峰函数来说，为了收缩不确定因素区间，必须知道它的不少于两个检测值 在 Fibonacci 法中，人们在每个当前不确定因素区间中选择关于区间中点对称的两个检测点．根据两个检测点删除函数 $f(x)$ 值最坏处的那个区间就得到 (a_{i+1}, b_{i+1})，这里保留下来的老的检测点对称地构成一个新检测点 于是对于区间序列

$$\Delta_i = b_i - a_i$$

有递推关系

$$\Delta_i = \Delta_{i+1} + \Delta_{i+2}$$

（前面还假定满足覆盖条件 $\Delta_1 < (2/3)\Delta_0$）

在 $\Delta_{n+1} = \Delta_{n+2}$ 的条件下，方程的解为

$$\Delta_i = \frac{F_{n+3-i}}{F_{n+2}} \Delta_0, \quad i = 2, \quad , n,$$

其中 F_k 是 **Fibonacci 数**（Fibonacci numbers）．

可取 $x_{opt} \approx (a_n + b_n)/2$ 为极值点

在最简单的 Fibonacci 法中（假定检测点和检测值 $f(x)$ 绝对精确地确定），为了收缩原始不确定区间 Δ 到 ε，需要取检测点数 n 满足不等式 $2\Delta/\varepsilon \leq F_{n+2}$ 如果考虑到确定函数值的精确度修正，上面的估计变得稍微复杂些

极限

$$\tau = \lim_{n \to \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0\ 618033989$$

存在并成为引进黄金分割法（golden section method）的理由——这是 Fibonacci 法的一种，即对于所有的 i，取 $\Delta_{i+1} = \tau \Delta_i$，也就是检测点对当前区间做黄金分割（见**黄金分割**（golden ratio）） 这个方法的优点在于不必事先定好检测点数

几种修改后的 Fibonacci 法已经被建立．它们分别针对非列紧支持的函数，当两个检测点上 $f(x)$ 相等情况下减少计算量，增加计算稳定性，等等

Fibonacci 法比**对分法**（dichotomy method）有效得多 但是为了最优化可微函数，其他的方法更为可取（见**下降法**（descent, method of），**函数的极大化和极小化**（maximization and minimization of functions））．

参考文献

[1] Kiefer, J , Sequential minimax search for a maximum, *Proc Amer Math Soc* , 4(1953), 502 – 506

[2] Wilde, D J , Optimum seeking methods, Prentice Hall, 1964

[3] Васильев, Ф П , Численные методы решения экстремальных задач, М , 1980

Ю П Иванилов, В В Охрименко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Avriel, M , Nonlinear programming, Prentice Hall, 1977

蔡大用 译

Fibonacci 数 [Fibonacci numbers, Фибоначчи числа]

由初值 $u_1 = u_2 = 1$ 及递推关系式 $u_{n+1} = u_{n-1} + u_n$ 给出序列 $u_1, u_2,$ 的元素 前 14 个 Fibonacci 数最先出现在 1228 年比萨（Pisa）的 Leonardo(即 Fibonacci) 的手稿中

对 Fibonacci 数的脚标的运算可归结为这些数本身的运算，它的基础是“加法公式”

$$u_{m+n} = u_{m-1} u_n + u_m u_{n+1} \ .$$

此公式的直接推论是

$$u_{2n} = u_n(u_{n-1} + u_{n+1}), \quad u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3,$$

等，一般的“乘法公式”比较复杂

$$u_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} u_k u_n^k u_{n-1}^{m-k} \ .$$

Fibonacci 数的初等的整除性质主要由下面的事实推出 $u_{(m\ n)} = (u_m, u_n)$，若 p 是 $5t+1$ 型的素数，则 u_{p-1} 被 p 整除，而当 p 是 $5t+2$ 型的素数时，则 u_{p+1} 被 p 整除，若 u_n 被素数 q 整除且 $p \neq q$，则 u_{np}/u_n 不能被 q 整除，若素数 $p \neq 2$ 整除 u_n，则 u_{np}/u_n 被 p 整除，但不能被 p^2 整除，若 u_n 被 4 整除，则 u_{2n}/u_n 被 2 整除但不被 4 整除，若 u_n 被 2 整除但不被 4 整除，则 u_{2n}/u_n 被 4 整除但不被 8 整除 但是，与 Fibonacci 数有关的某些数论问题是极其困难的 例如，由 Fibonacci 数中的素数组成的集合是有限的还是无穷的问题至今（1994）还没有解决

在 Fibonacci 数的理论中，数 $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ 起着重要作用，α 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的一个根．联系两者的是 Binet 公式

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\ (\alpha^n-(-\alpha)^{-n})\ .$$

由此推出 u_n 是离 $\alpha^n/\sqrt{5}$ 的最近整数，及

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n=\alpha$$

Fibonacci 数在连分数理论中占有特殊的地位．在 u_{n+1}/u_n 的连分数展开式中，所有的部分商都等于 1，而且它们的个数不少于任何其他的分母小于 u_{n+1} 的分数的连分数展开式中的部分商的个数．在某种意义上，这表明数 α 是以"最坏可能的"方式由它的渐近分数 u_{n+1}/u_n 来描述

参考文献

[1] Boncompagni, B , Il liber Abbaci di Leonardo Pisano, Rome, 1857

[2] Воробьев, Н Н , Числа фибоначчи, 5 изд , М , 1984

[3] Hoggatt, V E , Fibonacci and Lucas numbers, Univ Santa Clara, 1969

[4] Alfred, U (or A Brousseau), An introduction to Fibonacci discovery, San Jose, CA, 1965

[5] Fibonacci Quart (1963 –)

Н Н Воробьев 撰

【补注】 设 P, Q 是非零整数，g c d $(P, Q)=1$，及 $D=P^2-4Q\neq 0$ Lucas 序列 (Lucas sequence)，或由 Lucas 数 (Lucas numbers) 组成的序列定义为 $u_0=u_1=0$，及线性递推关系式

$$u_n=Pu_{n-1}-Qu_{n-2}$$

更一般地，复数序列 $u_0, u_1,$ ，即数论函数 (number-theoretic function) 或**算术函数** (arithmetic function)，被称为是 r 阶递推数列，如果存在一个 r 个变数的复值函数 f 使得 $u_{n+r}=f(u_{n+r-1}, \quad , u_n)$，$n=0, 1, \cdot$ 若 f 是线性的，则 $\{u_n\}$ 称为是线性递归序列 (linear recurrent sequence) Fibonacci 数列和 Lucas 数列都是二阶线性递归序列．

关于 Fibonacci 数，Lucas 数及递推数列的某些更进一步的结论及它们的种种应用亦见 [A1]

参考文献

[A1] Phillipon, A N , Bergum, G E , Horodam, A F (eds), Fibonacci numbers and their applications, Reidel, 1986

潘承彪 译 戚鸣皋 校

纤维化 [fibration, расслоение]

见**纤维空间** (fibre space)

纤维积 [fibre product, расслоенное произведение]，一组拓扑空间 X_α 关于一组连续映射 $f_\alpha\ X_\alpha\to X_0$，$\alpha\in\mathscr{A}$ 的

Тихонов 积 (Tikhonov product) $\prod_{\alpha\in\mathscr{A}} X_\alpha$ 的子集 $X_{\mathscr{A}}$，具有诱导拓扑，由满足下述条件的点 $x=\{x_\alpha\}\in\prod_{\alpha\in\mathscr{A}} X_\alpha$ 组成 对 $\mathscr{A}$ 中所有的指标 α 和 α′ 有 $f_\alpha x_\alpha=f_{\alpha'} x_{\alpha'}$ 使点 $x=\{x_\alpha\}\in X_{\mathscr{A}}$ 与点 $x_\alpha\in X_\alpha$ (或与点 $f_\alpha x_\alpha\in X_0$) 成对应的映射称为把纤维积 $X_{\mathscr{A}}$ 映成 X_α $(\alpha\in\mathscr{A})$ (或映成 X_0) 的射影 (projection) 若空间 X_0 是单点空间，则 $X_{\mathscr{A}}\equiv\prod_{\alpha\in\mathscr{A}} X_\alpha$．若诸 X_α $(\alpha\in\mathscr{A})$ 都是完全正则空间，则纤维积 $X_{\mathscr{A}}$ 也是完全正则空间．纤维积，尤其是它的特例部分积 (partial product)，完全适合于构造 (在同胚包含意义下) 具有已知权及已知维数的万有拓扑空间，见**万有空间** (universal space)

Б А Пасынков 撰

【补注】 在范畴理论中也使用"拉回"一词，见**范畴中对象的纤维积** (fibre product of objects in a category)

胡师度、白苏华 译

范畴中对象的纤维积 [fibre product of objects in a category, расслоенное произведение]

(逆向或投射) 极限的概念的一个特殊情况．设 $\mathfrak{K}$ 为一个范畴，并设 $\alpha\ A\to C$ 与 $\beta\ B\to C$ 为 $\mathfrak{K}$ 中给定的态射．一个对象 D，连同两个态射 $\varphi\ D\to A$，$\psi\ D\to B$ 称为对象 A 与 B (在 α 与 β 上) 的纤维积 (fibre product of objects)，如果 $\varphi\alpha=\psi\beta$，且若对任一对态射 $\gamma\cdot X\to A$，$\delta\ X\to B$，只要有 $\gamma\alpha=\delta\beta$，就必存在唯一的态射 $\xi\ X\to D$ 使 $\xi\varphi=\gamma\xi\psi=\delta$．交换正方形

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\psi} & B \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\beta \\ A & \xrightarrow[\alpha]{} & C \end{array}$$

常称为一个泛正方形 (universal square) 或 Descartes 正方形 (Cartesian square) 对象 D 连同态射 φ 与 ψ，是图式

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \downarrow\beta \\ A & \xrightarrow[\alpha]{} & C \end{array}$$

的一个极限 A 与 B 在 α 与 β 上的纤维积常写成

$$A\underset{C}{\times}B,\ A\underset{\alpha\ \beta}{\times}B \text{ 或 } A\prod_{\alpha\beta}B$$

如果它存在，纤维积在同构的意义上是唯一确定的．

在一个有有限积并对一对态射有核的范畴中，A 与 B 在 α 与 β 上的纤维积可如下形成．设 $P=A\times B$ 为 A 与 B 的积，π_1 与 π_2 为相应的投射，并设 (D, μ) 为一对态射 $\pi_1\alpha$，$\pi_2\beta\ P\to C$ 的核．于是，D 连同两个态射 $\mu\pi_1=\varphi$ 与 $\mu\pi_2=\psi$ 是 A 与 B 在 α 与 β 上的纤维积 在许多构造的集合的范畴中，D 是 $A\times B$ 中由满足方程 $a\alpha=b\beta$ 的对 (a, b) 所组成的子集．

М Ш Цаленко 撰

【补注】 在范畴理论的文献中，纤维积最通常地称为拉回 (pullbacks)，其对偶概念 (即在所考虑的范畴之逆范畴中的纤维积) 称为推出 (pushouts) "纤维

积”这个名称是由下述的事实引导出来的，在集合的范畴中（因而在任何具体的范畴中，只要其基本集函子保持拉回），$A\times_C B$ 在一个元素 $c\in C$ 上的纤维（即，在映射 $\alpha\varphi$ 下，c 的逆象）就是纤维 $\alpha^{-1}(c)\subseteq A$ 与 $\beta^{-1}(c)\subseteq B$ 的 Descartes 积 也要注意，（2元）积（见**范畴中一族对象的积**（product of a family of objects in a category））是拉回的一个特殊情况，其中，对象 C 取为范畴的**终对象**（final object）

参考文献

[A1] Mitchell, B , Theory of categories, Acad Press, 1965

[A2] Adámek, J , Theory of mathematical structures, Reidel, 1983

周伯埙 译

纤维空间 [fibre space，расслоение]

一种对象 (X,π,B)，其中 $\pi\ X\to B$ 为连续满映射从空间 X 到空间 B（一个**纤维化**（fibration）） X，B 与 π 也分别称为全空间（total space），底（base）空间与射影（projection），而 $\pi^{-1}(b)$ 则称为 b 上的纤维（fibre） 纤维空间可以看作各个纤维 $\pi^{-1}(b)$ 的并集，由底空间 B 给以参数化，用 X 的拓扑粘在一起 例如，积（product）$\pi\ B\times F\to B$，这里 π 是到第一个因子的射影，纤维化－底空间 $\pi\ B\to B$，其中 $\pi=\mathrm{id}$，X 等同于 B，一点上的纤维空间，这里 X 等同于（唯一的）空间 F.

纤维化（纤维空间）的截面为一连续映射 $s\ B\to X$ 满足 $\pi s=\mathrm{id}$

纤维化（纤维空间）$\pi\ X\to B$ 在子空间 $A\subset B$ 上的限制是纤维化 $\pi'\ X'\to A$，其中 $X'=\pi^{-1}(A)$，$\pi'=\pi|_X$ 限制运算的一种推广是构作**诱导纤维丛**（induced fibre bundle）

映射 $F\ X\to X_1$ 称为纤维空间 $\pi\ X\to B$ 到纤维空间 $\pi_1\ X_1\to B_1$ 的态射（morphism），假如它将纤维映入纤维，即对每一点 $b\in B$ 有一点 $b_1\in B$ 使得 $F(\pi^{-1}(b))\subset\pi^{-1}(b_1)$ 这样的 F 决定了一个映射 $f\ B\to B_1$，定义作 $f(b)=\pi_1F(\pi^{-1}(b))$ F 称为 f 的一个**覆叠**（covering），即有 $\pi_1\circ F=f\circ\pi$，限制映射 $F_b\ \pi^{-1}(b)\to(\pi_1)^{-1}(b_1)$ 为纤维上的映射．若 $B=B_1$，$f=\mathrm{id}$，则 F 称为 B 态射（B-morphism） 纤维空间与它们的态射构成一个范畴，包含 B 上的纤维空间与 B 态射作为一个子范畴

纤维化 $\pi\ X\to B$ 的任何截面是一个纤维空间 B 态射 $s\ B\to X$ 从 (B,id,B) 到 (X,π,B) 若 $A\subset B$，则典范嵌入映射 $\iota\ \pi^{-1}(A)\to B$ 是一个从 $\pi|_A$ 到 π 的纤维空间态射

当 F 为同胚时，称为一个纤维空间同构（fibre space isomorphism），同构于乘积的纤维空间称为平凡纤维空间（trivial fibre space），同构 $X\to B\times F$ 则称为 π 的一个平凡化（trivialization）

若每个纤维均同胚于空间 F，则 π 称为以 F 为纤维的纤维空间．例如，在连通空间 B 上的局部平凡纤维空间中，所有的纤维 $\pi^{-1}(b)$ 均互相同胚，F 可取作任何一个 $\pi^{-1}(b_0)$，这就确定了同胚 $\varphi_b\ F\to\pi^{-1}(b)$

М И Войцеховский 撰

【补注】 记法 $\pi\ X\to B$ 与 (X,π,B) 都可用来表示一个纤维化、纤维空间或纤维丛．

在西方，一个映射 $\pi\ X\to B$ 称为纤维化，仅当它还满足适当的条件，例如，对于方体的同伦提升性质（homotopy lifting property）（**Serre 纤维化**（Serre fibration），关于同伦提升性质见**覆叠同伦**（covering homotopy），[A3]） 一个映射 $F\ X\to X_1$ 称为态射（morphism）（或同构（isomorphism）），仅当诱导的函数 $f\ B\to B_1$ 为连续（或**同胚**（homeomorphism））

参考文献

[A1] Dold, A , Partitions of unity in the theory of fibrations, *Ann of Math* , **78** (1963), 223 – 255

[A2] Husemoller, D , Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966

[A3] Serre, J -P , Homologie singulière des espaces fibres, *Ann of Math* , **54** (1951), 425 – 505

[A4] Spanier, E H , Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966, Chapt 2

[A5] Steenrod, N E , The topology of fibre bundles, Princeton Univ Press, 1951

孙以丰 译

信念分布 [fiducial distribution，фидуциалное распределение]

从观测值 x 的分布族 $\mathscr{P}=\{P_\theta\ \theta\in\Theta\}$ 导出的参数 θ 的分布 P_x^* 它是由 R A Fisher([1]) 对取实值的 θ 和 x 在下述情形下提出的 x 的分布函数 $F(x|\theta)$ 随着 θ 的增加而减少，使对固定的 x，$F^*(\theta|x)=1-F(x|\theta)$ 作为 θ 的函数具有分布函数的性质（人们常用充分统计量作为上述情形下的 x）

信念分布是对不变分布族定义的（见 [2]－[4]）．设变换 g 的群 G 作用于集合 X 和 Θ 如果当 x 的分布为 P_θ 时，gx 的分布是 $P_{g\theta}$，则称分布族是不变的（invariant） 对于这种情形，可以考虑同变决策规则 $\delta\ X\to D$（即对所有 x 和 g 有 $\delta(gx)=g\delta(x)$）和不变损失函数 $L_\theta(d)$（即 $L_{g\theta}(gd)=L_\theta(d)$ 对一切 θ，d 和 g 成立）．若作用在 Θ 上的 G 是可迁的，则族 $\mathscr{P}$ 有某种同质性 对固定的参数值 θ_0 和分布为 P_{θ_0} 的观测值 x，当 g 取遍 G 时，gx 的分布将取遍整个族 $\mathscr{P}$ 设 D 是 Θ 上的一个概率测度集（假定对给定的 σ 代数 $\mathscr{B}(\Theta)$ 和 $\mathscr{B}(X)$，G 中的变换都是可测的），G 在 D 上的作用定义为 $(g\alpha)(B)=\alpha(g^{-1}(B))$，$B\in\mathscr{B}(\Theta)$ 信念分布可用 Θ 上的概率测度族 $\mathscr{P}^*=\{P_x^*\ x\in X\}$ 描述，其中 P_x^*，对每一个满足无偏型条件

$$\int L_\theta(\alpha)\,d\beta(\theta)\geqslant\int L_\theta(\beta)\,d\beta(\theta)$$

的不变损失函数，在同变决策规则类中极小化风险

$\int L_\theta(\delta(x))dP_\theta(x)$ 如果 G 是作用在 X 上的可迁群，则信念分布族可由下列条件唯一确定 $\mathscr{P}^*=\{P_x^* \ x\in X\}$ 是不变的，且对每个不变的 $S(x)$ ($S(x)$ 称为不变的，如果 $\theta\in S(x)$, $g\in G$ 蕴含 $g\theta\in S(gx)$)，其或然概率与信念概率相等，即 $P_\theta\{\theta\in S(x)\}=P_x^*\{\theta\in S(x)\}$

参考文献

[1] Fisher, R A , Inverse probability *Proc Cambridge Philos. Soc* , **26** (1930), 528－535

[2] Fraser, D A S , The fiducial method and invariance *Biometrika*, **48** (1961), 261－280

[3] Климов, Г П ,《Докл АН СССР》, **191** (1970), 4 763－765

[4] Климов, Г П , Инвариантные выводы в статистике, М , 1973

А Д Кузьмин 撰

【补注】 关于 Fisher 的信念分布究竟是什么意思一直有争议，许多作者觉得这个概念根本没有意义 关于较新的综述，例如，见 [A1]

参考文献

[A1] Pedersen, J G , Fiducial inference, *Internat Stat Rev* , **46** (1978), 147－170

陶 波 译 李国英 校

域 [field, поле]

有单位元的交换的结合环，其非零元素的集合不是空集，并且在乘法下构成群（见**结合环与结合代数**(associative rings and algebras)） 域也可以刻画为有单位元的单的非零的交换结合环．域的例 有理数域 $\mathbf{Q}$，实数域 $\mathbf{R}$，复数域 $\mathbf{C}$，有限域（见 **Galois 域**（Galois field）)，以及整环的分式域．

域 K 的子域（subfield of a field）是一个子集 $M\subset K$，它自身在 K 中所定义的加法和乘法运算下构成一个域 例如，若 σ 是 K 的一个自同构，则集合

$$K^\sigma=\{x\in K \ \sigma(x)=x\}$$

是 K 的一个子域 如果 M 和 N 是域 K 的子域，则它们的交 $M\cap N$ 是 K 的子域，同时，在域 K 中存在一个包含 M 和 N 的最小子域 MN，称为域 M 和 N（在 K 中）的复合（composite） 每个域都含有一个唯一的素域（即不包含真子域的域）

任何域同态都是嵌入 对任一域 K，存在唯一的同态 φ $\mathbf{Z}\to K$，它把 $\mathbf{Z}$ 的单位元映到域 K 的单位元 如果 $\ker\varphi=0$，则称 K 为特征零的域（field of characteristic zero） 在这种情形下，K 的素域与环 $\varphi(\mathbf{Z})$ 的分式域相同，因而同构于域 $\mathbf{Q}$ 如果 $\ker\varphi\neq 0$，则 $\ker\varphi=p\mathbf{Z}$，p 为某个素数 这个 p 称为域 K 的特征（characteristic of the field） 在这种情形下，K 的素域同于 $\varphi(\mathbf{Z})\cong\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$

如果 k 是域 K 的一个子域，则称 K 为域 k 的扩张（extension of the field） 设 Y 是 K 的某个子集，则定义 $k(Y)$ 为域 K 的包含 Y 和 k 的最小子域 称 $k(Y)$ 为由域 k 添加集合 Y 的元素所得到的

域论中的基本问题有 刻画给定域的全部子域，刻画包含给定域的所有的域，即扩张域（overfield）（见**域的扩张**（extension of a field）），确定一个域到另一个域的全部嵌入，在同构意义下将域进行分类，以及确定给定域的自同构群．

域 K 称为在其一个子域 k 上是有限生成的（finitely generated），如果存在一个有限集 $Y\subset K$，使得 $K=k(Y)$ 任一这样的域都可被看作定义于 k 上的某个不可约代数簇 X 的有理函数域 $k(X)$ **代数几何学**（algebraic geometry）所要处理的部分课题就是对于这种域的研究 特别地，这种域的分类等价于不可约代数簇的双有理分类，而寻求保持域 k 的元素不变的域 $K=k(X)$ 的自同构的问题等价于寻求 X 的定义于 k 上的所有双有理自同构

任意域的有限**可分扩张**（separable extension）是 **Galois 理论**（Galois theory）的研究对象．域 $\mathbf{Q}$ 的有限扩张在数论中起着重要的作用，这些域称为代数数域 它们是**代数数论**（algebraic number theory）的研究对象

域论也用于处理具有某些附加结构的域，例如微分域，拓扑域，有序域，形式实域以及形式 p 进域等等

域论起源于（在代数方程论的背景下）19 世纪中叶，E Galois 和 J L Lagrange 关于群论的论文和 C F Gauss 关于数论的论文，使得人们清楚地意识到必须研究数系自身的本质 域的概念是 L Kronecker 和 R Dedekind 的论文中提出来的 Dedekind 把他所引入的域的概念最初称作“有理区域” Dedekind 的理论发表于对 P J Lejeune - Dirichet 的《数论》（Zahlentheorie）一书所作的评论及附录中 在那里，Dedekind 从本质上补充并扩展了数论，理想论以及有限域论 “域”这个术语首次出现于该书的 1871 年版本中

参考文献

[1] Bourbaki, N , Elements de mathematique Algèbre, Masson, 1981, Chapt 4－7

[2] Waerden, B L van der, Algebra, 1－2, Springer, 1967－1971（译自德文 中译本 B L 范德瓦尔登，代数学，I－II，科学出版社，1978）

[3] Lang, S , Algebra, Addison - Wesley, 1974

[4] Zariski, O and Samuel, P , Commutative algebra, 1, Springer, 1975

Л В Кузьмин 撰

【补注】 在德语中术语“域”是“Korper”，这当然是在 [A2] 中所使用的 这里所说的 [A2] 是第 4 版（Braunschweig, 1893）的修订本 1871 年的版本是第二版

参考文献

[A1] Jacobson, N , Lectures in abstract algebra, 1 Basic concepts, Springer, 1975

[A2] Lejeune - Dirichlet, P G Zahlentheorie, Chelsea, reprint, 1968

赵春来 译 冯绪宁 校

场算子 [field operator, поля оператор]

一个线性弱连续映射 $f\to\varphi_f$, $f\in D^L(\mathbf{R}^4)$, 将有限维向量空间 L 中取值的基函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R}^4)$ 的空间 $D^L(\mathbf{R}^4)$ 映射到定义于某个 Hilbert 空间 H 的一个稠密线性流形 $D_0\in H$ 上的(一般说无界)算子集合. 这里假设不但在 L 中而且在 H 中非齐次 Lorentz 群 G 的某些表示 $g\to T_g$ (在 L 中)和 $g\to U_g$ (在 H 中) $(g\in G)$ 的作用使得方程

$$U_g\varphi_f U_g^{-1}=\varphi_{\tau_g f},\ g\in G,\ f\in D^L(\mathbf{R}^4) \qquad (*)$$

成立, 其中

$$(\tau_g f)(x)=T_g f(g^{-1}x),\ x\in\mathbf{R}^4$$

依赖于 L 中的表示(标量, 矢量, 旋量, 等等), 场 $\{\varphi_f\ f\in D^L(\mathbf{R}^4)\}$ 分别称为标量场(scalar field), 向量场(vector field)或旋量场(spinor field) 场算子族 $\{\varphi_f . f\in D^L(\mathbf{R}^4)\}$ 以及表示 $\{T_g\ g\in G\}$ 和 $\{U_g\ g\in G\}$, 对于它们, 条件 $(*)$ 以及一些广义条件(见[1])成立, 称为量子场(quantum field)或量子化场(quantized field)

除了涉及二维或三维世界的一些模型(见[2], [4])之外, 人们仅构造了(1983)所谓自由量子场([3])的简单例子

参考文献

[1] Jost, R , The general theory of quantized fields, Amer Math Soc , 1965

[2] Simon, B , The $P(\varphi)_2$ - Euclidean (quantum) field theory, Princeton Univ Press, 1974

[3] Боголюбов, Н Н , Ширков, Д В , Введение в теорию квантованных полей, М , 1957 (英译本 Bogolyubov, N N and Shirkov, D V , Introduction to the theory of quantized fields, Interscience, 1959)

[4] Евклидова теория поля, Марковский подхов, М , 1978

P A Минлос 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bongaarts, P J M , The mathematical structure of free quantum fields Gaussian fields, in E A de Kerf and H G J Pijls (eds) Mathematical structures in field theory Proc Sem 1984 − 1986, CWI Amsterdam, 1987 1 − 50

徐锡申 译

第五公设 [fifth postulate, пятый постулат], Euclid 平行公理 (Euclid axiom of parallelism)

过不在直线 AA_1 上的一点 P, 恰好能画一条与 AA_1 不相交且落在含 P 及 AA_1 的平面内的直线. 在 Euclid 的《几何原本》(Elements) 里, 第五公设是以下列的等价形式给出的 "如果与两直线相交的一直线有其和小于两直角的同旁内角, 那么这两直线在同旁内角之和小于两直角这一边的延伸必相交" (见[1]). 在评论 Euclid 的一些人中产生一种观点, 认为这一陈述能根据其余的一些公理给以证明 一些证明的尝试早在古希腊时就出现了 这种种尝试在中世纪的东方, 然后在西欧得到延续 如果不计直接的逻辑错误的话, 那么通常会作出一个不明显的 (而有时也会是十分明了的) 假定, 它是无法从其余的一些公理推得的, 而且会发现它与第五公设是等价的 例如, 平行线之间的距离是有界的, 空间容有一种 "简单的" 运动 (一切轨线为直线), 两条会聚直线总是相交的, 存在相似但不相等的图形, 三角形的内角和等于两直角等等 G. Saccheri (1733) 考察了底边有两直角且两侧边相等的四边形. Omar Khayyam (11−12 世纪) 在更早的时候已讨论过这种四边形 在关于其余两相等的角的三种可能假设 (它们是钝角, 它们是锐角, 它们是直角) 中, 他试图否定前面两假设, 因为第三种假设蕴涵第五公设 Saccheri 成功地从第一种假设导出了矛盾, 但他在否定有关锐角的假设时犯了一个逻辑错误. J Lambert (1766, 发表于 1786) 用类似的方法驳斥了有关锐角的假设, 但也犯了一个严重的错误 他假定这种几何只能在虚球面上实现 A. Legendre (1800) 在教科书《几何学原理》(Eléments de la géométrie) 的第一版中是以三角形的内角和 S 作为出发点的. 在否定了 $S>\pi$ 的假设后, 他在推导 $S<\pi$ 的假设的结论时犯了个错误, 即他不明显地引入了如下公理 对锐角扇形内的任何一点, 存在经过这点并与该扇形两边都相交的直线. 第五公设这问题的解决 (更确切的说是它的删除) 是由 Н И. Лобачевский (1826) 创立的第五公设不成立的一种几何学实现的 根据 **Лобачевский 几何学** (Lobachevskiĭ geometry) 是相容的事实可以推出, 第五公设是与 Euclid 几何学的其他一些公理无关的

参考文献

[1] The thirteen books of Euclid's elements, 1−3, Cambridge Univ Press, 1926 (译自希腊文)

[2] Каган, В Ф , Основания геометрии, 1, М -Л , 1949

[3] Ефимов, Н В , Высшая геометрия, 5 изд , М , 1971

[4] Об основаниях геометрии Сб классических работ по геометрии Лобачевского , М , 1956

[5] Розенфельд, Б А , История неевклидовой геометрии, М , 1976

Б Л Лаптев 撰

【补注】 亦见 **Euclid 的《几何原本》**. 第五公设也称为平行公设 (parallel postulate) 对上文中简短描述的历史作出细心说明的是 [A2]

参考文献

[A1] Coxeter, H S M , Non-euclidean geometry, Univ Toronto Press, 1957

[A2] Bonola, R , Non-euclidean geometry, Dover, repreint, 1955 (译自意大利文)

姜国英 译 杨 路 校

图形 [figure, фигура]

具有基本群 G 的齐性空间 E^n 的一个子集 F，它能包括在此空间的一个子集系统 $R(F)$ 之中，而 $R(F)$ 同构于几何对象 Φ 的某个空间（见**几何对象理论**(geometric objects, theory of)） $R(F)$ 称为 F 的图形空间 (figure space) Φ 的分量称为相配图形 F 的坐标 (coordinates) E^n 中的每个图形 F 对应于一类相似的几何对象 $\{\Phi\}$ $\{\Phi\}$ 中的一个几何对象 Φ 的秩、亏格、特征及型称为图形 F 的秩 (rank)、亏格 (genre)、特征 (characteristic) 及型 (type)（所谓图形的算术不变量 (arithmetic invariants of the fiqure)，见 [2]） 例如，三维 Euclid 空间中一个圆乃是一个秩为 6，亏格为 1，特征为 1 及型 1 的图形，三维射影空间中一点是一个秩为 3，亏格为 0，特征为 2 及型 1 的图形．定义几何对象 Φ 的完全可积 Pfaff 方程组称为 F 的平稳方程组 (stationarity system of equations)

设 F 和 $\bar{F}$ 为 E^n 中两个图形．如果存在 $R(F)$ 到 $R(\bar{F})$ 上的映射，使得在此映射下每一个与 $\bar{F}$ 相应的几何对象被每一个相应于 F 的几何对象所覆盖，则称 F 覆盖或包括了 $\bar{F}$($\bar{F}$称为被 F 覆盖或包括） 秩为 N 的图形 F 称为简单的 (simple)，如果它不覆盖任何其他的低秩图形．F 称为指标等于 $\bar{N}<N$ 的包括图形，如果存在一个秩 $\bar{N}$ 的图形，使得它被 F 所覆盖，而任何被 F 所覆盖的其他图形 F' 的秩 N' 不超过 $\bar{N}$ 例如，在 n 维射影空间中的一点、一个 p 维平面及一个超二次曲面是简单图形，n 维仿射空间中的一个超二次曲面及 n 维射影空间中的 $d(d\leqslant n-2)$ 维二次曲面分别是指标为 n 及 $(d+2)$ $(n-d-1)$ 的包括图形

两图形的有序集 $F=(F_1, F_2)$ 称为图形偶 (figure pair) 图形偶的关联系数 (incidence coefficient) 为数 $k=N_1+N_2-N$，这里 $N_i(i=1, 2)$ 为 F_i 的秩 N 是形式系统 Ω^{J_1}, Ω^{J_2}（F_1 和 F_2 的平稳方程的左端）的秩，$J_i=1$, , N_i 如果 $k=0$，则图形偶 (F_1, F_2) 称为无关联的 (non-incident)

参考文献

[1] Лаптев, Г Ф ,《Тр Моск матем об-ва》, 2(1953), 275 – 383

[2] Малаховский, В С ,《Тр Геометр семинара Ин-т научн информ АН СССР》, 2(1969), 179 – 206

[3] Малаховский, В С , Итоги науки и техники Алгебра Топология Геометрия, т 10 М , 1972, 113 – 158

В С Малаховский 撰 沈纯理 译

滤子 [filter, фильтр]，对偶理想 (dual ideal)

偏序集 P 的一个非空子集 F，它满足条件 a) 如果 $a, b\in F$ 且下确界 $\inf\{a, b\}$ 存在，那么 $\inf\{a, b\}\in F$，b) 如果 $a\in F$ 且 $a\leqslant b$，那么 $b\in F$．滤子的概念是一个偏序集的**理想** (ideal) 概念的对偶

在一个非空集合 E 上（或在一个集合 E 内）的滤子是 E 的子集所成的集合按包含关系编序后的一个特定的滤子，即 E 的子集所组成的任意一个满足下面条件的非空类 F 如果 $A, B\in F$，那么 $A\cap B\in F$，如果 $A\in F$ 且 $A\subseteq B$，那么 $B\in F$，空集不属于 F

一个滤子基 (filter base) 是 E 的子集所成的满足下面两个条件的系统 1) 空集不属于它，2) 两个子集的交属于它等价于某个第三子集属于它 每个滤子由它的任意滤子基完全决定 E 的包含一个给定的滤子基的某个元素的子集的全体所成的系统是一个滤子 它称为是由这组基张成的．

在一个给定的集合上的所有滤子组成的集合按包含关系赋予偏序．它的一个极大元素称为一个超滤子 (ultrafilter)（在任意 Boole 代数内的一个极大真滤子也称为超滤子）．

滤子的例子 1) 令 N_k 是由 k 的倍数组成的自然数的子集，系统 $\{N_k\ k=1, 2,\ \}$ 是一个滤子基，由这组基张成的滤子是由包含某些 N_k 的那些子集组成的．2) 包含一个特定的非空子集 $A\subseteq E$ 的所有子集组成的类是一个 E 上的滤子，称为主滤子 (principal filter)．在一个有限集上的所有滤子都是主滤子 3) 设 E 是一个基数为 α 的无限集，而 F 是 E 的所有其补集基数小于 α 的子集所成的类，那么 F 是一个滤子（称为 Fréchet 滤子 (Fréchet filter)） Frechet 滤子是非主滤子的例子．4) 包含一个集合的某个固定点的子集所成的系统也是一个滤子，而且，它是一个超滤子 5) 假定在 E 上给定一个拓扑，那么，任意点 $x\in E$ 的邻域形成一个滤子

参考文献

[1] Bourbaki, N , Elements of mathematics General topology, Addison-Wesley, 1966 (translated from the French)

[2] Cohn, P M , Universal algebra, Reidel, 1981

[3] Мальцев, А И, Алгебраические системы, М , 1970

В И Малыхин, Т С Фофанова 撰

【补注】 在一个不是总存在有限下界的偏序集中，滤子的定义存在某些分歧 大多数作者用"如果 $a, b\in F$，那么存在一个 $c\in F$，使 $c\leqslant a$ 或 $c\leqslant b$"来取代第一段中的条件 a)，见 [A1] 这避开了某些表面上看来存在某种病态的情况

名词"滤子"的更深的意义出现在（不完全观测的）随机过程理论中，见**随机过程的滤波** (stochastic processes, filtering of)

参考文献

[A1] Kunen, K , Set theory, North-Holland, 1980

蓝以中 译

滤过代数 [filtered algebra, фильтрованная алгебра]

一个代数 S，在其中存在由全有序群 A（通常 A 为整数加法群 $\mathbf{Z}$）元素加标的特异子空间 S_α 使得对

所有 $\alpha<\beta$ 有 $S_\alpha\subseteq S_\beta$ 及 $S_\alpha S_\beta\subseteq S_{\alpha+\beta}$（一个升滤过（increasing filtration））有时我们考虑这种情况，当 $\alpha<\beta$ 时 $S_\alpha\supseteq S_\beta$（一个降滤过（decreasing filtration））但是这种情况可通过将 A 逆序而归结于前面的情形．每一个滤过代数 S 都伴随一个**分次代数**（graded algebra）

$$\mathrm{gr}\, S=\bigoplus_\alpha \overline{S_\alpha},$$

其中 $\overline{S_\alpha}=S_\alpha/\sum_{\beta<\alpha}S_\beta$（如果 $A=\mathbf{Z}$，则 $\overline{S_\alpha}=S_\alpha/S_{\alpha-1}$），并且元素 $\bar{x}\in\overline{S_\alpha}$，$\bar{y}\in\overline{S_\beta}$ 的积由公式 $\bar{x}\bar{y}=\overline{xy}$ 来定义，这里 x, y 分别为陪集 $\bar{x}, \bar{y}$ 的代表元，$\overline{xy}$ 是 $xy\in S_{\alpha+\beta}$ 生成的 $\sum_{r<\alpha+\beta}S_r$ 的陪集　如果某个多重线性恒等式在 S 中成立（如交换性、结合性或 Jacobi 等式），那么它在 $\mathrm{gr}\, S$ 中也成立

例 1）令 S 是一个 **Clifford 代数**（Clifford algebra），$S_n(n\in\mathbf{Z})$ 是能表示为次数 $\leqslant n$ 的生成子的（非交换）多项式形式元素的集合　于是得到 S 中的一个升 $\mathbf{Z}$ 滤过，而当 $n<0$ 时，$S_n=0$ 它的伴随分次代数具有同样数目生成子的**外代数**（exterior algebra）.

2）在一个 Lie 代数的**泛包络代数**（universal enveloping algebra）中可按前面例子中相同的方式定义一个升 $\mathbf{Z}$ 滤过　由 **Birkhoff - Witt 定理**（Birkhoff - Witt theorem），它的伴随分次代数是多项式代数

Э Б Винберг 撰　许永华、张印火 译　牛凤文 校

滤过模 [filtered module，фильтрованный модуль]

一个具有升或降滤过（filtration），即一个递增或递降的子模族 $(M_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ 的模 M　一个滤过称为穷举的（exhaustive），如果 $M=\bigcup_{n\in\mathbf{Z}}M_n$，如果 $\bigcap_{n\in\mathbf{Z}}M_n=0$，则称为可分的（separable）如果 N 是滤过模 M 的子模，那么可以以自然方式在 N 和 M/N 上定义滤过　如果 $M=\sum_{n\in\mathbf{Z}}M_{(n)}$ 是一个**分次模**（graded module），那么子模 $M_n=\sum_{i\geqslant n}M_{(i)}$ 在 M 上定义了一个穷举、可分的降滤过．反之，对每个滤过模 M，例如降滤过，存在一个伴随分次模

$$\mathrm{gr}\, M=\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}\mathrm{gr}_n M,$$

这里 $\mathrm{gr}_n M=M_n/M_{n+1}$　一个滤过 $(M_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ 构成零的一个基本邻域系　它的拓扑是可分的当且仅当此滤过是可分的，是离散的，当且仅当对某个 n，$M_n=0$

参考文献

[1] Bourbaki, N , Elements of mathematics Commutative algebra, Addison - Wesley, 1972（译自法文）

А Л Онищин 撰

【补注】 在微分算子环理论中，如 **Weyl 代数**（Weyl algebra）及相关 **Lie 代数**（Lie algebra）的包络代数，滤过模起了重要作用　最常遇见的概念是好滤过（good filtration）滤过环 R 上的一个 R 模 M 有好滤过，如果存在 M 的某个元素集 m_i 及 $d_1, \quad, d_m\in\mathbf{Z}$ 使得 $M_n=\sum_{i=1}^m R_{n-d_i}m_i$ 一类非常好的好滤过模是由完整模（holonomic modules）所构成，而此模被一个与 $M_n(n\in\mathbf{Z})$ 增长的一个界相关的条件定义，具有好滤过的滤过模的伴随分次模是有限生成的分次模　如果环 R 有一个离散滤过且伴随的分次环是左 Noether 环，那么 M 上的好滤过能在任何子模上诱导出一个好滤过并且等价于一个好滤过的任何滤过又是这个模上的一个好滤过

参考文献

[A1] Bjork, J - E , Rings of differential operations, North－Holland, 1979

[A2] Schapira, P , Microdifferential systems in the complex domain, Springer, 1985

许永华、张印火 译　牛凤文 校

终对象 [final object 或 terminal object，финальный объект]，范畴的

一种概念，它将只含一点的点集的范畴性质形式化．在一个范畴 $\mathfrak{K}$ 中，一个对象 T 称为终的（final），如果对 $\mathfrak{K}$ 中的每一个对象 X，集合 $H(X, T)$ 总是由单独一个态射所组成　终对象也称为 $\mathfrak{K}$ 的右零对象（right null object）一个范畴的左零对象（left null object）或始对象（initial object）可由对偶方式来定义．

在集合的范畴中，终对象就是那些只有一点的集合．在任何有零对象的范畴中，终对象都是零对象　其他的终对象的例子见于图式的各种范畴中，其中终对象的概念本质上等价于图式的极限的概念　例如，假定 $\alpha, \beta\ A\to B$，并设 $\mathrm{Eq}_l(\alpha, \beta)$ 表示 (α, β) 这一对的左等化子的范畴，换言之，$\mathrm{Eq}_l(\alpha, \beta)$ 的对象就是能使 $\mu\alpha=\mu\beta$ 的态射 $\mu\ X\to A$，而 $\mathrm{Eq}_l(\alpha, \beta)$ 的态射则是能使 $\gamma\sigma=\mu$ 的态射 $\gamma\ (X, \mu)\to(Y, \sigma)$ $\mathrm{Eq}_l(\alpha, \beta)$ 中的一个终对象是这一态射对 (α, β) 的核．见**范畴中态射的核**（kernel of a morphism in a category）

М Ш Цаленко 撰

【补注】 由定义，集合 $H(X, T)$ 是态射 $X\to T$ 的集合．注意，一个范畴中的两个终对象是（典范地）同构的，两个始对象也是这样

参考文献

[A1] Adamek, J , Theory of mathematical structure, Reidel, 1983

[A2] Mitchell, B , Theory of categories, Acad Press, 1965

周伯埙 译

良集 [fine set，разреженное множество]

【补注】 通常称为**薄集**（thin set）.

优层 [fine sheaf，тонкий пучок]，亦称强层

仿紧空间 X 上的 Abel 群层 $\mathscr{F}$，它的自同态层是**软层**（soft sheaf）．层 $\mathscr{F}$ 是优层，当且仅当对于满足 $A\cap$

$B=\phi$ 的任意闭子集 $A, B \subset X$，存在自同态 h $\mathscr{F} \to \mathscr{F}$，且 h 限制在 A 上是恒等映射，限制在 B 上是零映射，或等价地，对 X 的每个开覆盖 $(U_i)_{i\in I}$，存在 $\mathscr{F}$ 的自同态的局部有限集合 $(h_i)_{i\in I}$，满足 $\operatorname{supp} h_i \subset U_i (i \in I)$，以及 $\sum_{i\in I} h_i$ 是恒等自同态．优层必是软层，如果 $\mathscr{F}$ 是具有单位元的环层，则其逆也成立　如果 $\mathscr{F}$ 是优层，$\mathscr{S}$ 是任意 Abel 群层，则 $\mathscr{F} \otimes_Z \mathscr{S}$ 也是优层　仿紧空间（或仿紧微分流形）上向量丛的连续（或 C^k 类可微的）截面的芽层是优层的例．

参考文献

[1] Godement, R , Topologie algebrique et theorie des faisceaux, Hermann, 1958

[2] Wells, jr , R O, Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980

А Л Онищик 撰　蔡金星 译

细拓扑 [fine topology, тонкая топология]，位势论中的

使得 $\mathbf{R}^n$ 上所有上调和函数都连续的最弱的拓扑．与细拓扑有关的研究对象都冠以“细的”，“细”等字眼

细拓扑的概念与**薄集**（thin set）的概念密切关联　亦见**集合的稀疏性**（thinness of a set）) $\mathbf{R}^n$ 的细拓扑比通常的 Euclid 拓扑强，即每个 Euclid 开集都是细开集．点 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ 的一个细邻域（fine neighbourhood）是这样的集合 $V(x_0)$　$x_0 \in V(x_0)$ 且余集 $CV(x_0)$ 在点 x_0 是薄集　细开集为广义实直线 $\mathbf{R}$ 以及形如 $(a, +\infty], [-\infty, b), (a,b)(-\infty < a < b < +\infty)$ 的区间在上调和函数映照下的原象的并集　开集 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的每个上调和函数在 E 上都是细连续的　集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ 在点 $x_0 \in E$ 是薄的，当且仅当 x_0 为 E 的细孤立点．

设 x_0 是 E 的细极限点（fine-limit point），即 E 在 x_0 不薄，又设函数 f 定义在 E 上　数 λ 称为 f 在 x_0 的细极限（fine limit），如果对 λ 在 $\overline{\mathbf{R}}$ 里的每个邻域 $U(\lambda)$，存在 x_0 的一个细邻域 $V(x_0)$，使得

$$x \in E \cap V(x_0) \Rightarrow f(x) \in U(\lambda)$$

如果 λ 是 f 在 x_0 的细极限，则存在一个细邻域 $V(x_0)$，使得 λ 是限制函数 $f|_{E\cap V(x_0)}$ 在 x_0 的普通极限（Cartan 定理（Cartan theorem））

设 E 是在点 x_0 薄的闭集，又设 $f>0$ 定义在 CE 与 x_0 的某一个邻域的交集上，且为上调和函数，那么，f 在 x_0 有细极限 λ

在公理位势论中也构造了细拓扑（见[3]）

参考文献

[1] Brelot, M , Elements de la theorie classique du potentiel, Sorbonne Univ Centre Doc Univ , Paris, 1959

[2] Ландкоф, Н С , Основы современной теории потенциала, М , 1966（英译本 Landkof, N S , Foundations of modern potential theory, Springer, 1972）

[3] Brelot, M , Lectures on potential theory, Tata Inst Fundam Res , 1960

Е Д Соломенцев 撰

【补注】 [A1] 发展了关于细调和与细超调和函数的位势理论．亦见[A2]

参考文献

[A1] Fuglede, B , Finely harmonic functions, Springer, 1972

[A2] Lukeš, J , Malý, J and Zajíček, L , Fine topology methods in real analysis and potential theory, Springer, 1986

高琪仁、吴炯圻 译

有限性问题 [finitary problem, финитная задача]

见**有限性可验证**（finitary verifiability）．

有限可验证性 [finitary verifiability, финитная общезначимость]

逻辑公式的非经典解释之一，旨在精确化由 А Н. Колмогоров 提出的解释作为问题演算（calculus of problems）的直觉主义逻辑断言的计划．

Колмогоров（[1]）阐述了这样的想法，如传统逻辑系统化理论真值的证明模式一样，也可能有一种问题解的模式的逻辑系统化．没有问题概念的精确定义，仍可以看看下列具体的问题，例如

1) 求四个自然数 x, y, z, n，使之满足 $x^n + y^n = z^n$，$n>2$，

2) 证明 **Fermat 大定理**（Fermat great theorem）是错的，

3) 假设 π 可表示为 $\pi = m/n$，其中 m, n 是正整数，求 e 的类似表达式．

也可以用自然的方式定义下面问题上的运算　如果 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是问题，则 $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$ 表示“解决问题 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 的问题”，$A \vee B$ 表示“解决至少 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 中之一”；$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ 表示“假设有 $\mathfrak{A}$ 的解，找 $\mathfrak{B}$ 的解”（即归约 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{A}$），$\neg \mathfrak{A}$ 表示“假设有 $\mathfrak{A}$ 的解则得出矛盾　”

如果用问题代替由逻辑联结词 $\&, \vee, \supset, \neg$，变量 $a, b,$　构造的命题公式中的变量，则由其运算可得某个问题．一个公式称为可验证的（verifiable），如果存在一个一般的方法能够解决由给定公式以上述方式得到的任何问题　在直觉主义命题演算中可推导的公式在这种意义下是可验证的．同时公式 $A \vee \neg A$，表示经典**排中律**（law of the excluded middle），是不可验证的，因为如果它可验证，则将存在一个一般的方法，使得对每个问题要么得到它的解，要么由假设存在它的解得出矛盾．

逻辑公式解释的这种描述不是充分严格的，像“问题”，“问题的解”和“一般方法”这样的概念需要

精确化．精确化的一种方法是由 Ю Т．Медведев ([2])提出的有限可验证性概念

有限性问题 (finitary problem) 是这样的一个问题，其解为某事先知道的允许可能性的非空有限集 F 的一个元素．所以，有限性问题可看作有序对 $\mathfrak{A}=\langle F, X\rangle$，其中 F 是 $\mathfrak{A}$ 的允许可能性的有限集，X 是解集 ($X\subseteq F$) 如果 $\mathfrak{A}=\langle F, X\rangle$，记 $F=\varphi(\mathfrak{A})$，$X=\chi(\mathfrak{A})$，设 $\mathfrak{A}_1$ 和 $\mathfrak{A}_2$ 为任意有限性问题且满足

$$\varphi(\mathfrak{A}_i)=F_i,\ \chi(\mathfrak{A}_i)=X_i,\ i=1,2$$

有限性问题上的运算定义如下 对于合取 $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\&\mathfrak{A}_2$，设

$$\varphi(\mathfrak{A})=F_1\times F_2,\ \chi(\mathfrak{A})=X_1\times X_2,$$

其中 $A\times B$ 表示 A，B的 Descartes 积，即所有有序对 $\langle a, b\rangle$，$a\in A$, $b\in B$ 的集合．对于析取 $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\vee\mathfrak{A}_2$，设

$$\varphi(\mathfrak{A})=F_1+F_2,\ \chi(\mathfrak{A})=X_1+X_2,$$

其中 $A+B$表示 A和 B的不交和，即 $A\times\{1\}$ 和 $B\times\{2\}$ 的集合论的并．对于蕴涵 $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\supset\mathfrak{A}_2$，设 $\varphi(\mathfrak{A})=F_2^{F_1}$，$F_1$到 F_2 的所有映射的集合，$\chi(\mathfrak{A})$ 是 $F_2^{F_1}$ 中满足$f(X_1)\subseteq X_2$的 f 的集合 $\mathfrak{A}$ 的否定 $\neg\mathfrak{A}$ 定义为问题 $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}_0$，其中 $\mathfrak{A}_0$ 是一个具有空解集的固定问题(从现在起所有构造独立于这样一个问题的具体选择)

用有限性问题 $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_n$ 代替命题公式 $A(p_1, \cdots, p_n)$ 中变量 $p_1, \cdots, p_n$，可得到一个复合问题 $\mathfrak{A}=A(\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_n)$ 此处 $\varphi(\mathfrak{A})$ 只由集合 $F_1=\varphi(\mathfrak{A}_1), \cdots, F_n=\varphi(\mathfrak{A}_n)$ 所确定，而不依赖于 $X_1=\chi(\mathfrak{A}_1), \cdots, X_n=\chi(\mathfrak{A}_n)$ 对于固定集合 $F_1, \cdots, F_n$，不同集合 $X_i\subseteq F_i (i=1, \cdots, n)$ 的选择对应于具有相同集合 F 以及一般来说不同集合 X 的不同问题 $A(\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_n)$ 如果存在 F 的一个元素属于所有这样的 X，则说公式 A 在集合 $F_1, \cdots, F_n$的系统中可解．如果公式 $A(p_1, \cdots, p_n)$ 在有限集 $F_1, \cdots, F_n$ 的每个系统中可解，则称该公式是一般可解的 (generally solvable) 或有限可验证的 (finitarily verifiable)．这个定义有明显的意义 公式 A 是有限可验证的，如果知道问题 $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_n$ 的允许解集就可以解决每个问题 $A(\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_n)$.

所有有限可验证的命题公式集合 ML 关于直觉主义命题演算的可推导性是封闭的，且包含在这个演算中可推导的所有公式 这样，ML 是一个中介 (或超直觉主义，或超构造) 逻辑，称为 Медведев 逻辑 (Medvedev logic) 这个逻辑包含直觉主义逻辑中不可推导的公式 (例如，$(\neg a\supset(b\vee c))\supset((\neg a\supset b)\vee\neg a\supset c)))$．Медведев 逻辑有析取性质 如果形如 $A\vee B$的公式是有限可验证的，则至少 A 和 B 中之一是有限可验证的 如果命题公式不包含任何逻辑符号 $\neg, \vee$ 或 $\supset$，则它是有限可验证的，当且仅当它在直觉主义命题演算中是可推导的．每个有限可验证公式在经典命题演算中是可推导的，同时，例如，经典可推导的公式 $a\vee\neg a$ 不是有限可验证的．利用代数模型得到了 Медведев 逻辑的特征．有各种方法将有限可验证性推广到谓词公式上．

参考文献

[1] Kolmogorov, A , Zur Deutung der intuitionistischen Logik, *Math Z* , **35** (1932), 58 – 65

[2] Медведев, Ю Т, 《Докл АН СССР》, **142** (1962), 5, 1015 – 1018, **169** (1966), 1, 20 – 23

B E Плиско 撰 眭跃飞 译

有限差分 [finite difference, конечная разность]

见有限差分演算 (finite-difference calculus)．

有限差分演算 [finite-difference calculus, конечных разностей исчисление]，亦称差分学

数学的一个分支，其中研究自变量离散变化下的函数性质，与自变量连续变化情况的微积分是相对的．设 f 是定义在点 $x_k=x_0+kh$ 上的函数 (其中 h 是常数，k 是整数)．于是

$$\Delta y_k=\Delta f_k=f(x_{k+1})-f(x_k)$$

是一阶差分 (first-order differences)，

$$\Delta^2 y_k=\Delta^2 f_k=\Delta f_{k+1}-\Delta f_k=f(x_{k+2})-2f(x_{k+1})+f(x_k)$$

是二阶差分 (second-order differences)，$\cdots$

$$\Delta^n y_k=\Delta^n f_k=\Delta^{n-1}f_{k+1}-\Delta^{n-1}f_k$$

是 n 阶差分 (n-th order differences)．这些差分容易列成下表

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\cdot$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\cdot$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
				$\cdot$	
x_4	y_4		$\cdot$		
	$\cdot$				

n 阶差分可以通过公式

$$\Delta^n y_k = y_{k+n}-\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} y_{k+n-1}+\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} y_{k+n-2}$$

$$-\quad +(-1)^n y_k$$

用量 $y_0, y_1,$ 来表示 同向前差分（forward differences）Δy_k 一样，也使用向后差分（backward differences）

$$\nabla y_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$$

在许多问题中（特别在插值公式的构造中）要用到中心差分（central differences）

$$\delta^{2m-1} y_{i+1/2},\ \delta^{2m} y_i,$$

其定义如下

$$\delta y_{i+1/2} = y_{i+1} - y_i,$$

$$\delta^2 y_i = \delta y_{i+1/2} - \delta y_{i-1/2},$$

$$\delta^{2m-1} y_{i+1/2} = \delta^{2m-2} y_{i+1} - \delta^{2m-2} y_i,$$

$$\delta^{2m} y_i = \delta^{2m-1} y_{i+1/2} - \delta^{2m-1} y_{i-1/2}$$

中心差分 $\delta^n y_i$ 与通常的差分 $\Delta^n y_k$ 由公式

$$\delta^{2m} y_i = \Delta^{2m} y_{i-m},\ \delta^{2m+1} y_{i+1/2} = \Delta^{2m+1} y_{i-m}$$

联系起来．当区间（x_k, x_{k+1}）的长度不同时，还考虑均差（divided differences）

$$[x_0] = y_0,\ [x_1] = y_1,$$

$$[x_0; x_1] = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1},$$

$$[x_0; x_1, x_2] = \frac{[x_0, x_1] - [x_1, x_2]}{x_0 - x_2},$$

$$[x_0, \quad , x_n] = \frac{[x_0, \quad , x_{n-1}] - [x_1, \quad , x_n]}{x_0 - x_n}$$

下面公式成立

$$[x_0, \quad , x_n] = \sum_{j=0}^{n} \frac{y_j}{\prod_{i \neq j} (x_j - x_i)}$$

有时，代替 $[x_0, \quad , x_n]$ 也使用记号 $f(x_0, \quad , x_n)$ 设 $x_n = x_0 + nh$, $n = 0, 1,$ ，则

$$[x_0, \quad , x_n] = \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}$$

假设 f 在整个区间（x_k, x_{k+n}）上有 n 阶导数 $f^{(n)}$，则

$$\Delta^n y_k = h^n f^{(n)}(\xi),\ x_k < \xi < x_{k+n}$$

有限差分计算与函数逼近论是密切相关的，用于近似微分、近似积分、微分方程和其他问题的近似解．试提出下列问题 求一个在点 x_0, · , x_n 上取已知值的函数 f（插值问题） 我们构造在给定点上取与 f 相同值的 n 阶插项多项式 这个多项式可以表示成多种形式 Lagrange 形，Newton 形，等等，其 Newton 形是

$$P_n(x) = f(x_0) + [x_0, x_1](x - x_0) +$$

$$+ \quad + [x_0, \quad , x_n](x - x_0) \quad (x - x_{n-1})$$

当独立变量的值是等距时，有

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta^k f(x_0)}{k! h^k} (x - x_0) \quad \cdot (x - x_{k-1}).$$

我们把 P_n 取成 f 的近似 如果 f 有 $n+1$ 阶导数，则用 P_n 代替 f 的误差可以用公式

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0) \quad (x - x_n)$$

估计，其中 ξ 落在含有点 x, x_0, ， x_n 的区间中．如果 f 是次数 $\leqslant n$ 的多项式，则 $f = P_n$

当结点的个数无限增加，在极限的情况下，插值多项式 P_n 变成"无穷"次多项式，于是自然会问 什么时候有 $f = P$？换言之，什么时候下式成立

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta^k f(x_0)}{k! h^k} (x - x_0)$$

$$(x - x_{k-1}) \tag{1}$$

（为简单起见，这里考虑等距区间的情形） 令 $x_0 = 0$, $h = 1$，有 $x_n = n\ (n \geqslant 0)$ 如果级数（1）在一个非结点 α 上收敛（级数（1）在结点 x_0, x_1, · 上总是收敛的），则它在半平面 $\mathrm{Re}\, x > \alpha$ 上收敛，在这个半平面上是解析函数，并且在任意半平面 $\mathrm{Re}\, x \geqslant \beta > \alpha$ 上满足下面条件（这里 $\varepsilon > 0$）

$$|f(re^{i\varphi})| < ce^{rh(\varphi)} r^{\alpha+\varepsilon+1/2}$$

$$h(\varphi) = \cos\varphi \ln(2\cos\varphi) + \varphi \sin\varphi$$

反之，设 f 在某半平面上解析并且有类似的（或更好的）增长阶，则它可以表示成级数（1）．因此，只有十分狭窄的一类函数（仅仅是具有上述增长阶的解析函数）可以展成级数（1）（所谓的 Newton 级数（Newton series）） 当结点是一般复数时要研究 Newton 级数．这类级数在超越数论中有较大的应用 现假设插值结点形成三角形排列

$$x_{0,0}$$
$$x_{1,0}, x_{1,1}$$
$$x_{n,0}\quad x_{n,1}\qquad x_{n,n}$$

试由第 $n+1$ 行上的结点来构造插值多项式 P_n 当 $n\to\infty$ 时，P_n 收敛到 f 的函数类 f 依赖于结点的排列．例如，设

$$x_{n,k}=\cos\frac{2k+1}{2n}\pi,\ k=0,\quad ,n$$

($x_{n,k}$ 是 **Чебышев 多项式** (Chebyshev polynomials) 的根)，则为了插值过程在区间 $[-1,1]$ 上收敛，只需要满足下面条件

$$\lim_{n\to\infty}\omega\left[\frac{1}{n}\right]\ln n=0,$$

这里 $\omega(\delta)$ 是 f 在 $[-1,1]$ 上的**连续模** (modulus of continuity)

有限差分计算中的另一个重要问题是函数求和的问题．设 f 是给定函数．当已知 f 的某些解析性质时，对固定的 x_0，h 和大的 n 值，要求用精确的或近似的有限形式求和

$$S_n=f(x_0)+f(x_0+h)+\quad +f(x_0+nh).$$

换言之，要研究当 $n\to\infty$ 时，S_n 的渐近性态．设 $x_0=0$，$h=1$ (为简单起见)．假设可以找到函数 F，使得

$$\Delta F(x)=F(x+1)-F(x)=f(x),\qquad(2)$$

则

$$S_n=F(n+1)-F(0)\qquad(3)$$

例如，设 $f(x)=x^2$．方程 (2) 的解写成具有待定系数的三次多项式

$$Q(x)=ax^3+bx^2+cx$$

代入方程 (2) 并使等式左、右端 x 的相应次幂系数相等，此时多项式为

$$Q(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}=\frac{x(x-1)(2x-1)}{6}$$

以及

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=1^2+2^2+\cdots+n^2$$

方程 (2) 的解并不总是具有有限形式的 所以求 S_n 的近似公式是有用的．**Euler-MacLaurin 公式** (Euler-MacLaurin formula) 就是这种公式．设 f 有 k 阶导数，k 是偶数，则 Euler-MacLaurin 公式可以写成

$$\sum_{x=0}^{n-1}f(x)=\int_0^n f(x)\,dx+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{B_\nu}{\nu!}\{f^{(\nu-1)}(n)-f^{(\nu-1)}(0)\}+$$
$$+\frac{B_k}{k!}\sum_{x=0}^{n-1}f^{(k)}(x+\theta),$$

这里 $0<\theta<1$ (一般而言，θ 依赖于 n)，B_ν 是 **Bernoulli 数** (Bernoulli numbers) 如果 f 是次数小于 k 的多项式，则余项为零．

有限差分计算中的问题与微积分中的问题有相似性．求差分的运算对应于求导数，方程 (2) 的解，作为一种运算，就是求有限差分的逆，对应于求原函数，即不定积分．公式 (3) 是 **Newton-Leibniz 公式** (Newton-Leibniz formula) 的直接类比．这种相似性导致考虑有限差分方程．有限差分方程就是一种关系式

$$F(x,f(x),\Delta f(x),\ \cdot\ ,\Delta^n f(x))=0,$$

其中 F 是给定函数，f 是未知函数．如果一切 $\Delta^n f(x)$ 都用 $f(x)$, $f(x+1)$, $,f(x+n)$ 表示，则有限差分方程可以写成

$$\Phi(x,f(x),f(x+1),\cdots,f(x+n))=0\quad(4)$$

解出 $f(x+n)$ 得

$$f(x+n)=\psi(x,f(x),\cdots,f(x+n-1))\quad(5)$$

给定初始值 $f(x_0)$, $,f(x_0+n-1)$，就可以依次求得 $f(x_0+n)$, $f(x_0+n+1)$，等等．从 (4) 解出 $f(x)$．

$$f(x)=\varphi(x,f(x+1),\ \cdot,f(x+n)).$$

令 $x=x_0-1$，便可以求得 $f(x_0-1)$，然后求得 $f(x_0-2)$，等等．因此，根据初始数据从上面的方程可以求得 f 在一切点 x_0+k 上的值，其中 k 是整数．对 $x=0,1,\quad$，考虑线性方程

$$f(x+k)+P_1(x)f(x+k-1)+$$
$$+\quad +P_k(x)f(x)=Q(x),\qquad(6)$$

其中 $P_1(x)$, $,P_k(x)$ 和 $Q(x)$ 是在集合 $x=0,1,\cdots$ 上给定的函数．非齐次方程 (6) 的通解是非齐次方程的一个特解与齐次方程

$$f(x+k)+P_1(x)f(x+k-1)+$$
$$+\ \cdot\ +P_k(x)f(x)=0\qquad(7)$$

的通解的和．如果 f_1, $,f_k$ 是 (7) 的线性无关的解，则 (7) 的通解由公式

$$f(x)=c_1f_1(x)+\quad +c_kf_k(x)$$

给出，这里 c_1， ，c_k 是任意常数．常数 c_1， ，c_k 可以通过规定初始条件，即 $f(0)$， ，$f(k-1)$ 的值来确定．在常系数方程

$$f(x+k)+a_1 f(x+k-1)+\quad +a_k f(x)=0 \tag{8}$$

的情况下容易求得线性无关的解 f_1， ·，f_k（基础解系）（8）的解写成 $f(x)=\lambda^x$ λ的特征方程是

$$\lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+\quad +a_k=0$$

假设特征方程的根 λ_1， ，λ_k 互不相同，则λ_1^x， ，λ_k^x 是（8）的基本解组且（8）的通解可以写成

$$f(x)=c_1\lambda_1^x+\quad +c_k\lambda_k^x$$

如果 λ_1 是特征方程的 s 重根，则相应于 λ_1 的特解是 λ_1^x，$x\lambda_1^x$， ，$x^{s-1}\lambda_1^x$.

举例而言，假设考虑从 0 和 1 出发的数列，而每个后续的数都是与之紧接的前二数之和· 0，1，1，2，3，5，8，13，·（**Fibonacci 数**（Fibonacci numbers））求这数列的一般项．令 $f(x)$，$x=0$，1， 是这数列的一般项，条件

$$f(x+2)=f(x+1)+f(x),\ f(0)=0,\ f(1)=1$$

组成一个带有给定初始条件的差分方程，它的特征方程是 $\lambda^2-\lambda-1=0$，其根为 $\lambda_1=(1+\sqrt{5})/2$，$\lambda_2=(1-\sqrt{5})/2$ 所以

$$f(x)=c_1\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^x+c_2\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^x;$$

$c_1=1/\sqrt{5}$，$c_2=-1/\sqrt{5}$ 由初始条件得到．

不仅当 x 离散地取值 0，1， ·时，而且当 x 连续变化时都可以得到方程（4）设 f 是定义在半开区间 $[0,n)$ 上的任意函数．由（5）令 $x=0$ 便得到 $f(n)$ 如果 f 在 $[0,n)$ 上连续，则 f 可以在闭区间 $[0,n]$ 上不连续 如果希望有连续解，则 f 必须定义在 $[0,n)$ 上，使得由（5）可以证明它在 $[0,n]$ 上是连续的．根据 f 在 $[0,n]$ 上的信息，由（5）可以在 $x\in(n,n+1]$ 上，然后在 $x\in(n+1,n+2]$ 等等区间上求出 $f(x)$

较（8）更一般的方程是

$$f(x+h_k)+a_1 f(x+h_{k-1})+\quad +a_k f(x)=0 \tag{9}$$

这里 $0<h_1<\quad <h_k$ 不必是整数，也不必彼此可通约 方程（9）有特解

$$f(x)=e^{\lambda x},$$

这里 λ 是方程

$$L(\lambda)\equiv e^{h_k\lambda}+a_1e^{h_{k-1}\lambda}+\quad +a_k=0$$

的根．这个方程有无穷多个根 λ_1，λ_2， 因而，（9）有无穷多个特解 $e^{\lambda_m x}$，$m=1,2$， 假设所有的根都是单根．要用这些初等特解来表示（9）的解，把方程写成下面形式是比较方便的

$$\int_0^\alpha f(x+t)\,d\sigma(t)=0,\ \alpha=h_k, \tag{10}$$

这里 $\sigma(t)$ 是在点 0，h_1， ，h_k 上跳跃分别为 a_k，a_{k-1}， ，1 的阶梯函数 令

$$\psi_\nu(t)=\frac{-e^{\lambda_\nu t}}{L'(\lambda_\nu)}\int_0^t e^{\lambda_\nu\xi}\,d\sigma(\xi),\ \nu\geqslant 1$$

函数 $\psi_\nu(t)$ 具有性质

$$\int_0^\alpha e^{\lambda_m t}\psi_\nu(t)\,dt=\delta_{m\nu}$$

（$\delta_{m\nu}=1$ 当 $m=\nu$，$\delta_{m\nu}=0$ 当 $m\neq\nu$），即它们与 $\{e^{\lambda_m t}\}$ 组成双直交系．基于此，（10）的解 f 对应于级数

$$f(x)\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu e^{\lambda_\nu x},\qquad c_\nu=\int_0^\alpha f(t)\psi_\nu(t)\,dt \tag{11}$$

如果（9）具有形式

$$f(x+2\pi)-f(x)=0 \tag{12}$$

（即 f 是以 2π 为周期的周期函数），$L(x)=e^{2\pi x}-1$，方程 $L(\lambda)=0$ 的根是 $mi\,(m=0,\pm1,\quad)$，（11）是 f 的复数形式 Fourier 级数 级数（11）可以看成是最简单的差分方程（12）相应的 Fourier 级数推广到差分方程（9）的情形．在某些条件下，级数（11）收敛到解 f. 如果 f 是解析函数，则（9）可以表示成**无穷阶方程**（equation of infinite order）

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n f^{(n)}(x)=0$$

多变量函数的差分用类似于单变量函数差分的方法引进 例如，在矩形区域 $0\leqslant x\leqslant a$，$0<y<b$ 上，对给定 u 在矩形边界上的值，求 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$$

的数值解．将矩形分成边长为 $\Delta x=a/N$，$\Delta y=b/M$ 的小矩形单元．求解在这些单元顶点上的值．对于落在原矩形边界上的顶点，u 在这些点上的值是已知的．利用近似式（这里二阶差分在分子上），

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\approx\frac{u(x+\Delta x,y)-2u(x,y)+u(x-\Delta x,y)}{\Delta x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u(x, y+\Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2},$$

代替 Laplace 方程便得到线性方程组

$$\frac{u(x+\Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2} +$$

$$+ \frac{u(x, y+\Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2} = 0.$$

点 (x, y) 跑遍小矩形单元的一切落在原矩形内部的顶点．因此，构成了$(N-1)(M-1)$ 个方程且有相同个数未知数的方程组 解这个代数方程组，便得到 u 在小矩形单元顶点上的值．当 Δx，Δy 很小，问题的解有一定的光滑性，则这样得到的值是接近于精确值的

有限差分计算是与数学分析的主要分支平行地发展起来的．有限差分计算最早出现在 P Fermat，I Barrow 和 G Leibniz 的工作中 到 18 世纪它已成为独立的数学学科．B．Taylor 在 1715 年首先系统地论述了有限差分计算． 19 世纪数学家的研究成果为有限差分计算的近代分支奠定了基础．有限差分计算的思想和方法在复变数解析函数和数值数学的应用中获得充分的发展．

参考文献

[1] Марков, А А , Исчисление конечных разностей, 2 изд , Од , 1910

[2] Березин, И С , Жидков, Н П , Методы вычислений, т 1-2, 3 изд , М , 1966(英译本 Berezin, I S , Zhidkov, N P , Computing methods, Pergamon, 1973)

[3] Гельфонд, А О , Исчисление конечных разностей, 3 изд , М , 1967

[4] Бахвалов, Н С , Численные методы, 2 изд , М , 1975(英译本 Bakhvalov, N S , Numerical methods analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977)

А Ф Леонтьев 撰

【补注】 亦见**插值** (interpolation)，**插值公式** (interpolation formula)，**Lagrange 插值公式**(Lagrange interpolation formula)，**Newton 插值公式**(Newton interpolation formula)，**函数逼近**，**线性方法** (approximation of functions, linear methods)

参考文献

[A1] Milne-Thomson, L M , The calculus of finite differences, MacMillan, 1933

[A2] Samarskii, A A , Theorie der Differenzverfahren, Akad Verlagsgesell Geest u Portig K-D , 1984 (译自俄文)

沈祖和 译 郑维行 校

有限维结合代数 [finite-dimensional associative algebra; конечномерная ассоциативная алгебра]

结合代数 A(见**结合环与结合代数** (associative rings and algebras)) 它也是域 F 上一个有限维向量空间，并对所有 $a, b \in A$, $\alpha \in F$ 满足

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$$

域 F 上空间 A 的维数 $n = \dim_F A$ 称为 F 上代数 A 的维数 习惯上也说代数 A 是 n 维的．域 F 上的每个 n 维结合代数 A 可通过 F 上 $n+1$ 阶矩阵给出一个忠实表示，这就是说，存在一个同构，它把代数 A 映到 F 上所有 $(n+1)$方阵的代数中的一个子代数上．如果 A 有恒等元，那么它通过 F 上 n 阶矩阵有一个忠实表示．

令 $e_1, \cdots, e_n$ 是 F 上向量空间 A 的基(亦称为**代数 A 的基** (basis of the algebra))并且假设

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ij}^k e_k, \ \gamma_{ij}^k \in F.$$

F 中的这些元素 γ_{ij}^k 称为**在此基下的代数 A 的结构常数** (structure constants of the algebra)．它们在空间 A 中构成秩为 3 的一个张量．

关于有限维结合代数的主要定理．一个有限维结合代数的 Jacobson 根是幂零的，并且如果基域是可分的，那么它分裂成为一个半直和项(见 **Wedderburn-Мальцев 定理** (Wedderburn-Mal'tsev theorem)) 域上一个半单有限维结合代数可分裂成除环上矩阵代数的一个直和．如果基域 F 是代数闭的，那么一个半单有限维结合代数可分裂成 F 上全矩阵代数的一个直和．有限维单代数恰好是除环上全阵代数 (Wedderburn 定理 (Wedderburn theorem)) 特别地，一个无零因子的有限维结合代数是除环．实域上可除有限维结合代数(即除环)只有如下几种 实域、复数域及四元数体 (Frobenius 定理 (Forbenius theorem))

这里所述的有限维结合代数的许多结构性质在更大的 Noether 环和 Artin 环类中也成立(例如见 **Wedderburn-Artin 定理** (Wedderburn-Artin theorem))

参考文献

[1] Waerden, B L van der , Algebra, 1-2, Springer, 1967-1971(中译本 B L 范德瓦尔登，代数学，科学出版社，Ⅰ，1963，Ⅱ，1976)

[2] Albert, A A , Structure of algebras, Amer Math Soc , 1939(中译本 A A 阿尔贝脱，代数结构，科学出版社，1963)

В Н Латышев 撰

【补注】除环也称为**可除代数** (division algebra)

有限维(结合)代数的表示论在现今 (1988) 是一个非常活跃的数学分支，例如见[A1]-[A2] 以及**箭图** (quiver)和**结合代数的表示** (representation of an associative algebra)

参考文献

[A1] Pierce, R , Associative algebras, Springer, 1980

[A2] Ringel, C , Tame algebras and integral quadratic forms, Springer, 1984 许永华 译 牛凤文 校

有限维表示 [finite-dimensional representation, конечномерное представление]

拓扑群在有限维向量空间中的线性表示（见**拓扑群的表示** (representation of a topological group)）. 有限维表示论是群表示论的最重要和最发展的部分之一．不可约有限维表示是完全不可约的（见**Schur引理** (Schur lemma)），但是算子不可约有限维表示可能是可约的．局部紧群的可测有限维表示和连续有限维表示局部地几乎处处相同．局部紧群的有界有限维表示等价于酉表示．具有忠实有限维表示的局部紧群是一个 Lie 群（[7]）.

有限维酉表示是不可约有限维酉表示的直和．拓扑群 G 的连续同态的核的交和 G 的不可约有限维酉表示的核的交相同．如果这集合只包含 G 的单位元素，则存在一个从 G 到某个紧群的连续单态射，G 称为可嵌入到紧群中的 (imbeddable)，或者称为极大殆周期群 (maximally almost-periodic group)（简记作 MAP 群）. 如果 G 为 MAP 群，则 G 的不可约有限维表示的矩阵元素族分离 G 中点．交换群和紧群是 MAP 群，连通局部紧群是 MAP 群，当且仅当它是连通紧群和 $\mathbf{R}^n$ 的直积（参见[5]）. MAP 群能有无限维不可约酉表示，且不必是型 1 的群　局部紧群 G 的每个连续不可约酉表示是有限维的，当且仅当 G 是形如 $(K\cdot D)\times V$ 的群 H 的有限扩张的投影极限，其中 K, D 和 V 是 H 的闭子群，使得 V 同构于 $\mathbf{R}^n$，K 是紧的，D 是 H 中属于中心的离散群（[8]），一个充分条件为 G 模它的中心之商群是紧的．而且对许多局部紧群（特别对非紧单 Lie 群），仅有的不可约有限维酉表示是平凡表示．

拓扑群的非酉有限维表示只对个别群才能（在等价意义下）分类，特别对群 $\mathbf{R}$ 及 $\mathbf{Z}$，有限维表示的刻画问题是藉助于化矩阵为 Jordan 标准形来解决的，而在 $\mathbf{R}$ 的情形，则与常系数常微分方程理论相联系，这种方程的解空间是 $\mathbf{R}$ 上连续函数空间中关于 $\mathbf{R}$ 的正则表示的有限维不变子空间．还有连通半单 Lie 群的有限维表示也是已知的．确切地说，它们是不可约有限维表示的直和，并可如下描述　设 G 是半单复 Lie 群，U 为极大紧子群，则每个在空间 E 中的 U 的连续不可约酉表示 π 能扩充到　1) G 在 E 上的不可约表示 π^G，其矩阵元为 G 上解析函数，2) G 的不可约表示 $\overline{\pi}^G$，其矩阵元复共轭于 G 上解析函数，π^G 和 $\overline{\pi}^G$ 都由 π 唯一确定，对 U 的任两不可约有限维酉表示 π_1 和 π_2，张量积 $\pi_1^G\otimes\overline{\pi}_2^G$ 仍为 G 的不可约有限维表示，且 G 的每个不可约有限维表示等价于形如 $\pi_1^G\otimes\overline{\pi}_2^G$ 的表示　单连通且连通的复半单 Lie 群的有限维表示还能由它的 Lie 代数的有限维表示的指数映射所给出，也能用 G 的 **Gauss 分解** (Gauss decomposition) $Z_-DZ_+\subset G$ 如下地给出　设 α 为 G 上连续函数，使得 $\alpha(z_-\delta z_+)=\alpha(\delta)$，$\forall z_-\in Z_-$，$\delta\in D$，$z_+\in Z_+$，设函数 $g\to\alpha(gg_0)$，$g_0\in G$ 的线性包 Φ_α 是有限维的，则公式 $[T_\alpha(g_0)f](g)=f(gg_0)$，$g,g_0\in G$，$f\in\Phi_\alpha$，定义了 G 的一个不可约有限维表示，且 G 的所有不可约有限维表示可以用这个办法得到．如果 G 为实半单 Lie 群，它有复形式 G^C，则 G 的每个不可约有限维表示是 G^C 的矩阵元为 G^C 上解析函数的某个唯一的不可约有限维表示在 G 上的限制（所以半单连通 Lie 群的有限维表示论本质上化为紧 Lie 群的有限维表示论）　任意 Lie 群的有限维表示是实解析的，如果 G 是单连通 Lie 群，则在 G 和它的 Lie 代数的有限维表示间有一个一一对应（Lie 群表示与其微分相应，其逆映射使 Lie 代数表示与其指数相应）　然而，任意 Lie 群的有限维表示的分类离完全解决距离甚远 (1988)，甚至在 $\mathbf{R}^n$，$n\geq 2$ 及 $\mathbf{Z}^n$，$n\geq 2$ 这种特殊情形也如此（参见[6]）. 另一方面，连通 Lie 群 G 的不可约有限维表示 π 是已知的（[2]）　它们有形式 $\pi=\chi\otimes\pi_0$，其中 χ 为 G 的一维表示（即，本质上为 Lie 群模它的换位子群所得之交换商群的表示），而 π_0 是 G 模 G 的极大连通可解正规子群所得之半单商群的有限维表示（参见 **Levi-Мальцев 分解** (Levi-Mal'tsev decomposition)）

参考文献

[1] Кириллов, А А , Элементы теории представлений, М , 1972（英译本 Kirillov, A A , Elements of the theory of representations, Springer, 1976）
[2] Желобенко, Д П , Компактные группы Ли и их представления, М , 1970（英译本 Zhelobenko, D P , Compact Lie groups and representations, Amer Math Soc , 1973）
[3] Наймарк, М А , Теория представлений групп, М , 1976（英译本 Naïmark, M A., Theory of group representations, Springer, 1982）
[4] Dixmier, J , C^* algebra, North-Holland, 1977（译自法文）.
[5] Weil, A , l'Integration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, 1940
[6] Гельфанд, И М , Пономарев, В А ,《Функциональный анализ и его применения》, 3 (1969), 4, 81-82
[7] Глушков, В М ,《Успехи матем наук》, **12** (1957), 2, 3-41
[8] Штерн, А И ,《Матем сб》, **90** (1973), 1, 86-95

А И Штерн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Humphreys, J E , Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972

许以超 译　石生明 校

有限域 [finite field, конечное поле]

见 **Galois 域** (Galois field)

有限群 [finite group, конечная группа]

有限多个元素的群．群中元素的数目称为群的阶(order)．历史上，抽象群论的许多概念起源于有限群论

通常说，有限群论的目标是不区别同构的群来描述给定阶的群．这仅是部分地正确，希望对所有的群分类的朴素方法是注定要失败的 例如将相对小的阶，1024阶的所有非同构的群编成表对最好的现代计算机也是一件困难的事，一般地有限 p群（p^n阶，p素数）的分类是不切实际的问题．另一方面，确存在某些极端的群类，它们在群论中起着核心的作用，对它们的分类(列举它们相差到同构）问题或是解决了或是完全合理的目标

例如，对有限 **Abel 群**（Abelian group）有完善的理论，各类有限 p群（正则 p群，幂指数为 p的自由群，极大类的 p群，由生成元及最少数目定义关系给定的群）也允许定性的描述．整可逆矩阵的有限群的描述是重要的分类问题的例子，仅对小阶数矩阵它才被解决．

有限群论形成时期是与 A L Cauchy, J L. Langrange, C. F. Gauss, N. H Abel 及后来的 E Galois 的名字相联系的，此时有限群几乎完全在置换群的形式下进行研究（那时用了不成功的但公认的术语代换群（substitution group)，见**置换群**（permutation group)），这个看法至今仍是富成效的 例如，设抽象有限群 G 可实现为多重传递置换群（即对称群 S_m 的一个适当子群)，则在许多情况下相差一个同构就将 G 唯一决定．单 2 传递群的分类结果构成了有限群论的一个丰富的章节，它是由 C. Jordan 在一百多年前奠定基础的．近年来发展起来的置换群论中的计算机方法已得到承认，这部分地是由于组合论、图论、编码理论的需要以及验证各种猜想的需要．

20 世纪初由 G. Frobenius, W Burnside, I. Schur 及其他人建立起有限群线性表示论（见**有限群的表示**(finite group, representation of a)）给抽象群的研究提供了有力工具，也给类似的 Lie 群表示论及后来的其他代数系的表示论用作为原型．用特征标理论来叙述群及其表示的性质显示了不同代数分支之间的相互联系．有限群在交换环和非零特征的域上的表示也已得到很多深刻的结果，R Brauer 等对此作了深入细致的研究．

有限群扩张是用**群的上同调**（cohomology of groups）理论研究的，后者也具有独立的意义．

有限群的性质在某种程度上是算术性质，它依赖阶 $|G|$ 的典则素因数分解 $|G|=p_1^{n_1}\ \ p_k^{n_k}$，这个几乎明显的思想由 **Sylow 定理**（Sylow theorems)，即 $p_i^{n_i}$ 阶子群的存在性与共轭性定理给出精确的形式．若 $|G|=mn$，其中 n 和 m 是互素的自然数，一般地，n 阶子群，称为 Hall 子群，不一定存在．然而对于可解群这一大类群，Hall 子群存在且完全继承了 Sylow 子群的性质 由 Burnside 发现的阶 p^aq^b（其中 p, q 是素数）的群的可解性是算术性质的典型例子．多年后由 J Thompson 和 W Feit 建立的奇阶群的可解性（见 **Burnside 问题**（Burnside problem,1）的成就给出有限群论的全新的方向 非可解群中对合（二阶元素）的存在性——Feit-Thompson 定理的另一种叙述——以及单群中对合的中心化子性质的表达式形成了有限群论研究的主要方向(Brauer 纲领的实现)．

以许多国家的代数学家的经久的活跃性为标记的 1961－1981 的非凡时期中，数学史上最突出的成就之一 **单有限群**（simple finite group）的分类被完成．遗憾地，这个分类的缺陷是直到目前还不能验证，因为缺乏证明的全文以及所用的推理结构特别复杂．因此提供各部分的更明白的证明的任务还未消退，而且有限单群理论所涉及的理论分支仍然活跃，分类的各种结论都具有意义（例如所有 2 传递群的描述)．虽有许多数学家说这类结论是有条件的或缺乏保证的．

与分类的方向相平行，对有限线性群的不变量和表示的性质进行了有力的研究．特别富有成效的工作是有限 Lie 型单群的全部复特征标的描述工作、这方面作出了实质的进展，其标志是 Deligne-Lustig 的理论，它组合了代数几何学方法和代数群理论．目前它是代数领域的最辉煌的部分之一，是有限群论及其在数学各种极不同分支中的应用之间的交汇点

参考文献

[1] Klein, F , Development of mathematics in 19th century, Math Sci Press, 1979 (译自德文)

[2] Curtis, C W and Reiner, I , Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962

[3] Каргаполов, М И , Мерзляков, Ю И , Основы теории групп, 2 изд , М , 1977 (英译本 Kargapolov, M I and Merzlyakov, Yu I , Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979)

[4] Кострикин, А И , в кн Итоги науки Алгебра 1964, М , 1966, 1－46

[5] Чунихин, С А , Шеметков, Л А , в кн Итоги науки Алгебра Топология Геометрия 1969, М , 1971, 7－70

[6] Мазуров, В Д , в кн Итоги науки и техники Алгебра Топология Геометрия, т 14, М , 1976, 5－56

[7] Speiser, A , Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Birkhauser, 1956

[8] Wielandt, H , Finite permutation groups, Acad Press, 1968 (译自德文)

[9] Huppert, B , Endliche Gruppen, 1, Springer, 1967

[10] Gorenstein, D, Finite groups, Harper & Row, 1968
[11] Issacs, I M, Character theory of finite groups, Acad Press, 1976
[12] Aschbacher, M, Finite group theory, Cambridge Univ Press, 1986
[13] Gorenstein, D, Finite simple groups, an introduction to their classification, Plenum, 1982

А И Кострикин 撰

【补注】 为了了解朴素方法的困难，参见 [A1] 中 64 阶的 267 个群的分类．

有限单群仅在近年才得以分类（正如上面文章所述的，它们包括 Chevalley 群（加上扭型群），次数至少是 5 的交错群和 26 个所谓离散单群，细节参见**单有限群**（simple finite group)). 直到 1982 年的详细评价可参见 [13] 作为结论，所有 2 传递的和秩 3（即所有无序对的集合上有三个轨道）本原的置换群都已确定．参见 [A5] 进一步的结果见 [A6], [A2]

Burnside 关于阶为 p^aq^b 的群的可解性的结果近来被 D M Goldsmidt 和 H. Matsuyama 给出了不利用特征标理论的证明（见**群的特征标**（character of a group) 及 [A4])

参考文献

[A1] Hall, M, The groups of order 10^n ($n\leqslant 6$), MacMillan, 1964
[A2] Kantor, W M, Some consequences of the classification of finite simple groups, *Contempory Math*, **45** (1985), 159－173
[A3] Blackburn, N and Huppert, B, Finite groups, 2－3, Springer, 1981－1982
[A4] Suzuki, M, Group theory, 1－2, Springer, 1986
[A5] Liebeck, M W, The affine permutation groups of rank three, *Proc London Math Soc* (3), **54** (1987), 477－516
[A6] Feit, W, Some consequences of the classification of finite simple groups, in *Proc Symp Pure Math*, Vol 37, *Amer Math Soc*, 1980, 175－181

石生明 译 许以超 校

有限群的表示 [finite group, repersentation of a, конечной группы представление]

有限群 G 到域 K 上向量空间到自身的非奇异线性映射的群的同态 有限群表示论是群表示论中最高度发展的（也是最重要的）部分

有限群在 $\mathbf{C}$ 上的表示论是紧群表示论的一部分，后一理论的全部结果（Peter-Weyl 定理，特征标理论，正交性关系等）对有限群皆有效（且证明更简单）．特别地，有限群在拓扑向量空间中的表示是不可约表示的直和 另一方面，有限群表示论中有些基本结果要用到有限群的特定的性质．例如，对有限群 G，表示的不同的等价类的个数等于 G 的共轭类的数目，代表不同等价类的表示维数的平方和等于 G 的阶 $|G|$，每个不可约表示的维数是 G 的每个 Abel 正规子群的指数的因子（特别地是 $|G|$ 的因子）且不超过 G 的 Abel 子群的指数 设 χ 是有限群的表示 π 的特征标，d 是 π 的维数，则对所有 $s\in G$ 和所有共轭类 $Q\subset G$，$\chi(s)$ 及 $d^{-1}\sum_{s\in Q}\chi(s)$ 是代数整数 群 G 的每个特征标是它的循环子群表示的**诱导表示**（induced representation）的特征标的线性组合且是子群的一维表示的诱导表示的特征标的整线性组合 群 H 称为 p 初等的，如果它是一个阶为素数 p 的幂的群与一个阶与 p 互素的循环群的积，如 H 对某个素数 p 为 p 初等的，则 H 称为初等的．有限群 G 的每个特征标是初等子群 $H\subset G$ 的表示的诱导表示的特征标的整线性组合（Brauer 定理，它可推广到任意特征的域上）．若 G 是超可解的，即它有一个具有循环因子的正规子群的**合成序列**（composition sequence)，则 G 的每个不可约表示是某子群的一维表示的诱导表示．

当域 K 的特征 p 不整除 $|G|$ 时，这理论与 $K=\mathbf{C}$ 的情形仅有少许不同．特别地，有限群的每个有限维表示完全可约，若 K 是代数封闭域，则 K 上不可约表示的不同等价类的数目等于群的共轭类的数目，代表不同等价类的表示的维数的平方和等于群阶．但对于非代数封闭域 K，则可能有 K 上不可约表示，而它在 K 的扩域上可约，域 K 称为不可约表示 π 的分裂域，如果 π 在 K 的每个扩域上不可约，又若 K 是 G 的每个表示的分裂域则称它是 G 的分裂域．如 K 是包含 m 次单位根的特征为零的域或有限域，其中 m 是 G 的元素的阶的最小公倍数，则 K 是 G 的分裂域，有限群在非分裂域上的表示论与给定域添加所有 m 次单位根而得的扩域的 Galois 群有关．特别地，群 G 在有理数域上不可约表示类的数目等于 G 的循环子群共轭类的个数．设 K 是**完满域**（perfect field)，则存在 G 的分裂域，它是 K 上有限扩张 对每个域 K，有限群的任意表示的特征标在 K 的单位根的有限和集合中取值，且对矩阵元和特征标，类似的正交性关系及其推论成立，特别地若对于 G, K 是特征零的分裂域，则特征标为 χ 的表示不可约，当且仅当 $\sum_{g\in G}\chi(g)\chi(g^{-1})=|G|$ 若 K 的特征 p 整除群阶 $|G|$，则 G 在 K 上的群代数是非半单的且存在 G 在 K 上的表示是不完全可约的．

令 k 是特征零的局部域，它对于某个非平凡的离散赋值（见**离散范数**（discrete norm)）是完全的，又令 K 是 k 的特征 p 的有限剩余类域 于是 G 在 K 上的表示称为模表示（modular representations)．模表示论建立了群结构与它的表示的性质之间的联系，比 $\mathbf{C}$ 上表示论所建立的更深刻．当 k 与 K 包含全部 m 次单位根时（因而是分裂域)，这理论较简单些，这时一个类似的正交性关系对矩阵元和特征标成立．令 π 是有限群在 K

上的表示，χ是它的特征标，令Δ是k中本原m次单根，又令δ是它在K的典范同态象，令$s\in G$是阶与p互素的元素，也即p正则元，令G_{reg}是G中p正则元的集合．则$\pi(s)$可以对角化且$\chi(s)=\delta^{a_1}+\cdots+\delta^{a_n}$，$a_1,\cdots,a_n$是某些整数．公式$\eta(s)=\Delta^{a_1}+\cdots+\Delta^{a_n}$定义了一个函数$\eta$ $G_{reg}\to k$，称为π的Brauer特征标（Brauer character），它唯一决定π在K上的合成因子．G在K上**群代数**（group algebra）$K(G)$的不可分解双边直因子称为块，用块的语言，可以对k上不等价的不可约表示，K上不等价不可分解表示，及G在$K(G)$中的左正则表示分解成非零的不可分解表示的直和中的不同构的分量来作出一个分类　这些结果可以推广到k及K是G的非分裂域的情形

参考文献

[1] Curtis，C W and Reiner，I，Representation theory of finite groups and associative algebras，Interscience，1962

[2] Кириллов，А А，Элементы теории представлений，М，1972（英译本.Kirillov，A A，Elements of theory of representations，Springer，1976）

[3] Наймарк，М А，Теория представлений групп，М，1976（英译本 Naimark，M A，Theory of group representations，Springer，1982）

[4] Lang，S，Algebra，Addison-Wesley，1974

[5] Serre，J-P，Linear representation of finite groups，Springer，1977（译自法文）

А И Штерн 撰

【补注】 亦见**紧群的表示**（representation of a compact group），**群的表示**（representation of a group），**无限群的表示**（representation of an infinite group），**表示论**（representation theory）．

关于特征标见**群的特征标**（character of a group），**群表示的特征标**（character of a representation of a group）

表示的可约性见**不可约表示**（irreducible representation）；**可约表示**（reducible representation），文献[1]已被[A1]取代

参考文献

[A1] Curtis，C W and Reiner，I，Methods of representation theory，1－2，Wiley（Interscience），1981－1987

[A2] Feit，W，The representation theory of finite groups，North-Holland，1982

[A3] Huppert，B and Blackburn，N，Finite groups，2－3，Springer，1982

[A4] Benson，D J，Modular representation theory New trends and methods，Springer，1984

石生明 译　许以超 校

有限群概形 [finite group scheme；конечная групповая схема]

有限的且在基概形上平坦的群概形．如果G是概形$(S,\mathcal{O}_S)$上有限群概形，则$G=\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}$，这里$\mathscr{A}$是$\mathcal{O}_S$上有限平坦拟凝聚代数层．以后假定$S$是局部Noether的．在这种情况下，$\mathscr{A}$是局部自由的．如果$S$是连通的，则$\mathscr{A}\otimes_{\mathcal{O}_S}k(s)$在点$s\in S$的剩余类域$k(s)$上的秩与$s$无关，称为有限群概形的秩（rank of the finite group scheme）．设n_G. $G\to G$为把元素$x\in G(T)$映到$x^n\in G(T)$的S概形态射，这里T是任意的S概形．如果G的秩整除n，并且S是约化概形或者G是交换有限群概形（见**交换群概形**（commutative group scheme）），则态射n_G是零映射．每一个秩为p（p为素数）的有限群概形是交换的（[2]）

如果G_1是交换有限群概形G的子群，则可以构造有限群概形G/G_1，而且G的秩等于G_1的秩与G/G_1的秩之积．

例　1）设$G=G_{mS}$是乘法群概形(或S上Abel概形$\mathscr{A}$)，则Ker n_G是秩为$|n|$(或$|n|^{2\dim\mathscr{A}}$)的有限群概形．

2）设S为素域$\mathbf{F}_p$上的概形，F $G_{aS}\to G_{aS}$为加法群概形G_{aS}的Frobenius同态，则Ker$F$是秩为p的有限群概形．

3）阶为n的抽象有限群Γ的常数群概形Γ_S是秩为n的有限群概形．

在G的秩是素数的情况下，任意基概形上的有限群概形的分类已经给出（见[2]）．当G是交换有限群概形并且S是特征p的域的谱时，有限群概形的分类是众所周知的（见[1]，[3]，[7]）．

参考文献

[1] Манин，Ю И，《Успехи матем наук》，**18**（1963），6，3－90

[2] Tate，J and Oort，F，Group schemes of prime order，*Ann Sci Ecole Norm Sup*，**3**（1970），1－21

[3] Demazure，M and Gabriel，P，Groupes algébriques，1，Masson，1970

[4] Oort，F，Commutative group schemes，Springer，1966

[5] Shatz，S，Cohomology of Artinian group schemes over local fields，*Ann of Math*，**79**（1964），411－449

[6] Mazur，B，Notes on étale cohomology of number fields，*Ann Sci Ecole Norm Sup*，**6**（1973），521－556

[7] Kraft，H，Kommutative algebraische Gruppen und Ringe，Springer，1975

И В Долгачев 撰

【补注】 关于[A1]中结果的一些引人注目的应用，见[A2]，[A3]

参考文献

[A1] Raynaud，M，Schémas en groupes de type $(p,\cdots,p)$，*Bull Soc Math France*，**102**（1974），241－280

[A2] Fontaine，J-M，Il n'y a pas de variété abélienne sur **Z**，*Invent Math*，**81**（1985），515－538

[A3] Faltings，G，Endlichkeitssatze für abelsche Varietaten über Zahlkorpern，*Invent Math*，**73**（1983），349－366 Erratum. *Invent Math*，**75**（1984），381

[A4] Cornell，G，Arithmetic geometry，Springer，1986

蔡金星 译

有限增量公式 [**finite-increments formula, конечных приращений формула**], Lagrange 有限增量公式(Lagrange finite-increments formula)

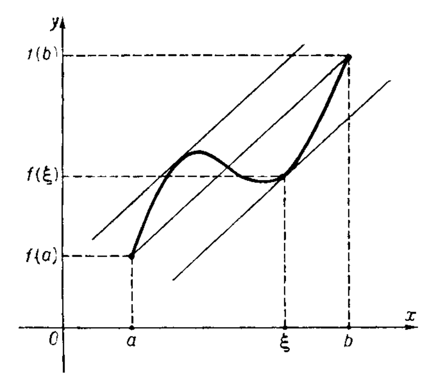
通过函数在一个区间的某中间点上的导数值来表示它在这个区间上的增量的公式. 如果函数 $f(x)$ 在实数轴的一个区间 $[a, b]$ 上是连续的, 在区间的内点上是可微的, 则有

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ a<\xi<b$$

有限增量公式也可写成下列形式

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\ 0<\theta<1$$

有限增量公式的几何意义是 如果给定函数 $f(x)$ 的图形的端点为 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 的弦, 则存在一点 ξ, $a<\xi<b$, 使得函数 $f(x)$ 的图形在点 $(\xi, f(\xi))$ 处的切线平行于这个弦(见图).



有限增量公式可以推广到多变量函数: 如果函数 $f(x)$ 在 n 维 Euclid 空间中的凸区域 G 的每一点上是可微的, 则对于每一对点 $x=(x_1, \quad, x_n)\in G$, $x+\Delta x=(x_1+\Delta x_1, \quad, x_n+\Delta x_n)\in G$, 存在处于连接点 x 和 $x+\Delta x$ 的线段上的一点 $\xi=(\xi_1, \quad, \xi_n)$, 使得

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\xi)}{\partial x_i}\Delta x_i,$$

$$\xi_i=x_i+\theta\Delta x_i,\ 0<\theta<1,\ i=1,\cdot\ ,n$$

Л Д Кудрявцев 撰

【补注】 这个公式通常称为中值定理(mean-value theorem)(关于导数的). 它仅对实值函数成立, 例如考虑 $f(x)=e^{ix}$

张鸿林 译

有限数学 [**finite mathematics, конечная математика**]

研究数学和应用中关于有限特征结构性质的数学分支 这些结构包括**有限群**(finite group), **有限图**(graph), 也包括信息处理的一些数学模型, **有限自动机**(automation, finite), **Turing 机**(Turing machine)等等. 有时, 有限数学的主题可扩展到任意离散结构, 这就导致离散数学(discrete mathematics), 并将其与有限数学同等看待. 一些**代数系统**(algebraic system), 无限图, 计算模式的确定形式, 胞腔自动机等等都可看作属于这领域 术语**离散分析**(discrete analysis)有时看作是概念"有限数学"和"离散数学"的同义语

眭跃飞 译

有限 Riemann 曲面 [**finite Riemann surface, конечная Риманова поверхность**]

具有有限个非退化边界分支的有限亏格(见**曲面的亏格**(genus of a surface))的 **Riemann 曲面**(Riemann surface). 有限 Riemann 曲面可嵌入于一个闭 Riemann 曲面——其双层(见 **Riemann 曲面的双层**(double of a Riemann surface))之中

参考文献

[1] Schiffer, M, Spencer, D C, Functionals of finite Riemann surfaces, Princeton Univ Press, 1954

Е Д Соломенцев 撰

【补注】 不应把有限 Riemann 曲面概念与有限型 Riemann 曲面(Riemann surface of finite type)混同 一个 Riemann 曲面 M 是有限型的, 如果它能嵌入到一个紧 Riemann 曲面 $\widetilde{M}$ 中, 使得 $\widetilde{M}\setminus M$ 只由有限个点组成 亦见 **Riemann 曲面**(Riemann surfaces), **Riemann 曲面的分类**(Riemann surfaces, classification of)以及 **Riemann 曲面的双层**(double of a Riemann surface)(其参考文献)

沈永欢 译

有限到一的映射 [**finite-to-one mapping, конечнократное отображение**]

一个映射 $f\ X\to Y$, 使得每个点 $y\in Y$ 的原象 $f^{-1}(y)$ 中点的个数 n_y 是有限数. 如果对所有的 y 而言, $n_y=n$ 都相同, 则 f 称为 n 到一的映射(n-to-one mapping)

在可微情况下, 有限到一的映射这个概念相当于有限映射的概念. 可微流形间的可微映射 $f\ X\to Y$ 称为在点 $x\in X$ 处是有限的(finite), 如果 f 在 x 处的**局部环**(local ring) $R_f(x)$ 的维数是有限的. 所有这种映射都是 x 的紧子集上的有限到一的映射, 此外, 存在 x 的一个开邻域 U, 使得 $f^{-1}(f(x))\cap U$ 是单点集, 数 $k=\dim R_f(x)$ 可以表示 x 作为方程 $f(y)=x$ 的根的重数, 存在 x 的一个邻域 V, 使得对于每个充分接近 x 的 y 而言, $f^{-1}(y)\cap V$ 至多有 k 个点

如果 $\dim X\leqslant\dim Y$, 则所有的有限映射构成空间 $C^\infty(X, Y)$ 中的**脱殊集**(generic set), 此外, 非有限映射集在该空间中的余维数是无穷大(Tougeron 定理(Tougeron theorem))

参考文献

[1] Архангельский, А В, Пономарев, В И, Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М, 1974(英译本 Arkhangel'skiĭ, A V and Ponomarev, V I, Fundamentals of general topology problems and exercises, Reidel, 1984)

[2] Golubitsky M and Guillemin, V, Stable mappings and their singularities, Springer, 1973

М И Войцеховский 撰

【补注】 设f $X\to Y$是微分流形间的映射. 对于$x\in X$, 设C_x^∞ 表示在x处的光滑函数$X\to \mathbf{R}$ 的芽构成的环. 这是一个局部环, 其极大理想m_x由在x处为零的所有芽组成. 如果$y=f(x)$, 则通过拉回, f导出环同态f^* $C_y^\infty\to C_x^\infty$ 于是, 映射f的局部环(local ring of the mapping)就定义为商环$R_f(x)=C_x^\infty/C_x^\infty f^*\mathrm{m}_y$

如果f, g $(X, x)\to(Y, y)$是稳定映射芽(见**稳定映射**(stable mapping)), 则f和g等价的充要条件是 $R_f(x)$与$R_g(x)$作为环是同构的(Mather定理(Mather theorem)) 这里映射芽f, g等价(equivalence of germs of mappings)的意思是说, 存在微分同胚芽h $(X, x)\to(X, x)$和k $(Y, y)\to(Y, y)$, 使得$g=kfh^{-1}$(在x附近)

参考文献

[A1] Arnold, V I, Gusein-Zade, S M [S M Khusein-Zade] and Varchenko, A N, Singularities of differentiable maps, Birkhauser, 1985(译自俄文)

胡师度、白苏华 译

有限决定函数 [finitely-determined function, ограниченно-детерминированная функция]

描述**有限自动机**(automaton, finite)动作的字典函数 (函数称为字典的(lexical), 如果它的定义域和值域是字或超字集)

假如A是字母表, A^*表示A上所有字的集合, A^0表示A上所有字集或超字集, 将A^0映射到B^0的函数f, 其中A, B是有限字母表, 称为决定函数(determined function), 如果它满足下列两个条件

1) 对每个A^0中的α, $f(\alpha)$的长度等于α的长度, 并且

2) 如果α是长度为l的字, $\alpha_1=\alpha\alpha'$, $\alpha_2=\alpha\alpha''$, 其中$\alpha', \alpha''\in A^0$, 则$f(\alpha_1)$和$f(\alpha_2)$有长度为l的相同前节.

如果决定函数f定义在A的所有超字集A^∞上, 则由条件1)和2), 函数可以扩展到集合A^*上对长度为l的任意字α, $f(\alpha)$与$f(\alpha\beta)$有长度为l的相同前节, 其中β为A上的任意超字. 这样, 每个决定函数f满足条件

3) 对A^*中任意字α和A^0中任意字β, $f(\alpha, \beta)=f(\alpha)f_\alpha(\beta)$, 其中$f_\alpha$是由字$\alpha$唯一确定的字集$A^0$上的决定函数.

函数f_α称为f的剩余函数(remainder function) 条件3)蕴涵了每个决定函数f定义了集合A^*上的一个等价关系R $\alpha R\beta$当且仅当$f_\alpha=f_\beta$ 这个关系的秩, 或两两不同剩余函数的极大个数, 称为决定函数的权(weight of the determined function). 如果一个决定函数的权是有限的, 则这个函数称为有限决定函数(finitely-determined function) 这个概念也可扩展到$m\geq 2$个变量的函数上, 如果m个分别为字母表A_1, , A_m上长度相同的字(或超字)集合看作是字母表$A_1\times \quad \times A_m$——$A_1$, , A_m的Descartes积——上的一个字(超字) 这样可以考虑有几个出路的有限决定函数, 即它的值分别是字母表B_1, , B_k上的k个字或超字的集合 所有有限决定函数类与**有限自动机**(automaton, finite)可计算的函数类相同, 因此表示有限自动机的方法可以用来表示有限决定函数. 如规范方程(见**自动机的描述方法**(automata, methods of specification of)) 特别地, 这就蕴涵了具有相同字母表$A_1=\quad=A_m=B$的有限决定函数类在超位下封闭. 计算权为n的有限决定函数f的极小状态数的自动机$\mathfrak{A}(A, S, B, \varphi, \psi, s_1,)$包含$n$个状态且能如下构造出 设$\alpha_1$, , α_n是关系R的等价类的任意代表. 每个类$R(\alpha_i)$, $i=1$, , n, 对应于自动机$\mathfrak{A}$的状态s_i, 转换函数φ和输出函数ψ由下列条件定义为 如果$a\in A$且$1\leqslant i\leqslant n$, 则$\varphi(s_i, a)=s_j$, 状态s_j对应于类$R(\alpha_i a)$, $\psi(s_i, a)=f_{\alpha_i}(a)$ 初始状态取为对应于类$R(\Lambda)$的状态, 其中Λ是空字

参考文献

[1] Kleene, S C, Representation of events in nerve nets and finite automata, in Automata studies, Vol 34, Princeton Univ Press, 1956, 3-41

[2] Яблонский, С В, Введение в дискретную математику, М, 1979

Ю И Янов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ginsburg, S, The mathematical theory of context-free languages, MacGraw-Hill, 1965

[A2] Hopcroft, J E and Ullman, J D, Introduction to automata theory, languages and computation, Addison-Wesley, 1979

眭跃飞 译 卢景波 校

有限生成群 [finitely-generated group, конечно порожденная группа]

具有有限生成集$M=\{a_1, \quad, a_d\}$的群G 于是它由所有的乘积$a_{i_1}^{\varepsilon_1}\quad a_{i_n}^{\varepsilon_n}(i_k\in\{1, \quad, d\}, \varepsilon_k=\pm 1)$组成 如果$M$有$d$个元素, 则$G$称为$d$生成元群($d$-generator group) 有限生成群的每个生成集皆包含一个有限生成集. 1生成元群称为循环群(cyclic group), 它们或

同构于整数加法群 $\mathbf{Z}$ 或同构于整数模 n 的剩余类加法群 $\mathbf{Z}_n(n=1,2,\ \ )$

2生成元群的同构类的集合有连续统的基数．每个可数群可同构地被嵌入到某个2生成元群中 嵌入群可选成单群，且它由一个二阶元和一个三阶元生成 每个可数 n **可解群** (solvable group) 可被嵌入到某2生成元 $(n+2)$ 可解群中．有限生成群的有限指数 n 的每个子群是有限生成的．有限生成群仅有有限多个给定有限指数的子群．有限生成群可以是无限群和周期群，实际上对每个自然数 $d\geqslant 2$ 和每个充分大的奇数 n 都存在幂指数为 n 的无限 d 生成元群 (见 **Burnside 问题** (Burnside problem))．有限生成群可能同构于自己的真商群，这时称它为非 **Hopf 群** (Hopf group) 存在可解的非 Hopf 有限生成群 有限生成的**剩余有限群** (residually-finite group) 是 Hopf 群 域上矩阵的有限生成群是剩余有限群．存在有限生成的，甚至有限表现的 (见**有限表现群** (finitely-presented group)) 无限单群．

参考文献

[1] Каргаполов, М И , Мерзляков, Ю И , Основы теории групп, 2 изд , М , 1977 (英译本 Kargapolov, M I and Merzljakov, J I, Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979) Ю И Мерзляков 撰

【补注】 参考文献亦见**有限表现群** (finitely-presented group) 石生明 译 许以超 校

有限表现群 [**finitely-presented group**, **конечно определенная группа**]

有限多个生成元上具有有限多个定义关系的群．相差到同构，有可数多个这样的群 有限表现群的任一有限生成集上的每个定义关系集中包含一个定义关系的有限集

参考文献

[1] Курош, А Г , Теория групп, 3 изд , М , 1967 (英译本 Kurosh, A G , The theory of groups, 1-2, Chelsea, 1955-1956) О А Иванова 撰

【补注】 有限表现群同构于商群 $F/N(R)$，其中 F 是有限秩的**自由群** (free group)，而 $N(R)$ 是 F 的包含给定有限子集 (关系集) R 的最小**正规子群** (normal subgroup)

关于群表现的一些标准文献见 [A1]-[A4]

参考文献

[A1] Coxeter, H S M and Moser, W O J , Generators and relations for discrete groups, Springer, 1984

[A2] Johnson, D L , Presentations of groups, Cambridge Univ Press, 1988

[A3] Lyndon, R C and Schupp, P E , Combinatorial group theory, Springer, 1977

[A4] Magnus, W , Karras, A and Solitar, D , Combinatorial group theory presentations of groups in terms of generators and relations, Interscience, 1966

石生明 译 许以超 校

有限性定理 [**finiteness theorems**, **конечности теоремы**]

1)代数几何学中的有限性定理是关于代数几何学中各种对象 (上同调空间、代数簇、概形、纤维化等) 的断言，表明这些对象依赖于有限个参数，或者甚至构成有限集合．

有限性定理的第一个领域涉及凝聚代数层的上同调空间．基本定理表明，如果簇是正常的 (当 $k=\mathbf{C}$ 时，这个性质等价于紧性)，则凝聚代数层的上同调空间在基域 k 上是有限维的 (见 [2]) 在概形理论中得到了这个定理的进一步推广 其中之一是，在概形的真态射下，**凝聚层** (coherent sheaf) 的直接象是凝聚层 (见 [3], [4]) 另一个推广与反常簇的上同调的研究有关 结论是，如果所讨论的簇 X 是从一正常簇中切除某子簇 Y 后得到的簇，则可以估计当上同调群为有限维时的维数 这些估计取决于 Y 的余维数及其奇点的性质 (见 [5], [6])．对于艾达尔上同调，相应的结果是已知的

有限性定理的另一领域涉及子概形，更一般地，涉及在取定正常概形上的凝聚层 这些对象可以在很一般的情形下用 **Hilbert 概形** (Hilbert scheme) (或在可逆层的情况下，用 **Picard 概形** (Picard scheme)) 来参数化 这些有限性定理的最一般形式断定，如果限制于具有相同 **Hilbert 多项式** (Hilbert polynomial) 的子概形或层，那么这样的概形是拟射影的 ([4])．其特殊情形是射影空间中给定次数的代数子簇依赖于有限个参数这一事实，以及断言 **Néron-Severi 群** (Néron-Severi group) 具有有限基的定理

在 Diophantus 几何学中出现的有限性问题的广阔领域中，这些定理找到了应用 其中有，定义在整体域上的代数簇的有理点的集合的有限性问题 (**Mordell 猜想** (Mordell conjecture) 的高维类似)，关于定义在给定整体域上具有固定退化的代数曲线条数的有限性的 Шафаревич 猜想，关于代数群的有理点的群的有限生成性问题

参考文献

[1] Serre, J-P, Sur la cohomologie des varietes algebriques, *J Math Pures Appl*, **36** (1957), 5, 1-16

[2] Serre, J-P, Faisceaux algébriques coherents, *Ann of Math*, **61** (1955), 197-238

[3] Grothendieck, A , Eléments de géométrie algebrique III, *Publ Math IHES*, **17** (1963), Chapt 3, Part 2

[4] Grothendieck, A , Fondements de la geometrie algébrique, Secr Math , 1962 Extracts Sem Bourbaki, 1957-1962

[5] Hartshorne, R , Ample subvarieties of algebraic varieties, Springer, 1970

[6] Ogus, A., Local cohomological dimension of algebraic varieties, *Ann of Math*, **98** (1973), 2, 327－365
[7] Шафаревич, И Р, Algebraic number fields, in Proc internat congress mathematicians Stockholm, 1962, Inst Mittag-Leffler, 1962, 163－176
[8] Аракелов, С Ю,《Изв АН СССР Сер матем》, **35** (1971), 6, 1269－1293　　А Н Паршин 撰

【补注】 目前一个重大的进展是G Faltings关于Mordell猜想和Шафаревич猜想（在数域的情况）的证明（[A1]） 在此之前，С Ю Аракелов解决了函数域的情况（[8]）．对于Faltings工作的简述，见[A3] 对于代数闭链的有限性结果，见[A4]．

参考文献

[A1] Faltings, G, Endlichkeitssatze für abelsche Varietaten über Zahlkorpern, *Invent Math*, **73** (1983), 349－366
[A2] Hartshorne, R, Algebraic geometry, Springer, 1977
[A3] Mazur, B, On some of the mathematical contributions of Gerd Faltings, in Proc internat congress mathematicians Berkeley, 1986, Amer Math Soc, 1987, 7－12
[A4] Kleiman, S, Finiteness theorem for algebraic cycles, in Proc internat congress mathematicians Nice, 1970, Vol 1, Gauthier-Villars, 1971, 445－449

2）解析空间理论中的有限性定理是对取值于**凝聚解析层**（coherent analytic sheaf）的上同调群的维数的有限性判别准则．这方面第一个一般的定理是Cartan-Serre有限性定理（Cartan-Serre finiteness theorem）（[1]） 如果X是紧复空间，$\mathscr{F}$是X上凝聚解析层，则对于所有$k\geqslant 0$，上同调空间$H^k(X,\mathscr{F})$是有限维Hausdorff空间．这个定理在凸-凹空间的情况下的推广是（[2],[3]） 如果X是严格(p,q)凸-凹空间(见**伪凸与伪凹**（pseudo-convex and pseudo-concave)），且$\mathscr{F}$是X上凝聚解析层，则对于$p\leqslant k\leqslant \mathrm{prof}\mathscr{F}-q-1$，$H^k(X,\mathscr{F})$是有限维的，对于$p\leqslant k\leqslant \mathrm{prof}\mathscr{F}-q$，$H^k(X,\mathscr{F})$是Hausdorff的，同时，对于$q+1\leqslant k\leqslant \mathrm{prof}\mathscr{F}-p$，$H_c^k(X,\mathscr{F})$是有限维的，对于$q+1\leqslant k\leqslant \mathrm{prof}\mathscr{F}-p+1$，$H_c^k(X,\mathscr{F})$是Hausdorff的

上述定理在相对情况下的推广也是有限性定理，即关于凝聚层的直接象的凝聚性判别准则．下述Grauert定理（Grauert theorem）（[4],[5]）是Cartan-Serre定理的推广 如果π $X\to Y$是复解析空间之间的真解析映射，$\mathscr{F}$是X上的凝聚解析层，则对于所有$k\geqslant 0$，直接象层$R^k\pi_*\mathscr{F}$是凝聚的 对于真映射π，这个性质也是充分的．对于严格p凸和严格q凹映射，证明了类似的有限性定理（见[6]）．对于非Archimedes赋值域上的**刚性解析空间**（rigid analytic space），也证明了类似于Grauert定理的结论（[7]）．

与有限性定理紧密相关的定理是关于对各类复空间上半纯函数域的超越次数的估计（见**Siegel定理**（Siegel theorem））．Grauert定理的简单推论是下面的Remmert定理（Remmert theorem）（[4]）．如果$\pi.X\to Y$是复空间的真解析映射，Z是X中的解析集，则$\pi(Z)$是Y中的解析集 这个定理能推广到刚性空间的情况（[7]）．

参考文献

[1] Cartan, H and Serre, J-P, Une théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes, *C R Acad Sci Paris*, **237** (1953), 128－130
[2] Andreotti, A and Grauert, G, Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, *Bull Soc Math France*, **90** (1962), 193－259
[3] Ramis, J P, Théorèmes de séparation et de finitude pour l'homologie et la cohomologie des espaces (p,q)-convexes-concaves, *Ann Scuola Norm Sup Pisa Sci Fis Mat Ser* 3, **27** (1973), 4, 933－997
[4] Grauert, G, Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulraume Komplexer Strukturen, *Publ Math IHES*, **5** (1960)
[5] Bănică, C and Stănăsilă, O, Algebraic methods in the global theory of complex spaces, Wiley, 1976（译自罗马尼亚文）
[6] Онищик, А Л, Итоги науки Алгебра Топология Геометрия, т 15 М, 1977, 93－171
[7] Kiehl, R, Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, *Invent Math*, **2** (1966), 3, 191－214　　А Л Онищик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Grauert, H and Remmert, R, Coherent analytic sheaves, Springer, 1984（译自德文）　　蔡金星 译

有限主义［finitism，финитизм］

由D Hilbert提出的方法论观点之一，关于数学中讨论的对象、方法哪些可看作是绝对可靠的．有限主义的主要条件是．

1）讨论的对象是**构造对象**（constructive object），例如，自然数，符号语言中的公式及其有限集合

2）可应用的运算是唯一可定义的，且原则上是可执行的（是可计算的）．

3）不考虑任何无穷集合的所有对象x的集合，一般判断$A(x)$是关于在每个特别情况下能确定的任何对象x的命题．

4）断言存在一个对象x具有性质$A(x)$意味着可以构造出一个具体的这样的对象，或者给出构造这个对象的一个方法

有限主义在逻辑上的限制近似于直觉主义 但整体看，有限观点更加严格 满足条件1）－4）的讨论没有超出**直觉主义**（intuitionism）算术的范围．

实际数学理论，在其形式化后（见**公理方法**（axiomatic method））成为构造对象（可构造对象集合）．在Hilbert及其追随者们的研究范围内．有限主义在研

究这种形式化的理论中是必要的；只有那些被有限方法证明的理论性质才看作是可靠的．**Godel 不完全性定理**（Godel incompleteness theorem）表明作为数学基础，有限方法是不充分的．这就导致需要在证明论中可以使用超出有限主义范围外的方法．

参考文献

[1] Kleene, S C, Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951（中译本 S C 克林，元数学导论，科学出版社，1985）

[2] Fraenkel, A A and Bar-Hillel, Y, Foundations of set theory, North-Holland, 1958

[3] Hilbert, D and Bernays, P, Grundlagen der Mathematik, 1-2, Springer, 1968－1970

С Н Артемов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Troelstra, A S, Aspects of constructive mathematics, in J Barwise (ed) Handbook of Mathematical Logic, North-Holland, 1977, 973－1052

眭跃飞 译

Finsler 几何学 [Finsler geometry, Финслерова геометрия]

Riemann 几何学（Riemannian geometry）的一种度量推广，其中向量长度的一般定义不必像 Riemann 几何那样以二次形式平方根的形状来给出．这种推广首先是在 P Finsler（[1]）的论文中加以发展的．

Finsler 几何学研究的对象是一个具有局部坐标系 x^i 的实 N 维微分流形 M（至少是 C^3 阶的），其上给定了一个关于 $2N$ 个独立变量 x^i 和 y^i 的实的非负数量函数 $F(x,y)$，这里 y^i 是在点 x^i 与 M 相切的反变向量的分量　假设 $F(x,y)$ 关于 x^i 属于 C^3 阶，并设在 M 的每个切空间 M_x 中存在区域 M_x^*，使得第一，它是锥状的（在这种意义下　若在某点 x^i 的切向量 y^i 属于 M_x^*，则在同一点 x^i 与 y^i 共线的其他切向量也属于 M_x^*），第二，$F(x,y)$ 关于 $y^i \in M_x^*$ 属于 C^5 阶．非零向量 $y^i \in M_x^*$ 称为允许的向量　进而假设对每点 x^i 和每个允许的 y^i

$$F(x,y)>0,\quad \det\frac{\partial^2 F^2(x,y)}{\partial y^i \partial y^j} \neq 0,$$

并设 $F(x,y)$ 关于 y^i 是正一次齐次的，即对每个 $k>0$ 和一切 x^i 及允许的 y^i 有 $F(x,ky)=kF(x,y)$．在这些条件下，三元组（M, M_x^*, $F(x,y)$）称为 Finsler 空间 (Finsler space)，而 F 称为 Finsler 度量（Finsler metric）．$F(x,y)$ 的值可解释为在 x^i 切向量 y^i 的长度．

若一个 Finsler 空间容有坐标系 x^i 使得 F 与那些 x 无关，则它称为 Minkowski 空间（Minkowski space）后者与 Finsler 空间的关系就像 Euclid 空间与 Riemann 空间的关系一样．若对 F 加上条件以保证二次形式 $z^i z^j \{\partial^2 F^2(x,y)/\partial y^i \partial y^j\}$ 关于一切 x^i 和非零的 y^i 是正定的，则称这样的 Finsler 空间是正定的（positive definite）

从中心仿射空间（切空间 M_x 就是这种空间）的不变概念的观点来看，对 F 所加的关于 y^i 的齐性条件具有清晰的几何意义．也就是，M_x^* 中任两共线向量 y_1^i 和 $y_2^i=ky_1^i$ 的长度之比可按如下方式不变地确定：$y_1^1/y_2^1 = y_1^2/y_2^2 = \cdots = k$，它不包含任何度量函数　这样，对 F 所加的齐性条件是使长度的 Finsler 定义与特殊的中心仿射定义相一致的条件，Finsler 度量仅在比较不共线向量的长度时是必要的．

张量

$$g_{ij}=\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 F^2(x,y)}{\partial y^i \partial y^j}$$

称为 Finsler 度量张量（Finsler metric tensor）．由齐次函数的 Euler 定理，

$$F^2(x,y)=g_{ij}(x,y)y^i y^j,\quad y_i=\frac{1}{2}\ \frac{\partial F^2(x,y)}{\partial y^i},$$

其中按定义 $y_i=g_{ij}(x,y)y^j$　这些公式是它们的 Riemann 类似公式的直接推广，并且正是从齐性条件推得．当假设度量张量与 y^i 无关时，Finsler 几何就化为 Riemann 几何．后面的条件可写成这样形式　$C_{ijk}=0$，其中

$$C_{ijk}(x,y)=\frac{1}{2}\ \frac{\partial g_{ij}(x,y)}{\partial y^k} \equiv \frac{1}{4}\ \frac{\partial^3 F^2(x,y)}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k}$$

称为 Cartan 挠率张量（Cartan torsion tensor）．它满足恒等式 $y^i C_{ijk}=0$．一切 Finsler 的关系式都可命 $C_{ijk}=0$ 而变成 Riemann 的类似式．由 Finsler 度量张量按 Riemann 几何的相同公式作出的 Christoffel 符号 $\gamma_{ij}^k(x,y)$ 不遵循联络系数的变换规律　然而，我们可以从 Finsler 度量张量的一阶导数构造一个联络的系数，使得（像 Riemann 几何学中那样）度量张量的共变导数为零．它们称为 Cartan 联络系数（Cartan connection coefficients）并且有如下形式

$$\Gamma_{ij}^k(x,y)=\gamma_{ij}^k - C_{in}^k G_j^n - C_{jn}^k G_i^n + C_{ijn}G^{kn},$$

其中

$$G_j^n=-2C_{jm}^n G^m + y^m \gamma_{mj}^n,\quad 2G^m=y^n y^k \gamma_{nk}^m.$$

从各种共变导数的换位运算就可求得 Finsler 曲率张量的表达式．

在每个切空间 M_x 中 Finsler 度量确定了一个 $N-1$ 维超曲面 $F(x,y)=1$（其中 x^i 看成固定的，y^i 看成变动的），它称为标形（indicatrix）　标形是由在点 x^i 的单位切向量 $l^i=y^i/F(x,y)$ 的端点作成的．因为 Finsler 度量是齐次函数，故在 x^i 的标形唯一地决定了在该点 x^i 的 $F(x,y)$ 的形状，由此显然可见标形概念的基本意义　在 Riemann 情形下，标形是一个球面．一般来说，

Finsler空间的标形可能是一个形状相当一般的曲面．Finsler度量张量在标形上诱导了一个Riemann度量，使之变成Riemann空间　对于每个固定的x，Finsler度量张量关于变量y是Riemann的．一对（M_x^*，$g_{ij}(x, y)$），其中x^i固定而y^i是变量，称为在x的切Riemann空间（tangent Riemannian space）（在Riemann几何中这是Euclid空间），这个空间的Riemann曲率张量化为表达式$C^i_{mh}C^m_{ik}-C^j_{mk}C^m_{ih}$　标形是嵌入切Riemann空间的超曲面．Finsler度量函数的最直接例子是f次形式的f次方根．

设$f(x)$和$r^A(x)$是C^3阶的实的数量函数，它们在每点x满足条件　$f\neq 0$，1或2，$r^A\neq 0$，并且设$S^A_i(x)$是N个C^3阶的线性独立的实共变向量场，$A=1$，·，N．那么，对于

$$F_1(x, y)=\left[\sum_{A=1}^{N} r^A(x)(S^A_m(x)y^m)^{f(x)}\right]^{1/f(x)},$$

标形的曲率是常数且等于$f^2/4(f-1)$，而对于

$$F_2(x, y)=\prod_{A=1}^{N}(S^A_m(x)y^m)^{r^A(x)},\quad \sum_{A=1}^{N} r^A(x)=1,$$

标形的曲率张量是零张量．当且仅当$C_i=0$，这里$C_i=C^n_{in}$，Finsler度量张量的行列式才与y^i无关．若Finsler空间是正定的并且标形是凸曲面，则$C_i\neq 0$　函数F_2是使$C_i=0$的Finsler度量的仅有的已知的例子（1984）(不计真正的Riemann情况）．

通过假定示性的Finsler张量有某些特殊形状，便可选到特殊类型的Finsler空间　若底流形M容有一个整体的标架场$S^A_i(x)$，并且$F^*(y^A)$是某个Minkowski空间的度量函数，则可在M上引入Finsler度量

$$F(x^n, y^i)=F^*(S^A_i(x^n)y^i).$$

在这种情形下Finsler空间和度量被称为1形式（1-form）．当f和r^A为常数时，函数F_1和F_2都是1形式．从变量x^n进入度量的方式的观点来看，1形式空间可能是最简单的空间　若一个Finsler空间M不是Riemann空间，$N>2$，且它的Cartan挠率张量可表示成下列形状

$$C_{ijm}=\frac{1}{N+1}(h_{ij}C_m+h_{jm}C_i+h_{mi}C_j),$$

其中$h_{ij}=g_{ij}-l_il_j$，则M称为C可约的（C-reducible）C可约空间的度量只有两种类型　Kropina度量$F_3=\alpha^2/\beta$或Randers度量$F_4=\alpha+\beta$，其中$\beta=b_i(x)y^i$，$\alpha^2=a_{ij}y^iy^j$，$b_i(x)$是共变向量场，$a_{ij}(x)$是Riemann度量张量．例如，在引力场或电磁场中测试电荷的Lagrange函数是Randers度量．对应于F_2的Finsler度量张量具有符号差（+－－　），这对于发展广义相对论的Finsler推广是有裨益的，这种符号差在选取F_1形式的度量张量时也会遇到　这种推广可建立在Finsler空间的振荡Riemann空间概念的基础上，据此Finsler度量张量使每个向量场$y^i(x)$伴随有所谓振荡Riemann度量张量$g_{mn}(x, y(x))$．选取仅与x^i有关的张量场$z^A(x)$，由此根据$F(x, y)=v(z^A(x), y)$可构作Finsler度量，其中v是标量函数，可把z^A看作真引力场变量　时空的Finsler几何化也使它能发展具有各种内部对称性的物理场理论，这依赖于保持Finsler度量不变的切向量y^i的变换群概念

参考文献

[1] Finsler, P, Ueber Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, Gottingen, 1918, Dissertation

[2] Rund, H, The differential geometry of Finsler spaces, Springer, 1959

[3] Asanov, G S, Finslerian Extension of General Relativity, Dordrecht, 1984（英译本　Asanov, G S, Finsler geometry, relativity and gauge theoreies, Reidel, 1985）.

[4] Matsumoto, M, Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces, Kaiseisha Press, 1986

Г С Асанов 撰

【译注】 Finsler度量的概念可以追溯到B Riemann（[B1]），虽然Riemann自己并没有发展这种理论．E Cartan的研究（[B2]）对Finsler微分几何学的发展具有重大意义．文献[2]是对Finsler空间局部微分几何学的很好综述　近年来，Finsler空间的整体微分几何学也得到了重视和发展，见[B3]，[B4]．

参考文献

[B1] Riemann, B, Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zuGrunde liegen, in Das Kontinuum und 3 Monographien, Chelsea, reprint, 1973

[B2] Cartan, E, Les espaces de Finsler, Actualites, no 79, Paris, Hermann, 1934

[B3] Chern, S S, On Finsler geometry, Comptes Rendu (to appear).

[B4] Bao, D and Chern, S S, On a notable connection in Finsler geometry, preprint

沈一兵 译

Finsler度量［**Finsler metric**，**Финслерова метрика**］

空间的一种度量，它由一个实的正定的凸函数$F(x, y)$给定，其中F是点x的坐标和在x的反变向量y的分量的函数．具备Finsler度量的空间称为Finsler空间（Finsler space），而Finsler空间的几何学称为**Finsler几何学**（Finsler geometry）

М И Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Buseman, H, The geometry of geodesics, Acad Press, 1955

[A2] Rinow, W, Die innere Geometrie der metrischen Raume, Springer, 1961

[A3] Rund, H, The differential geometry of Finsler spaces, Springer, 1959

沈一兵 译

Finsler 空间 [Finsler space, Финслерово пространство]

Riemann 空间 (Riemannian space) 的一种推广．这是一种在小范围内近似成立 **Minkowski 几何学** (Minkowski geometry) 的空间 Finsler 空间在实质上与 Finsler 流形 (Finsler manifold) 相同，后者就是具备 **Finsler 度量** (Finsler metric) 的微分流形

М И Войцеховский 撰

【补注】 关于 Finsler 空间概念的详细描述可在**广义 Finsler 空间** (Finsler space, generalized) 中找到

沈一兵 译

广义 Finsler 空间 [Finsler space, generalized, Финслерово пространство обобщенное]

具有对最短曲线（即具有长度等于两端点之间距离的曲线）的性质有某些限制的**内度量** (internal metric)的空间 这类空间包括了 G 空间（见**测地几何学** (geodesic geometry)），特别地，也包括 Finsler 空间（见 **Finsler 几何学** (Finsler geometry)），因而所讨论的空间能被认为是 Finsler，而不是 Riemann 空间的推广．广义 Finsler 空间与 Finsler 空间的不同不仅在于广义 Finsler 空间巨大的一般性，而且在于这样的事实，即定义及研究这类空间的出发点是度量，而不用坐标．

G 空间 (G-space) 能定义为一个具有内度量的有限紧空间（即在其中的有界闭集是紧的），在此内度量下，最短曲线局部地可唯一延伸，即下列两个条件被满足

1）延伸的存在性 (existence of an extension) 每点有一邻域 U，使得对每一条最短曲线 $AB \subset U$，存在一条最短线 $AC \supset AB$，$C \neq B$

2）延伸的唯一性 (uniqueness of an extension)，或"非叠加性" 如果 $AC \supset AB$ 及 $AC_1 \supset AB$，则 $AC \supset AC_1$ 或 $AC_1 \supset AC$ 最短曲线的存在性是由有限紧性保证的 在具有内部度量的有限紧空间中任何两点能用一条最短曲线相连接 延伸的唯一性蕴含具有给定端点的最短曲线的局部唯一性 于是，G 空间能表征为这样的有限紧空间，在其中任何两点能用一条局部地具有直线段主要性质的最短曲线相连接．

对于具有内部度量的空间，有限紧性等价于紧性和完全性的组合（见 [3]）

G 空间是拓扑齐性的，即对其中任何两点，存在空间到其身上的一个同胚将两点中的一点映至另一点 进而，此同胚能被选成与单位元同痕 维数 $\leqslant 3$ 的 G 空间是拓扑流形 有限维 G 空间具有区域不变性性质，即如果它的两个同胚子集中一个为开集，则另一个也是开集．尚不清楚 (1984) 是否每个 G 空间均为有限维的．

在具有内部度量的空间 M 中的一个集合 V 称为凸的，如果任意两点 X，$Y \in V$ 能用一条最短曲线 XY 将它们连结起来，且每一条这样的最短曲线包含在 V 中．称空间具有小球面凸性 (convexity of small spheres)，如果空间中每点都有一个邻域，使得含在此邻域中的每一个球面是凸的．每一个具有小球面凸性性质的 G 空间是有限维的．特别，对曲率 $\leqslant K$ 的 G 空间（见**广义 Riemann 空间** (Riemannian space, generalized) 及对（在 Busemann 意义下）非正曲率的 G 空间，这是成立的 后者意味着局部地在每一个由最短曲线所构成的三角形中，三角形的中线长不大于对应边长的一半．有限维性质对于曲率 $\geqslant K$ 的 G 空间也是成立的（见 [4]）

度量空间的一个运动 (motion) 乃是空间到其自身上的一个保持点之间距离的映射．紧 G 空间的所有运动组成的群在紧－开拓扑下是 Lie 群 (见[1]) 在非紧的情形下，如果 G 空间满足小球面凸性条件，则上述结论也成立（见 [6]）

度量空间是齐性的，如果对空间的任何两点，存在着一个映它们中的一点到另一点的运动．称度量空间的运动 Φ 相对于点 P 是一个对称 (symmetry)，如果对所有 x，有 $\Phi(\Phi(x)) = x$，且 p 是 Φ 的孤立不动点．如果对空间的每一点，存在着一个相对于此点的对称，则称空间是对称的 (symmetric) 对称的 G 空间是齐性的，且满足小球面凸性性质．齐性 G 空间的所有运动组成的群是一个 Lie 群，且空间本身是一个拓扑流形（见 [5]）．对称的 G 空间是具有凸标形的 **Finsler 空间** (Finsler space) 如果在此之外，在从一点出发的任何两条最短曲线之间存在一个角度，则空间是一个对称 Riemann 空间．

设 M 是一个具有度量 ρ，且赋以群结构的度量空间．称度量 ρ 是左－不变的 (left-invariant)，如果由元素 g 所作出的左乘法的映射是空间的一个运动．可类似地定义右－不变(right-invariant)度量．称同时为左－不变和右－不变的度量为双－不变度量 一个既是群又具有双－不变度量的 G 空间是一个对称 Lie 群（见 [5]），因而也是 Finsler 空间．这是 Riemann 几何的一个众所周知的结果的推广．

参考文献

[1] Александров, А Д, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М -Л, 1948

[2] Александров, А Д, 《Тр Матем ин-та АН СССР》, **38** (1951), 5 – 23

[3] Aleksandrov, A D, Ueber eine Verallgemeinerung der Riemannsche Geometrie, *Schrift Inst Math Deutsch Akad Wiss*, **1** (1957), 33 – 84

[4] Берестовский, В Н, 《Сиб матем ж》, **16** (1975), 4, 651 – 662

[5] Николаев, И Г, 《Сиб матем ж》, **19** (1978), 6, 1341 – 1348

[6] Николаев, И Г., 《Сиб матем ж》, **20** (1979),

2, 345 – 353

[7] Решетняк, Ю Г, «Матем сб», **52** (1960), 3, 789 – 798

[8] Решетняк, Ю Г, «Сиб матем ж», **9** (1968), 4, 918 – 927

[9] Busemann, H, The geometry of geodesics, Acad Press, 1955

[10] Busemann, H, Recent synthetic differential geometry, Springer, 1970

[11] Cohn-Vossen, S, Existenz kürzester Wege, *Compos Math*, **3** (1936), 441 – 452

[12] Berestovskiĭ, V N, The finite-dimensionality problem for Busemann *G*-spaces, *Siberian Math J*, **18** (1977), 1, 159 – 161 (*Sibirsk Mat Zh*, **18** (1977), 1, 219 – 221)

[13] Berestorskiĭ, V N, Homogeneous Busemann *G*-spaces, *Siberian Math J*, **23** (1982), 2, 141 – 150 (*Sibirsk Mat Zh*, **23** (1982), 1, 3 – 15)

[14] Szenthe, J, Homogeneous spaces with intrinsic metric, *Magyar Tud Akad Mat Fiz Oszt Kozl*, **13** (1963), 125 – 132 (匈牙利文)

[15] Berestovskiĭ, V N, Generalized symmetric spaces, *Siberian Math J*, **26** (1985), 2, 159 – 170 (*Sibirsk Mat Zh*, **26** (1985), 2, 3 – 17)

[16] Busemann, H and Phadke, B B, Spaces with distinguished geodesics, M Dekker, 1987

А Д Александров, В Н Берестовский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gromov, M, Structures métriques des espaces riemanniennes, F Nathan, 1981 (译自俄文). 沈纯理 译

第一可数公理 [first axiom of countability, первая аксиома счетности]

集论拓扑中的一个概念． 拓扑空间称为满足**第一可数公理** (first axiom of countability), 如果每个点的定义邻域系都有可数基． 满足第一可数公理的空间类是 F Hausdorff (1914) 定义的 所有的度量空间，线段上的连续函数空间等都属于这个类． 满足**第二可数公理** (second axiom of countability) 的空间也满足第一可数公理． 反之不然， 例如具有离散拓扑的不可数空间不满足第二可数公理．

М И Войцеховский 撰 胡师度、白苏华 译

第一边值问题 [first boundary value problem, первая краевая задача]

一种特殊形式的边值问题，它需要在变量 $x=(x_1, \ldots, x_n)$ 的区域 D 中求 $2m$(偶数) 阶的微分方程

$$Lu=f \tag{1}$$

的解 u，在区域 D 的边界 S 上(或在 S 的一部分上) 函数 u 及其所有不超过 $m-1$ 阶的 (法向) 导数取给定的值．这些条件通常取形式

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^k u|_S=\varphi_k,\ 0\leqslant k\leqslant m-1, \tag{2}$$

其中 $\partial/\partial n$ 是沿着 ∂D 的外法线的导数．当 $S=\partial D$ 时，诸函数 φ_k, $0\leqslant k\leqslant m-1$, 称为 Dirichlet **数据** (Dirichlet data)，问题 (1), (2) 称为 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem)

对于区域 $D=(x_0<x<x_1)$ 中的常微分方程

$$Lu\equiv u''+a_1u'+au=f, \tag{3}$$

第一边值问题由边界条件

$$u(x_0)=y_0,\ u(x_1)=y_1$$

定义．

对于一致椭圆型线性偏微分方程

$$Lu\equiv\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^n a_iu_{x_i}+au=f, \tag{4}$$

第一边值问题 (Dirichlet **问题** (Dirichlet problem)) 即要求这个方程的满足条件

$$u|_{\partial D}=\varphi$$

的解．如果诸函数 a_{ij}, a_i, a, f, φ 和 $n-1$ 维流形 ∂D 充分光滑，那么这是 Fredholm 问题 特别地，如果 D 的测度充分小，或者如果在 D 中 $a\leqslant 0$, 那么这个问题是唯一可解的 关于方程的系数和 Dirichlet 数据，光滑性条件可大大地减弱，关于边界 ∂D 亦为如此．

如果 (1) 是有 $N>1$ 个分量的未知向量函数 u 的 N 个方程的组，那么可类似地提第一边值问题 在此情形下，在方程组 (3) 和 (4) 的 Dirichlet 问题之间有本质的差别 问题 (3), (2) ($S=\partial D$) 总是 Fredholm 的，而问题 (4), (2) 却不是这样．例如，圆盘 $x^2+y^2<R^2$ 中一致椭圆型 Бицадзе 方程组 (见 [1])

$$u^1_{xx}-u^1_{yy}-2u^2_{xy}=0,$$
$$2u^1_{xy}+u^2_{xx}-u^2_{yy}=0$$

的齐次 Dirichlet 问题有无穷多个线性无关解．这个例子成为加在 L 上保证 Dirichlet 问题的 Fredholm 性的各种不同附加条件 (真椭圆性，强椭圆性) 的出发点．

对于线性抛物型方程，在柱形域中提第一边值问题，Dirichlet 数据的支柱是柱形域的底面和侧面．例如，对于**热传导方程** (thermal-conductance equation)

$$Lu\equiv u_t-\sum_{i=1}^n u_{x_ix_i}=0,$$

需要在区域

$$D=\{0<t<T,\ x=(x_1,\ \ ,x_n)\in G\}$$

中求其解，而 Dirichlet 数据 $\varphi=u|_S$ 的支柱是

$$S=\{0\leqslant t\leqslant T,\ x\in\partial G\}\cup\{t=0,\ x\in G\}$$

如果边界 ∂G 是 $n-1$ 维光滑流形，函数 φ 是光滑的，并且如果在 $\{t=0,x\in\partial G\}$ 上满足相容性条件，那么第一边值问题是唯一可解的．

参考文献

[1] Бицадзе, А В , Некоторые классы уравнений в частных производных, М , 1981

[2] Bers, L , John, F and Schechter, M , Partial differential equations, Interscience, 1964

[3] Courant, R and Hilbert, D , Methods of mathematical physics Partial differential equations, 2, Interscience, 1965（中译本 R 柯朗，D 希尔伯特，数学物理方法，卷Ⅱ，科学出版社，1977）

[4] Miranda, C , Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970（译自意大利文）

[5] Петровский, И Г , Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд , М , 1961（中译本 И Г 彼得罗夫斯基，偏微分方程讲义，高等教育出版社，1956）

[6] Бицадзе, А В , Уравнения математической физики, М , 1976

[7] Hormander, L , Linear partial differential operators, Springer, 1976（中译本 L 霍曼德尔，线性偏微分算子，科学出版社，1980） А П Солдатов 撰

【补注】 第一边值问题已被推广为椭圆型边值问题的概念．关于这方面以及 Fredholm 性质的研究，见[A1]的第 20 章．

这些年来，非线性椭圆型方程边值问题的理论有精深的发展，见[A2]，[A3]

参考文献

[A1] Hormander, L , The analysis of linear partial differential operators, 3, Springer, 1985

[A2] Gilbarg, D and Trudinger, N S , Elliptic partial differential equations of second order, Springer, 1977（中译本 D 吉尔巴格，N S 塔丁格，二阶椭圆型偏微分方程，上海科学技术出版社，1981）

[A3] Ладыженская, О А , Уральцева, Н Н , Линейные и квазилинейные эллиптического типа, 2 изд , М , 1973（中译本 О А 拉迪任斯卡娅，Н Н 乌拉利采娃，线性和拟线性椭圆型方程，科学出版社，1987）

[A4] Friedman, A , Partial differential equations, Holt, Rinehart & Winston, 1969

[A5] Friedman, A , Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, 1964（中译本 A 弗里德曼，抛物型偏微分方程，科学出版社，1984）

[A6] Garabedian, P R , Partial differential equations, Wiley, 1964 陆柱家 译

第一基本形式［**first fundamental form, первая квадратичная форма**］，度量形式（metric form），曲面的

曲面上用坐标的微分表出的一个二次型，它确定了曲面在给定的一点的邻域中的内蕴几何．

设曲面用方程

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,\ v)$$

来定义，这里 u 和 v 是曲面上的坐标，而

$$d\mathbf{r}=\mathbf{r}_u du+\mathbf{r}_v dv$$

是位置向量 $\mathbf{r}$ 从点 M 移动到一无限邻近点 M' 时沿所选方向 $du\ \ dv$ 的微分（见图 1）

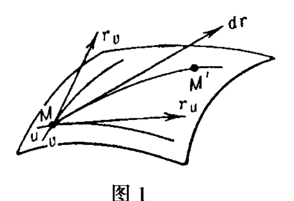


图 1

弧 MM' 的长度的增量的线性主部的平方能用微分 $d\mathbf{r}$ 的平方来表出

$$I=ds^2=d\mathbf{r}^2=\mathbf{r}_u^2du^2+2\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v dudv+\mathbf{r}_v^2dv^2,$$

且称之为曲面的第一基本形式．第一基本形式的系数通常表为

$$E=\mathbf{r}_u^2,\ F=(\mathbf{r}_u,\ \mathbf{r}_v),\ G=\mathbf{r}_v^2,$$

或者以张量记号写为

$$d\mathbf{r}^2=g_{11}du^2+2g_{12}dudv+g_{22}dv^2$$

张量 g_{ij} 称为曲面的第一基本张量（first fundamental tensor）或度量张量（metric tensor） 第一基本形式在曲面上的正则点处为正定形式

$$EG-F^2>0$$

第一基本形式表征了曲面的度量性质 能运用第一基本形式的知识去计算曲面上的弧长

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\ \frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt,$$

这里 t 是曲线上的参数，曲面上曲线的交角

$$\cos(\widehat{dr\,\delta r})=$$

$$=\frac{Edu\delta u+F(du\delta v+dv\delta u)+Gdu\delta v}{\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}\ \sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}},$$

这里 $du\ \ dv$ 和 $\delta u\ \ \delta v$ 是曲线的切向量的方向（见图 2），曲面上区域的面积

$$\sigma=\iint\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

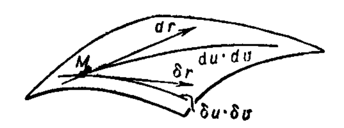


图 2

第一基本形式的系数的形状本质上依赖于坐标系的选取．第一基本形式具有所谓在正交坐标系下的正交形式（orthogonal form）

$$E(u,\ v)du^2+G(u,\ v)dv^2,$$

在半-测地坐标系下的典范形式（canonical form）

$$du^2+G^2dv^2,$$

在等温坐标系下的等温形式（isothermal form）（等距形式（isometric form））

$$ds^2=\lambda^2(u,\ v)\ (du^2+dv^2)$$

有时曲面能用第一基本形式的特殊形式来刻画．例如，**Liouville 曲面**（Liouville surface）是用

$$[\varphi(u)+\psi(v)]\ (du^2+dv^2)$$

来刻画的．

第一基本形式是曲面的一个弯曲不变量 在一给定点处的 Gauss 曲率能仅用第一基本形式的系数及其导数来算出（Gauss 定理（Gauss theorem））

第一基本形式与其他二次型之间的关系及参考文献，见**曲面的基本形式**（fundamental forms of a surface）

А Б Иванов 撰

【补注】 如用更流行的术语来描述，嵌入曲面 $f\ U\to\mathbf{R}^3$, $U\subset\mathbf{R}^2$ 的第一基本形式可定义如下：包含映射 $(Tf)_u(\mathbf{R}_u^2)\subset T_{f(u)}\mathbf{R}^3$ 通过限制在 $T_{f(u)}\mathbf{R}^3\simeq\mathbf{R}^3$ 上的规范内积在曲面的 $f(u)$ 处的切空间 $(Tf)_u(\mathbf{R}_u^2)$ 上定义了一个二次型．而曲面 $f(U)\subset\mathbf{R}^3$ 的第一基本形式对在 $z\in f(U)$ 处切于 $f(U)$ 的切向量偶 X, Y 就指定了在 $\mathbf{R}^3$ 中 X 和 Y 的**内积**（inner product）.

Gauss 定理亦被称为奇妙定理（theorem eqregium），见 **Gauss 定理**（Gauss theorem）

在高（余）维数及外围空间为 Riemann 空间时，第一基本形式亦能定义（见 [A1]－[A3]） 在外围为 Riemann 空间的情形下，它乃是 Riemann 度量对由给定子流形所定义的切子空间的限制．

参考文献

[A1] Blaschke, W and Leichtweiss, K , Elementare Differentialgeometrie, Springer, 1973

[A2] Hicks, N J , Notes on differential geometry, v Nostrand, 1965

[A3] Kobayashi, S and Nomizu, K , Foundations of differential geometry, Ⅰ－Ⅱ, Interscience, 1963－1969

[A4] Hsiung, C C , A first course in differential geometry, Wiley, 1981

[A5] Millman, R S and Parker, G D , Elements of differential geometry, Prentice Hall, 1977

沈纯理 译

首次积分 [**first integral**, **первый интеграл**]，常微分方程的，亦称第一积分

不为常数的连续可微函数，其导数沿给定方程的解恒等于零．对于标量方程

$$y'=f(x,\ y), \tag{*}$$

在通解 $F(x,\ y)=C$（C 为任意常数）中出现的函数 $F(x,\ y)$ 是一个首次积分．所以，$F(x,\ y)$ 满足含一阶偏导数的线性方程

$$\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial y}f(x,\ y)=0.$$

首次积分在方程（*）的整个定义域内可能不存在，但是在使得函数 $f(x,\ y)$ 连续可微的点的邻域内必定存在．首次积分不是唯一确定的 例如，对于方程 $y'=-x/y$，不仅函数 x^2+y^2 是首次积分，而且函数 $\exp(x^2+y^2)$ 等也是首次积分．

知道了正规方程组

$$\dot{x}=f(x,\ t),\ x\in\mathbf{R}^n$$

的一个首次积分，就能把这个方程组降低一阶，求 n 个函数无关的首次积分等价于求隐形式的通解．如果 $F_1(x,\ t)$, $\ldots$, $F_n(x,\ t)$ 是 n 个函数无关的首次积分，则任何其他首次积分 $F(x,\ t)$ 都能写成下列形式

$$F(x,\ t)=\Phi(F_1(x,\ t),\ \ \ldots,\ F_n(x,\ t)),$$

其中 Φ 是某个可微函数

参考文献

[1] Понтрягин, Л С , Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд , М , 1974（中译本 Л С 庞特利雅金，常微分方程，上海科学技术出版社，1962）

Н Н Ладис 撰 张鸿林 译

一阶变分 [**first variation**, **первая вариация**]

见**泛函的变分**（variation of a functional）.

Fisher 信息量 [**Fisher amount of information**, **Фишера информационное количество**]，Fisher 信息（Fisher information）

见 **Rao-Cramér 不等式**（Rao-Crmér inequality）

Fisher F 分布 [Fisher F-distribution, Фишера F-распределение], F 分布 (F-distribution), Fisher-Snedecor 分布 (Fisher-Snedecor distribution), Snedecor 分布 (Snedecor distribution)

$(0,\infty)$上的连续概率分布，其密度为

$$f_{\nu_1\nu_2}(x)= \\ =\frac{1}{B(\nu_1/2,\nu_2/2)}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2}x^{(\nu_1/2)-1}\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{-(\nu_1+\nu_2)/2}, \quad x>0, \tag{1}$$

此处 $\nu_1,\nu_2>0$ 是参数，$B(l_1,l_2)$ 是 **B 函数** (beta-function). 对 $\nu_1>2$，它是正偏的单峰分布，其众数为 $x=[(\nu_1-2)/\nu_1][\nu_2/(\nu_2+2)]$，数学期望和方差分别等于

$$\frac{\nu_2}{\nu_2-2}, \quad \nu_2>2\text{ 时},$$

$$\frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}, \nu_2>4\text{ 时}.$$

Fisher F 分布属于第二类 **B 分布** (beta-distribution) (Pearson 分类中的Ⅵ 型分布) 它是写成商的形式的随机变量

$$F_{\nu_1\nu_2}=\frac{\nu_2X_1}{\nu_1X_2}$$

的分布，这里 X_1 和 X_2 是独立随机变量，分别遵从参数为 $\nu_1/2$ 和 $\nu_2/2$ 的 **Γ 分布** (gamma distribution) $F_{\nu_1\nu_2}$ 的分布函数可用 B 分布函数 $B_{l_1l_2}(x)$ 表示

$$\mathsf{P}\{F_{\nu_1\nu_2}<x\}=B_{\nu_1/2\ \nu_2/2}\left[\frac{(\nu_1/\nu_2)x}{1+(\nu_1/\nu_2)x}\right] \tag{2}$$

通过这个关系，可利用 B 分布表计算 Fisher F 分布的值 如果 $\nu_1=m$ 和 $\nu_2=n$ 是整数，则以 m 和 n 为自由度的 Fisher F 分布是 F 比

$$F_{mn}=\frac{\chi_m^2/m}{\chi_n^2/n} \tag{3}$$

的分布，此处 χ_m^2 和 χ_n^2 是具有 **χ^2 分布** ('chi-squared' distribution) 的独立随机变量，自由度分别为 m 和 n

Fisher F 分布在数理统计中有着十分重要的作用 首先是作为两个样本方差之比的分布 设 $X_1,\ ,X_m$ 和 $Y_1,\ ,Y_n$ 分别是参数为 (a_1,σ_1^2) 和 (a_2,σ_2^2) 的正态总体的样本. 可用

$$s_1^2=\frac{1}{m-1}\sum_i(X_i-\bar{X})^2 \text{ 和 } s_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_j(Y_j-\bar{Y})^2$$

作为方差 σ_1^2 和 σ_2^2 的估计，其中 $\bar{X}=\sum_i X_i/m$, $\bar{Y}=\sum_j Y_j/n$ 于是，在 $\sigma_1=\sigma_2$ 的假设下，方差比 (dispersion proportion) $F=\sigma_2^2s_1^2/\sigma_1^2s_2^2$ 遵从自由度为 $m-1$ 和 $n-1$ 的 Fisher F 分布 (由于这个原因，Fisher F 分布也称为方差比分布 (distribution of the dispersion proportion)) F 检验是以统计量 F 为基础的，特别是在方差分析、回归分析和多元统计分析中，被用于检验两个总体方差相等的假设.

Fisher F 分布因它与其他分布的联系而具有广泛性 当 $m=1$ 时，(3) 中 F_{mn} 的分布是有 n 个自由度的 **Student 分布** (Student distribution) 随机变量之平方的分布 利用正态和 χ^2 分布可以给出 Fisher F 分布的多种近似

在方差分析中引入 Fisher F 分布与 R A Fisher (1924) 密切相关，尽管 Fisher 本人在讨论方差比时用的是统计量 z，z 与 F 的关系是 $z=(\log F)/2$ Fisher 编制了 z 分布表，而 G Snedecor (1937) 编制了 F 分布表. 现在，由于可以利用不完全 B 函数表及 F 与 B 分布的关系，较简单的 Fisher F 分布更受到人们的青睐.

亦见**方差分析** (dispersion analysis)，**Fisher z 分布** (Fisher z-distribution)

参考文献

[1] Fisher, R A, On a distribution yielding the error functions of several well-known statistics, in Proc internat congress mathematicians Toronto 1924, Vol 2, Univ Toronto Press, 1928, 805-813

[2] Kendall, M G and Stuart, A, The advanced theory of statistics Distribution theory Griffin, 1969

[3] Scheffé, H The analysis of variance, Wiley, 1959

[4] Большев, Л Н, Смирнов, Н В, Тоблицы математической статистики, 2 изд, М, 1968

А В Прохоров 撰

【补注】 英文中 "dispersion proportion" 也称为 "variance ratio" (方差比)，在其服从 F 分布时，也称为 F 比 (F-ratio)，亦见**方差比** (dispersion proportion)

陶 波 译 李国英 校

Fisher z 分布 [Fisher z-distribution, Фишера z-распределение]

实轴上的连续概率分布，其密度为

$$f(x)=2m_1^{m_1/2}m_2^{m_2/2}\frac{\Gamma((m_1+m_2)/2)e^{m_1x}}{\Gamma(m_1/2)\Gamma(m_2/2)(m_1e^{2x}+m_2)^{(m_1+m_2)/2}}$$

参数 $m_1,m_2\geqslant 1$ 称为自由度 (degrees of freedom) 特征函数是

$$\varphi(t)=\left[\frac{m_2}{m_1}\right]^{it/2}\frac{\Gamma((m_1+it)/2)\Gamma((m_2-it)/2)}{\Gamma(m_1/2)\Gamma(m_2/2)}$$

数学期望和方差分别等于 $(1/m_1-1/m_2)/2$ 和 $(1/m_1+1/m_2)/2$.

如果随机变量 F 遵从自由度为 m_1 和 m_2 的 **Fisher F 分布** (Fisher F-distribution)，则 $z=(\log F)/2$ 遵从自由度为 m_1 和 m_2 的 Fisher z 分布. 它与称为**方差比** (dispersion proportion) 分布的 Fisher F 分布均由 R A. Fisher (1924) 在方差分析中首先引入 他当时认为，z 分布应是方差分析中检验统计假设的基本分布，还编制了 Fisher z 分布表，并研究了统计量 z 然而，在现代数理统计

中，人们使用更简单的统计量 F

参考文献

[1] Fisher, R A On a distribution yielding the error functions of several well-known statistics, in Proc internat congress mathematicians Toronto 1924, Vol 2, Univ Toronto Press, 1928, 805-813

А В Прохоров 撰

【补注】 英文中 “dispersion proportion” 也称为 “variance ratio”（方差比）　　陶 波 译 李国英 校

Fitting 子群 [Fitting subgroup, Фиттинга подгруппа]

群 G 的**特征子群** (characteristic subgroup) $F(G)=F$, 它由 G 的所有幂零正规子群生成 也称为 Fitting 根 (Fitting radical), 它首先被 H Fitting ([1]) 所研究. 对有限群, Fitting 子群是幂零群且是该群唯一的极大幂零正规子群 对有限群 G, 下列关系成立

$$[F,F]\subseteq\Phi\subseteq F \quad 及 \quad F/\Phi=F(G/\Phi),$$

其中 Φ 表示 G 的 **Frattini 子群** (Frattini subgroup), $[F,F]$ 是 F 的**换位子群** (commutator subgroup)

参考文献

[1] Fitting, H, Beitrage zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung, *Jahresber Deutsch Math -Verein*, **48** (1938), 77-141

[2] Курош, А Г, Теория групп, 3 изд, М 1967 (英译本 Kurosh, A G, The theory of groups, 1-2, Chelsea, 1955-1956)

[3] Gorenstein, D, Finite groups, Harper & Row, 1968

Н Н Вильямс 撰

【补注】 有限群 G 称为拟幂零的 (quasi-nilpotent), 当且仅当对 G 的每个主因子 H, 由 G 的元素在 H 上诱导的每个自同构皆为内自同构. 令 $Z(G)=Z_0(G)=\{g\in G \ gh=hg, \ \forall h\in G\}$ 是 G 的中心 (centre) 归纳地由条件 $Z_i(G)/Z_{i-1}(G)=Z(G/Z_{i-1}(G))$ 定义 $Z_i(G)\supseteq Z_{i-1}(G)(i=1,2, \ )$ $Z_i(G)$ 皆为正规子群 序列 $Z_0(G)\subseteq Z_1(G)\subseteq$ 是 G 的升中心列 (ascending central series). 令 $Z_\infty(G)=\bigcup_i Z_i(G)$, 这是 G 的所谓超中心 (hypercentre). 群 G 是半单的. 当且仅当它是非 Abel 单群的直积. 群 G 是拟幂零的, 当且仅当 $G/Z_\infty(G)$ 是半单的. 有限群 G 的广义 Fitting 子群 (generalized Fitting subgroup) 是 G 的在所有主因子上都引起内自同构的全部元素 x 的集合. 它是 G 的特征子群且包含 G 的每个次正规拟幂零群. 该性质也能用于定义这种群.

令 $G=\gamma_1(G)\supseteq\gamma_2(G)\supseteq$ 是 G 的降中心列 (descending central series), 即 $\gamma_n(G)=[G,\gamma_{n-1}(G)]$ 是 G 同 $\gamma_{n-1}(G)$ 的换位子群. 令 $F^*(G)$ 为 G 的广义 Fitting 子群, 则 $E(G)=\bigcap_{n\geqslant1}\gamma_n(F^*(G))$ 是完全拟幂零特征子群. 有时称它为 G 的层 (layer).

参考文献

[A1] Huppert, B, Endliche Gruppen, 1, Springer, 1967

[A2] Huppert, B, Finite groups, 2-3, Springer, 1982

[A3] Robinson, D J S, A Course in the theory of groups, Springer, 1982

石生明 译 许以超 校

不动点 [fixed point, неподвижная точка]

1) 映射 $F \ X\to X$ 在集合 X 上的不动点是一个点 $x\in X$, 使得 $F(x)=x$ 证明不动点的存在以及求出不动点的方法都是重要的数学问题, 因为把方程 $f(x)=0$ 变为 $x\pm f(x)=x$ 可以看出, 解方程 $f(x)=0$ 就化为求映射 $F=I\pm f$ 的不动点, 其中 I 是恒同映射. 依 X 的结构以及 F 的性质之差异, 可以有各式各样的不动点原理 (fixed-point principles) 最有意义的情形是 X 为拓扑空间而 F 为某种意义下的连续算子

最简单的不动点原理是**压缩映射原理** (contraction-mapping principle)). 设 X 是完全度量空间, $F \ X\to X$ 是一个算子, 使得

$$\rho(F(x), F(y))\leqslant q\rho(x, y), 0<q<1 \quad (1)$$

于是 F 刚好有一个不动点 $\bar{x}$, 可以作为逐次逼近 $x_n=F(x_{n-1})$ $(n=1, 2, \ )$ 的极限而得, 其中 $x_0\in X$ 是任意一点. 这个原理不仅确定了不动点的存在性, 而且也指出了求不动点的方法. 此外, 序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $\bar{x}$ 的速度也是容易估计的 条件 (1) 一般不能换为

$$\rho(F(x), F(y))<\rho(x, y). \quad (2)$$

不过当 X 为紧空间时, 与前面一样, (2) 也保证 F 具有唯一的不动点.

更一般的是广义压缩映射原理 (generalized contraction principle) 如上, 假设 X 是完全度量空间, $F \ X\to X$, 并且当 $\alpha\leqslant\rho(x, y)\leqslant\beta$ 时,

$$\rho(F(x), F(y))\leqslant q(\alpha, \beta)\rho(x, y), \quad (3)$$

其中 $q(\alpha, \beta)<1$, $0<\alpha\leqslant\beta<\infty$. 那么 F 有唯一的不动点 若 X 是 Banach 空间, 则 (1) 不过就是 F 的 Lipschitz 条件, 其常数小于 1 压缩映射原理被广泛地用来证明代数方程、微分方程、积分方程以及其他方程解的存在性与唯一性, 同时用来求出这些方程的近似解.

还有其他一些具有拓扑性质的、保证算子 F 有不动点的条件, 最著名的是 Schauder 原理 (Schauder principle) 设 X 是 Banach 空间, F 是**完全连续算子** (completely-continuous operator), 把有界闭凸集 $C\subset X$ 映入自身. 那么 F 在 C 中至少有一个不动点. 不过, 在这种情况下, 不动点的个数问题仍未解决, 也未说明求出不动点的方法.

例 (Peano 定理 (Peano theorem)) 设 $f(t, x)$

在区域 $|t-t_0|\leqslant a$，$|x-x_0|\leqslant b$ 中关于双变元连续，并且在该区域中 $\beta=\max|f(t,x)|$ 若 $h=\min\{a,b/\beta\}$，则在区间 $[t_0-h,t_0+h]$ 上，方程

$$x'(t)=f(t,x) \tag{4}$$

至少有一个解，使得

$$x(t_0)=x_0 \tag{5}$$

方程(4)连同条件(5)等价于积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau))\,d\tau$$

在定理的条件下，算子

$$F(x)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau))\,d\tau$$

把空间 $C[t_0-h,t_0+h]$ 中的球 $\|x-x_0\|\leqslant b$ 映入自身，并且在这个球上是完全连续的．因此，据 Schauder 原理，F 有不动点，也就是上述 Cauchy 问题有解（见[4]，[5]） Schauder 原理的一个推广是 **Тихонов 原理**（Tikhonov principle） 让 X 是可分的局部凸空间，F 是一个连续算子，把紧凸集 $C\subset X$ 映入自身．那么 F 在 C 中至少有一个不动点 Schauder 原理还有另一些推广，其中也有对多值映射的推广，但是在所有情形里都需假定 C 是凸集，因为没有这个条件 Schauder 定理及其推广就不对 Schauder 原理与压缩映射原理可以结合起来 让 F 是一个算子，把 Banach 空间 X 的有界闭凸集 C 映入自身，并且可以表为 $F=F_1+F_2$，其中 F_1 是完全连续的，F_2 是压缩映射．那么 F 在 C 中至少有一个不动点

Schauder 型原理可以扩充到非紧算子如下．让 M 是完全度量空间 X 中的有界集．这个集的**非紧测度**（measure of non-compactness）$\chi(M)$ 定义为使得 M 中具有有限 ε 网的 $\varepsilon>0$ 的下确界（见**网（拓扑空间中集合的）**（net (of sets in a topological space)））．对于紧集而言 $\chi(M)=0$ 算子 $F\ X\to X$ 称为**压缩算子**（compressing operator），如果对任何非紧有界集 $M\subset X$ 有 $\chi(F(M))<\chi(M)$ 于是把有界闭凸集 $C\subset X$ 映入自身的压缩算子 F 在 C 中至少有一个不动点．就 Banach 空间而言，可以引进另一些非紧测度，变化这些测度的形式可以得到上述定理各种不同形式的说法，从而可以证明形形色色的微分方程、积分方程以及其他方程解的存在性，而相应的算子不必是完全连续的

求助于更精巧的拓扑概念，对于不动点的存在性可以得到更强的判别法则 假设在 Banach 空间 X 的有界域 M 的边界 ∂M 上给了一个非退化向量场 Φ，即相应于每个点 $x\in\partial M$ 有一个非零向量 $\Phi(x)$ 对于这样的向量场，在某些条件下可以指定一个整数，即 Φ 在 ∂M 上的所谓旋转指数（rotation index）$\gamma(\Phi,\partial M)$ 首先假定 X 是有限维空间而 Φ 在 ∂M 上连续，这时 $\gamma(\Phi,\partial M)$ 定义为把 ∂M 映成单位球面 $\|x\|=1$ 的映射 $\Psi(x)=\Phi(x)/\|\Phi(x)\|$ 的拓扑度（见**映射度**（degree of a mapping）） 其次让 X 是无限维 Banach 空间，$\Phi(x)=x-F(x)$，其中 F 是 $\bar{M}$ 上的完全连续算子．这样的场称为**完全连续的**（completely continuous）向量场．

假设，一个有限维子空间 X_n 是 $F(\bar{M})$ 的一个相当好的逼近，而 P_n 是把 $F(\bar{M})$ 映成 X_n 的投影算子．如果对于 $x\in\partial M$，$\|P_nF(x)-F(x)\|$ 充分小，那么场 $\Phi_n=I-P_nF$ 也在 $\partial M\cap X_n$ 上连续，其指数 γ_n 既不依赖于逼近子空间 X_n 的选择，也不依赖于 P_n 这个数 γ_n 称为完全连续向量场 Φ 在 ∂M 上的**指数**（index），记为 $\gamma(\Phi,\partial M)$ 旋转指数的一个重要性质是 它在 Φ 的同伦变换下不变．

Leray-Schauder **原理**（Leray-Schauder principle） 假设在 Banach 空间 X 的有界域 M 的闭包 $\bar{M}$ 上给了一个完全连续向量场 Φ，在 ∂M 上非退化，并且 $\gamma(\Phi,\partial M)\neq 0$ 那么至少有一点 $x\in M$ 使 Φ 为零，即算子 F 在 M 中至少有一个不动点．由于指数在同伦变换下的不变性，可以计算这个指数如下．从已知场 $\Phi(x)$ 构造一族向量场 $\Phi(x,\lambda)$（$\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta$），使得这些场彼此同伦，并且存在某个 $\lambda_0\in[\alpha,\beta]$，使得 $\Phi(x,\lambda_0)=\Phi(x)$ 如果对另一个 $\lambda\in[\alpha,\beta]$，$\Phi(x,\lambda)$ 的指数容易计算，并且等于 k，那么 $\gamma(\Phi,\partial M)$ 也等于 k 通过这种办法，利用映射度来证明某些完全连续算子有不动点，则可证明，某些相当复杂的高阶偏微分方程有解

如果加强空间的条件，则可削弱对算子的限制．例如，算子 F 称为**非扩张**（non-expansive）算子，如果 $\rho(F(x),F(y))\leqslant\rho(x,y)$ 假设 Banach 空间 X 是一致凸的（例如 Hilbert 空间，见 **Banach 空间**（Banach space）），F 是非扩张算子，把有界闭凸集 $C\subset X$ 映入自身，那么 F 在 C 中至少有一个不动点．

上面所有的不动点原理都假定了 F 的连续性．若 X 配备了半序集的结构，那么在有些情况下，连续性要求可以取消

Birkhoff-Tarski **原理**（Birkhoff-Tarski principle） 设 X 是**完全格**（complete lattice），F 是从 X 到 X 的保序算子（见**保序映射**（isotone mapping）） 于是 F 至少有一个不动点．这个原理还有另一种形式 设 X 是条件完全格，即 X 的每个有界子集都在 X 中有上确界及下确界．若 F 是保序算子，把有序区间 $[a,b]=\{x\ a\leqslant x\leqslant b\}\subset X$ 映入自身，则 F 在 $[a,b]$ 中至少有一个不动点

把拓扑条件与序条件结合起来可以得到一些新的不动点原理．例如，设 X 是半序 Banach 空间，F 是连续的保序算子，把有序区间 $[a,b]$ 映入自身 若 X 上

的半序是正则的，即每个单调增、序有界序列 $\{x_n\} \subset X$ 都按 X 的范数收敛，则 F 在 $[a, b]$ 中至少有一个不动点．这里，定理的条件不要求 X 上的格序，即无须要求每一对元素 $x, y \in X$ 的 sup 及 inf 在 X 中均存在

最后，线性算子 F 的不动点是它的一个本征元，相应的本征值为 1

参考文献

[1] Люстерник, Л А, Соболев, В И, Элементы функционального анализа, 2 изд, М, 1965 (中译本 Л А 刘斯铁尔尼克，В И 索伯列夫，泛函分析概要（第二版），科学出版社，1985)

[2] Красносельский, М А, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М, 1956 (英译本 Krasnosel'skii, M A, Topological methods in the theory of non-linear integral equations, Pergamon, 1964)

[3] Красносельский, М А, Забрейко, П П, Геометрические методы нелинейного анализа, М, 1975 (英译本 Krasnosel'skiǐ, M A and Zabreiko, P P, Geometric methods of non-linear analysis, Springer, 1983)

[4] Немыцкий, В В, 《Успехи матем наук》, 1936, 1, 141 – 174

[5] Лерэй, Ж, Шаудер, Ю, 《Успехи матем наук》, 1 (1946), 3 – 4, 71 – 95

[6] Садовский, Б Н, 《Успехи матем наук》, 27 (1972), 1, 81 – 146

В И Соболев 撰

【补注】 亦见 **Brouwer 定理** (Brouwer theorem)，**Lefschetz 定理** (Lefschetz theorem)

参考文献

[A1] Dugundji, J and Granas, A, Fixed point theory, PWN, 1982

2) 闭复平面 $\bar{\mathbf{C}}$ 上的分式线性变换 A 的不动点是一个点 $\rho \in \bar{\mathbf{C}}$，使得

$$\rho = \frac{a\rho + b}{c\rho + d},$$

这里分式线性变换 A $\bar{\mathbf{C}} \to \bar{\mathbf{C}}$ 使得

$$z \to w = A(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

其中 $a, b, c, d \in \mathbf{C}$, $ad-bc \neq 0$, $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$．如果 $A \neq I$ (I 是恒等变换 $w = z$)，则 A 有一个或两个不动点．利用这些不动点可以对分式线性映射进行分类（见**分式线性映射** (fractional-linear mapping)）(I 不予讨论）．

О М Фоменко 撰

【补注】 分式线性变换亦称 Mobius 变换 (Mobius transformations) 这种变换按不动点的分类亦见 [A1]．

参考文献

[A1] Schwerdtfeger, H, Geometry of complex numbers, Dover, reprint, 1979

3) 常微分方程组的不动点或动力系统的不动点见**平衡位置** (equilibrium position) 胡师度、白苏华 译

不动奇点 [**fixed singular point, неподвижная особая точка**]

微分方程 $F(z, w, w')=0$ (其中 F 是解析函数) 的所有解 w 的共同奇点 z_0，这些解可以看作复变量 z 的函数 $w(z)$，它的初始条件在 (z, w) 空间中的某一定区域内变化．

参考文献

[1] Голубев, В В, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд, М-Л, 1950

Ю С Ильяшенко 撰 周芝英 译 叶彦谦 校

松弛层 [**flabby sheaf, вялый пучок**]

拓扑空间 X 上集合层 F，满足对于 X 中任意开集 U，限制映射 $F(X) \to F(U)$ 是满射 松弛层的例子有 基 X 上**纤维空间** (fibre space) 的所有（不必连续）截面的芽层，**除子** (divisor) 的芽层，以及不可约代数簇上的素层 F．层 F 的松弛性是局部性质（即松弛层在任意开集上的诱导层是松弛的）．两个松弛层的商层是松弛层 在连续映射下松弛层的象是松弛层 如果 X 是仿紧的，则松弛层是**软层** (soft sheaf)，即 F 在任意闭集上的截面都能扩充到全空间 X 上

设

$$0 \to F^0 \to F^1 \to$$

是松弛 Abel 群层的正合列，则对于任意支撑族 Φ，对应的（支撑集属于 Φ 的）截面的序列

$$0 \to \Gamma_\Phi(F^0) \to \Gamma_\Phi(F^1) \to$$

是正合的，即 $F \to \Gamma_\Phi(F)$ 是左正合函子

М И Войцеховский 撰

【补注】 在代数几何学和拓扑学中，用松弛层作分解来构造层上同调 (sheaf cohomology)（即取值于层的**上同调** (cohomology)）([A1])．

参考文献

[A1] Milne, J S, Etale cohomology, Princeton Univ Press, 1980

蔡金星 译

旗 [**flag, флаг**]，n 维向量空间 V 中的型为 v 的

V 的这样的一组线性子空间 V_1, , V_k，它们的维数分别为 n_1, , n_k，并且 $V_1 \subset \subset V_k$ (这里 $v=(n_1, , n_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $0 < n_1 < < n_k < n$) 一个型为 $v_0=(1, , n-1)$ 的旗称为完全旗 (complete flag) 或全旗 (full flag)．任意两个同型的旗可以被 V 的一个线性变换将其中一个映成另一个，即 V 中一切型为 v 的旗的集合 $F(V)$ 是一般线性群 $\mathrm{GL}(V)$ 的一个齐性空间 么模群

SL(V)也传递地作用在$F_v(V)$上 在这里，F在GL(V)内（也在SL(V)内）的稳定子群H_F是GL(V)的（分别地，SL(V)的）一个抛物子群 如果F是V中由子空间$V_1\subset \subset V_{n-1}$所定义的一个完全旗，则$H_F$是GL($V$)的（分别地，SL($V$)的）关于$V$的基$e_1$, ，$e_n$的一个完全三角形子群，其中$e_i\in V_i$，$i=1$, ，$n$ 一般地，线性代数群对于抛物子群的商空间有时被称为旗簇（flag varieties）对于$k=1$来说，一个型为（n_1）的旗就是V的一个n_1维线性子空间，而$F_{(n_1)}(V)$就是 **Grassmann 流形** (Grassmann manifold) $G_{n\ n_1}=\mathrm{Gr}_{n_1}(V)$ 特别地，$F_{(1)}(V)$就是与向量空间V关联的射影空间 每一个旗簇$F_v(V)$都有一个典范的射影代数簇结构（见[1]）．如果V是一个实或复向量空间，则一切旗簇$F_v(V)$都是紧的 $F_v(V)$的胞腔剖分和上同调环都已知道(见[3], 亦见 **Bruhat 分解**(Bruhat decomposition))

参考文献见**旗结构**(flag structure)．

Д В Алексеевский 撰 郝钢新 译

旗空间 [flag space，флаговое пространство]

其度量由一绝对形定义的n维射影空间，记为F_n，该绝对形由相互嵌入的m ($m=0$, ，$n-1$)维平面的一个总体所组成，称为旗（flag） 一个旗空间的绝对形能够通过对一些 Galilei 空间或伪 Galilei 空间绝对形的二次曲面取极限而得到 特别地，空间F_3的旗（绝对形）由一个二维平面T_0组成，其中T_0内有一直线T_1 (Euclid 直线)而T_1上有一点T_2 平面F_2是一个具有特异直线T_0和特异点T_1的二维射影平面，它与 Yaglom 的 Galilei 平面一致．F_1是一条具有特异点T_0的射影直线，它与 Euclid 直线相同．

如果在旗空间F_n中选取一仿射坐标系（x^i），使得通过$(n-m-1)$维平面T_m的向量由条件$x^1=\ =x^m=0$来定义，那么就可以取数$d=|x^1-y^1|$作为点（x^1, · ，x^n）和点（y^1, ，y^n）之间的距离，如果$y^1=x^1$, · ，$y^{k-1}=x^{k-1}$，那么距离由数$d^{(k-1)}=|x^k-y^k|$来定义．

与（旗空间定义中的）$(n-m)$维平面相交而不与$(n-m-1)$维平面相交的直线称为m阶直线(line of order m)．

旗空间的运动是把绝对形映射为其自身的直射变换 一个旗空间的运动形成一个n维仿射空间的仿射变换的一个子群，旗空间的这个运动群是一个 Lie 群

空间F_n是自对偶的．可以把与两个$(n-1)$维平面对偶的两点之间的距离取作这两个平面之间的角度．

旗空间是**半椭圆空间**（semi-elliptic space）的特例 特别是，旗空间F_3与三维空间S_3^{012}相同．三维旗空间是在直线上、半平面中和平面把中具有抛物距离度量的唯一空间

参考文献

[1] Розенфельд, Б А, Неевклид овыпространства, М , 1969

Л А Сидоров 撰

【补注】 F_2，即 Yaglom 的Galileo 平面（Galilean plane）可以表述如下 回想 Euclid 平面的 Poncelet 描述，在这里Euclid平面是一个射影平面，度量由两个其连线o为无穷远直线的“**圆点**”（circular points）I和J决定．I M Yaglom 考虑了一种修正 $I=J$，而o仍然是一条通过J的特殊直线．换句话说，新的度量由**旗**（flag）Jo决定 圆即通过I和J的圆锥曲线(见**锥**(cone))的作用由在J处与o相切的圆锥曲线，即由那些其直径都有相同方向的抛物线来取代（见**抛物线**（parabola）） 具有这种方向的直线（通过J）与其他直线有不同的性状．一般地，F_n包含几种不同类型的直线

关于空间的绝对形见**绝对形**（absolute），亦见 **Galilei 空间**（Galilean space），**伪 Galilei 空间**（pseudo-Galilean space）．

参考文献

[A1] Coxeter, H S M, The affine aspect of yaglom's Galilean Feuerbach, Nieuw Archief voor Wiskunde (4), 1 (1983), 212－223

[A2] Yaglom, I M, A simple non-Euclidean geometry and its physical basis, Springer, 1979 (译自俄文)

杨 路、侯晓荣 译 张景中 校

旗结构 [flag structure，флаговая структура]

1）与**旗**(flag)相同

2）n维流形M上型$\nu=(n_1,\ \ ,n_k)$的旗结构是由切空间M_x的子空间

$$V_1(x),\quad ,V_k(x)$$

所定义的型ν的旗F_x的一个场，它光滑地依赖于点$x\in M$ 换言之，M上型ν的旗结构是M上型ν的旗丛的一个光滑截面．旗丛在点$x\in M$处的典型纤维是簇$F_\nu(M_x)$ 型$\nu_0=(1,\ \ ,n-1)$的旗结构称为完全的(complete) 流形上型ν的旗结构是一个 **G 结构**(G-structure)，这里G是n维向量空间中保持某个型ν的旗的所有线性变换所构成的群．这个G结构是无限型的．一般地说，旗结构的自同构群是无限维的．M上旗结构的无穷小自同构的 Lie 代数L具有一个理想链$L_1\subset \quad L_k$ 这里L_i是由这样的向量场$X\in L$所构成的，使得对所有$x\in M$，有$X(x)\in V_i(x)$

旗结构的一个重要的情形是型(n_1)旗结构，或者称n_1维分布(这里$k=1$, $0<n_1<n$)．

M上型ν的旗结构称为局部平坦的(locally flat)或可积的，如果每点$p\in M$有一个邻域U_p及其中的坐标系(x^1, ，x^n)使得对所有$x\in U_p$及所有$i=1$, ，k，子空间$V_i(x)$是由向量$\frac{\partial}{\partial x^1}$, · ，$\frac{\partial}{\partial x^{n_i}}$张

成的．这意味着 U_p 有一族叶状结构 S_1，　，S_k，使得对所有 $x\in U_p$，旗 F_x 是由 M_x 中切于过 x 处这些叶状结构的叶的子空间族所定义的．旗结构是局部平坦的充要条件是对每一 $i=1$，　，k，分布 $V_i(x)$ 是对合的，即如果 M 上的任意两个向量场 X 和 Y，使得对所有 $x\in M$，有 $X(x)\in V_i(x)$ 及 $Y(x)\in V_i(x)$，则有

$$[X,\ Y]\ (x)\in V_i(x),$$

这里 $[X,\ Y]$ 是 X 和 Y 的 **Lie 括号**（Lie bracket）．

在流形上整体（处处有定义）的旗结构的存在性对流形的拓扑结构加上了适当强的限制．例如，在单连通紧致流形上存在一个直线场，即型（1）的旗结构的充要条件是其 Euler 示性数为零．在单连通流形上存在完全的旗结构的充要条件为它是完全可平行化的，即其切丛是平凡的．如果在一个完全的单连通 n 维 Riemann 流形 M 上存在一个平行的型 $(n_1,\ \cdots,\ n_k)$ 旗结构，使得相对于平行移动是不变的，则 M 同构于

$$n_1,\ n_2-n_1,\quad,\ n_k-n_{k-1},\ n-n_k$$

维单连通 Riemann 流形的直积．

流形 M 的微分同胚可迁群保持 M 上某个型 v 的旗结构不变的充要条件是其线性迷向群保持 M 的切空间中某个型 v 的旗．特别，如果 H 是 Lie 群 G 的一个闭子群，使得 G 的伴随表示对 H 的限制给出了一个三角形的线性群，则在齐性空间 G/H 上存在一个不变的完全的旗结构，也存在着每一其他类型的不变旗结构

已经对紧流形上旗结构的变形理论展开了研究（[4]）

参考文献

[1] Borel, A , Linear algebraic groups, Benjamin, 1969

[2] Humphreys, J E , Linear algebraic groups, Springer, 1975

[3] Бернштейн, И Н , Гельфанд, Н М , Гельфанд, С И , 《Успехи матем наук》, **28** (1973), 3, 3－26

[4] Kodaira, K and Spencer, D C , Multifoliate structure, *Ann of Math* , **74** (1961), 52 － 100

Д В Алексеевский 撰　沈纯理 译

平坦形式 [flat form, бемольная форма]

开集 $R\subset E^n$ 上的一个可测的 r 维微分形式 ω，使得 1) 对给定的 N_1，上质量（见**质量和上质量**（mass and co-mass））$|\omega|_0\leqslant N_1$，2) 对任何满足条件（有一个可测的 $Q\subset R$，$|R\setminus Q|_n=0$，使得 ω 在 σ^{r+1} 和构成它的边界 $\partial\sigma^{r+1}$ 的任何一个 σ^r 上是可测的，进一步

$$|\sigma^{r+1}\setminus Q|_{r+1}=0,\ |\sigma^r\setminus Q|_r=0\ ,$$

这里 $|M|_s$ 表示集合 M 与某个 s 维平面的交的 s 维 Lebesgue 测度）的单形 σ^{r+1}，存在 N_2，有

$$\left|\int_{\partial\sigma^{r+1}}\omega\right|\leqslant N_2|\sigma^{r+1}|$$

如果 X 是 R 中的 r 维平坦上链（flat cochain），则在 R 中存在一个有界的 r 维形式 ω_X，它在任何单形 σ^r 中关于包含 σ^r 的平面是可测的，而且

$$X\sigma^r=\int_{\sigma^r}\omega_X \tag{1}$$

又

$$|\omega_X|_0=|X|\ ,\quad |\omega_{dX}|_0=|dX|\ ,$$

其中 $|X|$ 是上链 X 的上质量．反过来，对 R 中的任何 r 维平坦形式 ω，按公式（1），对任何满足上面条件的单形 σ^r，有唯一的 r 维平坦上链 X_ω 相对应，而且

$$|X_\omega|\leqslant N_1,\quad |dX_\omega|\leqslant N_2$$

形式 ω 和上链 X 称为相伴的（associated）．与同一个上链相伴的形式是等价的，即在 R 中是几乎处处相等的，并且包括平坦表示．

在 n 维平坦上链 X 和等价的有界可测函数 $\varphi(p)$ 的类之间存在一一对应，它用 $\omega_X=\varphi(p)\,dp$ 给出，并且

$$\varphi(p)=\lim_{i\to\infty}\frac{X\sigma_i}{|\sigma_i|}\ ,$$

其中 $\sigma_1,\ \sigma_2,$　是收缩趋于点 p 的 n 维单形序列，使得它们的直径趋于零，但是，对 η 的某个值，有

$$\frac{|\sigma_i|}{(\operatorname{diam}\sigma_i)^n}\geqslant\eta\ ,$$

其中对所有的 i，$|\sigma_i|$ 是 σ_i 的体积．

设 $\alpha(p)$ 是 R 中的可测可和函数，其值是 r 向量．它称为与一个 r 维平坦链相对应，如果对所有 r 维平坦上链 X 有

$$\int_R\omega_X\cdot\ \alpha\ =X\cdot A \tag{2}$$

（A 因此称作 Lebesgue 链（Lebesgue chain））映射 $\alpha\to A$ 是函数 $\alpha(p)$ 的等价类的集合到平坦链空间 $C_r^b(R)$ 中的一对一的线性映射，也有 $|A|=\int_R|\alpha|_0$，其中 $|A|$ 是链 A 的质量（见**质量和上质量**（mass and co-mass）），$|\alpha|_0$ 是 r 向量（r-vector）$\alpha(p)$ 的质量．另外，连续函数 α 的象集在 $C_r^b(R)$ 中是稠密的．

公式（1）和（2）对锐形式和锐上链有推广的类似结果（见**尖锐形式**（sharp form）），例如，用公式 $d\omega_X=\omega_{dX_\omega}$ 定义的平坦形式的微分也是平坦形式，并且 Stokes 定理 $\int_{\partial\sigma}\omega=\int_\sigma d\omega$ 对任何单形 σ 是成立的，一个 r 维的平坦上链是光滑上链（smooth cochains）的弱极限，即对此上链与之相伴的形式 ω 是光滑的，等

等.

参考文献

[1] Whitney, H, Geometric integration theory, Princeton Univ Press, 1957

M И Войцеховский 撰 徐森林 译 薛春华 校

平坦模 [flat module, плоский модуль]

结合环 R 上张量积函子 $\otimes_R M$(对应地，$M\otimes_R$)正合的左(或右)模 M 此定义与下列每条均等价 1)函子 $\mathrm{Tor}_1^R(-, M)=0$(对应地，$\mathrm{Tor}_1^R(M,-)=0$)，2)模 M 可表示为自由模直和项的方向(内射)极限，3)特征模 $M^*=\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ 是内射的，这里 $\mathbf{Q}$ 是有理数群，$\mathbf{Z}$ 是整数群，4)对 R 的任意右(对应地，左)理想 J，典范同态

$$J\otimes_R M\to JM(M\otimes_R J\to MJ)$$

是同构

投射模和自由模是平坦模的例子(见**投射模** (projective module)，**自由模**(free module)整数环上平坦模类重合于无挠 Abel 群类，当且仅当环 R 在 von Neumann 意义下正则时(见**绝对平坦环**(absolutely - flat ring))，R 上所有模是平坦模．凝聚环 R 可定义为其上任意个 R 的拷贝的直积 $\prod R_\alpha$ 是平坦模的环 对环 R 的一个理想的幂进行局部化和完全化导出环上的平坦模(见 **adic 拓扑** (adic topology)) 环 R 的经典分式环是 R 上平坦模

参考文献

[1] Cartan, H and Eilenberg, S, Homological algebra, Princeton Univ Press, 1956

[2] Lambek, J, Lectures on rings and modules, Blaisdell, 1966

В Е Говоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bourbaki, N, Commutative algebra, Addison - Wesley, 1964(译自法文)

朱胜林 译 许永华 校

平坦态射 [flat morphism, плоский морфизм]

概形的**态射** (morphism) $f\ X\to Y$，使得对于任意的点 $x\in X$，局部环 $\mathcal{O}_{X,x}$ 在 $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ 上是平坦的 (见**平坦模** (flat module))．一般地，设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{O}_X$ 模层，$\mathcal{F}$ 称为于点 $x\in X$ 处在 Y 上**平坦的** (flat)，如果 $\mathcal{F}_x$ 是环 $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ 上的平坦模 在某些(相当弱的)有限性条件下，凝聚 $\mathcal{O}_X$ 模层 $\mathcal{F}$ 在 Y 上平坦的那些点的集合是 X 中的开集．更进一步地，如果 Y 是整概形，则存在非空开子集 $U\subset Y$，使得 $\mathcal{F}$ 在 X 的所有位于 U 上的点处是 Y 上平坦层．

与有限型平坦态射对应的直观的概念是簇的连续族 平坦态射是开的和等维的 (即对于 $y\in Y$，纤维 $f^{-1}(y)$ 的维数是局部常数)．对于许多几何性质而言，平坦态射 $f\ X\to Y$ 的纤维 $f^{-1}(f(x))$ 具有该性质的点 $x\in X$ 的集合在 X 中开．如果平坦态射是真的 (见**真态射** (proper morphism))，则其上纤维具有该性质的点 $y\in Y$ 的集合是 Y 中的开集 ([1])．

平坦态射在下降理论中也有应用．如果概形的态射是平坦的且是满射，则称为**忠实平坦的** (faithfully flat)．通常，要验证 Y 上某个对象的任何性质，只需简单地验证在忠实平坦**换基** (base change) $f\ C\to Y$ 下对应对象的同样性质 ([1])．因此，令人感兴趣的是寻找态射 $f\ X\to Y$(或 $\mathcal{O}_X$ 模 $\mathcal{F}$)的平坦性准则，这里的 Y 可被看作局部概形．当基 Y 是一维正则概形时，有一个最简单的准则 凝聚 $\mathcal{O}_X$ 模 $\mathcal{F}$ 是平坦的，当且仅当 Y 的单值化参数在 $\mathcal{F}$ 中只有平凡的零化子．在某种意义下，一般情形可以归结为一维的情形 设 Y 为约化 Noether 概形，$Z\to Y$ 为任何态射，这里 Z 是一维正则概形，如果基变换 $f_Z\ X_Y\times Z\to Z$ 是平坦态射，则 f 是平坦态射．另一平坦性准则是，如果 Y 和几何纤维 $f^{-1}(\bar{y})$ 是约化的，要求 $f\ X\to Y$ 是普遍开的

参考文献

[1A] Grothendieck, A and Dieudonne, J, Eléments de géométrie algébrique, *Publ Math IHES*, **24**(1964),

[1B] Grothendieck, A and Dieudonne, J, Elements de géométrie algebrique, *Publ Math IHES*, **28**(1966),

[2] Mumford, D, Lectures on curves on an algebraic surface, Princeton Univ Press, 1966

[3] Raynaud, M and Gruson, L, Critères de platitude et de projectivite Techniques de 'platification' d'un module, *Invent Math*, 13(1971), 1-89

В И Данилов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hartshorne, R, Algebraic geometry, Springer, 1977

蔡金星 译

平坦范数 [flat norm, бемольная норма]

空间 E_n 中的一个 r 维多面链 A 的范数 $|A|^b$，它定义如下

$$|A|^b=\inf\{|A-\partial D|+|D|\},$$

其中 $|C|$ 是链 C 的质量(见**质量和上质量**(mass and co-mass))，∂C 是它的边界，并且下确界是在所有 $r+1$ 维多面链上取的 对任何胞腔 σ，平坦范数有性质

$$|aA|^b=|a|\,|A|^b,\ |A+B|^b\leqslant|A|^b+|B|^b,$$
$$|A|^b=0\Longleftrightarrow A=0,\ |A|^b\leqslant|A|,\ |\sigma|^b=|\sigma|,$$

如果 π 是 E^n 到某个平面上的投影，则有 $|\pi A|^b\leqslant|A|^b$

多面链的线性空间 $C_r(E^n)$ 的**完全化**（completion）是可分 Banach 空间 $C_r^b(E^n)$，它的元素称为 r 维平坦链（flat chains），对它每一个无限或有限的质量可以规定 $|A|_b = \inf\{\lim\inf_{i\to\infty}|A_i|,\ A_i \to_b A$ 作为多面链$\}$

平坦链的边缘 ∂ 也是通过取极限定义的，它是连续运算，并且

$$|\partial A|^b \leqslant |A|^b,\ |A|^b = \inf\{|A-\partial D|^b + |D|^b\}.$$

平坦范数是 $C_r(E^n)$ 上的拟范数 $|\cdot|'$ 对所有胞腔 σ 满足不等式 $|\sigma^r|' \leqslant |\sigma^r|$，$|\partial\sigma^{r+1}|' \leqslant |\sigma^{r+1}|$ 的最大值　一个 r 维平坦上链（flat cochain）X 是 r 维平坦链 A 的线性函数（用 $X\cdot A$ 表示），使得对给定的 N，有

$$|X\cdot A| \leqslant N|A|^b\ ,$$

其中 $|X|$ 是 X 的上质量．它是对偶于 $C_r^b(E^n)$ 的不可分空间 $C^{br}(E^n)$ 的一个元素．平坦上链 X 的平坦范数（flat norm）$|X|^b$ 用标准的方式定义为

$$|X|^b = \sup_{|A|^b=1} |X\cdot A|\ ,$$

因此

$$|A|^b = \sup_{|X|^b=1} |X\cdot A|,\ |X\cdot A| \leqslant |X|^b|A|^b,$$

及

$$|X| \leqslant |X|^b$$

对平坦链的上边缘（co-boundary）dx（由条件 $dX\cdot A = X\cdot dA$ 定义），有

$$|dX|^b \leqslant |X|^b,$$

因此

$$|X|^b = \sup\{|X|,\ |dX|\}$$

对位于开子集 $R\subset E^n$ 中的多面的 r 维链引入了类似的概念　也见**平坦形式**（flat form）

参考文献

[1] Whitney, H , Geometric integration theory, Princeton Univ Press, 1957

М И Войцеховский 撰　徐森林 译　薛春华 校

平坦点 [flat point, уплощения точка]

正则曲面上那些使密切抛物面退化为平面的点．在平坦点处，Dupin 标形没有定义，Gauss 曲率等于零且第二基本形式及所有其他的曲率也等于零．

曲线上挠率为零的点称为空间曲线的平坦点．

Д Д Соколов 撰

【补注】平坦点有时也被称为平点（planar point）　当然此术语是由于零曲率性质而被引入的．

参考文献

[A1] Hsiung, C C , A first course in differential geometry, Wiley, 1981

沈纯理 译

Floquet-Ляпунов 定理 [Floquet-Lyapunov theorem, Флоке-Ляпунова теорема]

见 **Floquet 理论**（Floquet theory）．

Floquet 理论 [Floquet theory, Флоке теория]

关于**周期系数的线性微分方程组**（linear system of differential equations with periodic coefficients）

$$x' = A(t)x,\quad t\in\mathbf{R},\quad x\in\mathbf{R}^n \tag{1}$$

解空间的结构和解的性质的理论，其中矩阵 $A(t)$ 对 t 是周期的，具有周期 $\omega>0$，并且在 $\mathbf{R}$ 中的每个紧区间上都是可积的．

1）系统（1）的每个**基本矩阵**（fundamental matrix）有表达式

$$X(t)=F(t)\exp(tK), \tag{2}$$

称为 Floquet 表示（Floquet representation）（见 [1]），其中 $F(t)$ 是一个 ω 周期矩阵，K 是一个常数矩阵．存在（1）的解空间的一组基 $x_1,\ \ ,x_n$，使得在这组基中 K 有 Jordan 形式，这组基能表示成形式

$$x_i = (\psi_{1i}\exp(\alpha_i t),\ \ ,\psi_{ni}\exp(\alpha_i t)),$$

其中 ψ_{ki} 是 t 的具有 ω 周期系数的多项式，α_i 是方程组（1）的**特征指数**（characteristic exponent）．（1）的解的每个分量是 $\psi_{ki}\exp(\alpha_i t)$ 这种形式的函数（Floquet 解）的线性组合　在所有的特征指数都不相同的情况下（或者在它们之中有相重的特征指数，但它们对应于单初等因子），ψ_{ki} 是简单的 ω 周期函数．在表达式（2）中的矩阵 $F(t)$ 和 K 一般是复值的．如果仅限制在实值的情况，那么 $F(t)$ 并不一定是 ω 周期的，但必须是 2ω 周期的．

2）用 Ляпунов 转换

$$x=F(t)y, \tag{3}$$

方程组（1）能化成具有常系数矩阵的微分方程 $y'=Ky$，其中 $F(t)$ 和 K 来自 Floquet 表示（2）（见 [2]）　表达式（2）和转换（3）合在一起常常称为 Floquet-Ляпунов 定理（Floquet-Lyapunov theorem）

3）设 $\{\alpha_1,\ \ ,\alpha_l\}$ 是矩阵 K 的谱．对每一个满足 $\alpha\neq\operatorname{Re}\alpha_j\ (j=1,\cdots,l)$ 的 $\alpha\in\mathbf{R}$，由（2），空间 $\mathbf{R}^n$ 分解成两个子空间 S_α 和 U_α 的直和

$$(\mathbf{R}^n = S_\alpha + U_\alpha, \ S_\alpha \cap U_\alpha = \phi),$$

使得

$$\lim_{t\to+\infty} \exp(-\alpha t) V(t) x(0) = 0 \Longleftrightarrow x(0) \in S_\alpha,$$

$$\lim_{t\to-\infty} \exp(-\alpha t) V(t) x(0) = 0 \Longleftrightarrow x(0) \in U_\alpha,$$

其中 $V(t)$ 是在零点规范的 (1) 的基本矩阵　如果对任何 $j=1,\ \ ,l$, $\mathrm{Re}\alpha_j \neq 0$，这蕴涵着 (1) 的指数**二分性** (dichotomy)

参考文献

[1] Floquet G, *Ann Sci Ecole Norm Sup*, **12** (1883), 2, 47－88

[2] Ляпунов, А М, Собр соч, т 2, М -Л, 1956, 7－263

[3] Демидович, Б П, Лекции по математической теории устойчивости, М, 1967

[4] Якубович, В А, Старжинский, В М, Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М, 1972 (英译本 Yakubovich, V A and Starzhinskii, V M, Linear differential equations with periodic coefficients, Wiley, 1975)

[5] Massera, J L and Shaffer, J J, Linear differential equations and function spaces, Acad Press, 1966

[6] Еругин, Н П, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Минск, 1963 (英译本 Erugin, N P, Linear systems of ordinary differential equations with periodic and quasi-periodic coefficients, Acad Press, 1966)

Ю В Комленко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hale, J K, Ordinary differential equations, Wiley, 1969

[A2] Hartman, P, Ordinary differential equations, Birkhauser, 1982

周芝英 译　叶彦谦 校

流（连续时间动力系统）[flow (continuous-time dynamical system), поток, динамическая система с непрерывным временем]

由实数 **R** 加法群（或非负实数加法半群）在相空间 W 上的作用所确定的**动力系统** (dynamical system)．换句话说，对每个 $t\in\mathbf{R}$（对每个 $t\geqslant 0$）对应有变换 S_t $W \to W$ 满足

$$S_0(w)=w \quad 且 \quad S_{t+s}(w)=S_t(S_s(w))$$

在此情形 t 常称为"时间"并且 S_tw 对 t 的依赖关系（对一固定的 w）称为点 S_tw 的"运动"，对给定的 w，一切 S_tw 的集合称为 w 的轨道 (trajectory 或 orbit)（有时此术语用来描述函数 $t\to S_tw$）　正如传统动力系统那样，流的相空间通常被赋予某种结构使流与之相协调　变换 S_t 保持这种结构，而且对 S_tw 依赖于 t 的特性方面加上一定条件

在应用上常遇到用自治常微分方程组（见**自治系统** (autonomous system)）

$$\dot{w}_i = f_i(w_1, \ \ , w_m), \ i=1, \ \ , m, \tag{*}$$

或用向量记号 $\dot{w}=f(w)(w\in\mathbf{R}^n)$ 来描述的流　流的直接推广为微分流形上的流 (flow on a differentiable manifold) W^m，后者用类 $C^k(k\geqslant 1)$ 的光滑向量场 $f(w)$（类 C^k 的光滑流 (smooth flow)）来定义（生成）．此时，点 S_tw 的运动当停留在一个卡（局部坐标系）内时，是用形式为 (*) 的方程组来描述的，且在 (*) 右边可求出向量 $f(w)$ 在相应坐标下的分量．在转换到另一卡时，上述运动的描述要改变，因为此时点 S_tw 的坐标以及作为局部坐标的函数 $f(w)$ 的分量表示两者均要改变　亦见**可测流** (measurable flow)，**连续流** (continuous flow)，**拓扑动力系统** (topological dynamical system)

流构成动力系统的最重要的类并且是最先被研究的．术语"动力系统"常用于狭义情形，确切地表示一个流（或表示一个流与一个**瀑布** (cascade)）

Д В Аносов 撰

【补注】 关于连续，可测或光滑流的一般介绍，可分别参看 [A1], [A2] 与 [A3]

参考文献

[A1] Bhatia, N P and Szego, G P, Stability theory of dynamical systems, Springer, 1970

[A2] Cornfeld, I P, Fomin, S V and Sinai, Ya G. Ergodic theory, Springer, 1982 (译自俄文)

[A3] Palis, J and de Melo, W, Geometric theory of dynamical systems, Springer, 1982

郑维行 译

网络中的流 [flow in a network, поток в сети]

对所给**网络图** (network graph)（定向图）的弧赋予一定数的一个函数　每个数解释为沿着所给弧的流的强度．在研究运输、通信以及其他有关货物运送、信息传递等领域内的许多问题中，网络中的流构成一个方便的模型．许多有关流的问题都是线性规划中的问题，并且可以用此理论的一般方法来解决．然而，有关流的大多数问题通过图论方法就可以得到有效的解．

假设对于网络 N 的每条弧 (x,y) 赋予一个非负实数 $c(x,y)$——弧 (x,y) 的传输容量．流 $f(x,y)$ 称为从顶点 r 到顶点 s 满足关于弧的传输容量限制的 v 值定常流，如果

$$f^{-}(r)-f^{+}(r)=v,$$

$$f^{-}(x)-f^{+}(x)=0,\ 对于\ x\neq r,s,$$

$$f^{-}(s)-f^{+}(s)=-v$$

$$0\leqslant f(x,y)\leqslant c(x,y),\ 对于任意弧\ (x,y)$$

这里$f^{-}(x)=\sum_{y} f(x,y)$为离开顶点x的流，$f^{+}(x)=\sum_{y} f(y,x)$为进入顶点x的流．在两个顶点之间的最大流问题(problem of maximum flow 或 max-flow problem)中，要求构造一个从顶点r到顶点s的最大可能值v的定常流．解这种问题已有有效的算法 设X为网络N的顶点的一个子集，满足$r\in X$, $s\notin X$, 那么使得$x\in X$, $y\notin X$的弧 (x,y) 的集合称为一个割 (cut) 割的传输容量为值$\sum_{x\in X\ y\notin X} c(x,y)$ 下面的关于最大流和最小割定理 (theorem on maximum flow and minimum cut 或 max-flow-min-cut theorem) 成立 流的最大值等于割的最小传输容量 在实际应用中，我们经常使用整性定理 (integrality theorem) 如果每条弧的传输容量是一个整数，则存在一个整数最大 (定常) 流．

不少问题可归结为两个顶点间最大流问题 具有几个发点与收点网络中的最大流问题，沿弧的流都具有非负下界与上界的网络中的最大流问题，在未定向与混合网络中的最大流问题，具有给定弧的传输容量与给定顶点的网络中的最大流问题，等等

最大流最小割定理揭示了以前在图论与组合分析中所得到的一些结果的共同基础 业已证明下列定理可作为此定理的推论来得到 二部图 (graph, bipartite) 的最大匹配定理，关于相异代表定理，关于图的k连通性定理 (见**图的连通性** (graph, connectivity of a))，关于用最小数量的链覆盖一个半序集的定理，等等．将各种问题归结为最大流问题是图论和组合分析中的一种重要方法

在许多网络流问题中，每条弧 (x,y) 对应一个数$a(x,y)$ (沿弧 (x,y) 的单位货物的运费)，并要求寻求一条在一定约束下总费用最小的流 最小费用流问题 (problem of a flow of minimum cost 或 min-cost-flow problem)，就在于寻求一条从顶点r到顶点s在弧的传输容量的约束下，使其绝对值等于给定的数v以及费用最小的定常流．

在运输问题 (transportation problems) 中，网络是一个二部图．一部分顶点S_1, , S_m被解释为某些货物的发点，另一部分顶点T_1, , T_n, 为目标点．每个发点S_i有一定的供应b_i, 每个目标点T_j有一定的需求c_j 设a_{ij}为每单位货物从S_i到T_j所给定的运费．问题是在所有目标的需求约束下，寻求一条最小费用流．

还可考虑多种产品流和按时间改变的流

参考文献

[1] Ford, L R and Fulkerson, D R, Flows in networks, Princeton Univ Press 1962

В Б Алексеев 撰

【补注】 最大流最小割定理属于L R Ford与D R Fulkerson

参考文献

[A1] Bondy, J A and Murty, U S R, Graph theory with applications, McMillan, 1976, Chapt 11

[A2] Hu, T C, Integer programming and network flows, Addison-Wesley, 1969

[A3] Smith, D K, Network optimization practice a computational guide, Chichester, 1982

[A4] Lawler, E L, Combinatorial optimization networks and matroids, Holt, Rinehart and winston, 1976

[A5] Tarjan, R E, Data structures and network algorithms, SIAM, 1983

[A6] Tardos, E, A strongly polynomial minimum cost circulation algorithm, *Combinatorica*, **5** (1985), 247−255

[A7] Goldberg, A V and Tarjan, R E, Finding minimum-cost circulations by successive approximation, *Math of Operations Research* (To appear)

[A8] Minieka, E, OPtimization algorithms for networks and graphs, M Dekker, 1978

[A9] Kennington, J and Helgason, R, Algorithms for network programming, Wiley, 1980

胡宣达 译

向量场的流量 [**flux of a vector field, поток векторного поля**]

向量场理论中的一个概念 向量场 **a** 通过曲面∂V的流量由曲面积分

$$\iint_{\partial V}(\mathbf{a},\mathbf{n})ds=\iint_{\partial V}(a_x dydz+a_y dxdz+a_z dxdy)$$

来表示(确定到只差正负号)，其中 **n** 是曲面∂V的单位法向量(假设向量 **n** 在曲面∂V上连续地变化)．流体速度场的流量等于单位时间内通过曲面∂V的流体的体积．

БСЭ-3

【补注】 微分向量场 **a** 的流量(由上面的公式定义的)同 **a** 的**散度**(divergence)之间的关系是

$$\iint_{\partial V}(\mathbf{a},\mathbf{n})ds=\iiint_{V}(\nabla,\mathbf{a})dV,$$

其中dV是V中的体积元素，∇是 **Hamilton 算子**(Hamilton operator)，$\nabla=(\partial/\partial x^1,\ \ ,\partial/\partial x^n)$ 这个等式称为散度定理(divergence theorem)，或称为空间中的Green 定理(Green theorem in space)(见[A1])和 **Stokes 定理**(Stokes theorem)

参考文献

[A1] Spivak, M, Calculus on manifolds, Benjamin, 1965 (中译本 M 斯皮瓦克，流型上的微积分，科学出版社，1980)

张鸿林 译

线汇的焦网[focal net of a congruence，фокальная сеть конгруэнции]

在线汇(双曲线汇)的焦曲面上由该线汇的包络曲面所割出的一个网．线汇的焦网是一个**共轭网**(conjugate net) 它的一族直线由线汇的一族包络曲面的尖点所构成，另一族由一些直线所形成，在这些直线处，另一族的包络曲面切于焦曲面 二维曲面上每一个共轭网是切于此网的一族直线的线汇的一个焦网．每一个双曲的线汇有两个焦网

参考文献

[1] Фиников，С П，Теория контруэнций，М -Л，1950

沈纯理 译

Фок空间[Fock space，Фока пространство]

在最简单和最经常应用的情况，包含无穷序列形式为

$$F=\{f_0, f_1, \quad, f_n, \quad\} \tag{1}$$

的一个**Hilbert空间**(Hilbert space)，这里

$$f_0\in \mathbf{C}, f_1\in L_2(\mathbf{R}^\nu, d^\nu x), f_n\in L_2^s((\mathbf{R}^\nu)^n, (d^\nu x)^n),$$

或

$$f_n\in L_2^a((\mathbf{R}^\nu)^n, (d^\nu x)^n), n=2, 3, \quad, \nu=1, 2, \cdot,$$

其中

$$L_2^s((\mathbf{R}^\nu)^n, (d^\nu x)^n) \text{ 或 } L_2^a((\mathbf{R}^\nu)^n, (d^\nu x)^n)$$

分别表示n个变量$x_1, \quad, x_n\in \mathbf{R}^\nu (n=2, 3, \quad)$的对称或反对称函数的Hilbert空间．形式(1)的两个序列F和G的标量积等于

$$(F, G)=f_0\bar{g}_0+\sum_{n=1}^{\infty}(f_n, g_n)_{L_2((\mathbf{R}^\nu)^n, (d^\nu x)^n)}.$$

当序列F由对称函数组成的情况下，人们论及的是对称(symmetric) (或Bose子(boson))Фок空间，而当序列F由反对称函数组成的情况下，人们论及的是反对称(anti-symmetric) (或Fermi子(fermion))Фок空间 Фок空间是在这个最简单情况下由B．A．Фок首先引进的(见[1])．

在任意Hilbert空间H的一般情况，在H上构造的Фок空间$\Gamma_s(H)$ (或$\Gamma_a(H)$)是H的对称(或反对称)张量指数函数，即，空间

$$\Gamma^\alpha(H)\equiv \exp_\alpha H=\oplus\sum_{n=0}^{\infty}(H^{\otimes n})_\alpha, \alpha=s, a, \tag{2}$$

其中符号$\oplus$表示Hilbert空间的正交直和，$(H^{\otimes 0})_\alpha=\mathbf{C}^1$，$(H^{\otimes 1})_\alpha=H$，和$(H^{\otimes n})_\alpha$，$n>1$，对$\alpha=s$是对称化或对$\alpha=a$是反对称化$H$的$n$次张量幂．在$H=L_2(\mathbf{R}^\nu, d^\nu x)$的情况，定义(2)等价于本文开始所给Фок空间的定义，如果等同$L_2^\alpha((\mathbf{R}^\nu)^n, (d^\nu x)^n)$和$(L_2(\mathbf{R}^\nu, d^\nu x))_\alpha^{\otimes n}$使得函数序列

$$f_1, \quad, f_n\in L_2(\mathbf{R}^\nu, d^\nu x)$$

的张量积

$$(f_1\otimes \cdot \otimes f_n)_\alpha\in (L_2(\mathbf{R}^\nu, d^\nu x))_\alpha^{\otimes n}$$

对应于函数

$$\frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_\sigma(\pm 1)^{\operatorname{sign}\sigma}\prod_{i=1}^{n}f(x_{\sigma(i)})\in L_2^\alpha((\mathbf{R}^\nu)^n, (d^\nu x)^n), \tag{3}$$

其中$\sum_\sigma$是对指标1, $\quad$, n的所有排列σ求和，$\operatorname{sign}\sigma$是排列$\sigma$的奇偶符，而(3)中的正负号$+1$或$-1$分别对应于对称或反对称情况

在量子力学中，Фок空间$\Gamma^s(H)$或$\Gamma^a(H)$用作由任意(但有限)数目全同粒子组成的量子力学系统的态空间，以致每个单独粒子的态空间是H 这里，依赖于描述这个系统的是什么Фок空间——对称的$\Gamma^s(H)$或反对称的$\Gamma^a(H)$，相应地，粒子本身分别称为Bose子(bosons)或Fermi子(fermions) 对于每个$n=1, 2, \quad$，子空间$\Gamma_n^\alpha(H)\equiv(H^{\otimes n})_\alpha\subset\Gamma^\alpha(H)$ $(\alpha=s, a)$称为n粒子子空间(n-particle subspace) 其中的向量描述恰好有n个粒子的那些态，单位向量$\Omega\in(H^{\otimes 0})_\alpha\subset\Gamma^\alpha(H)$, $\alpha=s, a$ (用(1)的记号 $\Omega=\{1, 0, \quad, 0, \quad\}$)，称为真空向量(vacuum vector)，描述没有任何粒子的系统的态

在研究作用于Фок空间$\Gamma^s(H)$或$\Gamma^a(H)$的线性算子时，人们通常应用一个称为二次量子化方法(method of second quantization)的特殊形式体系．它是基于对每个空间$\Gamma^\alpha(H)$引进两个线性算子族 所谓**湮没算子** (annihilation operators) $\{a_\alpha(f) \ f\in H\}$ $(\alpha=s, a)$和与之伴随的算子族，所谓**产生算子**(creation operators) $\{a_\alpha^*(f). f\in H\}$ $(\alpha=s, a)$ 湮没算子给出为作用于向量

$$(f_1\otimes \quad \otimes f_n)_\alpha\in\Gamma^\alpha(H), \alpha=s, a \tag{4}$$

算子的闭包，其中$(f_1\otimes \quad \otimes f_n)_\alpha$是向量序列$f_1, \quad, f_n\in H (n=1, 2, \quad)$的对称化$(\alpha=s)$或反对称化$(\alpha=a)$张量积，按照公式

$$a_\alpha(f)\ (f_1\otimes \quad \otimes f_n)_\alpha=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{g_\alpha(i)}(f_i, f)\times$$

$$\times(f_1\otimes \quad \otimes f_{i-1}\otimes f_{i+1}\otimes \quad \otimes f_n)_\alpha,$$

$$\alpha=s, a, a_\alpha(f)\Omega=0,$$

其中$g_s(i)=0$和$g_a(i)=i-1$ 产生算子作用于向量(4)按照公式

$$a_\alpha^*(f)\ (f_1\otimes \cdot \otimes f_n)_\alpha=(f\otimes f_1\otimes \quad \otimes f_n)_\alpha,$$

$$a_\alpha^*(f)\Omega=f$$

这里对于每个$f\in H$，$a_\alpha(f)$ $\Gamma_n^\alpha(H)\to\Gamma_{n-1}^\alpha(H)$，$n=1,2,$ ，和 $a_\alpha^*(f)$ $\Gamma_n^\alpha(H)\to\Gamma_{n+1}^\alpha(H)$，$n=0,1,$ ，即，具有n个粒子的物理系统的态被湮没算子$a_\alpha(f)$映射到具有$(n-1)$个粒子的态，而被产生算子$a_\alpha^*(f)$映射到具有$(n+1)$个粒子的态 产生算子和湮没算子在类似系统的许多情况下作为作用于Фок空间所有（有界或无界）算子总体中的“生成元”而出现 这类算子用形式为

$$a_\alpha^*(f_1)\quad a_\alpha^*(f_n)a_\alpha(g_1)\quad a_\alpha(g_m)$$

$$(f_1,\quad ,f_n,g_1,\quad ,g_m\in H,\ n,m=0,1,\quad)$$

的算子——所谓一个算子的范式（normal form of an operator）的（有限或无限）和的形式的表示，以及以这种表示为基础的算子处理法（计算它们的函数，将算子化为“最简”形式，各种近似例子，等等）也构成上面提到过的二次量子化形式体系的主要内容（见[2]）

在实空间H上对称Фок空间$\Gamma_s(H)$的情况，这些空间与Gauss线性随机过程$\{\xi_f\ f\in H\}$中平方可积泛函的Hilbert空间之间有一个典范同构，该随机过程$\{\xi_f\ f\in H\}$定义于H上，使得

$$M_{\xi_f}=0,\ M(\xi_{f_1},\xi_{f_2})=(f_1,f_2)_H,\ f,f_1,f_2\in H.$$

这个同构，称为伊藤-Segal-Wick映射（Itô-Segal-Wick mapping），由下列条件唯一确定，条件是对元素$f_1,\quad ,f_k\in H$的任何规范正交系和非负整数$n_1,\quad ,n_k$的总体，向量

$$f_1\otimes\quad\otimes f_1\otimes\quad\otimes f_k\otimes\quad\otimes f_k\in\Gamma^s(H)$$

（n_1个f_1，　，n_k个f_k）映射到泛函

$$\prod_{i=1}^{k}H_{n_i}(\xi_{f_i}),$$

其中$H_n(\cdot)$（$n=0,1,\quad$）是具有首项系数为1的Hermite多项式（见[3]，[4]）

参考文献

[1] Fock, V, Z Phys, 75 (1932), 622 – 647

[2] Березин, Ф А, Метод вторичного квантования, М, 1965 (英译本 Berezin, F A, The method of second quantization, Acad Press, 1966, Revised (augmented) second edition Kluwer, 1989)

[3] Добрушин, Р Л, Минлос, Р А, 《Успехи матем наук》, 32 (1977), 2, 67 – 122

[4] Simon, B, The $P(\phi)_2$-Euclidean (quantum) field theory, Princeton Univ Press, 1974

P A Минлос 撰

【补注】 粒子数算子（number operator）$\sum_f a_\alpha^*(f)a_\alpha(f)$（$\alpha=a,s$），其中$f$取遍$H$的规范正交基，具有带本征值$n$的空间$\Gamma_n^\alpha(H)$作为本征空间．它被解释为给出粒子数

Фок空间还在随机积分（包括Fermi子的积分）中（见**随机积分**（stochastic integral））和在**白噪声分析**（white noise analysis）中起重要作用．

参考文献

[A1] Bogolubov, N N, Logunov, A A and Todorov, I T, Introduction to axiomatic quantum field theory, Benjamin, 1975

[A2] Bongaarts, P J M, The mathematical structure of free quantum fields Gussian systems, in E A de Kerf and H G J Pijls (eds) Proc Seminar Mathematical structures in field theory, CWI, Amsterdam, 1984 – 1986, 1 – 50

徐锡申 译

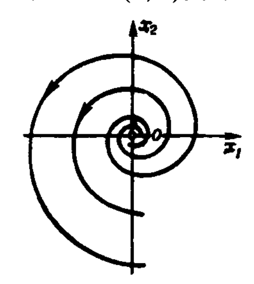
焦点 [focus, фокус]

一阶常微分方程自治系统

$$\dot{x}=f(x),\ x=(x_1,x_2),\ f:G\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2\qquad(*)$$

轨道的一种结构类型，$f\in C(G)$，其中G是在奇点x_0的邻域内的唯一性区域（见**平衡位置**（equilibrium position））这种类型的特征如下．存在x_0的邻域U使得所有在$U\setminus\{x_0\}$中开始的系统轨道，其负半轨道跑开（在时间的进程中它们离开任何紧集$V\subset U$）但正半轨道不离开U而趋于x_0，围绕着x_0转像**对数螺线**（logarithmic spiral），或者反过来．x_0点本身也称为焦点．如果在(x_1,x_2)平面上引进极点在x_0上的极坐标r,φ，则系统轨道趋近x_0的特性就能更准确地描述 这时对任何趋于x_0的半轨道$r=r(t)$，$\varphi=\varphi(t)$，$t\geqslant0$（$t\leqslant0$），当$t\to\infty$时，可变点的极角$\varphi(t)\to+\infty$（左焦点）或$-\infty$（右焦点）．

一个焦点或是渐近Ляпунов稳定或是完全不稳定的（当$t\to-\infty$时渐近稳定）．它的Poincaré指数为1 下图描绘的是一个在$x_0=(0,0)$点右不稳定的焦点



对于$C^1(f\in C^1(G))$类的系统$(*)$，在矩阵$A=f'(x_0)$有非零实部的复共轭本征值的情况下，奇点x_0是一个焦点，但是在矩阵A有纯虚数或重的实本征值的情况下，它也可以是一个焦点（亦见**中心**（centre），**中心和焦点问题**（centre and focus problem））．

参考文献见微分方程的**奇点** (singular point).

А Ф Андреев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hartman, P, Ordinary differential equations, Birkhauser, 1982

周芝英 译 叶彦谦 校

曲线的焦点 [focus of a curve, фокус]

二阶曲线所在平面上的点 F, 使得曲线上任意点到 F 的距离与到一给定直线 (准线 (directrix)) 的距离之比为一常数 (离心率 (eccentricity)) 亦见**圆锥截线** (conic sections)

二阶曲线的焦点能定义为平面的**圆点** (circular points) 到该曲线的切线的交点 此定义亦能被推广至 n 阶代数曲线.

А Б Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M, Geometry, Springer, 1987, Chapt 17

[A2] Coolidge, J, Algebraic plane curves, Dover, 1959, p 171, 180, 183, 192

沈纯理 译

Fokker-Planck 方程 [Fokker-Planck equation, Фоккера-Планка уравнение]

一个关于扩散型连续 Марков 过程的转移密度的方程 它与向前 (或直接) **Колмогоров 方程** (Kolmogorov equation) 相同. 亦见**扩散过程** (diffusion process)

刘秀芳 译

折点 [fold, свертка]

【补注】 可微映射的一种类型奇点 (见**可微映射的奇异性** (singularities of differentiable mappings))

设 f $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 为 C^∞ 函数. 称 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ 为 f 的折点, 若

$$\dim \operatorname{Ker} f'(x_0) = \dim \operatorname{Coker} f'(x_0) = 1,$$

并且 f 在 x_0 的 Hesse 式不等于零 (见 **Hesse 式 (函数的)** (Hessian of a function)) 此定义可推广到 C^∞ 映射 f $X \to Y$ 的情形, 这里 X, Y 均为 C^∞ 流形 (必有同一维数), 见 [A1].

此名称来自下述事实 若 f $X \to Y$ (符号意义同上) 在 $x_0 \in X$ 有一折点, 则在 X 中有局部坐标 $(x_1, \quad, x_n)$, 在 Y 中有局部坐标 $(y_1, \quad, y_n)$, 分别在 $x_0, f(x_0)$ 为零, 使 f 有局部表示

$$f(x_1, \quad, x_n) = (x_1, \quad, x_{n-1}, x_n^2)$$

参考文献

[A1] Hormander, L, The analysis of linear partial differential operators, 3, Springer, 1985

[A2] Arnold, V I, Gusein-Zade, G M and Varchencho, A N, Singularities of differentiable maps, 1, Birkhauser, 1985 (译自俄文)

郑维行 译 沈永欢 校

叶状结构 [foliation, слоение], n 维流形 M^n 上的

使 M^n 成为称为叶 (leaves) 的道路连通子集的一个分解, 而 M^n 可以被以局部坐标 $x_\alpha^1, \quad, x_\alpha^n$ 的坐标邻域 U_α 所覆盖, 通过它们, 局部叶 (local leaves) (叶与 U_α 的交的连通分支) 由方程组 $x_\alpha^{p+1} =$ 常数, ·, $x_\alpha^n =$ 常数给出. 在此意义上的叶状结构称为拓扑叶状结构 (topological foliation) 如果还要求 M^n 具有分片线性, 可微或解析结构以及局部坐标是分片线性, (C^r 类) 可微或解析的, 则分别得到分片线性, (C^r 类) 可微或解析叶状结构的定义. C^r 类微分叶状结构的定义当 $r = 0$ 时也有意义, 且与拓扑叶状结构的定义相符. 当说及微分叶状结构时, 通常理解为 $r \geqslant 1$ 叶自然用 p 维流形 (拓扑的、分片线性的、可微的或者解析的) 的结构所装备, 并且是 M^n 的子流形 (在词的更广泛的意义上) 数 p (叶的维数) 称为叶状结构的维数 (dimension), 而 $q = n - p$ 称为它的余维数 (codimension) 当在带边的流形上考虑叶状结构时通常要求或者叶与边界横截, 或者与边界相交的叶完全含在它的里面. 复解析叶状结构 (complex-analytic foliations) 由显然的方法定义. 以下通常假定叶状结构和映射都是可微的, 因为这是最重要的情形.

映射 (在上面的情形里)

$$\varphi_\alpha \quad U_\alpha \to \mathbf{R}^q, \ u \to (x_\alpha^{p+1}(u), \quad, x_\alpha^n(u))$$

是一个**浸没** (submersion) 局部的叶是 $\varphi_\alpha^{-1}(c)$, $c \in \mathbf{R}^q$ 如果 $u \in U_\alpha \cap U_\beta$, 那么在 u 附近, 用 $\mathbf{R}^q$ 的某个 (C^r 类) 局部微分同胚 $\varphi_{\beta\alpha \ u}$ 可从 $\varphi_\alpha(v)$ 到 $\varphi_\beta(v)$, 即对足够靠近 u 的所有 v, 有 $\varphi_\beta(v) = \varphi_{\beta\alpha \ u}\varphi_\alpha(v)$, 在这个意义下, 局部浸没系统 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 是相容的 (或连贯的) 相反地, 如果 M^n 被区域 U_α 覆盖, 并且给定的浸没 φ_α $U_\alpha \to \mathbf{R}^q$ 在上述意义下是相容的, 那么通过 $\varphi_\alpha^{-1}(c)$ 沿它们本身适当地 "粘合在一起", 就得到一个叶状结构, 使得每个 $\varphi_\alpha^{-1}(c)$ 包含在某个叶里

对每个点 $u \in M^n$, 规定通过这个点的叶的切空间, 就得到一个 p 维切子空间的场 (换言之, 一个 p 维分布 (distribution)), 称为叶状结构的切场 (tangent field) 当 $p = 1$ 时, 在可微的最低要求下, p 维切子空间的场是唯一确定叶状结构的切场. 当 $p > 1$ 时, 就不是这样 这个问题是一个局部性质 (见 **Frobenius 定理** (Frobenius theorem)) Frobenius 定理在一个**对合分布** (involutive distribution) 上的直接应用显示出, 当相应的条件成立时, 就存在一个相容的局部浸没 φ_α

的系统，φ_α 的切场切于 $\varphi_\alpha^{-1}(c)$，叶状结构的构成是利用适当的"粘合一起"而实现的（用另一种方式更详细的讨论见[3]）

叶状结构的概念于20世纪40年代在 G Reeb 和 Ch Ehresmann 的一系列论文中展开，在书[1]中达到高潮（对它的历史，见[2]），并且与转向整体观点有关．这部分地是被光滑的**动力系统**（dynamical system）理论促进的，其中相流形（以平衡位置为例外，见**平衡位置**（equilibrium position））到轨道的分解是一维的叶状结构．在这个理论里，曲面上的流占据了特殊的地位（见 **Poincaré-Bendixson 理论**（Poincaré-Bendixson theory），**环面上的微分方程**（differential equations on a torus），**Kneser 定理**（Kneser theorem）），其中轨道局部地划分了空间，这有助于集中注意到余维数1的叶状结构上 20世纪40年代研究的另一个叶状结构的例子是用一个解析子群（不必是闭的）将 Lie 群到陪集上的分解（见[3]）最后，在复域里，一个具有解析右手系的微分方程 $dw/dz=f(z,w)$ 的解形成（从实观点看）二维叶状结构

在早期的工作之后，叶状结构理论的发展有一个间隙，仍缺乏有意义的结果 深入的发展开始于 A Haefliger（[4]）和 С П Новиков（[7]）的工作，其中最著名的结果如下（见[17]）在三维球面上的余维数1的叶状结构有一个紧的叶（[7]）且不可能是解析的（[4]），尽管 Reeb 构造了 C^∞ 类的叶状结构 那时，在一些动力系统（*Y* **系统**（*Y*-system），及另外一些与之有关的方面）的研究中，提出了某些辅助的叶状结构物（不是余维数为1的），这也促进了叶状结构物的研究（见[7]，[8]）所有这些以及后来的一系列论文都涉及到理论的"几何"和"定性"的方面（[16]）在这里更多地注意的是余维数1 的叶状结构，紧叶的存在，稳定性定理（在某些条件下建立的，具有紧叶的叶状结构像纤维化一样在这叶的邻域中或整体地构造，这种类型的第一个定理早就由 Reeb 证明过，见[17]），叶的"成长"特征（即依赖于叶上半径为 r 的测地球的 p 维体积的 r），以及它们的基本群．考虑最新解决的下面的问题：如果一个闭流形 M^n 有一个所有的叶都是紧的 p 维叶状结构，则 p 维叶的体积必须是有界的吗？D Epstein，D Sullivan 和其他人已经证明，仅当 $q\leqslant 2$ 时答案是肯定的（见[9]）

后来出现了理论的"同伦"方向，它的原型是纤维丛（见**纤维空间**（fibre space））的同伦理论 这里的困难之一来自在一般情况下不存在**诱导纤维丛**（induced fibre bundle）的类似物这个事实．这就要求研究被称为 **Haefliger 结构**（Haefliger structure）（一类具有奇点的叶状结构）的更一般的对象，对于它有这样的类似物．

M 上的两个叶状结构 F_0 和 F_1 称为和谐的（concordant），如果在"柱面"$M\times[0,1]$（有相同的余维数）上存在一个叶状结构，它的叶横截这个柱面的"底"和"顶"，并且在它们上面分别"切割"出叶状结构 F_0 和 F_1 Haefliger 结构的和谐性用类似的方法定义 每个 Haefliger 结构和谐于一个 Haefliger 结构，除 M 上的"奇点"集外，它相应于某个叶状结构，且对后者围绕这些点的叶的情况某些条件成立 在这个意义上，Haefliger 结构能被想象成具有奇点的叶状结构 在和谐 Haefliger 结构的类和 M 到一个所谓分类空间（classifying space）$B\Gamma_q^r$ 的连续映射的同伦类之间存在一个自然的双射（其中 q 表示余维数，r 表示 Haefliger 结构的光滑类）

同伦理论确立了它的同伦对象决定叶状结构的和谐性 两个叶状结构和谐当且仅当它们作为 Haefliger 结构是和谐的，并且它们的切场是同伦的（见[6]，[10]，[11]）一个有关的结果是在所有开的 M（见[6]）和那些有 p 维切子空间（这是一个明显的必要条件，见[10]，[11]）的连续场的闭的 M 上的 p 维叶状结构存在性的证明．几个作者较早地用直接构造的方法对各种流形上的叶状结构证明了存在性定理（[12]）这个思想（见[10]，[11]）开始于有奇点的叶状结构，之后用某个方法修改叶状结构取消了它们．$q>1$ 的情形比较简单（见[10]，[13]），而奇点的清除可按"几何"理论的精神去完成（[14]），$q=1$ 的情形更加复杂（[11]）

映射 f $M^n\to B\Gamma_q^r$ 诱导出导致叶状结构的**示性类**（characteristic class）的概念的上同调群的一个映射．由此产生了叶状结构的"同调的"或"定性的"理论（见[13]，[15]，[16]），也包括与 $B\Gamma_q^r$ 无关的较早得到的某些结果，诸如 Godbillon-Weil 不变量（对 $n=3$，见[17]），或者对于切子空间的连续场同伦于叶状结构的切场的 R Bott 的必要条件．

参考文献

[1] Reeb, G , Sur certains propriétes topologiques des variétés feuilletées, Hermann, 1952

[2] Reeb, G and Schweitzer, P A , Une theorème de Thurston établi au moyen de l'analyse non standard, in Differential topology, foliations and Gel'fand-Fuks cohomology, Lecture notes in math , Vol 652, Springer, 1978, 318

[3] Chevalley, C , Theory of Lie groups, 1, Princeton Univ Press, 1946

[4] Haefliger, A , Variétes feuiletées, *Ann Scuola Norm Sup Pisa Ser* 3, **16**(1962), 367－397

[5] Kuiper, N (ed), Manifolds, Amsterdam 1970, Lecture notes in math , 197, Springer, 1971

[6] Haefliger, A , Feuilletages sur les varietes ouvertes, Topology, **9**(1970), 2, 183－194

[7] Новиков, С П 《Тр Моск Матем об-ва》, **14**

(1965), 248 − 278

[8] Гладкие динамические системы, пер, М, 1977 (译自英文)

[9] Besse, A, Manifolds all of whose geodesics are closed, Springer, 1978

[10] Thurston, W, The theory of foliations of codimension greater than one, *Comm Math Helv*, **49**(1974), 214−231

[11] Thurston, W, Existence of codimension one foliations, *Ann of Math*, **104** (1976), 2, 249 − 268

[12] Lawson, H, Foliations, *Bull Amer Math Soc*, **80** (1974), 369 − 418

[13] Lawson, H, The quantitative theory of foliations, *Amer Math Soc*, 1977

[14] Mishachev, M M and Eliashberg, Ya M, Surgery on singularities of foliations, *Funct Anal Appl*, **11** (1977), 3, 197 − 205

[15] Fuks, D B, Cohomology of infinite-dimensional Lie algebras and characteristic classes of foliations, *J Soviet Math*, **11** (1979), 6, 922 − 980

[16] Fuks, D B, Foliations, *J Soviet Math*, **18** (1982), 2, 255 − 291

[17] Tamura, I, Topology of foliations, Iwanami Shoten, 1976 (日文)　　Д В Аносов 撰

【补注】 在西方，Y 系统称为 Аносов 系统 (Anosov system)更好些．

参考文献

[A1] Reinhart, B, Differential geometry of foliations, Springer, 1983

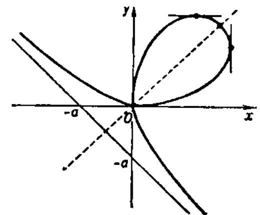
[A2] Anosov, D V, Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature, *Proc Steklov Inst Math*, **90** (1969) (*Trudy Mat Inst Steklov*, **90** (1967)　　徐森林 译　薛春华 校

Descartes 叶形线 [folium of Descartes, Декартов лист]

三次平面代数曲线，在 Descartes 坐标系中它的方程是 $x^3+y^3-3axy=0$，参数方程是

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3},$$

其中 t 是曲线的径向量和 x 轴之间的夹角的正切 Descartes 叶形线关于轴 $y=x$ 是对称的（见图）．在坐标为 $(a\sqrt[3]{2},a\sqrt[3]{4})$ 和 $(a\sqrt[3]{4},a\sqrt[3]{2})$ 的两点上曲线的切线平行于坐标轴



坐标原点是以两坐标轴为切线的结点．渐近线是 $y=-x-a$ 曲线和渐近线所围成的面积是 $S=3a^2/2$ 曲线的回环所围成的面积是 $S=3a^2/2$ 以 R Descartes 命名，他于 1638 年最先研究了这一曲线．

参考文献

[1] Савелов, А А, Плоские кривые, М, 1960

[2] Смогоржевский, А С, Столова, Е С, Справочник по теории плоских кривых третьего порядка, М, 1961　　Д Д Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lawrence, J D, A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972

[A2] Fladt, K, Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven, Akad Verlagsgesellschaft, 1962　　张鸿林 译

强迫振动 [forced oscillations, вынужденные колебания]

在某一物质系统中由于随时间变化的外力影响而发生的振动 在线性**耗散系统** (dissipative system) 中，在按调和规律变化的外力作用下发生的强迫振动的频率就是外力的频率．强迫振动的振幅，由外力的参数（振幅、频率）和在其中发生振动的介质的阻尼系数来决定．如果外力的频率接近于系统的一个**本征振动** (eigen oscillation) 的频率，那么强迫振动的振幅可以具有相当大的值，并且介质的阻尼越小，振幅越大．如果介质的阻尼为零，而外力的频率等于系统的一个本征振动频率，那么强迫振动的振幅无限增加，且随时间线性地变化 这种效应称为**共振** (resonance)

如果外力包含在物质系统中，那么既可发生强迫振动又可发生本征振动．在耗散系统中本征振动是衰减的，在系统中只保持强迫振动(稳定状态 (stabilizing state)) 向稳定状态过渡的条件称为瞬变条件 (transient conditions)．介质的阻尼越大，瞬变状态持续的时间越短．如果外力是时间的周期函数（周期为 $T=2\pi/p$），它可以表示为 Fourier 级数，那么在线性系统中发生的强迫振动是频率为 $np(n=1,2,\ \ )$ 的谐波之和．这些谐波的振幅随 n 的增加而减小，但不是一致地减小．实际上，通常只取有限个谐波

如果对于某个 n 值，频率 np 接近于系统的一个本征频率，那么强迫振动的这个谐波的振幅可能相当大，当不存在介质的阻尼时，它将无限增加．例如，对于单自由度耗散系统，其运动方程具有下列形式

$$x+2hx+k^2x=\sum_{n=1}^{\infty}H_n\sin(npt+\delta_n),$$

其中 h, k^2, H_n, p, δ_n 是常系数，强迫振动将服从规律

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{\sqrt{(k^2-n^2p^2)^2+4h^2n^2p^2}}\sin(npt+\delta_n-\gamma_n),$$

其中 $\gamma_n=\arctan[2hnp/(k^2-n^2p^2)]$ 如果 $h=0$（无阻尼介质），$sp=k$，则有

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}{}^{(s)}\frac{H_n}{k^2-n^2p^2}\sin(npt+\delta_n)-$$

$$-\frac{H_s t}{2sp}\cos(spt+\delta_s),$$

其中求和号的上角（s）表示在求和时不计对应 $n=s$ 的一项.

当存在非周期外力时，系统中产生的强迫振动也是非周期的. 当调和外力作用于非线性耗散系统时，强迫振动的频率可以是外力的频率，也可以是它的整数倍（下调和振动（subharmonic oscillations））

在受调和外力的作用的自振系统（见**自振动**（auto-oscillation））中，将产生拟周期状态（quasi-periodic states），其特征是既存在频率接近于自振动频率的周期振动，又存在频率等于外力频率的强迫振动 如果外力的频率接近于自振动频率，则系统只发生具有外力频率的振动 这种效应称为强迫同步（forced synchronization）（俘获（capture））

参考文献

[1] Андронов, А А, Собрание трудов, М, 1956

[2] Бабаков, И М, Теория колебаний 2 изд, М, 1965

[3] Бутенин, Н В, Теоря колебаний, 2 изд, М, 1963

[4] Коловский, М З, Нелинейная теория виброзащитных систем, М, 1986

[5] Stoker, J J, Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems, Interscience, 1950

[6] Стрелков, С П, Введение в теорию колебаний, 2 изд, М, 1964

[7] Tse F S, Morse, I E and Hinkle, R T, Mechanical vibrations, Allyn & Bacon, 1963

Н В Бутенин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Андронов, А А, Витт, А А, Хайкин, С Э, Теория колебаний, 2 изд, М, 1981（中译本 А А 安德罗诺夫, А А 维特, С Э 哈依金, 振动理论, 上册 1973, 下册 1974）

张鸿林 译

力迫法 [forcing method, вынуждения метод]

一种构造**公理集合论**（axiomatic set theory）模型的特殊方法 它由 P J Cohen 在 1963 年提出用以证明**连续统假设**（continuum hypothesis）的否定，$\neg$CH，和其他集论假设均相容于 Zermelo-Fraenkel 系统 ZF 的公理（见[1]）. 后来力迫法被简化和改进（见[2]-[6]）. 特别是发现此方法与 **Boole 值模型**（Boolean-valued model）理论（见[2],[3]）和 **Kripke 模型**（Kripke model）（见[6]）有关联.

力迫法的主要概念是力迫关系（forcing relation）$p\Vdash\varphi$（条件 p 力迫公式 φ）

在力迫关系定义之前，先规定语言 L 和具有序关系 $\leqslant$ 的力迫条件 p 的偏序集 P. 语言 L 可以包含不同种类（或类型）的变元和常元.

由 Cohen 提出的 ZF 模型中连续统假设不真，它的构造进行如下 集合 M 称为传递的（transitive），若 $x\in M\to x\subseteq M$ 设 M 为可数传递集，它是 ZF 模型，且设 $\lambda\in M$ 为序数（ordinal number）（在 von Neumann 意义下），即 $\lambda=\{\alpha\ \ \alpha<\lambda\}$ 令 $A\subseteq\lambda\times\omega_0$ 为任意集合（可能 $A\notin M$）. 这里 ω_0 为第一个无穷序数. 若 X 是一可传集，令 Def(X) 表示所有 X 可定义子集的集（见 Gödel 构造集（Godel constructive set）），即 Def$(X)=$ Def$(X,\in|X)$ 用类似于构作 Godel 构造集的过程来归纳定义集 $M_\alpha[A]$（对任何序数 α），

$$M_\alpha[A]=\bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{Def}(M_\beta[A])\cup\{x\in M\cup\{A\}\ \ x\subseteq M_\beta[A]\}$$

令 $M[A]=M_{\alpha_0}[A]$，这里 $\alpha_0=\sup\{\alpha\in M.\ \alpha$ 为序数$\}$ 连续统假设不真的 ZF 模型可在 $M[A]$ 型的模型中产生. 令 λ 为一序数，它使陈述句"λ 是第二个不可数序数"在 M 中为真.

力迫条件集 P 和关系 $\leqslant$ 由以下等价关系定义 a) $p\in P\Leftrightarrow p$ 为定义在集 $\lambda\times\omega_0$ 的某个有穷子集上而取值于 $\{0,1\}$ 的函数，b) $p\leqslant q\Leftrightarrow q$ 为 p 的扩张 所用语言 L 是所谓的分歧语言（ramified language），带有许多类型的变元（每个 $\alpha\leqslant\alpha_0$ 具有与它同型的变元并以 $M_\alpha[A]$ 为变域），而 $M[A]$ 中的每个集都有一个专名（即个体变元）. 若 $x\in M$，x 的专名写为 $x^\vee$. 令 a 为集 A 的专名. 力迫条件 $p\Vdash\varphi$ 由归纳定义引入，特别地，它有以下特性

1) $p\Vdash(<\delta,n>\in a)\Leftrightarrow p(<\delta,n>)=1$,

2) $p\Vdash(\neg\varphi)\Leftrightarrow\neg\exists q\geqslant p(q\Vdash\varphi)$,

3) $p\Vdash(\varphi\vee\psi)\Leftrightarrow p\Vdash\varphi\vee p\Vdash\psi$;

4) $p\Vdash(\varphi\wedge\psi)\Leftrightarrow p\Vdash\varphi\wedge p\Vdash\psi$,

若 α 为变元 x 的型，则

5) $p\Vdash\exists x\varphi(x)\Leftrightarrow\exists c\in C_\alpha\ \ p\Vdash\varphi(c)$，这里 C_α 是所有 α 型的常元的集合.

力迫条件序列

$$p_0\leqslant\ \ \leqslant p_n\leqslant$$

称为完全的是指对任何 L 的闭公式 φ 有

$$\exists n(p_n\Vdash\varphi\vee p_n\Vdash\neg\varphi).$$

由于 L 中所有闭公式集的可数性和以上 2) 使得可以证明存在以任何 p_0 开头的一个完全序列.

$\lambda\times\omega_0$ 中子集 A 称为相对于模型 M 是脱殊的（gen-

eric),是指存在一完全序列，使得 $\bigcup_{n\leqslant\omega_0} p_n$ 为 A 的特征函数 χ_A 关于脱殊集和力迫关系的以下两个事实是十分重要的

I) 若 A 为脱殊集，则

$$M[A]\vDash\varphi\Leftrightarrow\exists p\subseteq\chi_A(p\Vdash\varphi),$$

这里 $M[A]\Vdash\varphi$ 是指公式 φ 在 $M[A]$ 中为真

II) 若 $c_1,\ \ ,c_n$ 为 L 的常元，则关系 $p\Vdash\varphi(c_1,\ \ ,c_n)$ 作为 $p,c_1,\ \ ,c_n$ 之间的关系能在模型 M 中被表示.

由以上事实看来，为了证明 $M[A]\vDash\varphi$，只要指出陈述 $\forall p(p\Vdash\neg\neg\varphi)$，即

$$\forall p\exists q\geqslant p(q\Vdash\varphi)$$

在模型 M 中为真就足够了 验证在模型 $M[A]$ 中 ZF 公理和 $\neg$CH 为真就是基于此命题 要在 $M[A]$ 中验证 $\neg$CH 还涉及力迫条件集的一些特殊性质，由它们可以证明

(1) 若序数 $\delta_1,\delta_2<\lambda$ 不等，则有

$$\forall p\exists q\geqslant p\exists n<\omega_0(q(<\delta_1,n>)\neq q(<\delta_2,n>)),$$

即 $A_{\delta_1}\neq A_{\delta_2}$，这里 $A_\delta=\{n\ \ <\delta,n>\in A\}$

(2) $M[A]\vDash$(λ 为第二个不可数序数)

在力迫关系和 Boole 值模型之间有以下的联系.

若引入记号 $\|\varphi\|=\{p\in P\ \ p\Vdash\neg\neg\varphi\}$,

$$\mathbf{B}=\{X\subseteq P\ \ \forall\ p(p\in X\longleftrightarrow(\forall q\geqslant p)(\exists r\geqslant q)\ (r\in X))\},$$

则 $(\mathbf{B},\subseteq)$ 为完全 **Boole 代数** (Boolean algebra)，且 $\|\varphi\|\in\mathbf{B}$ 为公式 φ 的 Boole 值. 因此，确定偏序集 $(P,\leqslant)$ 和定义关系 $p\Vdash\neg\neg\varphi$ 等价于构作某个 Boole 值模型 $\mathfrak{M}$ 通过分析 $M[A]\vDash\varphi_0$ 型定理(这里 φ_0 为 ZF 公理或 $\neg$CH)的证明得出结论 表示定理 $\forall p(p\Vdash\neg\neg\varphi_0)$ 即 $\|\varphi\|=1_B$ 的 ZF 公式，可从 ZF 公理推导出. 因此，$\mathfrak{M}$ 是 ZF+$\neg$CH 的 Boole 值模型，借助于 ZF 而作出假设存在为 ZF 模型的可数可传集和脱殊集的概念在相对相容性的证明中都不是必要的

已经证明 Boole 值模型的构作可以简化(见[2], [3], [5]) 特别地,这个分歧语言 L 的引入不是必要的 脱殊模型 $M[A]$ 还能构作如下(见[4]).

偏序集 $(P,\leqslant)$ 的子集 X 称为**稠密的** (dense)，是指

$$\forall p\exists q\geqslant p(q\in X)$$

设 P 和关系 $\leqslant$ 是某个为 ZF 模型的可数可传集 M 的元素. 子集 $G\subset P$ 称为 M 的**脱殊滤子** (generic filter)，若

(1) $p\in G\wedge q\leqslant p\rightarrow q\in G$,

(2) $p\in G\wedge q\in G\rightarrow\exists r\in G(p\leqslant r\wedge q\leqslant r)$,

(3) $(X\in M\wedge X$ 在 P 中稠密$)\rightarrow X\cap G\neq\phi$

设 G 为 P 中的一个 M 脱殊滤子. 因为 M 可数，故 G 存在. 一般地说，$G\notin M$ 关系 $\in_G$ 定义为

$$x\in_G y\longleftrightarrow\exists p\in G(<xp>\in y),$$

这里 x 和 y 为模型 M 的任何元素.

令 F_G 为由以下等式定义的 M 上的函数·

$$F_G(y)=\{F_G(x)\ \ x\in_G y\},$$

又令 $N_G=\{F_G(x)\ \ x\in M\}$ 若 φ 为在 ZF 上加入表示 M 中每个集的常元后的语言的闭公式，定义

$$p\Vdash\varphi\longleftrightarrow\forall G\ni p(G\text{为}M\text{脱殊滤子}\rightarrow N_G\vDash\varphi).$$

可以证明

(I) $N_G\vDash\varphi\longleftrightarrow\exists p\in G(p\Vdash\varphi)$,

(II) 对每个公式 φ，关系 $p\Vdash\varphi(c_1,\ \ ,c_n)$ 能在模型 M 中定义.

仅仅使用(I)和(II)，再基于 M 的 ZF 的模型，便可以证明 N_G 为 ZF 的模型 若 P 由等价式 a) 和 b) 定义，则有 $N_G\vDash\neg$CH，且 $\bigcup G$ 为某个集 $A\subset\lambda\times\omega_0$ 的特征函数，以及 $M[A]=N_G$ 在 M 中可定义的关系 $p\Vdash\varphi$ 不满足力迫关系的 Cohen 定义中的 3) 和 5) 于是有

$$p\Vdash\exists x\varphi(x)\longleftrightarrow\forall p'\geqslant p\exists p''\geqslant p'\exists a\in M(p''\Vdash\varphi(a))$$

若假设 $\|\varphi\|=\{p\Vdash\varphi\}$，则得到 ZF+$\neg$CH 的一个 Boole 值模型，它在 M 中可定义且有与 Cohen 的情况相同的 Boole 代数 $\mathbf{B}$

因此，力迫法事实上由构作一 $\mathbf{B}$ 模型和一个同态所组成，此同态保持从 $\mathbf{B}$ 到两元代数 $\{0,1\}$ 的某种无穷交并运算 关于力迫法在集合论中的应用，见[2].

参考文献

[1] Cohen, P J, Set theory and the continuum hypothesis, Benjamin, 1966

[2] Jech, T J, Lectures in set theory with particular emphasis on the method of forcing, Springer, 1971

[3] Takeuti, G and Zaring, W M, Axiomatic set theory, Springer, 1973

[4] Shoenfield, J R, Mathematical logic, Addison-Wesley, 1967

[5] Манин, Ю И, в кн, 《Итоги науки и техники》, Современные проблемы математики, М, 5 (1975), 5-72

[6] Fitting, M C, Intuitionist logic, model theory and forcing, North-Holland, 1969

В Н Гришин 撰

【补注】 关于一现代的初等导引以及应用，见[A1]. 更快捷的尽管不完整的文献是[A3] [A2]给出以上所述的 Boole 值方法

参考文献

[A1] Kunen, K, Set theory, an introduction to independence proofs, North-Holland, 1980

[A2] Bell, J L, Boolean-valued models and independence proofs in set theory, Oxford Univ Press, 1977

[A3] Burgess, J P, Forcing, in J Barwise (ed) Handbook

of mathematical logic, North-Holland, 1977, 403－452
[A4] Jech, T, Set theory, Acad Press, 1978

宋方敏 译 莫绍揆 校

型 [**form**, **форма**]，亦称齐式

各项次数均相同的多变量多项式．

依照变量的个数 m，型被称为二元的（对 $m=2$），三元的（对 $m=3$），等等，依照它们各项的次数 n，又被称为线性的（对 $n=1$），二次的（对 $n=2$），三次的（对 $n=3$），等等．如果诸变量可以进行分组，从而使这个型的每一项对于每一组中的变量皆为线性，则此型称为一个**多重线性型**（multilinear form） 每个型都可以通过把某些变量等同起来而从一个多重线性型得出 反之，从每个型出发经过某种方法（称为极化方法）可以得到一个多重线性型．

应用中最重要的型是**二次型**（quadratic form） 二次型的理论与二次曲线及二次曲面的理论密切相关（也见 **Hermite 型**（Hermitian form））

在数论中，整数是否能用整数变量的整系数的型的值表出，是个极其重要的问题，**Fermat 大定理**（Fermat great theorem）即是一例

在微分几何及 Riemann 几何中用到**微分形式**（differential form） 积分学的许多定理（见 **Green 公式**（Green formulas），**Остроградский 公式**（Ostrogradski formula），**Stokes 公式**（Stokes formula）），都可以看作不同次数的微分形式之间关系的定理

БСЭ-3 张明尧 译 徐广善 校

代数群的形式 [**form of an algebraic group**, **форма алгебраической группы**]，定义在域 k 上的代数群 G 的

一个定义在域 k 上并且在 k 的某一扩域 L 上与 G 同构的**代数群**（algebraic group）G' 在这一情形，G' 称为 G 的一个 L/k 形式（L/k-form） 如果 k_s 是 k 在某一固定的代数闭的基域 K（泛区域）内的可分闭包，则 k_s/k 形式就简称为 G 的 k 形式．一个群的两个 L/k 形式称为等价的，如果它们在 k 上是同构的．G 的 L/k 形式的等价类的集合记作 $E(L/k, G)$（在 $L=k_s$ 的情形就记作 $E(k, G)$）（见 [5], [7], [8]）

例 令 $k=\mathbf{R}$, $K=\mathbf{C}$，则

$$G'=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \quad x^2+y^2=1\right\}$$

和

$$G=\{\operatorname{diag}(x, y) \quad xy=1\}$$

是定义在 k 上的一般线性群 GL(2) 的两个子群，而 G' 是 G 的一个 k 形式（定义在 K 上的同构 $\varphi \quad G' \to G$ 由公式

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\right)=\operatorname{diag}(x+iy, x-iy)$$

给出） 这个 k 形式不与 G 等价（如果将 G 看成它自己关于恒等同构 $G \to G$ 的一个 k 形式的话）．在这个例子里，集合 $E(k, G)$ 由上述两个 k 形式所代表的两个元素组成．

代数群的形式的分类问题可以自然地用 **Galois 上同调**（Galois cohomology）的语言重新阐述（[3], [5]）．这就是，假设 L/k 是一个 Galois 扩张，$\Gamma_{L/k}$ 是它的 Galois 群（赋予 Krull 拓扑）．群 $\Gamma_{L/k}$ 自然地作用在 G 的一切 L 自同构所组成的群 $\operatorname{Aut}_L G$ 上，同时也作用在 G' 到 G 的一切 L 同构的集合上（在坐标中，这些作用就归结为 $\Gamma_{L/k}$ 里的自同构作用到由各自的映射所定义的有理函数的系数上）．令 $\varphi \quad G' \to G$ 是一个 L 同构，令 $\sigma \in \Gamma_{L/k}$，令 φ^σ 是 φ 在 σ 的作用之下的象 那么映射 $\Gamma_{L/k} \to \operatorname{Aut}_L G$, $\sigma \mapsto c_\sigma=\varphi^\sigma \circ \varphi^{-1}$，是 $\Gamma_{L/k}$ 的一个连续 1 上闭链，取值在离散群 $\operatorname{Aut}_L G$ 内．当 φ 被另一个 L 同构 $G' \to G$ 所代替时，这个上闭链变成同一上同调类内的一个上闭链．这样就产生一个映射 $E(L/k, G) \to H^1(\Gamma_{L/k}, \operatorname{Aut}_L G)$ 对 G 的形式的这种上同调的解释的最重要一点在于这个映射是一一映射．在这一情形，当所有自同构 c_σ 都是内自同构时，G' 就称为 G 的一个内形式（inner form），否则称为一个外形式（outer form）．

对于连通可约化群有完善发展了的形式的理论，在这里与代数闭域上线性代数群的结构理论相平行的理论已被建立起来．k 根，k-Weyl 群，k 上的 Bruhat 分解，等等 在这里，极大 k 分裂环面起着极大环面的作用，而极小 k 抛物子群则起着 Borel 子群的作用（[1], [2], [6], [7]） 这个理论使得可以将形式的分类问题归结为 k 上非迷向的可约化群（见**非迷向群**（anisotropic group），**非迷向核**（anisotropic kernel））的分类问题 后者的分类问题本质上依赖于域 k 的性质．如果 $k=\mathbf{R}$ 而 $K=\mathbf{C}$，则半单代数群的形式的刻画与复半单代数群的实形式的刻画是一样的（见 **Lie 群的复化**（complexification of a Lie group））．

参考文献

[1] Borel, A, Linear algebraic groups, Benjamin, 1969 (second enlarged edition, Springer, 1991)
[2] Humphreys, J E, Linear algebraic groups, Springer, 1975
[3] Serre, J-P, Cohomologie Galoisienne, Springer, 1964
[4] Serre, J-P, Groupes algébrigue et corps des classes, Hermann, 1959
[5] Воскресенский, В Е, Алгебраические торы, М, 1977
[6A] Borel, A and Tits, J, Groupes réductifs, *Publ Math IHES*, **27** (1965), 55－150
[6B] Borel, A and Tits, J, Complement à l'article 'Groupes réductifs', *Publ Math IHES*, **41** (1972), 253－276

[7] Tits, J, Classification of algebraic semi-simple groups, in *Proc Symposia Pure Math*, Vol **9**, Amer Math Soc, 1966, 33-62

[8] Springer, T A, Reductive groups, in Proc, Symposia Pure Math, Vol **33**, Amer Math Soc, 1979, 3-27

[9] Serre, J-P, Local fields, Springer, 1979

В Л Попов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Demazure, M and Gabriel, P, Groupes algébraiques, 1, Masson, 1970

[A2] Jantzen, J C, Representations of algebraic groups, Acad Press, 1987

郝钢新 译

代数结构的形式[form of an (algebraic) structure, форма алгебраической структуры]

【补注】 设 k'/k 是域扩张，X 是定义在 k 上的某种"对象" 例如，X 可以是带一个二次型的向量空间，k 上的 Lie 代数，k 上的東屋(Azumaya)代数，k 上的簇，k 上的代数群，有限群在 k 向量空间中的表示，等等 k 上 X 的形式(form)，更精确地说，k'/k 形式(k'/k-form)，是域 k 上与 X 同一类型的对象 Y，使得 X 与 Y 在域 k' 上同构，即通过从 k 到 k' 的标量扩张 (extending scalar)后，对象 X 和 Y 同构 用 $E(k'/k,X)$ 表示 X 的 k'/k 形式的 k 同构类的集合 如果 k'/k 是 Galois 扩张，则在适当的情况下，在 $E(k'/k,X)$ 和 Galois 上同调群 $H^1(\mathrm{Gal}(k'/k),\mathrm{Aut}_k(X))$ 之间有一个一一映射(见 **Galois 上同调** (Galois cohomology))，这里 $\mathrm{Aut}_k(X)$ 是 X 在 k' 上的自构群 考虑对象 X 是 k 上有限维代数 A 的情形 如果作为 k' 代数有 $A\otimes_k k'\simeq B\otimes_k k'$，则 B 是 A 的形式．设 α 是 A 在 k' 上的自同构，即 α 是 k' 代数的同构 $A\otimes_k k'\to A\otimes_k k'$，再设 $s\in\mathrm{Gal}(k'/k)$，则 $s(\alpha)=(1\otimes s)\circ\alpha\circ(1\otimes s^{-1})$ 是 A 的另一个 k' 自同构 这样就定义了 $\mathrm{Gal}(k'/k)$ 在 $\mathrm{Aut}_k(A)$ 上的作用．现在设 B 是 A 的形式，则 k' 同构 $B\otimes_k k'\to A\otimes_k k'$ 的集合自然地成为 $\mathrm{Aut}_k(A)$ 上的主齐性空间，因此确定了 $H^1(\mathrm{Gal}(k'/k),\mathrm{Aut}_k(A))$ 的一个元素 在这种情况下，这个映射是一一映射 更一般地，在结构 X 是带 (p,q) 张量的向量空间 V 的情形下，也有这样的一一映射 (前面的例对应 (2,1) 张量的情形) (满射性的证明需要 Hilbert 定理 90(Hilbert theorem 90)的推广 $H^1(\mathrm{Gal}(k'/k),\mathrm{GL}_n(k'))=0$) 对于 k 上代数群的情况，见**代数群的形式**(form of an algebraic group)

对于 k 上代数簇的情况，$E(k'/k,X)\to H^1(\mathrm{Gal}(k'/k),\mathrm{Aut}_k(X))$ 是单射，如果 X 是拟射影的，则它还是一一映射

形式的概念在一般得多的范围内，例如在任意具有基变换 (即纤维积) 的范畴里有意义 实际上，设 $\mathfrak{C}$ 是这样的范畴，S 是 $\mathfrak{C}$ 中的对象 $\mathfrak{C}$ 上的对象是 $\mathfrak{C}$ 中的态射 $X\to S$，设 f $S'\to S$ 是 $\mathfrak{C}$ 中的态射 从 S 到 S' 的换基 (base change) 给出由 **Descartes 正方形** (Cartesian square)

$$\begin{array}{ccc} X_{S'} & \to & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \to & S \end{array}$$

定义的拉回 (纤维积) $X_{S'}=X\times_S S'$ (当 $S'=\mathrm{Spec}(k')$，$S=\mathrm{Spec}(k)$，且例如 $\mathfrak{C}$ 是(仿射)概形的范畴时，这对应于扩张标量

现在对象 $Y\in\mathfrak{C}_{/S}$ 是 $X\in\mathfrak{C}_{/S}$ 的 S'/S 形式(S'/S-form)，如果对象 $X_{S'}$ 和 $Y_{S'}$ 在 S' 上同构 对于更一般的结构，见[A2]

与形式相关的一个问题是下降理论(descent theory)的主题．在上述具有基变换的范畴里，与这个理论有关的问题是 给定 $Z\in\mathfrak{C}_{/S'}$，是否存在 S 上的 X，使得在 S' 上 $X_{S'}$ 同构于 Z，以及为了这种情况成立，Z 必须满足什么性质

在以下的具体情形考察这个问题 R 是 (具有单位元的) 交换代数，S 是交换 R 代数 给定 S 上的模 M，问题是是否存在 R 上的模 N，满足 $M\simeq N_S=N\otimes_R S$ (作为 S 模) 下面的所有张量积 $\otimes$ 都是指 R 上的张量积 $\otimes_R$ 如果 M 具有形式 N_S，则存在 $S\otimes S$ 模的自然同构 $S\otimes N_S\to N_S\otimes S$，由 $s_1\otimes n\otimes s_2\mapsto n\otimes s_1\otimes s_2$ 给出 设 M 是 S 模，M 上的下降数据 (descent datum) 是 $S\otimes S$ 模的一个同构 g $S\otimes M\to M\otimes S$，满足 $g_2=g_3g_1$ 这里 g_1,g_2,g_3 是由 g 定义的三个 $S\otimes S\otimes S$ 模的自然同态，g_i 在第 i 个因子上是恒等映射，在其他两个因子上由 g 给出

$$g_1\ \ S\otimes S\otimes M\to S\otimes M\otimes S,$$

$$g_2\ \ S\otimes S\otimes M\to M\otimes S\otimes S,$$

$$g_3\ \ S\otimes M\otimes S\to M\otimes S\otimes S$$

忠实平坦下降定理 (faithfully flat descent theorem) 断言，如果 S 是 R 上忠实平坦的，且 g 是 M 在 S 上的下降数据，则存在 R 模 N 及同构 η $N_S\to M$，使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} S\otimes N_S & \xrightarrow{1\otimes\eta} & S\otimes M \\ \downarrow & & \downarrow g \\ N_S\otimes S & \xrightarrow[\eta\otimes 1]{} & M\otimes S \end{array}$$

这里左边的竖直箭头是如上描述的 N_S 上的下降数据 而且，对 (N,η) 由这个性质唯一确定 人们利用一个不变性质定义 N $N=\{x\in M\ \ x\otimes 1=g(1\otimes x)\}$(这类似于在 Galois 下降的情形中关于 Galois 群的不变性)

对于 S 上代数的下降有一个类似的定理

在代数几何学中有如下的下降定理 (前面的代数

下降定理的整体化） 对于概形的态射 f $Y\to X$, 考虑纤维积 $Y\times_X Y$ 和 $Y\times_X Y\times_X Y$, 设 p_{ij} $Y\times_X Y\times_X Y\to Y\times_X Y$ 是投射 $(y_1, y_2, y_3)\mapsto(y_i, y_j)$, $3\geqslant i\geqslant j\geqslant 1$, p_i $Y\times_X Y\to Y$ 是投射 $(y_1, y_2)\mapsto y_i$, $i=1,2$ 如果 f $Y\to X$ 是忠实平坦的紧态射，则给出 X 上仿射概形 Z 等价于给出 Y 上仿射概形 Z' 连同一个使得 $p_{31}^*(\alpha)=p_{32}^*(\alpha)p_{21}^*(\alpha)$ 的同构 α $p_1^*Z'\to p_2^*Z'$

下降理论是相当广泛的，它包括诸如这样一些内容 利用局部截面来确定层的整体截面，通过粘合 X 的开覆盖 $\{U_i\}$ 的元素上的平凡丛 $U_i\times F\to U_i$ 来构造局部平凡纤维丛．实际上，设 X' 是 U_i 的不交并，p $X'\to X$ 是自然投射．给出粘合数据 α_{ij} $(U_i\cap U_j)\times F\to(U_j\cap U_i)\times F$, 就是给出同构 α $p_1^*E'\to p_2^*E'$, 这里 E' 是纤维为 F 的平凡向量丛 $X'\times F$, 而粘合数据的相容性相当于条件 $p_{31}^*(\alpha)=p_{32}^*(\alpha)p_{21}^*(\alpha)$

对于（域上）Lie 代数的形式的处理见 [A7], 对于特征为 0 的域上的 Lie 代数及模 Lie 代数的情况（即在特征 $p>0$ 的域上）见 [A5] 对于下降和形式的相当综合的处理见 [A1]

对象的形式有时称为扭形式（twisted form)

在关于 Galois 域扩张 $k\subset k'$（或 $\mathrm{Spec}(k')\to\mathrm{Spec}(k)$）的下降的情形，称为 Galois 下降 (Galois descent)．

参考文献

[A1] Knus, M.-A. and Ojanguren, M., Théorie de la descente et algèbres d'Azumaya, Springer, 1974

[A2] Grothendieck, A., Revêtements étales et groupe fondamental, in SGA 1960－1961, Exp Ⅵ Categories fibrees et descente, IHES, 1961

[A3] Murre, J. P., Lectures on an introduction to Grothendieck's theory of the fundamental group, Tata Inst Fund Res, 1967, Chapt Ⅶ

[A4] Serre, J.-P., Cohomologie Galoisienne, Springer, 1964

[A5] Seligman, G. B., Modular Lie algebras, Springer, 1967, Chapt Ⅳ

[A6] Serre, J.-P., Groupes algébriques et corps de classes, Hermann, 1959, Chapt Ⅴ Sect 20

[A7] Jacobson, N., Lie algebras, Dover, reprint, 1979, Chapt Ⅹ

蔡金星 译

形式导数 [formal derivative, формальная производная]

多项式、有理函数域或形式幂级数的导数，它们可以纯代数地定义（不使用极限过渡的概念），且对于任一系数环都有意义．对一多项式

$$F(X)=\sum_{i=0}^{n}a_iX^i$$

（或幂级数

$$A(X)=\sum_{i=0}^{\infty}b_iX^i),$$

形式导数 $F'(X)$ 定义为

$$\sum_{i=1}^{n}ia_iX^{i-1}$$

（或，相应地，$A'(X)$ 为

$$\sum_{i=1}^{\infty}ib_iX^{i-1}),$$

对一有理函数

$$f(X)=P(X)/Q(X),$$

其导数是有理函数

$$f'(X)=\frac{P'(X)\ Q(X)-Q'(X)\ P(X)}{Q(X)^2}$$

高阶形式导数和多变元函数的偏导数均可类似地定义．

通常导数的一些性质对于形式导数都成立．于是，若 $F'(X)=0$, 则 $F(X)$ 是系数域中的常数（在特征为 0 的情形下），或等于 $G(X^p)$（在特征为 p 的情形下）．设 x_0 是一多项式的 k 重根，则 x_0 是多项式导数的 $k-1$ 重根

Л. В. Кузьмин 撰 冯绪宁 译 裴定一 校

形式群 [formal group, формальная группа]

局部 Lie 群 (Lie group, local) 概念的代数模拟 形式群理论在代数几何学、类域论和配边理论中有许多应用

域 k 上的形式群是 k 上连通仿射形式概形范畴中的群对象（见 [1], [4], [6], [7]）．设 A 为交换 Noether 局部 k 代数，其极大理想为 m, 剩余类域为 k, 且关于 m 进拓扑完全 再设 H_A 是从代数范畴到集合范畴的函子，代数 B 在 H_A 下的象为把 m 映到 B 的幂零元集合 $\mathrm{nil}(B)$ 里的代数同态 $A\to B$ 的集合，则连通仿射形式概形是有限维交换 k 代数 B 的范畴到集合范畴里的共变函子 H, 它同构于某个 H_A H 是群对象，意思是指在所有的集合 $H(B)$ 上有一个给定的群结构，使得对每个 k 代数同态 $B_1\to B_2$, 对应的映射 $H(B_1)\to H(B_2)$ 是群同态．若所有的群 $H(B)$ 都是交换的，则形式群 H 称为交换的．每一个 k 上连通**群概形** (group scheme) G 定义了一个形式群 $\hat{G}$ $B\to\hat{G}(B)$ 这里可以取 A 为 G 在单位元处的局部环的完全化．

如果 A 是 k 上 n 个变量的形式幂级数环 $k[[X_1, \ldots, X_n]]$, 则 H 称为 n 维形式 Lie 群 (n-dimensional formal Lie group) 对于 k 上连通**代数群** (algebraic group) G, $\hat{G}$ 是形式 Lie 群．作为集合范畴的函子，形式 Lie 群 H 同构于函子 D^n $B\to\mathrm{nil}(B)^n$, D^n 把代数 B 映到 B 的幂零根 $\mathrm{nil}(B)$ 的 n 次 Descartes 积 集合 $H(B)=\mathrm{nil}(B)^n$ 上的群结构由形式群律 (formal group law) 所给出，形式群律就是 $2n$ 个变量 $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ 的 n 个形式幂级数的集合

$$F_1(X_1, \quad, X_n, Y_1, \quad, Y_n), \quad ,$$
$$F_n(X_1, \quad, X_n, Y_1, \quad, Y_n),$$

它们满足如下条件

$$F_i(X,0)=X_i, \ F_i(0,Y)=Y_i,$$

$$F_i(X_1, \quad, X_n, F_1(Y,Z), \quad, F_n(Y,Z))$$
$$=F_i(F_1(X,Y), \quad, F_n(X,Y), Z_1, \quad, Z_n)$$

这里 $X=(X_1, \quad, X_n)$, $Y=(Y_1, \quad, Y_n)$, $Z=(Z_1, \quad, Z_n)$, $0=(0, \quad, 0)$ 集合 $H(B)=\mathrm{nil}(B)^n$ 上的群律由公式

$$(x_1, \quad, x_n) \quad (y_1, \quad, y_n)=(z_1, \quad, z_n) \tag{*}$$

给出,这里 $z_i=F_i(x_1, \quad, x_n, y_1, \quad, y_n)$ 由于 x, y 是幂零的,级数中除了有限项外为零 每个形式群律通过 (*) 给出了 $\mathrm{nil}(B)^n$ 上的群结构,且把函子 D^n 转变为形式 Lie 群 形式群律和形式 Lie 群的概念能推广到基环是任意交换环的情形 (见 [2], [5]) 有时讲一个形式群就是指一个形式 Lie 群或一个形式群律

正如**局部 Lie 群** (Lie group, local) 一样,可以定义形式 Lie 群的 Lie 代数 特征 0 的域 k 上的形式 Lie 群和它的 Lie 代数之间的对应关系定义了这两个范畴的等价 特征 $p>0$ 的情况更加复杂 例如,在代数闭域 (对于 $p>0$) 上有可数多个两两非同构的一维交换形式 Lie 群 ([1]),而所有一维 Lie 代数是同构的 ([3]). 利用 Dieudonné 模对有限特征的完满域上的交换形式 Lie 群进行了分类 (见 [1], [6])

域上的形式群的理论能推广到以任意形式概形作为基概形的情形 ([7])

参考文献

[1] Манин, Ю И,《Успехи матем наук》, **18** (1963), 6, 3−90

[2] Stong, R E, Notes on cobordism theory, Princeton Univ Press, 1968

[3] Serre, J-P, Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965 (译自法文)

[4] Hartshorne, R, Algebraic geometry, Springer, 1977

[5] Lazard, M, Commutative formal groups, Springer, 1975

[6] Fontaine, J-M, Groupes p-divisibles sur les corps locaux, *Astérique*, **47−48** (1977)

[7] Mazur, B and Tate, J, Canonical height pairings via biextensions, in J Tate and M Artin (eds) Arithmetic and geometry, Vol 1, Birkhauser, 1983, 195−237

Ю Г Зархин 撰

【补注】 万有形式群律 (universial formal group law) (对于 n 维形式群律) 是 n 维形式群律 $F_u(X,Y)\in L[X,Y]$, $X=(X_1, \quad, X_n)$, $Y=(Y_1, \quad, Y_n)$, 满足对每个环 A 上的 n 维形式群律 $F(X,Y)$, 存在唯一环同态 $\varphi_F \ L\to A$, 使得 $\varphi_F^* F_u(X,Y)=F(X,Y)$, 这里 $\varphi_F^* F_u(X,Y)$ 是指 φ_F^* 作用于 n 幂级数 $F_u(X,Y)$ 的系数而得到的级数 如果 L' 上的 $F_u'(X,Y)$ 是另一万有形式群律,则存在环同构 $\psi \ L\to L'$ 使得 $\psi^* F_u(X,Y)=F_u'(X,Y)$ 在上述意义下,万有形式群律存在且唯一

对于交换形式群律,可得到万有形式群律的构造的显式公式 (见 [A3]) 底环 L 是有无限个未定元的多项式环 (Lazard 定理 (Lazard theorem))

形式群律的同态 (homomorphism of formal group laws) $\alpha \ F(X,Y)\to G(X,Y)$ ($\dim F=n$, $\dim G=m$) 是 n 个变量的幂级数的 m 元组 $\alpha(Z_1, \quad, Z_n)$, $\alpha_i(0)=0$, 满足 $\alpha(F(X,Y))=G(\alpha(X), \alpha(Y))$ 如果存在逆同态 β 满足 $\alpha(\beta(X))=X$, 则同态 α 为同构 (isomorphism), 又如果 $\alpha_i(Z)=Z_i+$(高阶项), 则 α 是形式群律的严格同构 (strict isomorphism)

设 A 是特征为 0 的环,即把 $1\in\mathbf{Z}$ 映到 A 的单位元的环同态 $\mathbf{Z}\to A$ 是单射,则 $A\to A\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$ 是单射 在 $A\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$ 上所有交换形式群律是严格同构的,因此,同构于加法形式群律 (additive formal group law)

$$G_u(X,Y)=(X_1+Y_1, \quad, X_n+Y_n)$$

由此可得,对于每个 A 上的交换形式群律 $F(X,Y)$, 存在幂级数的唯一的 n 元组 $f(X)$, $f_i(X)=X_i+ \quad$, 其系数在 $A\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$ 中,使得

$$F(X,Y)=f^{-1}(f(X)+f(Y)),$$

这里 $f^{-1}(Z)$ 是 $f(Z)$ 的"逆函数",即 $f^{-1}(f(Z))=Z$ 这个 $f(X)$ 称为群律 $F(X,Y)$ 的对数 (logarithm)

复**配边** (cobordism) 的形式群律是万有一维形式群律 (Quillen 定理 (Quillen theorem)),它的对数由 Мищенко 公式 (Mishchenko formula)

$$\log F_{\mathrm{MU}}(X)=\sum_{i=1}^{\infty} i^{-1}[\mathbf{CP}^{i-1}]X^i$$

给出

与一维万有形式群律的显式结构联系起来,从这些事实可得到关于复配边环 $\mathbf{MU}^*(\mathrm{pt})$ 的生成元的有用信息 详见**配边** (cobordism)

设 $F(X,Y)$ 是 A 上的 n 维群律,在 F 中的 A 上的曲线 (curve) 是指单变量幂级数的 n 元组 $\gamma(T)$, 满足 $\gamma(0)=0$ 两条曲线能通过 $\gamma(T)+_F\delta(T)=F(\gamma(T), \delta(T))$ 相加 赋予曲线的集合自然的幂级数拓扑,可得到交换拓扑群 $\mathscr{C}(F,A)$ 群 $\mathscr{C}(F,A)$ 容许一系列算子 V_n, F_n, $[a]$, $a\in A$, 定义如下

$$V_n\gamma(T)=\gamma(T^n),$$
$$[a]\gamma(T)=\gamma(aT),$$
$$F_n\gamma(T)=$$
$$\gamma(\zeta_n T^{1/n})+_F \quad +_F\gamma(\zeta_n^n T^{1/n})=\sum_{i=1}^{n}{}^F\gamma(\zeta_n^i T^{1/n}),$$

这里ζ_n是n次本原单位根 这些算子之间有一系列关系，它们一起用来定义一个（非交换）环 Cart(A)，它推广了 Dieudonné 环（Dieudonné ring），关于后者见 **Witt 向量**（Witt vector）. 关于形式群律的 Cartier 第二定理（Cartier second theorem）和 Cartier 第三定理（Cartier third theorem）表明，Cart(A)模$\mathscr{C}(F,A)$给出了形式群的分类，并且它们刻画了怎样的群作为$\mathscr{C}(F,A)$出现 与早先利用 Dieudonné 模对完满域上的交换形式群作反变分类相反，这里给出的是交换形式群的共变分类

设 W **Rinj → Rinj** 是 **Witt 向量**（Witt vector）的函子，$G_m(X,Y)=X+Y+XY$ 是 A 上（一维）乘法形式群律（multiplicative formal group law），则 $W(A)=\mathscr{C}(G_m,A)$ 的关于形式群律的 Cartier 第一定理（Cartier first theorem）断言函子$F\mapsto\mathscr{C}(F,A)$是可表示的 更精确地说，设$\hat{W}$是由 Witt 向量的加法公式给出的（无限维）形式群律，再设$\gamma_0(T)$是曲线（T,0, ,0），则对于每个形式群律$F(X,Y)$和曲线$\gamma(T)\in\mathscr{C}(F,A)$，存在唯一形式群律的同态 α $\hat{W}\to F$，满足 α$(\gamma_0(T))=\gamma(T)$

在域k上的交换形式群和交换仿射（代数）群之间存在 Понтрягин 型对偶性，称为 Cartier 对偶性（Cartier duality）. 详见 [A3]，[A4] 相应地，在交换仿射（代数）群的分类中，Dieudonné 模也是重要的 本质上，Cartier 对偶性来自代数和**余代数**（co-algebra）之间的"对偶性"

设A是具有有限剩余域k的离散赋值环，其极大理想为 $\mathfrak{m}=(\pi)$ 与（A,π）相关的 Lubin-Tate 形式群律（Lubin-Tate formal group law）由对数

$$f_\pi(X)=X+\pi^{-1}X^q+\pi^{-2}X^{q^2}+$$

来定义，则$F_\pi(X,Y)=f_\pi^{-1}(f_\pi(X)+f_\pi(Y))$的系数属于$A$ 从某种意义上说，这些形式群律是具有复乘法的椭圆曲线的形式p进的模拟，它们有极大的自同态环 同A的分式域K的类域理论相比，它们扮演了类似的角色，实际上，设$F_\pi(\bar{\mathfrak{m}})$为具有加法 $a+b=F_\pi(a,b)$的集合$\bar{\mathfrak{m}}$，这里$\bar{\mathfrak{m}}$是K的代数闭包的整数环的极大理想，则K的一个极大 Abel 全分歧扩张由$F(\bar{\mathfrak{m}})$的扭元生成，详见[A3]，[A5]

在代数几何学中，特别是在 Abel 簇理论中，形式群也是重要的工具 对于它的推广 p **可除群**（p-divisible group）更是如此

一维形式群律的 Lazard 定理断定没有幂零元的环上所有的一维形式群律是交换的

设 $F(X,Y)$是一维形式群律 归纳地定义$[n](X)=F(X,[n-1](X))$，$n\geqslant 2$，$[1](X)=X$ 设F是定义在特征$p>0$的域k上，则$[p](X)$必具有形式 X^{p^h}+(高阶项)或者等于 0 正整数h称为F的高(height). 如果$[p](X)=0$，则取F的高为∞ 特征$p>0$的代数闭域上的一维形式群律可按它们的高分类，且所有高 1,2, ∞都出现

设$F(X,Y)$是环A上的一维形式群律，并且除了p以外每个素数在A中都可逆，例如A是剩余域的特征为p的局部域的整数环，或A是特征p的域. 暂时假定A是特征 0 的且设

$$f(X)=X+a_2X^2+a_3X^3+$$

是$F(X,Y)$的对数，则$F(X,Y)$在A上严格同构于形式群律$F_{(p)}(X,Y)$，它的对数为

$$f_{(p)}(X)=X+a_pX^p+a_{p^2}X^{p^2}+$$

这个结果能扩充到A不是特征 0 和多维交换形式群律的情况 $F_{(p)}(X,Y)$称为$F(X,Y)$的p典型化（p-typification）

参考文献

[A1] Tate, J T, p-divisible groups, in T A Springer (ed) Proc Conf local fields (Driebergen, 1966), Springer, 1967, 158－183

[A2] Serre, J-P, Groupes p-divisible (d'après J Tate), Sem Bourbaki 19, **Exp 318** (1966－1967)

[A3] Hazewinkel, M, Formal groups and applications, Acad Press, 1978

[A4] Demazure, M and Gabriel, P, Groupes algébriques, 1, Masson & North-Holland, 1970

[A5] Lubin J and Tate, J, Formal complex multiplication in local fields, *Ann of Math*, **81** (1965), 380－387

蔡金星 译

形式语言 [formal language, формальный язык]

由某个（有限的或无穷的）字母表（alphabet）V（有时亦称为字典（dictionary））上的元素组成的串（即字（word））的任意集合，亦即形如$\omega=a_1$, ,a_k的表示的集合，这里a_1, ,$a_k\in V$，串ω的长度是数k，通常记为$|\omega|$ 一般空串也被考虑在内，记为Λ，规定$|\Lambda|=0$ 通常说字母表V上的一个语言，而省略"形式"二字 在**数学语言学**（mathematical linguistics）以及**自动机理论**（automata, theory of）中，人们考虑用各种类型的**形式文法**（grammar, formal）及自动机来有效地描述形式语言，在大多数情况下这些都是修改了的多带非确定 **Turing 机**（Turing machine），对机器在工作带上的工作模式加了一些限制

形式语言的运算 除了常见的集合运算，还考虑形式的语言乘法（multiplication）（或称直接乘法（direct multiplication），或毗连（concatenation））

$$L_1L_2=\{xy\quad x\in L_1, y\in L_2\},$$

左除（left division）

$$L_2 \backslash L_1=\{x \ \exists y, z(y \in L_1 \& z \in L_2 \& y=zx)\},$$

右除(right division) L_1/L_2 的定义类似左除，迭代闭包(iteration)

$$L^*=L^0 \cup L^1 \cup \quad ,$$

这里 L^0 指 $\{\Lambda\}$，而 $L^{n+1}=L^n L$(特别地，V 上所有串组成的集合就是 V^*)，截迭代闭包(truncated iteration)

$$L^+=L^1 \cup L^2 \cup \quad ,$$

代换(substitution) 如果 L 是有限字母表 $\{a_1, \quad , a_n\}$ 上的一个语言，$L_1, \quad , L_n$ 是任意语言，则

$$S(L, a_1, \quad , a_n | L_1, \quad , L_n)=$$

$$=\{x_{i_1} \quad x_{i_k} \ a_{i_1} \quad a_{i_k} \in L \& x_{i_1} \in L_1 \& \quad \& x_{i_k} \in L_{i_k}\},$$

如果每个语言 $L_i(i=1, \quad , n)$ 都是由一个串 z_i 组成的，这个代入称为**同态** (homomorphism)，如果所有的 z_i 都不是空字，则称为不可缩同态(unabbreviated homomorphism)．如果语言 $\{x\}$ 仅由一个串 x 组成，则一般写成 xL，$x \backslash L$ 等，而不写成 $\{x\}L$，$\{x\} \backslash L$ 等．

一个语言簇(variety of languages)是一个有序对 $(\mathscr{A}, \mathscr{L})$ (或 $\mathscr{L}$，如果 $\mathscr{A}$ 是共认的)，这里 $\mathscr{A}$ 是一个无穷字母表，$\mathscr{L}$ 是一个语言的集合，满足 1) 对任何 $L \in \mathscr{L}$，存在有限字母表 $\sum' \subset \mathscr{A}$，使得 $L \subset \sum'^*$，2) 存在某个 $L \in \mathscr{L}$，有 $L \neq \emptyset$，3) $\mathscr{L}$ 在并、乘积、与正规集的交、截闭包、不可缩同态及任意同态的逆的运算下封闭 对任意同态封闭的簇，称为完全的(complete)

参考文献

[1] Гладкий, А В ,Формальные грамматики и языки, М , 1973

[2] Ginsburg, S , Greibach, S and Hopcroft, Y , Studies in abstract families of languages, *Mem Amer Math Soc* , **87** (1969), 1 – 32 .

A B Глабкий 撰

【补注】 细节见**形式语言与自动机** (formal languages and automata)．　　鲍 丰 译　李 廉 校

机器可表示的形式语言 [formal language, machine-representable, формальный язык, представимый машиной]，机器可识别的形式语言(machine-recognizable formal language)

在执行过程中使机器进入某一特定状态的所有**字**(word)组成的集合．任何一个字的递归可数集都是由某个 **Turing 机** (Turing machine)可表示的一种形式语言 最常见的是考虑递归形式语言的机器识别 **有限自动机** (automaton, finite)识别且仅识别正则语言，带堆栈记忆的自动机识别且仅识别上下文无关语言．

当一种形式语言是由无穷字(超字)组成时，称为超语言(superlanguage)．机器识别超语言的定义与通常见到的定义不同 例如，一个字 x 属于一个有限自动机 $\mathfrak{A}$ 可识别的超语言，当且仅当自动机在处理 x 时无穷多次进入某一特定的状态子集

在研究不是以机器术语给出的具体形式语言时(例如，以**形式文法** (grammar, formal)给出的)，经常需要从某个方面刻画语言的复杂性．在这个方向上最通常的途径之一就是寻找能够识别这些语言的一个适当的机器类，并以这类机器的复杂性特征来确定语言的复杂性．另一方面，作为一种惯例，研究具体的某一类机器也包括描述这类机器可表示的形式语言．对机器可表示形式语言的进一步研究是关于这些语言与一些已知的语言类的关系问题，封闭性质(相对于集合论运算等)，以及关于算法和复杂性特点的问题．

参考文献

[1] Языки и автоматы Сб переводов, М , 1975

С С Марченков 撰

【补注】 亦见**形式语言与自动机** (formal languages and automata)　　鲍 丰 译　李 廉 校

形式语言与自动机 [formal languages and automata, формальный язык и автоматы]

【补注】 自然语言与程序设计语言均可看作句子的集合，所谓句子就是由基本词汇表中的元素组成的有限符号串 下面介绍的语言的定义是十分一般的．它概括了自然语言以及程序设计语言，还有人们能够想象的任何无实际意义的语言 在传统上，形式语言理论研究的是语言的语法描述，而不是任何语义问题 一个具有有限个句子的语言的语法描述，可由列出所有的句子给出，至少从原理上讲是这样的．但是，对于具有无穷个句子的语言，这个方法则不行 形式语言理论的主要任务就是研究无穷语言的有限描述．

计算的基础理论以及它的许多分支，像**密码学** (cryptography)，与语言理论是分不开的 一个计算模型的输入集和输出集均可看作语言，而且更深刻地说，计算模型可以等同于描述的语言类，从某种意义上讲，这样更为确切 因此，例如 Turing 机就可以看成是短语结构文法，而有限自动机就是正则文法(亦是 **Turing 机** (Turing machine)，**有限自动机** (automaton, finite)，**形式文法** (grammar, formal))．

形式语言理论——及与形式语言理论不可分的**自动机理论** (automata, theory of) —— 是理论计算机科学最古老的分支 从某种意义上说，形式语言与自动机理论在计算机科学中的地位就像哲学在一般科学中的地位 形成主干，其他知识分支由此而发生

一个**字母表** (alphabet)是一个有限非空集合．字母表 V 中的元素称为字母 字母表 V 上的一个**字** (word)是一个有限字母串 由零个字母组成的字称为空字

(empty wood)，记为 λ 字母表 V 上所有字的集合记为 V^*(相应地，所有非空字的集合记为 V^+) (从代数角度看，V^* 与 V^+ 分别就是由有限集 V 生成的**幺半群** (monoid) 与**自由半群** (free semi-group)) 对于字 w_1 与 w_2，它们的毗连 w_1w_2 称为 w_1 与 w_2 的连接 (catenation)．对连接运算，空字 λ 是单位元 连接满足结合律，对非负整数 i，w^i 就是在传统意义上使用的，而 w^0 代表空字．一个字 w 的长度 (length)，记为 $\lg(w)$ 或 $|w|$，是 w 中出现的字母个数．称字 w 是字 u 的子字 (subword)，当且仅当存在字 w_1 与 w_2 使得 $u=w_1ww_2$ (亦见**嵌入字** (imbedded word)) V^* 的子集也就是字母表 V 上的 (形式) 语言 (formal languages)

下面将考虑定义在语言上的各种一元与二元运算 语言作为集合，可有通常的并、交、补 (一个语言 L 的补记为 L^c)、差，以及对称差等 Boole 运算．两个语言 L_1 和 L_2 的连接 (catenation) (或积 (product))，记为 L_1L_2，定义为

$$L_1L_2=\{w_1w_2 \quad w_1\in L_1 \text{ 和 } w_2\in L_2\}$$

对语言的连接引进记号 L^i．定义 $L^0=\{\lambda\}$．定义一个语言 L 的连接闭包 (catenation closure) 或 Kleene 星形 (Kleene star) (相应地，无 λ 连接闭包 (λ-free catenation closure)) 为 L 的所有非负幂的并 (相应地，所有正幂的并)，记为 L^* (相应地，L^+)

代入运算．对字母表 V 上的每一个字母 a，令 $\sigma(a)$ 表示一个语言 (可以是在一个不同的字母表上的)．进一步定义，

$\sigma(\lambda)=\{\lambda\}$，$\sigma(w_1w_2)=\sigma(w_1)\sigma(w_2)$，其中 w_1，$w_2\in V^*$ 对 V 上的一个语言 L，定义

$$\sigma(L)=\{u \quad u\in\sigma(w),\ w\in L\}$$

这样的映射 σ 称为是一个代入 (substitution) 如果每个 $\sigma(a)$ 都只包含一个字，则称这样的代入 σ 为一个同态 (homomorphism)．(从代数的角度看，语言的同态是一个线性地扩张到幺半群子集上的幺半群同态.) 对于同态来说 (其他地方亦经常如此)，通常把 w 与单元素集 $\{w\}$ 等同看待，记 $\sigma(a)=w$，而不是 $\sigma(a)=\{w\}$

形式语言研究的主要目标就是对无穷的语言进行有限描述．大多数这样的描述是被作为来自重写系统的特殊情形．从定义上看，一个重写系统 (rewriting system) 是一个有序对 (V, P)，其中 V 是一个字母表，P 是 V 上字的有序对的有穷集合 P 中的元素 (w, u) 被当作重写法则 (rewriting rules) 或产生式 (production)，并记作 $w\to u$ 给定一个重写系统，集合 V^* 中的产生关系 (yield relation) $\Rightarrow$ 是如下定义的 对任意两个字 w 和 u，$w\Rightarrow u$ 成立，当且仅当存在 w'，w_1，w''，u_1，使得 $w=w'w_1w''$，$u=w'u_1w''$，且 $w_1\to u_1$ 是系统中的一个产生式 关系 $\Rightarrow$ 的自反传递闭包 (reflexive transitive closure) (相应地，传递闭包 (transitive closure))，记作 $\Rightarrow^*$ (相应地，$\Rightarrow^+$)

一个短语结构文法 (phrase-structure grammar)，简称文法 (grammar)，是一个有序四元组 $G=(V_N, V_T, S, P)$，其中 V_N 与 V_T 是不相交的字母表 (非终结 (nonterminals) 字母表与终结 (terminals) 字母表)，$S\in V_N$ (初始字母 (initial letter))，而 P 是有序对 (w, u) 的有限集，这里 u 是字母表 $V=V_N\cup V_T$ 上的一个字，w 是 V 上的至少包含 V_N 中一个字母的字．P 的元素依然是作为重写规则或产生式，记作 $w\to u$．上述短语结构文法 G 定义了一个重写系统 (V, P)．令 $\Rightarrow$ 与 $\Rightarrow*$ 是这个重写系统确定的关系，那么由 G 所生成的语言 $L(G)$ 被定义为

$$L(G)=\{w\in V_T^* \quad S\Rightarrow *w\}.$$

当且仅当 $L(G)=L(G_1)$ 时，文法 G 与 G_1 是等价的 (equivalent) 当且仅当 P 满足下面的限制 i)时，称文法 $G=(V_N, V_T, S, P)$ 是 i 型文法 (i=0, 1, 2, 3)

0) 无限制

1) P 中的所有产生式都形如 $w_1Aw_2\to w_1ww_2$，其中 w_1 与 w_2 是任何字，$A\in V_N$，w 是非空字 (可能的例外是产生式 $S\to\lambda$，但这个产生式出现在 P 中，意味着 S 不出现于任何产生式的右边)

2) P 中所有产生式都形如 $A\to w$，其中 $A\in V_N$．

3) 所有的产生式都形如 $A\to Bw$ 或 $A\to w$，其中 A，$B\in V_N$，$w\in V_T^*$

一个语言是 i 型的，当且仅当它是由 i 型文法生成的．0 型语言亦称递归可枚举的 (recursively enumerable) 1 型文法及语言亦称上下文相关的 (context-sensitive) 2 型文法及语言称上下文无关的 (context-free)．3 型文法与语言就是所谓有限状态的 (finite-state) 或正则的 (regular) (亦见**上下文相关文法** (grammar, context-sensitive)，**上下文无关文法** (grammar, context-free))

i 型语言 (i=0,1,2,3) 形成一种严格的分层 对 i=1,2,3，i 型语言的集合严格地包含在 i-1 型语言集合中

Dyck 语言 (Dyck language) 是具有 $2t$ 个字母的字母表 $V_t=\{a_1, \ \ , a_t, \overline{a}_1, \ \ , \overline{a}_t\}(t\geqslant 1)$ 上的一个特殊的上下文无关语言，产生它的文法是 $(\{S\}, V_t, S, \{S\to SS, S\to\lambda, S\to a_1S\overline{a}_1, \ \ , S\to a+S\overline{a}_t\})$．

组成 Dyck 语言的 V_t 上的字就是所有的可由关系式 $a_i\overline{a}_i=\lambda(i=1, \ \ , t)$ 约化到 λ 的字 如果把每一个对 $(a_i, \overline{a}_i)$ $(i=1, \ \ , t)$ 看作是不同类型的括号，则组成 Dyck 语言的字就是所有的适当嵌入的括号串．

V 上的正规语言族等于把并、联结、迭代闭包等“正规运算”有限步地用于“原子语言” $\{\lambda\}$ 和 $\{a\}$，$(a\in V)$ 所得到的语言族．一个表达由原子语言经正规运算得到正规语言的公式称为正则表达式

(regular expression)

每一个无λ(即不含空字)的上下文无关语言均可由Chomsky范式(Chomsky normal form)以及Greibach范式(Greibach normal form)文法产生 前一种范式中，所有的产生式都形如$A\to BC$, $A\to a$，后一种范式中，产生式都形如$A\to aBC$, $A\to aB$, $A\to a$，其中大写字母代表非终结符，a是终结符．由Chomsky-Schutzenberger 定理（Chomsky-Schutzenberger theorem)，任何一个上下文无关语言L均可表示为

$$L=h(D\cap R),$$

其中R为某个正规语言，D为Dyck语言，h为同态 由Bar-Hillel引理(Bar-Hillel lemma)（亦称泵引理(pumping lemma))，上下文无关语言L中的任何一个足够长的字w均可写成如下形式

$$w=u_1w_1u_2w_2u_3,\ w_1w_2\neq\lambda,$$

其中对任何$i\geqslant 0$, $u_1w_1^iu_2w_2^iu_3$属于L 对于正规语言相应的结果为 正规语言L中任一足够长的字w均可写成

$$w=u_1w_1u_2,\ w_1\neq\lambda,$$

其中对任何$i\geqslant 0$, $u_1w_1^iu_2$属于L

按照一个上下文无关文法的推导(derivations)(即字的有限序列，其中任两个相邻的字满足关系$\Rightarrow$)，可以自然地被看成是赋值树，即所谓的**推导树**(derivation tree)．一个上下文无关文法G称为歧义的(ambiguous)，当且仅当$L(G)$中的某个字具有两个推导树 否则，称G是非歧义的(unambiguous) 一个上下文无关语言L是非歧义的，当且仅当有非歧义文法G,使得$L=L(G)$．否则称L(先天)歧义的．经常谈到的还有歧义度(degree of ambiguity)．一个上下文无关文法G是k度歧义的(k是一个自然数或∞)，当且仅当$L(G)$中所有的字都至多有k个推导树，而某些字恰有k个推导树 一个语言L称为k度歧义的，当且仅当存在k度歧义文法G，使得$L=L(G)$，而不存在小于k度歧义文法G_1，使得$L=L(G_1)$

由产生器所定义的i型语言族(i=0, 1, 2, 3)亦可由识别器得出 定义一个语言L的识别器接收所有的字作为输入，而且只“接受”属于L的那些字．下面将定义相应于3型语言与2型语言的识别器有限与下推自动机 同样地，相应于1型语言与0型语言的识别器是线性界自动机与Turing机（见**可计算函数**(computable function)，**复杂性理论**(complexity theory))

一个重写系统(V, P)称为一个有限确定性自动机(finite deterministic automaton)，当且仅当 a) V分为两个不相交的字母表V_S与V_I(状态字母表(state alphabet)与输入字母表(input alphabet))，b)规定一个元素$s_0\in V_S$与一个子集$S_1\subseteq V_S$(初始状态与终止状态集合)，c) P中的产生式形如

$$S_ia_k\to S_j,\ S_i,\ S_j\in V_S,\ a_k\in V_I,$$

对每一个对(s_i, a_k) P中恰有一个这样的产生式．

一个输入字母表V_I上的有限确定性自动机通常定义为一个四元组(s_0, V_S, f, S_1)，其中f是一个由$V_S\times V_I$到V_S的映射，其余项如上．(显然，f的值可由上面的产生式右边得到.)

一个有限确定性自动机FDA接受或识别的语言被定义为

$$L(\text{FDA})=\{w\in V^*\ \ s_0w\Rightarrow^*s_1,\ \text{对某个}\ s_1\in S_1\}$$

一个有限非确定性自动机(finite non-deterministic automaton) FNA的定义与确定性有限自动机的定义的区别仅在于两点 b)中的s_0由一个子集$S_0\subseteq V_S$代替 c)中去掉后半句“对每一个对 (s_i, a_k) P中恰有一个这样的产生式” 被一个FNA所接受的语言定义为

$$L(\text{FNA})=\{w\in V_I^*\ \ s_0w\Rightarrow^*s_1\ \text{对某个}\ s_0\in S_0\ \text{以及}\ s_1\in S_1\}$$

一个语言是3型的，当且仅当它为某个确定性有限自动机所接受，或为某个非确定性有限自动机所接受

一个重写系统 (V, P) 称为是一个下推自动机(pushdown automaton)，当且仅当下述3个条件成立

1) V分为两个不相交的字母表V_S与$V_I\cup V_Z$ 集合V_S, V_I与V_Z分别称作状态(state)，输入(input)与下推字母表(pushdown alphabet) 集合V_I与V_Z是非空的，但允许相交

2)规定元素$s_0\in V_S$, $z_0\in V_Z$及子集$S_1\subseteq V_S$，称为初始状态(initial state)，开始字母(start letter)与终止状态集(final state set)

3) P中产生式取如下两种形式·

$$zs_i\to ws_j,\ z\in V_Z,\ w\in V_Z^*\ s_i,\ s_j\in V_S, \qquad \text{(A1)}$$

$$zs_ia\to ws_j,\ z\in V_Z,\ w\in V_Z^*,\ a\in V_I,\ s_i,s_j\in V_S \quad \text{(A2)}$$

一个下推自动机PDA所接受的语言定义为

$$L(\text{PDA})=\{w\in V_I^*\ \ z_0s_0w\Rightarrow^*us_1\ \text{对某个}\ u\in V_Z^*,\ s_1\in S_1\}$$

一个下推自动机是确定性的 (deterministic)，当且仅当对任一对 (s_i, z)，P或者恰含一个 (A1) 产生式不含(A2)产生式，或者对每一个$a\in V_I$不含(A1)产生式恰含一个 (A2) 产生式

上下文无关语言族等于下推自动机所接受的语言族 由确定性的下推自动机所接受的语言就是确定性

的（上下文无关）语言（deterministic (context-free) languages）对于下推自动机和有限自动机来说，确定性的作用不同 确定性的语言族是上下文无关语言族的一个真子集．

上面所考虑的自动机除了是否处在终止状态外没有其他输出设施，即它们只能是接受或拒绝输入．有时也考虑能有输出的，即能把字变成字的机器（转换器（transducers））下面仅给出对应于有限自动机的转换器 对下推转换器的定义类似

一个重写系统（V,P）称为是一时序转换器（sequential transducer)，当且仅当下列三条成立．

1) V分为两个不相交的字母表V_S与$V_I \cup V_0$．集合V_S, V_I，V_0分别称作状态、输入及输出字母表(output alphabet)．(后两个字母表非空但允许相交)

2) 规定一个元素$s_0 \in V_S$和一个子集$S_1 \subseteq V_S$（初始状态与终止状态集）．

3) P中的产生式具有形式

$$s_i w \to u s_j,\ s_i,\ s_j \in V_S,\ w \in V_I^*,\ u \in V_0^*$$

另外，如果在所有的产生式中$w \neq \lambda$，则这个重写系统称为广义时序机（generalized seqential machine）(gsm)．

对于一个时序转换器ST，字$w_1 \in V_I^*$及$w_2 \in V_0^*$，语言$L_1 \subseteq V_I^*$及$L_2 \subseteq V_0^*$，定义

$$\mathrm{ST}(w_1)=\{w\ \ s_0 w_1 \Rightarrow^* w s_1\ \text{对某个}\ s_1 \in S_1\}$$

$$\mathrm{ST}(L_1)=\{u\ \ u \in \mathrm{ST}(w)\ \text{对某个}\ w \in L_1\}$$

$$\mathrm{ST}^{-1}(w_2)=\{u\ .\ w_2 \in \mathrm{ST}(u)\}$$

$$\mathrm{ST}^{-1}(L_2)=\{u\ .\ u \in \mathrm{ST}^{-1}(w)\ \text{对某个}\ w \in L_2\}$$

这样定义的语言映射就称为(有理)变换（(rational) transductions)和逆（有理）变换（inverse (rational) transductions)．如果ST又是一个gsm，则称为gsm映射（gsm mapping）和逆gsm映射（inverse gsm mapping）

同态、逆同态与映射$\tau(L)=L \cap R$（这里R是一个固定的正规语言）都是有理变换，前一个与最后一个又是gsm映射 两个有理变换的合成仍是有理变换，两个gsm映射的合成亦仍是gsm映射．所有的有理变换τ皆可表示为

$$\tau(L)=h_1(h_2^{-1}(L) \cap R),$$

其中h_1和h_2为同态，R是一个正规语言 此结果表明，一个语言族在有理变换下封闭，当且仅当它在同态、逆同态与正规语言的交下封闭

一个有限概率自动机（finite probabilistic automaton）(或随机自动机（stochastic automaton)，见**概率自动机**（automaton, probabilistic））是一个五元组，

$$\mathrm{PA}=(V_I, V_S, s_0, S_1, H),$$

其中V_I与$V_S=\{s_0, \ \ , s_{n-1}\}$是不相交的字母表（输入与状态)，$s_0 \in V_S$，且$S_1 \subseteq V_S$（初始状态与终止状态集），$H$是一个从$V_I$到$n$维随机矩阵集合的映射．(一个**随机矩阵**（stochastic matrix）是一个方阵，其所有的元均为非负实数，每一行的和恰为1） 映射H可扩充为从V_S^*到n维随机矩阵幺半群的同态．如上所示，V_S是一个有序集，令π为第一个分量为1的n维随机行向量，η为由0和1组成的n维列向量，其中η的第i分量为1，当且仅当V_S中的第i个元素属于S_1 定义PA在分割点α所接受的语言，其中α是一个满足$0 \leqslant \alpha < 1$的实数，为

$$L(\mathrm{PA},\alpha)=\{w \in V_I^*\ \ \pi H(w)\eta > \alpha\}.$$

如此所得语言称为随机语言（stochastic languages）

判定问题（dicision problem）在语言理论中起着重要作用．证明一个问题是不可判定的通常办法，是将其归结到某个已知的不可判定问题上．在语言理论的问题上最有用的工具是关于Post对应问题．根据定义，一个Post对应问题（Post correspondence problem）是一个四元组PCP$=\{\Sigma, n, \alpha, \beta\}$，其中$\Sigma$是一个字母表，$n \geqslant 1$，$\alpha=(\alpha_1, \ \ , \alpha_n)$，$\beta=(\beta_1, \ \ , \beta_n)$是$\Sigma^+$中元素的有序$n$元组 PCP的一个解（solution）是一个指标$i_1, \ \ , i_k$的有限序列，满足

$$\alpha_{i_1}, \ \ , \alpha_{i_k}=\beta_{i_1} \ \ , \beta_{i_k}$$

任意给出的PCP（或任意给出的字母表$\Sigma=\{a_1, a_2\}$上的PCP）是否有解，这个问题是不可判定的

Hilbert第十问题（Hilbert 10-th problem）也是不可判定的 给一个整系数多项式$P(x_1, \ \ , x_k)$，判定是否存在非负整数$x_i(i=1, \ \ , k)$满足方程

$$P(x_1, \ \ , x_k)=0.$$

对于上下文相关语言，成员问题（member-ship problem）是可判定的，但对0型语言则不是（更准确地，任给一个上下文相关文法G与一个字w，可以判定是否有$w \in L(G)$）对任给的两个正规语言，可以判定它们是否等价或一个包含另一个．但对上下文无关语言，这两个问题（等价问题（equivalence problem）和包含问题（inclusion problem））却都是不可判定的．正规语言与上下文无关语言是否为空或是否为无穷，这两个问题是可判定的，但对上下文相关语言来说，则是不可判定的 两个上下文无关语言的交是否为空亦不可判定 一个上下文无关语言与一个正规语言相交仍为上下文无关语言，故其是否为空可判定 一个任给的上下文无关语言是否正规不可判定．

下面这个例子由M Soittola给出 考虑文法G，其产生式为

$$S \to abc, \quad S \to aAbc,$$

$$Ab \to bA, \quad Ac \to Bbcc,$$

$$bB \to Bb, \ aB \to aaA, \ aB \to aa$$

则

$$L(G) = \{a^n b^n c^n \ \ n \geq 1\}$$

事实上，G的任何推导都得以使用第一或第二个产生式开始，第一个产生式直接产生终结字 abc．考虑任何一个从 $a^i Ab^i c^i$ ($i \geq 1$) 出发至终结字母表上的字的推导 D　D肯定以 i 次应用第三个产生式为开始（A移到右面)，然后再用第四个产生式．现在已导出 $a^i b^i Bbc^{i+1}$．这仅有的可能是应用第五个产生式 i 次（B移到左面)，然后得到 $a^i Bb^{i+1} c^{i+1}$　这个字直接导出 $a^{i+1} Ab^{i+1} c^{i+1}$ 或 $a^{i+1} b^{i+1} c^{i+1}$（由后两个产生式）．上面说明了 G 产生的所有字恰形成那个语言，推导的每一步唯一确定，唯一的例外是选择结束，还是进入新的一轮

参考文献

[A1] Chomsky, N , Three models for the descnption of language, *IRE Trans Information Theory*, **IT-2** (1956), 113 - 124

[A2] Chomsky, N , Syntactic structures, Mouton, 1957

[A3] Davis, M , Computability and unsolvability, McGraw-Hill, 1958

[A4] Eilenberg, S , Automata, languages and machines, A, Acad Press, 1974

[A5] Hilbert, D , Mathematische Probleme Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris, 1900, in Gesammelte Abhandlungen, Vol Ⅲ Springer, 1935

[A6] Kleene, S C , Representation of events in nerve nets and finite automata, in Automata Studies, Princeton Univ Press, 1956, 3 - 42

[A7] Paz, A , Introduction to probabilistic automata, Acad Press, 1971

[A8] Post, E L , A variant of a recursively unsolvable problem, *Bull Amer Math Soc* , **52** (1946), 264 - 268

[A9] Rogers, jr , H , Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967

[A10] Rozenberg, G , selective substitution grammars, *Elektronische Informationsverarbeitung und kybernetik* (*EIK*), **13** (1977), 455 - 463

[A11] Salomaa, A , Theory of automata, Pergamon Press, 1969 .

[A12] Salomaa, A , Formal languages, Acad Press, 1973 .

[A13] Salomaa, A , Jewels of formal language theory, Computer Science Press, 1981

[A14] Salomma, A and Soittola, M , Automata-theoretic aspects of formal power series, Springer, 1978

[A15] Thue, A , Ueber unendliche Zeichenreihen, *Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania*, 1 (1906), 1 - 22

[A16] Thue, A , Probleme über Veranderungen von Zeichenreihen nach gegebenen Regeln, *Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i kristiania*, **1.10** (1914)

[A17] Turing, A M , On computable numbers, with an application to the Entscheidung sproblem, *Proc London Math Soc* , **42** (1936), 230 - 265

G Rozenberg, A Salomaa 撰

【译注】 作为转换器的有限自动机还有另一种定义形式．称一个五元组 $M = \langle X, Y, S, \delta, \lambda \rangle$ 为一个有限自动机，其中 X, Y, S 均为非空有限集，分别称为输入字母表，输出字母表与状态字母表，δ 是 $S \times X$ 到 S 的一个映射，称为下一状态函数，λ（这里不指空字）是 $S \times X$ 到 Y 的一个映射，称为输出函数．一个有限自动机决定了一个从 X^* 到 Y^* 的映射，将 X 上的字变为等长的 Y 上的字　如此定义的有限自动机与上面提到的广义时序机 (gsm) 的区别在于　在有限自动机中不考虑初始状态与终止状态集，且下一状态函数 δ 与输出函数 λ 使得下一状态与输出都是确定的　如果 X, Y, S 均为域 F 上的有限维向量空间，且 δ 是 Descartes 积空间 $S \times X$ 到 S 的线性映射，λ 是 $S \times X$ 到 Y 的线性映射，则称 $M = \langle X, Y, S, \delta, \lambda \rangle$ 是域 F 上的一个线性有限自动机

既然一个有限自动机是一个序列转换器，很自然的一个问题就是考虑其所实现的转换是否可逆．称一个有限自动机是延迟 τ 步可逆的，当且仅当其第 i 步输入可由第 i 步，　，第 $i+\tau$ 步输出唯一决定 ($i = 1, 2,$　)，而与初始状态无关．如果一个有限自动机的第 i 步输入可由第 i 步，　，第 $i+\tau$ 步输出及初始状态唯一决定 ($i = 1, 2,$　)，则称它是延迟 τ 步弱可逆的．对有限自动机可逆性的研究在密码学中有很重要的作用．

亦有仅作为产生器的有限自动机，即没有输入，只有输出，这样的有限自动机称作自治有限自动机．移位寄存器是一种特殊的自治有限自动机．

参考文献

[B1] 陶仁骥，有限自动机的可逆性，科学出版社，1979

[B2] 陶仁骥，自动机引论，科学出版社，1986

鲍　丰 撰　李　廉 校

形式数学分析 [formal mathematical analysis, формальный математический анализ]

旨在形式化（见**形式化方法** (formalization method)) 数学分析的一种公理化理论．目的在于构造一个形式公理化理论，使其具有极小可能推导和表示能力，但仍足以形式化所有传统数学分析的内容．

由 D　Hilbert 和 P　Bernays ([1]) 发展的，最广泛研究的形式数学分析可描述如下．在经典**形式算术** (arithmetic, formal) 语言上，加上取值于自然数集合

的新的变量 X, Y, Z, 和新的原子公式(atomic formulas)($t\in X$)("属于集合 X") 形式算术的逻辑公理和归纳公理模式可以以这种方法自然加强到包括扩展语言中的公式上 最后，再加上一个新的公理模式——概括公理模式(axiom-scheme of comprehension)

$$\exists X \forall y (y \in X \equiv A(y)),$$

其中 $A(y)$ 是所考虑的语言中不含自由变量 X 的公式，y 是一个自然数变量

这个理论(所谓的 Hilbert-Bernays 理论(Hilbert-Bernays theory);在这理论中可以论及自然数和自然数集)对数学分析的自然形式化是足够的. 感兴趣的问题是用有一定可构造性的方法提供 Hilbert-Bernays 理论协调性的基础. 根据 **Gödel 不完全性定理**(Gödel incompleteness theorem)，在形式数学分析内这是不可能做到的. C Spector([3])用修改了的直觉主义算术的 **Gödel 解释**(Gödel interpretation)，成功地证明了这理论的协调性，这是**直觉主义**(intuitionism)需求的一种有意义的扩展. 证明 Hilbert-Bernays 理论的协调性的基本困难与这理论的概括公理的特征有关，即出现在概括公理模式中的公式 $A(y)$ 中允许随意使用集合量词 这样，在说明一个数 y 是否属于公理中所定义的集合 X 时，必须用到自然数的所有集合，其中包含被定义的集合 X 可以说形式分析的概括公理在某种程度上表明了所有集合实际同时存在的必要性.

这个特点(常出现在某些集合论形式理论中)称为一个理论的非直谓性(non-predicativity) Hilbert-Bernays 形式分析是非直谓分析

为消除非直谓性，人们提出了各种直谓(predicative)(或分歧(ramified))分析的形式公理理论. 比如，最广泛使用的形式化之一，可以追溯到 H Weyl，考虑了含有以自然数为上标的形为 X^m, Y^k, 的变量 这些变量取值于自然数集 这个理论中的概括公理模式形式为

$$\exists X^m \forall y (y \in X^m \equiv A(y)),$$

其中 $A(y)$ 的囿界集变量的指标 $<m$，自由集变量的指标 $\leqslant m$. 这样，从本质上说，这就给出了在直谓分析中自然数集的分层，较高层中的集合仅由较低层的集合(和该层中已经定义的集合)所定义. 用构造方法可比较容易地证明分歧分析的协调性，但这理论的单纯性却很不值得 分歧分析不太适合于形式化，且形式数学分析一个定理的类似结论在直谓分析中总有不自然的形式. 例如，可以用本质上非直谓的方法定义实数有界集的最小上界

存在一个非直谓的 Hilbert-Bernays 分析的等价形式化，其中将自然数映射到自然数的函数看作自然数集 即对这种函数，在形式算术中附加变量 α, β, γ 和一种新的项 $\alpha(t)$("将 α 应用于 t 的结果")，逻辑公理和归纳公理模式自然地扩展为新语言的公式，最后，加上一个新公理，所谓的分析中的选择公理(axiom of choice in analysis)

$$\forall x \exists y A(x, y) \supset \exists \alpha \forall x A(x, \alpha(x)),$$

它断言如果对所有 x，存在一个 y 满足条件 $A(x,y)$，则存在一个函数 α，对任何 x 取值为相应的 y 这个形式化的优点是，在逻辑公理中排除了排中律之后，所得的系统可方便地形式化直觉主义或构造形式数学分析 直觉主义的(intuitionistic)或构造的(constructive)形式数学分析(formal mathematical analysis)是分别根据**直觉主义**(intuitionism)或**构造数学**(constructive mathematics)的程序要求重新研究传统数学. 在形式化这些学科时，可能容许视变量 α, β, γ, 为只取值于在某种意义上能行的函数，例如，直觉主义选择序列 在这种解释下，分析中的选择公理是真断言 为研究分析的本质部分，需要在这理论中加上新公理，以表示特别的直觉主义或构造原理，如**坝归纳**(bar induction)或 A A Марков 的构造选择原理

参考文献

[1] Hilbert, D and Bernays, P, Grundlagen der Mathematik, 1－2, Springer, 1968－1970

[2] Fraenkel, A A and Bar-Hillel, Y, Foundations of set theory, North-Holland, 1958

[3] Spector, C, Provable recursive functionals of analysis a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics, in Recursive function theory, Proc Symp Pure Math, Vol 5, Amer Math Soc, 1962, 1－27

А Г Драгалин 撰

【补注】 上述的形式数学分析的形式公理化理论也称为二阶算术(second-order arithmetic)或二阶 Peano 算术(second-order Peano arithmetic) 眭跃飞 译

形式幂级数[**formal power series, формальный степенной ряд**]，在环 A 上交换变元 T_1, , T_n 的形式为

$$F=\sum_{k=0}^{\infty} F_k$$

的代数表达式，其中 F_k 是系数属于 A 的 T_1, , T_n 的 k 次型 使 $F_k \neq 0$ 的 k 的最小值，称为级数 F 的阶(order)，型 F_k 称为级数的初始型(initial form)

若

$$F=\sum_{k=0}^{\infty} F_k, \qquad G=\sum_{k=0}^{\infty} G_k$$

是两个形式幂级数，则依照定义有

$$F+G=\sum_{k=0}^{\infty}F_k+G_k$$

和

$$F\cdot G=\sum_{m=1}^{\infty}H_m,$$

其中

$$H_m=\sum_{k=0}^{m}F_k G_{m-k}$$

所有形式幂级数集合 $A[[T_1, ,T_n]]$ 在这两种运算下形成一个环

将一个多项式 $F=\sum_{k=0}^{m}F_k$（其中 F_k 是 k 次型）等同于一个形式幂级数 $C=\sum_{k=0}^{\infty}C_k$，其中 $C_k=F_k$，若 $k\leqslant m$，$C_k=0$，若 $k>m$ 这样就定义了多项式环 $A[T_1, ,T_n]$ 到 $A[[T_1, ,T_n]]$ 中的嵌入 ι．在 $A[[T_1, ,T_n]]$ 中定义有拓扑，0的基本邻域系由下面理想构成

$$I_m=\{F\in A[[T_1, ,T_n]]\mid F_k=0 \quad \forall k\leqslant m\}$$

这个拓扑是可分的．在该拓扑下环 $A[[T_1, ,T_n]]$ 是完全的．$A[T_1, ,T_n]$ 在嵌入 ι 之下的象在 $A[[T_1, ,T_n]]$ 中处处稠密 相对于这个拓扑，F 是其部分和 $\sum_{k=0}^{m}F_k$ 的极限．

设 A 是有单位元的交换环，则 $A[[T_1, ,T_n]]$ 也是有单位元的交换环，若 A 是整环，则 $A[[T_1, ,T_n]]$ 亦是如此 一个形式幂级数 F 在 $A[[T_1, ,T_n]]$ 中是可逆的，当且仅当 F_0 是 A 中的可逆元．若 A 是 Noether 环，则 $A[[T_1, ,T_n]]$ 也是 Noether 环 若 A 是一局部环，极大理想为 $\mathfrak{m}$，则 $A[[T_1, ,T_n]]$ 也是一局部环，极大理想为 $(\mathfrak{m}\ T_1 \quad T_n)$

如果一个局部环 A 在 $\mathfrak{m}$ 进拓扑下是可分的，且是完全的，则 Weierstrass 预备定理（Weierstrass preparation theorem）在 $A[[T_1, ,T_n]]$ 中成立 设 F 是一形式幂级数，使得对某个 k，型 F_k 包含一项 aT_n^k，$a\notin\mathfrak{m}$，且设 k 是具有此性质的最小指数，则 $F=UP$，这里 U 是可逆形式幂级数，P 是形如 $T_n^k+a_{k-1}T_n^{k-1}+ \quad +a_0$ 的多项式，它的系数 a_i 属于 $A[[T_1, ,T_{n-1}]]$ 的极大理想．元素 U 和 P 由 F 唯一决定

域或离散赋值环上的形式幂级数环是唯一分解环

对于非交换的变元的形式幂级数环也已在研究．

参考文献

[1] Bourbaki, N , Elements of mathematics, Commutative algebra, Addison - Wesley, 1972（译自法文）

[2] Zariski, O and Samuel, P , Commutative algebra, 2, v Nostrand 1958

Л В Кузьмин 撰

【补注】 非交换变元的幂级数很快将要变得更重要，并在组合论（计算图论）、计算机科学（自动机）及系统工程与控制论（非线性系统，特别是二元系统输入输出行为的表示）方面得到了应用 最初的想法见选集 [A1]

设 A' 是包含 A 的环（或有一环同态 $\varphi\ A\to A'$）设 $\mathfrak{a}'$ 是 A' 中一个理想，并设 A' 在 $\mathfrak{a}'$-adic 拓扑下是完全的．设 $x_1, ,x_n$ 是 $\mathfrak{a}'$ 中的元素，则表示式

$$\sum_{i_1 \quad i_n=0}^{\infty} c_{i_1 \quad i_n}x_1^{i_1} \quad x_n^{i_n},$$

（其中 i_j 跑遍 $\mathbf{N}\cup\{0\}=\{0,1,2, \}$，$c_{i_1 \quad i_n}\in A$）在 A' 中有确切含义（作为下列有限和当 $m\to\infty$ 时的唯一极限

$$\sum_{i_1 \quad i_n=0}^{m} c_{i_1 \quad i_n}x_1^{i_1} \quad x_n^{i_n})$$

这种表达式也称为 A 上的形式幂级数 将 T_i 映射为 $x_i(i=1,2, n)$，定义了一个连续同态 $A[[T_1, ,T_n]]\to A'$．如果这个同态是单的，就称 $x_1, ,x_n$ 在 A 上是解析无关的（analytically independent）

现在设 A 是一个域，具有乘性范数（即 $\|ab\|=\|a\|\|b\|$） 例如 $A=\mathbf{C}$，具通常范数，或 $A=\mathbf{Q}_p$，有理数域，范数为 $\|a\|=p^r$ 这里 $r=-v_p(a)$，v_p 是 $\mathbf{Q}$ 上的 p 进赋值 （当 $m\in\mathbf{Z}$ 时，$v_p(m)$ 是指除得尽 m 的 p 的最高幂次，$v_p(m/n)=v_p(m)-v_p(n)$） 考虑 A 上所有满足

$$\|c_{i_1 \quad i_n}\|\leqslant Cr_1^{-i_1} \quad r_n^{-i_n}$$

的形式幂级数

$$\sum c_{i_1 \quad i_n}T_1^{i_1} \quad T_n^{i_n},$$

它们形成了 $A[[T_1, ,T_n]]$ 中的子环，称为 A 上收敛的幂级数环，记为 $A\{T_1, ,T_n\}$（或 $A\langle\langle T_1, ,T_n\rangle\rangle$）．后一记号也在 A 上非交换的变元的幂级数环中出现） Weierstrass 预备定理在 $A\{T_1, ,T_n\}$ 中也成立．

参考文献

[A1] Series formelles en variables noncommutatives et applications, Lab inform, theor et programmation, 1978

[A2] Nagata, M , Local rings, interscience, 1960

冯绪宁 译 裴定一 校

三角级数的形式积［formal product of trigonometric series，формальное произведение тригонометрических рядов］

三角级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx} \text{和} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\gamma_n e^{inx}$$

的形式积是级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}K_n e^{inx},$$

其中

$$K_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \gamma_{n-m}$$

如果当 $|n| \to \infty$ 时 $c_n \to 0$，$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n\gamma_n| < \infty$，而且

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}$$

具有和 $\lambda(x)$，则级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (K_n - \lambda(x) c_n) e^{inx}$$

在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于零. 条件

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n \gamma_n| < \infty$$

成立，例如，如果

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}$$

是三次可微函数 $\lambda(x)$ 的 Fourier 级数

参考文献

[1] Бари, Н К , Тригонометрические ряды, М , 1961 (Bary, N K [N K Бaп], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964)

[2] Zygmund, A , Trigonometric series, 1－2, Cambridge Univ Press, 1979

Т П Лукашенко 撰 张鸿林 译

形式系统 [formal system, формальная система]，演绎系统 (deductive system)

由构成表示式的规则以及在这个演算中构成推导 (见**逻辑推导** (derivation, logical)) 的规则给出的数理逻辑中的一种**演算** (calculus) 形式系统的表示式被看成是一些符号的纯粹形式的组合，而推导规则决定什么情况下形式表示式 A 能由另外一些表示式 B_1， ， B_n 演绎出来. 当 $n=0$ 时，A 就称为公理 (axiom) 推导是由形式表示式依据推导规则给出的一个序列，或树形图表. 如果一个推导树形的顶点上只有公理，则位于这个推导末尾的一个形式表示式称为在这个形式系统中可推导的 (derivable)

许多感兴趣的形式系统，其语言和推导都满足能行性 (effectiveness) 要求 这就是说必须要有一个能行的程序来判定任意一个符号序列是否是这个形式系统的表示式. 推导概念也必须满足同样的要求. 但一般说来，在一个能行形式系统中，可推演的表示式这个概念不是能行的

形式系统这个概念是数理逻辑中最核心的概念之一，它既适用于数理逻辑本身，也适用于数学的有关领域的需要

最重要的一类形式系统是形式化某个有意义的数学分支的形式一阶理论 (见 [4]) 历史上，这一类形式系统的出现与 D Hilbert 为给出数学的基础而作的计划有关 (见**形式主义** (formalism))

为研究形式系统而在数理逻辑中发展起来的概念和方法已经在数学的各个分支，例如群论和范畴论中得到应用

亦见**形式数学分析** (formal mathematical analysis)

参考文献

[1] Hilbert, D , Grundlagen der Geometrie, Springer, 1913

[2] Kleene, S C , Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本 S C 克林，元数学导论，科学出版社，1984)

[3] Church, A , Introduction to mathematical logic, 1, Princeton Univ Press, 1956

[4] MacLane, S , Topology and logic as a source of algebra, *Bull Amer Math Soc* , **82** (1976), 1, 1－40

В Н Гришин 撰 沈复兴 译

形式系统的等价 [formal systems, equivalence of, формальных систем эквивалентность]

两个**形式系统** (formal system) 称为等价的，如果这两个系统的可推演出的表示式的集合相同. 更准确地说，形式系统 S_1 和 S_2 等价当且仅当下列诸条件成立 1) S_1 的每一公理皆可在 S_2 中推演出，2) S_2 的每一公理皆可在 S_1 中推演出，3) 如果一个表示式 B 由表示式 A_1， ， A_n 直接利用 S_1 的推演法则得到，并且 A_1， ， A_n 皆可在 S_2 中推演出，那么 B 也可在 S_2 中推演出，4) 改变 3) 中 S_1 和 S_2 所处位置同样成立.

В Н Гришин 撰 卢景波 译

形式主义 [formalism, формализм]

Hilbert 提出的为数学建立基础的规划 这个规划的目标是用精确的数学工具去证明数学的**融贯性** (consistency) Hilbert 规划期望使证明的概念精确化，以至于后来这一概念成了一种数学理论——**证明论** (proof theory)——的研究对象

为了能够精确地研究证明，对证明赋予了一种单一的精确定义的形式 借助于证明论的**形式化方法** (formalization method)，在证明论中断言变成了确定符号的有穷序列，而且逻辑的推理方法变成了从一些已证的形式化表达的语句，产生新的形式化表达语句的形式规则 因此，一种数学理论就变成了一种**形式系统** (formal system)

尽管 Hilbert 规划没有达到它的最终目的 (因为 **Godel 不完全性定理** (Gödel incompleteness theorem)，[3])，但是在这规划中所做的研究工作对数理逻辑的许多领域的发展具有很大意义.

"形式主义"一词经常是作为形式系统的同义语，以及作为能把关于对象的运算变成相应于这些对

象的符号的运算的演算的同义语 在数学哲学中，形式主义是看待数学本质的一种观点．根据这种观点，数学的特征是它的方法，而不是它的研究对象，数学的对象除了根据它们的形式定义所得到的那些东西之外，没有任何意义（一个可能的“潜在的本质”是被看作不相干的）．

参考文献

[1] Hilbert, D, Grundlagen der Geometrie, Springer, 1913

[2] Gentzen, G, Collected papers, North-Holland, 1969

[3] Godel, K, Ueber formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandter Systeme Ⅰ, *Monatsh Math Physik*, **38** (1931), 178－198

[4] Новиков, П С Элементы математической логики, 2 изд M, 1973（英译本 Novikov, P S, Elements of mathematical logic, Oliver & Boyd, 1964）

[5] Kleene, S C, Mathematical logic, Wiley, 1967

[6] Curry, H B, Foundations of mathematical logic, McGraw-Hill, 1963

B E Плиско 撰 丁德成 译 莫绍揆 校

形式化方法 [formalization method, формализации метод]

一个用**形式系统**（formal system）表示数学理论的方法 它是**证明论**（proof theory）的主要方法之一

形式化方法的应用包括完成以下几个步骤

1) 将原有的数学理论符号化 在这一步，该理论的所有命题都用适当的逻辑——数学语言 L 写下来

2) 对该理论的演绎分析和对公理的选择，即该理论的所有其他命题都可以从它们逻辑地导出的那些命题的选择

3) 将用符号表示的公理加到 L 上适当的**逻辑演算**（logical calculus）中．

现在，用这种形式化方法所获得的系统本身便是精确数学研究的对象（见**公理方法**（axiomatic method），**证明论**（proof theory））

参考文献

[1] Kleene, S C Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951（中译本 S C 克林，元素学导论，科学出版社，1985）

C H Артемов 撰 吕义忠 译 莫绍揆 校

形式化语言 [formalized language, формализованый язык]

一种仿真语言，在该语言中对表示式的类有精确的形式定义（并且对这些表示式的意义也有解释） 通常，形式化语言的表示式是某些原始符号的形式组合，在给定的语言中，表示式是按一些确定的法则构成的 一个形式语言的表示式的刻画以及它们之间的联系构成语言的语法（syntax） 表示式的意义的说明由语言的语义学（semantics）承担 于是为了给出一个形式化语言，只要给出它的语法及其语义 在形式化语言的语法概念的阐述中不允许使用语义概念．所有语法定义必须能为一个不了解语言语义的人理解 这一基本要求导致了形式化语言的语法与语义的分离以及语法相同而语义不同的语言的出现．这样就使形式化语言与自然语言区别开了 通常说到形式化语言只是指其语法，而把其可能的语义称为语言的解释（interpretations）

在形式化语言中可以做到对语言表达工具的明确规定，这就能消除各种直观模糊的引证，这一点在一个理论的非形式公理构造方法中是不可避免的（见**非形式公理方法**（informal axiomatic method）） 语言的形式化创造了把所考虑的数学理论的演绎方法形式化的基础 形式化语言概念是 Hilbert **形式系统**（formal system）概念的基础

有时形式化语言概念不仅包含它的语法和语义，而且也包含获得该语言真命题所容许的演绎方法的清单（也就是包括公理和推演方法） 形式化语言的具体例子在以下条目中给出 **公理集合论**（axiomatic set theory），**形式算术**（arithmetic, formal），**谓词演算**（predicate calculus），以及**类型论**（types, theory of）

从语义的观点来看，人们可以区别下列类型的语言表示式 变量，项和公式 每一个变量与一个由其容许值构成的定义域（变量可应用的定义域）相伴（在一种语义解释中）．如果所有变量都有相同的可应用定义域，则称这个语言为单类的（single-sorted），否则称其为多类的（multi-sorted） 在多类语言中，必须有关于类形成的语法法则，也称此为类型 该语言的每一个变量有一个确定的类型．每种语义法则也必须对每个类型 τ 都有一个定义域 V_τ 与之相伴．类型为 τ 的变量取值于 V_τ

项和公式皆可包含参数，也就是有变量的自由出现（见**自由变量**（free variable）） 从语义的观点看，没有参数的项（闭项（closed term））一般说来是表示一个个体的复合**名字**（name），而没有参数的一个公式（闭公式（closed formula）或命题（proposition））却表示一个判断 一个形式化语言可以有初等项，称此种项为常数（constant） 所有常数皆为语言的原始符号

如果项中含有参数，则此种项称为命名形式（name forms），如果公式中含有参数，则称其为表达形式（expression forms） 按照语言的语义，对自由变量（参数）的每一组可容许值，命名形式表示一个个体，而表达形式表示一个判断 如果一个项以某一变量为参数，那么这个变量称为属于或出现于该项中 如果一个项是一个变量，那么此项以该变量为参数 如果项或公式的参数在 x_1, , x_n 中，那么可分别把它们视为 x_1, , x_n 的函数或谓词的名字

公式也可以视为取特殊真假值的项（见**真假值**(truth value)，在典型情况下，有两个真假值“真”和“假”）．利用对公式的这种解释，人们在表述判断时，可以只限于表述各种项与一个特定代表“真”的项之间的相等情况．

满足能行性要求的形式化语言是一个相当广泛的类，此种语言中的表示式必须是有限对象，而且它的所有语法概念（项，公式及其他）必须都是算法可解的 有时人们也考虑不满足能行性要求的语言，在这种情况下语言可以包含无限长的表示式，或使用非有限对象作为原始符号 （例如，在研究向量空间时所使用的语言中，原始符号包含所有实数 ）

在表示式是非有限对象的情况下，不能把由已经构造出来的表示式构成新的表示式的构造方法，视为语言的直观明显的表示式形成法则 这时必须一方面说明规则本身，另一方面说明如何用这些规则确定表示式的类．例如可以把这些规则视为已经可用的“表示式”集合上的运算，而不是作为生成新表示式的构造方法 这时的形式化语言必须是一个适当范畴内的一个自由对象 也可以使用集合论的说明方法，其中的非有限对象（特别是表示式）是由一个集合论的全域（称为一个*容许集*(admissible set)）的某些充分丰富的集合出发形成的，而表示式的诸构成规则可以视为一个归纳定义中的条目，用这些规则可以从一个可容许集合中选择一个由表示式构成的子类

参考文献

[1] Church, A , Introduction to mathematical logic, 1, Princeton Univ Press, 1956

[2] Hilbert, D and Bernays, P , Grundlagen der Mathematik, 1 − 2, Springer, 1968 − 1970

[3] Barwise, J (ed), Handbook of mathematical logic, North-Holland, 1977

В Н Гришин 撰

【补注】 用自动机决定形式化语言是形式化语言的一种给出方法 见**形式语言与自动机**(formal languages and automata)，亦见**形式语言**(formal language)和**机器可表示的形式语言**(formal language, machine-representable)

形式语言已经成为在非数学领域中联系结构的描述与结构自身的标准工具 在数学以外的最重要的应用领域是逻辑学、语言学和计算机科学．在计算机科学中，程序正确性的所有问题（正确性证明的本身或正确程序的合成）都以规定程序意义的理论的存在为前提 在那个理论中程序变成一个形式语言内的词组，而这一语言可以在某一适当的定义域中解释．这些定义域的构造通常导致复杂的数学问题

在语言学中，关于自然语言语义学的刚性理论的探索导致各种理论的激增，其中定义了各种形式语言来表示自然语言的各种片断，然后从数学模型中为之提供语义学（亦见**数理语言学**(mathematical linguistics))

虽然上面主要条文未作明确的说明．但显然的是，我们只考虑对形式语言的那样的解释，它们遵循意义的*合成原理*(principle of compositionality) 一个复合表示式的意义是由其组成部分的意义合成的 这个原理在语言哲学的传统中被称为 Frege *原理*(Frege principle)，通常把它作为阐明形式语言的出发点 它构成现代语义学奠基的基础，后者是由 R Montague 在他的关于普通英语的部分探索中创造的 我们可以说，合成原理为形式语言本身和它的解释提供了附加结构 语言变成一个代数（可能是多类的），语义定义域变成一个类似的代数，并且对表示式赋以意义的映射是这两个代数之间的一个同态．

参考文献

[A1] Stoy, E Denotational semantics, the Scott-Strachey approach to programming language theory MIT, 1977

[A2] Bakker, J de , Mathematical theory of program correctness, Prentice-Hall, 1980

[A3] Thomason, R H , (ed), Formal philosophy, selected papers from Richard Montague, Yale Univ Press, 1974

[A4] Janssen, T M V , Foundation and applications of Montague grammar, 1 Philosophy, framework, computer science, CWI, 1986

卢景波 译 王世强 校

公式 [formula, формула]

形式化语言(formalized language)中的一个句子（可能带有参数） 在几种专有的形式化语言中公式概念的精确定义可见**公理集合论**(axiomatic set theory)，**形式算术**(arithmetic, formal)，**谓词演算**(predicate calculus)，**类型论**(types, theory of) 在数学的实践中，公式也有语义的意义 它们可能是名字、命题的形式、定义的缩写等等 В Н Гришин 撰 卢景波 译

Fortran 语言 [Fortran, Фортран]（取名于 FORmula TRANslator)

一种用于计算数学问题求解的最早的程序设计语言，1954 年 − 1956 年为 IBM704 机而开发出来的，Fortran Ⅱ 是世界上第一个广泛使用的**算法语言**(algorithmic language)

后来的 Fortran 都是由 Fortran Ⅱ 演变出来的程序设计语言，都直接或间接地声称是 Fortran Ⅱ 的后继，从而都沿用着 Fortran 这个名字．其中大多数都是后来一起出现的两个标准版本（1962 − 1964）Basic Fortran 和 Fortran Ⅳ 之一的扩充．

Fortran 提供描述算术、逻辑、文本数据输入与输出的手段 算术数据包括整数、实数（一般精度和高

倍精度)，通常还有复数．定义在算术值上的算术运算和关系运算保持传统规则 这些值可以以标量变量或同类型数组元素存放在存贮器中

一个程序由主程序和一组子程序组成(见**过程**(procedure))，它们都可以被单独编译 通过简单与计算转移、条件运算符、循环和过程调用，可改变文本(源程序)执行顺序．

子程序通过参数和公用存贮区相互传递信息 因为禁止递归调用，且数组维界为常数，所以在编译阶段有关数组元素存取的动作部分可预先准备好，这对加快一个已编译的程序的计算速度很有意义

Fortran语言的主要特色可以说不在于语言本身的构成，而在于语言在程序设计领域中独一无二的地位 由IBM704机的“数学机器代码”，经过向自然语言接近的变革，就成了应用最广泛的程序设计语言 至少有一种Fortran语言版本已成为任何通用计算机必不可少的了

在这一变革过程中，Fortran语言保留了为程序设计和使用程序方便的一些重要的机器码特色，诸如复合常量(数据)和单独编译 从而导致了有关数值分析、统计、机器图形、工程计算等方面的大型Fortran子程序的集成

同时，Fortran语言保留很原始的句法，一组操作符(例如在循环中)通过标号实现，这不仅使程序含糊不清，而且也减弱了句法控制 例如，如果在下面典型的循环中

$$DO\ 2I=1,\ 100,$$
$$2A(I,J)=0,$$

省略一个逗号，或是把第一行改为直接停止循环，则不会检测出错误．这就减弱了Fortran程序的可靠性，而且构成语言的大多数重要的缺陷 在新的标准(如Fortran77)中，这些问题已经部分地得到解决．

参考文献

[1] MacCracken, D D and Dorn, W S, Numerical methods with Fortran-IV programming, case studies Wiley, 1972

[2] Grund, F, Fortran-IV programmierung, Deutsch Verlag Wissenschaft, 1972

[3] Katzan, H Fortran 77, v Nostrand, 1978

С Б Покровский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Backus J, Can programming be liberated from the von Neumann style? A functional style and its algebra of programs Comm ACM, 21 (1978), 8, 613-641

[A2] Backus, J The history of FORTRAN I, II and III, ACM SIGPLAN NOTICES, 13 (1978), 8, 165-180

徐德启 译

几何基础 [foundations of geometry, основания геометрии]

研究几何学的基本概念、概念间的关系以及有关问题的几何学分支

这些基本概念及其间的关系，是定义几何图形和证明几何命题的依据，它们的重要性，甚至在古代几何学家的著作中已获公认 随着几何学中演绎法的发展，作为几何学基础的基本概念、公理和公设的作用更加突出了 在Euclid的《几何原本》(Elements)(公元前3世纪)中，后面要用到的所有概念的一系列定义是在公理和公设之前给出的 在这些概念中，“点”、“直线”和“平面”是特别重要的，它们的定义不依赖于其他的几何概念 这些基本概念(fundamental concepts)的实际定义从几何的观点看是不能令人满意的，因为它们仅仅表示物理特性(例如，“点是没有部分的”，即点被理解为物理上不可分割的微粒)．因此，与《几何原本》几乎同时代的其他几何学家的著作中，包含有对这样引进的几何概念的定义、公理和公设的大量的评论和批判 但这仅仅是一些改良，而并未触及这些定义的基础 从本质上看，那时许多定理的证明都基于画图的准确性及所需几何作图的实际可行性，并非从公理和公设出发的严格的逻辑演绎 直到19世纪特别是20世纪初期，才出现关于几何学的构造及其基础的无逻辑缺陷的演绎方法的一些著作，它们足以解释基本概念及其关系的深刻意义．对几何基础的较深入的分析得益于1826年Лобачевский几何学的发现 为澄清以与《几何原本》相同的原理和概念为基础的**Euclid几何学**(Euclidean geometry)所得的若干成果，出现在G Peano (1894), M Pash (1882), M Pieri (1899), D Hilbert等人的著作中 Euclid几何学的**Hilbert公理系统**(Hilbert system of axioms)引起了极大的注意．为获得Euclid几何学的一个逻辑上满意的构造，Hilbert提出五组公理并证明它们对于整个Euclid几何学的构造是必要而且充分的 此外，他首次提出了对整个公理系统的逻辑处理，借助于构造一个数值模型澄清了公理系统的相容性，并建立了各组公理的独立性和系统的完全性 在《几何原本》中将空间的概念描述成一切图形所在的“地方”，与此不同，Hilbert将空间考虑为所有“点”、“线”、“平面”的集合，而图形则在此基础上构造出来 Hilbert系统的这组基本概念是从《几何原本》借用(和提炼)得来的，但这个系统本质上是一个纯粹的几何框架，与画图的准确性无关 然而，基于Hilbert公理系统的几何学语言同《几何原本》的语言几乎没有什么差别

差不多与Hilbert系统同时出现了Euclid几何学的其他一些公理系统．在F H Schur (1909)的系统中，基本概念是“点”，“线段”，等等，而这个系统中图形的“合同”，被他所引进的“运动”的概念所取代．这就使得在几何学中引进群的概念来研究运动并将研究

方法纳入代数的形式成为可能．上述几何框架不能满足空间概念及其他概念进一步推广的需要，它们也不是充分代数化的．

对于Euclid几何基础的新探讨要求创造一种新语言，它使得相应的概念的推广，证明的代数化，对象的分类等等成为可能 广泛采用的、同时能将几何概念推广并翻译成代数语言的Euclid几何基础的框架之一，是H Weyl (1916)提出的公理系统 下面给出的是Weyl框架的一种版本．

三维Euclid空间 $\mathbf{R}^3$ 定义为两种元素——“点”和“向量”——组成的集合，它们满足下述四组公理

第Ⅰ组．定义点和向量之间关系的公理

I_1. 至少存在一个点

I_2 每个有序的点对都对应于一个且只对应于一个向量．

I_3 对每个点 A 和每个向量 $\mathbf{a}$，有一个且只有一个点 B 使得 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$ ($\overrightarrow{AB}$ 是向量 $\mathbf{a}$)

I_4 若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，则 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

在这组公理的基础上定义的向量的和，满足交换律和结合律的要求．存在一个零向量，并且每个向量有一个对应的反号向量 这些向量按加法组成一个群．

第Ⅱ组．描述向量与数相乘的公理

II_1. 每个向量 $\mathbf{a}$ 和每个 $k\in\mathbf{R}$ 对应于一个特定的向量 $k\mathbf{a}$ ($k\mathbf{a}$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 和数 k 的积)

II_2. 向量 $\mathbf{a}$ 与1相乘不改变这个向量

II_3 向量的数乘关于数的加法满足分配律 $(k_1+k_2)\mathbf{a}=k_1\mathbf{a}+k_2\mathbf{a}$

II_4 向量的数乘关于向量加法满足分配律 $k(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)=k\mathbf{a}_1+k\mathbf{a}_2$

II_5 向量的数乘满足结合律 $k_1(k_2\mathbf{a})=(k_1k_2)\mathbf{a}$

运用加法和数乘运算可以定义向量的线性组合及它们的线性无关性

第Ⅲ组 定义空间的维数

III_1 存在三个线性无关的向量，但任何四个向量都是线性相关的．

这个公理具有一个拓扑性质，从它和第二组公理可以推出 $\mathbf{R}^3$ 是一个3维拓扑空间 前面三组公理定义了一个3维仿射空间．

第Ⅳ组．定义度量性质

IV_1 任何两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 对应于一个特定的数（标量积）$(\mathbf{a},\mathbf{b})=l$, $l\in\mathbf{R}$

IV_2 标量积的对称性 $(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{b},\mathbf{a})$

IV_3 标量积的可分配性 $(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{b})+(\mathbf{a},\mathbf{c})$

IV_4 对于 $k\in\mathbf{R}$ 有，$(\mathbf{a},k\mathbf{b})=k(\mathbf{a},\mathbf{b})$

IV_5 向量的标量平方是非负的 $(\mathbf{a},\mathbf{a})\geqslant 0$，并且仅仅对于零向量有 $(\mathbf{a},\mathbf{a})=0$

基于第Ⅳ组公理可定义两个点之间的距离，向量之间的角度等等，向量也用来定义“线段”，“直线”，“平面”，等等

Weyl框架容许推广到任意维数，对公理作适当更动后，这个框架可以包括双曲空间和椭圆空间等等

Euclid几何学的Weyl公理系统是相容的，独立的并满足完全性（范畴性或极小性）条件．其相容性是用一个数值模型来建立的 将空间 $\mathbf{R}^3$ 的“点”一对一地对应于有序数组 (x^1,x^2,x^3)，$x^i\in\mathbf{R}\ (i=1,2,3)$ 一个起于 (x_1^1,x_1^2,x_1^3) 而止于 (x_2^1,x_2^2,x_2^3) 的向量定义为三元有序组 $\mathbf{a}=(a^1,a^2,a^3)$, $a^i=x_2^i-x_1^i\ (i=1,2,3)$ 两个向量 (a^1,a^2,a^3) 和 (b^1,b^2,b^3) 的和定义为 $(a^1+b^1,a^2+b^2,a^3+b^3)$，一个向量 (a^1,a^2,a^3) 和一个数 $k\in\mathbf{R}$ 的积是 (ka^1,ka^2,ka^3) 两个向量 (a^1,a^2,a^3) 和 (b^1,b^2,b^3) 的标量积由数 $\sum_{i=1}^{3}a^ib^i$ 来表示 而基向量（线性无关向量的三元组）可以用 $\mathbf{e}^1=(1,0,0)$, $\mathbf{e}^2=(0,1,0)$, $\mathbf{e}^3=(0,0,1)$ 表示 为证明公理之间及公理组之间的相互独立性，将系统中每一个公理代之以其反命题并对所得的新系统作出解释．而系统的完全性则可由实数集的完全性推出

在Euclid几何学框架的构造中，可以把几何变换取作基本概念 这样，在F Bachmann的公理系统中，对称变换是作为一个基本概念引进的 利用对称，在Euclid（度量）平面上生成一个运动群，“点”和“线”定义为这个群的对合元素．群论关系是“关联”，“正交”等概念定义的基础，而几何证明在翻译成代数语言后即代之以计算

Euclid几何基础也影响到有关非Euclid几何基础的问题．在19世纪末和20世纪初提出了研究几何基础的基本的现代方法和途径 形成几何基础的概念的新方法是由B Riemann, S Lie, F Klein, A Cayley等人给出的．在基本的几何概念中，有多维流形，作用在流形上的变换群，这些群的不变量，等等．

群的方法是在Klein的**埃尔兰根纲领**（Erlangen program）中首次明确提出的 一个几何空间定义为一个集合 Φ 和它的一个固定的变换群 Ω，对此空间的 Ω 不变性质的研究就是几何学的目标．（例如，一个 n 维仿射空间 A^n 定义为一个集合，有一个 n 维向量空间的加法群单可迁地作用在其上 ）Lie, Klein和Cayley研究了变换群，由此，产生了Euclid几何学和非Euclid几何学作为特殊变换群的几何学的分类并研究其基础的新的可能性．几何学变成了变换群不变量的研究，而几何基础有赖于群论，

Riemann对几何基础作了度量的探讨．一个几何空间被考虑为一个集合和一个满足某些公理的度量．Riemann证明该空间的所有内部性质都被给定的某个二次微分形式所决定（曲率，测地线，等等），这导致

各类不同的度量几何的发现 空间和它们的几何学开始在一个度量的基础上进行分类 Rıemann 揭示了在一个点流形上坐标的选择对于研究二次形式本身的特殊作用 由此，对于常 Rıemann 曲率的空间，Rıemann 引进了一个标准形式，它可以由一个二次形式借助于相应的坐标选择简化而得（见 **Riemann 几何学**（Rıemannıan geometry））

Euclıd 几何学的坐标方法推广于各类空间，并在微分几何中获得发展，有赖于坐标系选择的**流形**（manıfold）的概念，在几何学中有很多应用 微分几何对象的变换的群的探讨容许了度量（二次）形式的不变量理论的产生．变换群的不变量理论是现代**微分几何学**（dıfferentıal geometry）的构造和逻辑根据的基础 几何对象的概念成为基本概念之一，而几何被考虑为几何对象的理论（见**几何对象理论**（geometrıc objects, theory of）） **微分流形**（dıfferentıable manıfold）的概念使得对微分几何对象予以严格定义以及，特别是，对几何中的分析方法和分析中的几何方法予以肯定成为可能．

Euclıd（一般说来，任何的）几何基础，依赖于一个确定的公理系统，显示出集合论原理在公理系统的逻辑分析中的特殊作用 事实上，一个公理系统的独立性和相容性可以通过构造该系统的数值模型的办法来建立．于是几何基础中的集合论以它自己的方式成为几何理论的逻辑构造有无错误的准绳 连续性（和完全性）几何公理本质上是等价于集合论公理的 指定**域**（field）上的几何学的构造是基于一个集合论性质的某些概念的应用 从 Descartes 解析几何学的产生开始．将一个点集映射为一个实数集（或为一个任意数集）的思想，对于几何基础有很大的意义 这个思想的发展使得几何学可以借助于它们赖以建立的数集（通常是一个域）来定义和分类

在几何基础中，集合论方法被广泛用于几何变换的研究．如上所述，变换群的不变量是该群所定义的几何学的研究主题．（射影）变换的不变量理论的一个重要应用是 Kleın 所发现的对非 Euclıd 几何学的解释．对诸如“角度”，“正交性”等概念都作了仔细分析 关于射影复空间和各种射影度量化的研究对于具指定结构的空间的分类有重大的意义

变换的分类的拓扑方法也被用于几何基础的研究，借助于这些方法，流形的类和型之间最本质的差别得以澄清，它们的整体性质也被研究

几何基础的基本方法和途径——综合方法、群论方法和度量方法——在这个几何领域的现代研究中也是有意义的 例如，Rıemann 关于几何基础的思想的一个推广是无穷小方法，在这里几何结构被定义为某个指定的无穷小量的场（例如，一个 **Finsler 度量**（Fınsler metrıc），一个**联络**（connectıon）等等） 许多物理和力学的问题可以几何地解释并用几何概念来解决它们 一般说来，Euclıd（和非 Euclıd）几何学的所有现代公理系统都在不同程度上使用了几何基础的所有三种方法．

在给定的公理系统的基础上用以证明定理的工具的研究是几何基础主要问题之一 在《几何原本》中，Euclıd 使用了 Arıstotle 的经典逻辑 Hılbert 密切关注这些问题并勾划出数理逻辑基本问题的轮廓 几何公理系统的相容性是通过建造这些系统的数值模型并逻辑地研究它们而证明的

线段、面积和体积的测度问题在几何基础中是有意义的．一个线段、一个面积或一个体积的测度的概念基于指定的公理组 例如，在 Hılbert 公理系统中 Euclıd 平面上的多角形面积理论基于仅与平面有关的公理，并且独立于连续性公理（见**非 Archimedes 几何学**（non-Archımedean geometry），**非 Pascal 几何学**（non-Pascalean geometry））

几何基础处理几何概念和公理系统的物质上的客观来源的问题．长期以来，构造几何系统的原则之一是，系统在某个物质模型上的实际可行性原则 如前所述，在《几何原本》里曾试图从其物理性质的观点来解释基本概念 在 19 试纪末期，随着 **Лобачевский 几何学**（Lobachevskiĭ geometry）的发现，Euclıd 几何学以外的各种几何学的客观可能性的问题再次被提起．**非 Euclid 几何学**（non-Euclıdean geometrıes）的客观存在性问题被许多几何学家利用物理模型予以解决，由此他们还试图证明几何公理系统的独立性和相容性．Н И Лобачевский 试图根据对大尺度三角形亏量的物理测度来证实他的平行线公理所引申出的结论的相容性，为了证明不同的三角形有不同的亏量而且三角形的内角和可以小于二直角，这些三角形的顶点选在远离地球的宇宙星体上 一个求证不同的度量几何学的存在性的尝试是 H Helmholtz 在 Rıemann 的结果出现后不久的一篇著作中提出的 Helmholtz 对度量几何学所依赖的基本概念给出了一个物理解释，并且加上反映空间几何性质的某些物理定律，使得构造该空间的几何学成为可能．利用启发式的探讨，Helmholtz 从基本的物理定律获得了作为一个微分形式的、空间的度量，正如Rıemann 所揭示的，它决定了空间的一切内部性质．取代 Rıemann 所提出的关于几何基础的假设，Helmholtz 检验了可推出度量几何学中同样结论的那些事实，从而强调了这些结论的有效性（相容性）的经验判定．

客观地讲，几何系统的经验判定有助于新的几何思想的传播，并对几何系统的更精细的逻辑分析和对这些系统的现代基本要求的发展有所贡献．此外，给出几何学的物理背景的尝试有助于几何思想和方法渗

入数学、物理和力学的不同领域

几何基础在几何学的方法论中有极大的重要性 在大学和教育学院的近代几何课程的教学中，几何基础占有中心位置 在这方面，基本概念和公理系统的选择对于“缩短”公理和可从它们推出的有实际用途(特别是在解决问题上)的重要定理之间的距离起着较大的作用

参考文献

[1] T L Heath, The thirteen books of Euclid's elements with introduction and commentary, 3 Vols, Dover Publications, Inc, 1956 (中译本 欧几里得，几何原本，商务印书馆，1939)

[2] Hilbert, D, Grundlagen der Geometrie, Springer, 1913 (中译本 D 希尔伯特，几何基础（上册），科学出版社，1987)

[3] Veblen, O and Whitehead, J, The foundations of differential geometry, Cambridge Univ Press, 1932

[4] Об основаниях геометрии, M, 1956

[5] Каган, В Ф, Основания геометрии, ч 1-2, M-Л, 1949-1956

[6] Каган В Ф, Очерки по геометрии, M, 1963

[7] Busemann, H, The geometry of geodesics, Acad Press, 1955

[8] Ефимов, Н В, Высшая геометрия, 6 изд, M, 1978 (中译本 H B 叶菲莫夫，高等几何学，高等教育出版社，1954)

[9] Bachmann, F, Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsprinzip, Springer, 1973

[10] Розенфельд, Б А, История неевклидовой геометрии, M, 1976

[11] Погорелов, А В, Элементарная геометрия, 2 изд, M, 1974

[12] Choquet, G, Geometry in a modern setting, Kershaw, 1969

[13] Doneddu, A, Geometrie euclidienne plane, Dunod, 1965

[14] Karteszi, F, Introduction to finite geometries, North-Holland, 1976 (译自匈牙利文)

Л А Сидоров 撰

【补注】 Weyl 框架所描述的，与其说是 Euclid 空间，勿宁说是一个**向量空间** (vector space) (带内积的). 其公理实际上源于 Peano，并被 E Artin 用来描述 Euclid 空间. Riemann 的研究报告 [A4] 阐述了他的几何学思想，亦见 **Riemann 几何学** (Riemann geometry).

[A1] 是[2] 的英译本. Euclid 的《几何原本》的更多的版本在 **Euclid《几何原本》** (Elements of Euclid) 条目中被提及

参考文献

[A1] Hilbert, D, Foundations of geometry, Open court, La-salle, 1971 (译自德文)

[A2] Greenberg, M, Euclidean and non-Euclidean geometry, Freeman, 1974

[A3] Busemann, H, Recent synthetic geometry, Springer, 1970

[A4] Riemann, B, Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zuGrunde liegen, in Das Kontinuum und andere Monographien, Chelsea, reprint, 1973

杨 路、侯晓荣 译 张景中 校

四色问题 [**four - colour problem**, **четырех красок задача**]

对任意平面地图(见**可平面图** (graph, planar)) 的各个区域，能否仅用四种颜色着色，使任何两个相邻区域都具有不同颜色?

在 19 世纪有人猜想 四色问题的答案是肯定的 1890 年，证明了一个较弱的结果 每个平面地图都能用五种颜色着色 如果把任何平面地图用其对偶的可平面图来代替，则得到一个等价命题，即以图论的术语表述的四色问题 任何可平面图的色数 (chromatic number) (见**图的着色** (graph colouring)) 是否都不超过 4($\chi(G) \leq 4$)? 为解决四色问题所做的大量努力促进了**图论** (graph theory) 的某些分支的发展 1976 年，使用电子计算机获得了四色问题的肯定答案(见 [3])

参考文献

[1] Harary, F, Graph theory, Addison-Wesley, 1969

[2] Ore, O, The four-colour problem, Acad Press, 1967

[3A] Appel, K and Haken, W, Every map is four colorable I Discharging, *Illinois J Math*, **21** (1977), 3, 429-490

[3B] Appel, K and Haken, W, Every map is four-colorable II Reducibility *Illinois J Math*, **21** (1977), 3, 491-567

В Б Алексеев 撰 张鸿林 译

四维流形 [**four - dimensional manifold**, **четырехмерное многообразие**]

一个拓扑空间，在其中每个点有一个同胚于四维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^4$ 或闭半空间 $\mathbf{R}^4_+$ 的邻域. 这个定义通常附加要求四维流形为 Hausdorff 和有可数基的拓扑空间 四维流形的拓扑在**流形的拓扑** (topology of manifolds) 中占有一个特殊的位置 一方面，对**一般位置** (general position) 的技术的直接应用，维数 4 太小，然而对高维拓扑中如此产生的**横截性** (transversality) (和**割补术** (surgery)), 它又太大，以致排除了三维拓扑的更直观方法的直接使用. 另一方面，四维流形的拓扑继承了三维的也是高维的拓扑的许多难点 这可用事实说明，例如，四维流形的边界可以是一个任意的三维流形，而每一个有限表现群是某个闭四维流形的**基本群** (fundamental group) 稍后，观测是基于四维流形的算法识别同胚型的不可能性. 维数 4 的例外情形是通过下面的事实来阐述清楚的 在流形 $\mathbf{R}^n$

上存在一个非标准的分段线性(和可微的)结构仅当 $n=4$ 时成立．不允许分段线性结构的四维流形是存在的 如果总有这样的结构存在，那么有唯一的微分结构与它相容 用复结构装备起来的四维流形称为解析曲面(analytic surface)

对每个闭的可定向的四维流形 M,一个幺模整数值的对称双线性形式 L_M 是相伴的，且通过闭链的交作用在群 $H_2(M,\mathbf{Z})$ 的自由部分上．这个形式的符号差称为流形的符号差(signature)相交形式是四维流形最重要的不变量 两个闭的单连通可微四维流形是 h **配边**(h-cobordism)的，当且仅当它们的形式是同构的 如果相应于一个可微的四维流形 M 的双线性形式 L_M 的二次型只取偶数值，则它的稳定切丛的构造群 SO 可用群 Spin 来代替．这样的四维流形称为自旋流形(spin manifolds) 存在闭单连通四维流形的拓扑分类．每个具有偶形式的这样的四维流形完全由它决定，并且每个偶的整数值的对称幺模形式被认作为单连通四维拓扑流形的相交形式 特别地，四维拓扑的 **Poincaré 猜想**(Poincaré conjecture)是真的．一个具有奇形式的四维流形的分类不变量是由形式对 (L,κ) 给出的，其中 L 是奇的整数值的对称的幺模双线性形式，且 $\kappa=0$ 或 1 每个具有奇形式的闭单连通四维流形 M 完全由对 (L_M,κ_M)决定，其中如果流形 M 的稳定切丛允许一个平凡化，则 $\kappa_M=0$,否则就是 1 每个这样的对是可以实现的 可以通过单连通可微的四维流形实现的形式的问题还未完全解决．熟知所有奇的不定形式可以实现 在偶的不定形式中间，如果 m 是偶数且 $3m\leqslant 2n$,则 **Kummer 曲面**(Kummer surface)和流形 $S^2\times S^2$ 的连通和确认为 $mE_8\oplus nU$ 一个具有奇数 m 的这种类型的形式已知不是一个闭可微四维流形的相交形式，因为这样的旋量流形的符号差必能被 16 除尽，而形式 $mE_8\oplus nU$ 的符号差等于 $8m$ 从上面给出的形式知，只有由单位矩阵给出的形式才能实现．

参考文献

[1] Mandelbaum, R , Four-dimensional topology an introduction, *Bull Amer Math Soc* , **2** (1980), 1–159

[2] Freedman, M H , The topology of four-dimensional manifolds, *J Differential Geom* , **17** (1982), 357–453

C B Матвеев 撰

【补注】 如上所述，从几个观点看，维数 4 是有点异常 对于分段线性拓扑，用 Рохлин 定理(Rokhlin theorem)说明 设 M^4 是具有第二 Stiefel-Whitney 类 $w_2(M^4)=0$ 的紧致定向分段线性的流形，则符号差 $\sigma(M^4)\equiv 0 \bmod 16$

参考文献

[A1] Donaldson, S K , An application of gauge theory to four-dimensional topology *J Differential Geom* , **18** (1983), 279–315

[A2] Freed, D S and Uhlenbeck, K K , Instantons and four-manifolds, Springer, 1984

徐森林 译 薛春华 校

Fourier-Bessel 积分 [**Fourier-Bessel integral**, **Фурье-Бесселя интеграл**], Hankel 积分(Hankel integral)

Fourier 积分 (Fourier integral)关于 **Bessel 函数**(Bessel functions)的一个类似，具有形式

$$f(x)=\int_0^\infty \lambda J_\nu(\lambda x)\int_0^\infty yJ_\nu(\lambda y)f(y)\,dy\,d\lambda \qquad (*)$$

公式(*)可以从对于区间 $(0,l)$ 上的 **Fourier-Bessel 级数** (Fourier-Bessel series)令 $l\to+\infty$ 取极限而得到．H Hankel (1875) 建立了如下定理 如果函数 f 逐段连续，在任意区间 $0<x<l$ 上有有界变差，且积分

$$\int_0^\infty \sqrt{x}\,|f(x)|\,dx$$

收敛，则对于 $\nu>-1/2$, (*)式在 f 的所有连续点 x 上成立，$0<x<+\infty$ 在 f 的不连续点 $x_0(0<x_0<+\infty)$, (*)式的右边等于 $[f(x_0-)+f(x_0+)]/2$, 而当 $x_0=0$ 时，它等于 $f(0+)/2$

对于其他类型的柱函数 $Z_\nu(x)$, Fourier-Bessel 积分(*)的类似也是正确的，不过，积分限应作出相应的改变

Е Д Соломенцев 撰

【补注】 在 $\nu=\pm 1/2$ 时，公式(*)分别化为 Fourier 正弦积分和余弦积分 当 $\nu=(n/2)-1$ 时，其中 $n=1,2,$ ，公式(*)可以解释为 $\mathbf{R}^n$ 上径向函数的 **Fourier 积分**(Fourier integral) 也见[A1]第 240 页．

参考文献

[A1] Titchmarsh, E C , Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford Univ Press, 1948

朱学贤 译 潘文杰 校

Fourier-Bessel 级数 [**Fourier-Bessel series**, **Фурье-Бесселя ряд**]

函数 $f(x)$ 的级数展开式

$$f(x)=\sum_{m=1}^\infty c_m J_\nu\left[x_m^{(\nu)}\cdot\frac{x}{a}\right],\quad 0<x<a, \qquad (*)$$

其中 $f(x)$ 是在区间 $(0,a)$ 上给定的函数，J_ν 是 ν $(\nu>-1/2)$ 阶 **Bessel 函数**(Bessel functions), $x_m^{(\nu)}$ 是 J_ν 的正零点，按增加的顺序排列，系数 c_m 具有下列值．

$$c_m=\frac{2}{a^2J_{\nu+1}^2(x_m^{(\nu)})}\int_0^a rf(r)J_\nu\left[x_m^{(\nu)}\cdot\frac{r}{a}\right]dr$$

如果$f(x)$是在区间 $(0,a)$上给定的逐段连续函数，而积分

$$\int_0^a \sqrt{r}\,|f(r)|\,dr<\infty,$$

则 Fourier-Bessel 级数在区间 $(0,a)$ 的每个内点 x 上收敛，其和等于 $[f(x+)+f(x-)]/2$，且在每个内点 x 的邻域内，$f(x)$ 具有有界变差.

Л Н Кармазина 撰 张鸿林 译

Fourier 系数 [Fourier coefficients，Фурье коэффициенты]

在空间 X上定义的函数f 关于 X上的实值（复值）正交函数系 $\{\varphi_i\}$的展开式中的系数

$$c_i=\frac{\int_X f\varphi_i\,dx}{\int_X \varphi_i^2\,dx}\left[\text{或 } c_i=\frac{\int_X f\overline{\varphi_i}\,dx}{\int_X \varphi_i\overline{\varphi_i}\,dx}\right], \qquad (*)$$

如果 $\{\varphi_i\}$是 Hilbert（预 Hilbert）空间中的正交系，那么对于这个空间中的元素f，数 $c_i=(f,\varphi_i)/(\varphi_i,\varphi_i)$ 也称为f关于正交系$\{\varphi_i\}$的 Fourier 系数．J Fourier 首先研究了具有由（*）定义的系数的三角级数

参考文献

[1] Kaczmarz, S and Steinhaus, H , Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea, reprint, 1951

Т П Лукашенко 撰 张鸿林 译

殆周期函数的 Fourier 系数 [Fourier coefficients of an almost-periodic function，Фурье коэффициенты почти периодической функции]

对应于给定的殆周期函数 f 的 Fourier 级数（见**殆周期函数的 Fourier 级数**（Fourier series of an almost-periodic function））

$$f(x)\sim\sum_n a_n e^{i\lambda_n x}$$

中的系数 a_n，其中

$$a_n=M\{f(x)e^{-i\lambda_n x}\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\lambda_n x}\,dx.$$

系数 a_n 由关于平均值

$$a(\lambda)=M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$$

的存在性定理完全确定，$a(\lambda)$ 仅对可数个值 $\lambda=\lambda_n$ 不为零

Е А Бредихина 撰

【补注】

参考文献

[A1] Besicovitch, A S , Almost periodic functions, Cambridge Univ Press, 1932, Chapt I

[A2] Wiener, N , The Fourier integral and certain of its applications, Dover, reprint, 1933, Chapt II

朱学贤 译 潘文杰 校

Fourier 余弦变换 [Fourier cosine transform，косинус-преобразование Фурье]

见 **Fourier 变换**（Fourier transform）.

殆周期函数的 Fourier 指数 [Fourier indices of an almost-periodic function，Фурье показатели почти периодической функции]

对应于给定的殆周期函数 f 的 Fourier 级数

$$f(x)\sim\sum_n a_n e^{i\lambda_n x}$$

中的实数 λ_n，其中的 a_n 是 f 的 Fourier 系数（见**殆周期函数的 Fourier 系数**（Fourier coefficients of an almost-periodic function），**殆周期函数的 Fourier 级数**（Fourier series of an almost-periodic function））函数 f 的 Fourier 指数的集合称为它的谱（spectrum）与周期函数的情形不同，殆周期函数的谱可能有有穷的极限点，甚至还可能是处处稠密的．因此，殆周期函数的 Fourier 级数的性质本质上依赖于它的谱的算术结构．

Е А Бредихина 撰 朱学贤 译 潘文杰 校

Fourier 积分 [Fourier integral，Фурье интеграл]

Fourier 级数（Fourier series）的非离散化的类似概念．对于只在实轴的有限区间上定义的函数，其 Fourier 级数表示式有着十分重要的意义．对于在整个实轴上定义的函数 f，其 Fourier 积分展开式

$$f(x)=\int_0^\infty[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda \quad (1)$$

起着类似的作用，其中

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi,$$
$$B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi \quad (2)$$

假定上述积分都存在，则表示式（1）可以形式地构造出来 例如，对于具有紧支集的光滑函数 f，表示式（1）是成立的 有许多判别法保证等式（1）在这种或那种意义下成立 将（2）代入（1）得到所谓 Fourier 积分公式（Fourier integral formula）

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,d\xi\,d\lambda, \quad (3)$$

它的证明归结为前面提到的判别法 用 Fourier 单积分（simple Fourier integral）

$$f(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\frac{\sin N(x-\xi)}{x-\xi}\,d\xi$$

表示 f 更为常见，上式是将(3)式中的外层积分写成区间 $(0,N)$ 上的积分的极限并交换积分次序后得到的．在应用科学中，(1)式通常解释为按谐波的展开式　设

$$D(\lambda)=\sqrt{|A(\lambda)|^2+|B(\lambda)|^2},$$

$$\cos\varphi(\lambda)=\frac{B(\lambda)}{D(\lambda)},\quad \sin\varphi(\lambda)=\frac{A(\lambda)}{D(\lambda)},$$

则(1)式可以写成

$$f(x)=\int_0^\infty D(\lambda)\sin[\lambda x+\varphi(\lambda)]d\lambda,$$

从而 f 被表成频率为 λ，振幅为 D 和初相为 φ 的谐波的叠加，其中 λ 连续地充满实半轴 $(0,\infty)$，而 D 和 φ 依赖于 λ

在许多情形(特别对于复值函数 f)，将(1)式表成指数形式

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}C(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda,\quad C(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{f}(\lambda)\quad(4)$$

更为方便，其中

$$\tilde{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx\qquad(5)$$

函数 $\tilde{f}$ 称为 f 的 **Fourier 变换**(Fourier transform)(在应用科学中，$C(\lambda)$ 称为 f 的频率特性或谱(spectrum))

在 f 可和 $(f\in L_1(-\infty,+\infty))$ 的条件下，函数 $\tilde{f}$ 有界、在实轴上一致连续且当 $|\lambda|\to\infty$ 时 $\tilde{f}(\lambda)\to 0$　函数 $\tilde{f}$ 可能是不可积的，因而积分(4)可能不存在　但是，如果采用某些积分求和的方法，则(4)容许有合理的解释(在这里不仅可以考虑逐点收敛，也可考虑平均收敛)．例如，对于可和函数 f，截断的 Fourier 积分的算术平均值

$$\frac{1}{N}\int_0^N\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\omega}^{+\omega}\tilde{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}\left(1-\frac{|\lambda|}{N}\right)\tilde{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\frac{2\sin^2 N(x-\xi)/2}{N(x-\xi)^2}d\xi$$

当 $N\to\infty$ 时几乎处处收敛并且平均收敛到 f　对 f 附加限制条件可以得到更具体的论断　例如，设 $f\in L_1$ 且在 x 的某个邻域内有有界变差，则

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\omega}^{+\omega}\tilde{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda\quad(6)$$

在应用时，经常使用表达式

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$

这对于在任何有限区间上逐段光滑的绝对可积函数 f 是正确的，其中右边的积分按主值(6)的意义来理解　对于局部可和且在 ∞ 处具有某些性质的函数 f 的 Fourier 积分也有研究　例如，设 $f\in L_p(1\leqslant p\leqslant 2)$，则有

$$\tilde{f}(\lambda)=\lim_{A\to\infty}{}^{p}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{+A}f(x)e^{-i\lambda x}dx,\quad(7)$$

其中极限理解为依 p' 阶平均收敛，$1/p+1/p'=1$ (注意，(7)中的极限在几乎处处收敛的意义下也存在)．当 $p=2$ 时这一结果取简单的形式(见 **Plancherel 定理**(Plancherel theorem))

对于 n 维空间中的函数的展开式，可类似地建立多重 Fourier 积分理论．Fourier 积分的概念也已推广到广义函数

参考文献

[1] Titchmarsh, E C, Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford Univ Press, 1948

[2] Bochner, S, Lectures on Fourier integrals, Princeton Univ Press, 1959(译自德文)

[3] Zygmund, A, Trigonometric series, 1-2, Cambridge Univ Press, 1988

П И Лизоркин 撰　朱学贤 译　潘文杰 校

Fourier 积分算子 [**Fourier integral operator**，**Фурье интегральный оператор**]

一个具有急速振荡函数的广义核的积分算子，或这种函数的积分　当研究偏微分方程的急速振荡解的渐近展开(见[1]，[2])以及研究双曲方程的基本解的奇性(见[1]，[2]，[3])时，这种类型的算子要出现

Маслов 典范算子(Maslov canonical operator)　设 Λ 为在相空间 $\mathbf{R}^{2n}_{x,p}$ 中的一个 C^∞ 类 n 维 **Lagrange 流形**(Lagrangian manifold)，这里 $x\in\mathbf{R}^n$，并设 $d\sigma$ 为 Λ 上体积元　一个典范图册(canonical atlas)是 Λ 用有界单连通域 Ω_j (卡)的一局部有限可数覆盖，其中每个卡或者取变量 x，或者取 p，或者取不含点偶 (p_j,x_j) 的混合集

$$(p_\alpha,x_\beta),\ \alpha=(\alpha_1,\quad,\alpha_s),\ \beta=(\beta_1,\quad,\beta_{n-s})$$

为坐标　Маслов 典则算子映 $C_0^\infty(\Lambda)$ 到 $C(\mathbf{R}^n_x)$ 中典则算子 $K(\Omega_j)$ 可引进如下

1) 设卡 Ω_j 为非退化的，即 Ω_j 由方程 $p=p(x)$ 确定，且令

$$(K(\Omega_j)\varphi)(x)=\left|\frac{d\sigma}{dx}\right|^{1/2}\exp[i\lambda\int_{r^0}^{r}(p,dx)]\varphi(r),$$
$$r=(x,p(x))$$

这里 $\lambda\geqslant 1$ 为参数，$r^0\in\Omega_j$ 为固定点，$(p,dx)=\sum_{j=1}^{n}p_j dx_j$，且 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$

2）设卡 Ω_j 中的局部坐标为 p，即 Ω_j 由方程 $x=x(p)$ 确定，并令

$$(K(\Omega_j)\varphi)(x)=F_{\lambda,p\to x}^{-1}\left\{\left|\frac{d\sigma}{dp}\right|^{1/2}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left[i\lambda\left[\int_{r^0}^{r}(p,dx)-(x(p),p)\right]\right]\varphi(r)\right\},$$
$$r=(x(p),p)$$

这里 F^{-1} 为 Fourier λ 变换（Fourier λ-transform）

$$F_{\lambda,p\to x}^{-1}\psi(x)=\left[\frac{\lambda}{-2\pi i}\right]^{n/2}\times$$
$$\times\int_{\mathbf{R}^n}\exp[i\lambda(x,p)]\psi(p)\,dp$$

$K(\Omega_j)$ 在 Ω_j 中坐标为某个集合 (p_α, x_β) 的情形可类似地定义．设 $\oint_l(p,dx)=0$，并设对 Λ 上任何闭路 l，Маслов 指标 $\operatorname{ind} l=0$ 引进 Λ 上 C^∞ 类的单位分解

$$\sum_{j=1}^{\infty}e_j(x)=1,\ 且\ \operatorname{supp}e_j\subset\Omega_j,$$

并固定一个点 $r^0\in\Omega_{j_0}$．Маслов 典则算子定义为

$$(K_\Lambda\varphi(r))(x)=\sum_j c_j K(\Omega_j)(e_j\varphi)(x),$$
$$c_j=\exp[-\frac{i\pi}{2}\gamma_j],$$

且 γ_j 为连接卡 Ω_{j_0} 与 Ω_j 的卡链的 Маслов 指标

点 $r\in\Lambda$ 称为**非奇的**（non-singular），如果它在 Λ 中有一个由方程 $p=p(x)$ 给出的邻域．设卡 Ω_i 与 Ω_j 的交非空且连通，$r\in\Omega_i\cap\Omega_j$ 为非奇点并设 (p_α, x_β)，$(p_{\tilde\alpha}, x_{\tilde\beta})$ 为这些卡的坐标．数

$$\gamma_{ij}=\sigma_-\left(\frac{\partial x_\beta(r)}{\partial p_\alpha}\right)-\sigma_-\left(\frac{\partial x_{\tilde\beta}(r)}{\partial p_{\tilde\alpha}}\right)$$

为卡对 Ω_i 与 Ω_j 的 Маслов **指标**（Maslov index），这里 $\sigma_-(A)$ 为矩阵 A 的负本征值的个数．卡链的 Маслов 指标由可加性定义 路径 l 的 Маслов 指标类似地定义 在 Lagrange 流形上一个路径（mod 4）的 Маслов 指标是整数同伦不变量（见[1]，[3]） Маслов 典则算子在典则图册的选择下是不变的，在卡的局部坐标的选择下是不变的，且对下述意义下单位分解也是不变的 若 K_Λ，$\widetilde{K}_\Lambda$ 为两个 Маслов 典则算子，则在 $L_2(\mathbf{R}^n)$ 中对任何函数 $\varphi\in C_0^\infty(\Lambda)$，$(K_\Lambda\varphi-\widetilde{K}_\Lambda\varphi)(x)=O(\lambda^{-1})$，$\lambda\to\infty$

在 Маслов 典则算子的理论中，最重要的结果是关于 Маслов 典则算子与 λ 微分（或 λ 伪微分（[3]））算子的交换公式．

设 $L(x,\lambda^{-1}D)$ 为具有 C^∞ 类实象征 $L(x,p)$（见**算子的象征**（symbol of an operator））的微分算子，并设 $L(x,p)$ 在 Λ 上为零 再设 Λ 与体积元 $d\sigma$ 在 Hamilton 方程组

$$\frac{dx}{d\tau}=\frac{\partial L}{\partial p},\quad\frac{dp}{d\tau}=-\frac{\partial L}{\partial x}$$

下不变，那么下列交换公式为真（这里 $\varphi\in C_0^\infty(\Lambda)$，$\lambda\to\infty$）

$$L(x,\lambda^{-1}D)(K_\Lambda\varphi)(x)=$$
$$=\frac{1}{i\lambda}K_\Lambda[R\varphi+O(\lambda^{-1})],\tag{1}$$
$$R\varphi=\left[\frac{d}{d\tau}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2L(x,p)}{\partial x_j\partial p_j}\right]\varphi,$$

其中 $d/d\tau$ 为沿 Hamilton 方程组的流的积分曲线的导数 关于展式（1）中的其余各项以及余项估计，见[3] 方程 $R\varphi=0$ 称为**迁移方程**（transport equation） 此交换公式蕴涵下述结果 若 $R\varphi=0$，则函数 $u=K_\Lambda\varphi$ 为方程 $L(x,\lambda^{-1}D)u=0$ 的形式渐近解．

Маслов 典则算子方法使人们能解下述问题．

1）对严格双曲偏微分方程组，对 Dirac 与 Maxwell 方程组，对弹性理论中的方程组，对 Schrödinger 方程等具有大范围（即任意有限时域）急速振荡初始数据的 Cauchy 问题的渐近解的构造（见[1]，[6]－[9]，又见**拟经典逼近**（quasi-classical approximation）），以及对某些混合型问题的解的构造（[4]）

2）自伴微分算子的本征值的级数的渐近展开的构造，这里的微分算子是关于相应 Hamilton 方程组不变的 Lagrange 流形上定义的（见[1]，[3]）

3）对严格双曲偏微分方程组的基本解的直到光滑函数的渐近展开的构造 （见[1]，[5]，[6]）

4）Green 函数的短波渐近式，散射问题的解与 Schrödinger 方程散射幅度的构造，以及谱函数的渐近式的构造（见[5]－[7]）

关于具复纤维的 Lagrange 流形上 Маслов 典则算子的新形式已经发展起来（见[8]，[9]）

Fourier 积分算子（Fourier integral operator） 设 X，Y 为 $\mathbf{R}_x^{N_1}$，$\mathbf{R}_y^{N_2}$ 中有界域，$N=N_1+N_2$，$\Gamma=X\times Y\times(\mathbf{R}_\theta^N\setminus\{0\})$，并设 $u(y)\in C_0^\infty(Y)$ 算子

$$(Au)(x)=\frac{1}{2\pi^{(n+2N)/4}}\int_{\mathbf{R}_\theta^N}\int_Y e^{i\varphi(x,y,\theta)}\cdot p(x,y,\theta)u(y)\,dy\,d\theta\tag{2}$$

称为 Fourier 积分算子 这里 φ（相函数）为实的且关于 θ 为 1 阶正齐次的，$\varphi\in C^\infty(\Gamma)$，并且当 $\theta\neq 0$ 时

$\nabla_{x,y,\theta}\varphi\neq 0$. 在最简单情形下，函数 $p\in C^{\infty}(\Gamma)$（象征）有一渐近展开，当 $|\theta|\to\infty$，

$$p=\sum_{j=0}^{\infty}p_j(x, y, \theta/|\theta|)|\theta|^{m-j+(n-2N)/4}.$$

积分（2）在相应的正则化之后收敛并且定义一个连续线性算子 A. $C_0^{\infty}(Y)\to D'(X)$ A的核为

$$K(x, y)=\frac{1}{(2\pi)^{(n+2N)/4}}\int_{\mathbf{R}_\theta^N}e^{i\varphi(x, y, \theta)}p(x, y, \theta)d\theta$$

函数 $K(x, y)\in D'(X\times Y)$ 在集合 $C=\{(x, y, \theta)\in\Gamma$ $\varphi_\theta=0\}$ 在 $X\times Y$ 上的投影 πC 之外是无穷次可微的. K的奇性仅依赖象征 p在 C的某个邻域（对固定的相 φ）的 Taylor 展开. 设相 φ是非退化的，即设微分 $d_{x,y,\theta}\varphi_{\theta_j}$, $1\leqslant j\leqslant N$, 在 C上是线性无关的，则 C是 n 维光滑流形. 算子 A对应一光滑的，锥形的（对于与 $z=(x, y)$对偶的变量（ζ, η））n 维 Lagrange 流形 $\Lambda\subset T^*(X\times Y)\setminus\{0\}$，它是 C在映射

$$C\ni(z, \theta)\to(z, \varphi_z')\in\Lambda \qquad (3)$$

之下的象.

从现在起，算子 A被看作定义于 1/2 阶的密度 $u(y)$ 上:

$$A: C_0^{\infty}(X, \Omega_{1/2})\to D'(Y, \Omega_{1/2}),$$

即在变量代换 $y\to\psi(\tilde{y})$ 下，$u(y)\to u(\tilde{y})|d\tilde{y}/dy|^{1/2}$. 象征 p对应于 Λ 上 1/2 阶的密度 $b(z, \tau)$，它是映射（3）之下 $p\sqrt{d_C}$ 的象，这里 $d_C=|D(\lambda, \varphi_\theta)/D(x, \theta)|^{-1}$，且 $\lambda=(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 为 Λ 上的坐标，关于 τ 为 1 阶齐次的且 Λ 通过（3）转变成 C. 当 $|\tau|\to\infty$，密度 b有一个渐近展开

$$b(z, \tau)=\sum_{j=0}^{\infty}b_j[z, \tau/|\tau|]^{m-j-n/4},$$

其中系数 b_0 称为算子 A的主象征.

设算子 A由（2）表示但具有另一非退化相函数 $\tilde{\varphi}(x, y, \tilde{\theta})$, $\tilde{\theta}\in\mathbf{R}^N$，并具有另一象征 $\tilde{p}(x, y, \tilde{\theta})$. 那么对此表示，流形 Λ 保持同一形式，量 $\sigma=\operatorname{sign}\varphi_{\theta\theta}-\operatorname{sign}\tilde{\varphi}_{\tilde{\theta}\tilde{\theta}}$ 为常数且主象征 $\tilde{b}_0$ 为

$$\tilde{b}_0=e^{(i\pi\sigma)/4}b_0$$

Fourier 积分算子的一般定义如下. 设 X, Y 分别为 N_1, N_2 维光滑流形，并设 $\Lambda\subset T^*(X\times Y)\setminus\{0\}$ 为 $n=N_1+N_2$ 维锥形光滑 Lagrange 流形 对任何点 $\lambda\in\Lambda$，有非退化相函数，使相应构造的 Lagrange 流形与 Λ 局部相合 设 $\{x_j, y_j, \varphi_j, N^j, \Gamma_j, u_j\}$ 为由下列对象组成的集合

a）具局部坐标 $x\in\mathbf{R}^{N_1}$, $y\in\mathbf{R}^{N_2}$, $z=(x, y)$ 的局部坐标邻域 $X'\subset X$, $Y'\subset Y$,

b）整数 N与定义在 $\Gamma=X'\times Y'\times(\mathbf{R}^N\setminus\{0\})$ 上的一非退化相函数 φ，使映射

$$\{(z, \theta)\in\Gamma\cdot\varphi_\theta(z, \theta)=0\}\ni(z, \theta)\to(z, \varphi_z)$$

为到开子集 $U\subset\Lambda$上的微分同胚. 算子

$$A=\sum A_j$$

称为 Fourier 积分算子，这里 A_j 取（2）式，$N=N^j$，$\varphi=\varphi_j-\pi N^j/4$，且象征 $p=p_j$ 的支集位于 $K_j\times\mathbf{R}^{N^j}$ 中，K_j为 $X_j\times Y_j$ 中紧集. 用 $I^m(\Lambda)$ 表示这样的算子类.

设 $\tilde{S}^{m-n/4}(\Lambda, \Omega_{1/2})$为 1/2 阶齐次密度的集合，这些密度关于 τ 在 Λ 上是 $m-n/4$阶的. 从诸算子 A_j 的主象征 $b_0^j(z, \tau)$ 可以自然的方式构造 A 的主象征 $b_0(z, \tau)\in\tilde{S}^{m-n/4}(\Lambda, \Omega_{1/2}\otimes L)$，使映射

$$I^m(\Lambda)/I^{m-1}(\Lambda)\to\tilde{S}^{m-n/4}(\Lambda, \Omega_{1/2}\otimes L)$$

为一个同构（见[2]，[14]）

Fourier 积分算子应用于偏微分方程，最重要的情形是当投影 $\Lambda\to T^*(Y)$ 为局部微分同胚时. 于是 $N_1=N_2$，密度 d_C 等于

$$d_C^{-1}=\det\begin{pmatrix}\varphi_{\theta\theta} & \varphi_{\theta x}\\ \varphi_{y\theta} & \varphi_{yx}\end{pmatrix},$$

且算子

$$I^0(\Lambda)\ni A\quad L_{\mathrm{loc}}^2(Y, \Omega_{1/2})\to L_{\mathrm{loc}}^2(X, \Omega_{1/2})$$

有界.

正如 Маслов 典则算子那样，关于 Fourier 积分算子与微分算子也有交换公式以及由此得到的推论 Fourier 积分算子可以局部地表成 Маслов 典则算子上关于参数的积分（见[10]）Fourier 积分算子应用于下列场合

1）构造参数以及研究双曲方程、主型方程与边值问题的解的奇性（波前集）的微局部结构（见[2]，[14]），

2）研究方程的局部、大范围可解性与次椭圆性（见[12]），

3）获得伪微分算子的谱函数的渐近展开（见[13]）

参考文献

[1] Маслов, В П, Теория возмущений и асимптотические методы, М, 1965

[2] Hormander, L, Fourier integral operators, Ⅰ, *Acta Math*, **127** (1971), 79 - 183

[3] Маслов, В П, Федорюк, М В, Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М, 1976（英译本 Maslov, V P and Fedoryuk, M V, Semi-classical approximation in quantum mechanics, Reidel, 1981）

[4] Федорюк, М В, 《Успехи Матем наук》, **32**

(1977), 6, 67 – 115
[5] Кучеренко, В В, 《Теор и матем физика》, 1 (1969), 3, 384 – 406
[6] Вайнберг, Б Р, Асимптотические методы в уравнениях математической физики, М, 1982 (英译本 Vaĭnberg, B R, Asymptotic methods in the equations of mathematical physics, Gordon & Breach, 1988)
[7] Вайнберг, Б Р, 《Матем сб》, 123 (1984), 2, 195 – 211
[8] Кучеренко, В В, в кн Итоги науки и техники Современные проблемы математики, т 8, М, 1977, 41 – 136
[9] Маслов, В П, Операторные методы, М, 1973
[10] Мищенко, А С, Стернин, Б Ю Шаталов, В Е, Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора, М, 1978
[11] Leray, J, Lagrangian analysis and quantum mechanics, MIT, 1981 (译自法文).
[12] Егоров, Ю В, 《Успехи матем наук》, 30 (1975), 2, 57 – 114
[13] Шубин, М А, Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М, 1978 (英译本 Shubin, M A, Pseudo differential operators and Spectral theory, Springer, 1987)
[14] Trèves, F, Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators, Plenum, 1980

Б Р Вайнберг, М В Федорюк 撰

【补注】 在[A5], [A6]中给出通过急速振荡解的渐近展开来处理偏微分方程，而[A4]则由研究双曲方程的基本解角度来处理 Fourier 积分算子

关于 Lagrange 流形 Λ 的奇性，见[A5]. 关于 Маслов 指标 (mod 4) 为同伦不变量这一事实，亦见[A3] 关于 (1) 中高阶项，见[A4], [A6] 对 Маслов 指标的应用，见[A2], [A6]

关于 Fourier 积分算子的参数构造，方程的奇性结构与可解性、次椭圆性问题，见[A4]

与渐近展开有关的内容，见[A7], [A8]

具有复相函数的 Fourier 积分算子，在[A9]中有讨论

[A10] – [A14] 是最近的一些教科书.

参考文献

[A1] Hormander, L, The analysis of linear partial differential operators, 4, Fourier integral operators, Springer, 1985
[A2] Lax, P D, Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, *Duke Math J*, 24 (1957), 627 – 646
[A3] Arnol'd, V I, Characteristic class entering in quantization conditions, *Funct Anal Appl*, 1 (1967), 1 – 13 (*Funkts Anal i Prilozhen* 1 (1967), 1 – 14)
[A4] Duistermaat, J J and Hormander, L, Fourier integral operators II, *Acta Math* 128 (1972), 183 – 269
[A5] Arnol'd, V I, Integrals of rapidly oscillating functions and singularities of projections of Lagrangian manifolds, *Funct Anal Appl*, 6 (1972), 222 – 224 (*Funkts Anal i Prilozhen*, 6 (1972), 61 – 62)
[A6] Duistermaat, J J, Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfoldings of singularities, *Comm Pure Appl Math*, 27 (1974), 207 – 281
[A7] Chazarain, J, Formules de Poisson pour les variétés riemanniennes, *Invent Math*, 24 (1974), 65 – 82
[A8] Duistermaat, J J and Guillemin, V W, The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics, *Invent Math*, 29 (1975), 39 – 79
[A9] Melin, A and Sjostrand, J, Fourier integral operators with complex phase functions and parametrix for an interior boundary value problem, *Comm Part Diff Equations*, 1 (1976), 313 – 400
[A10] Taylor, M E, Pseudodifferential operators, Princeton Univ Press, 1981
[A11] Petersen, B E, Introduction to the Fourier transform and pseudo-differential operators, Pitman, 1983
[A12] Chazarain, J and Piriou, A, Introduction to the theory of partial differential equations, North-Holland, 1982
[A13] Duistermaat, J J, Fourier integral operators, Courant Inst Math, 1973
[A14] Dieudonné, J, Elements d'analyse, 7 – 8, Gauthier-Villars, 1978

郑维行 译 沈永欢、王声望 校

Fourier 法 [Fourier method, Фурье метод]，分离变量法 (method of separation of variables)

求微分方程

$$(Lu)(x,y) = Mu - Nu = 0,\quad x\in R^n,\ y\in R^m, \tag{1}$$

的特解的一种方法，其中 M(相应地，N)是仅含对变量 x(相应地，y)的导数的线性微分表达式，其系数也仅依赖于 x(相应地，y) 函数

$$u(x,y)=v(x)w(y) \tag{2}$$

是 (1) 的解，如果存在常数 λ，使得

$$Mv+\lambda v=0,\quad Nw+\lambda w=0 \tag{3}$$

例如，对弦振动方程

$$u_{xx}-u_{yy}=0,\quad m=n=1, \tag{4}$$

$M\varphi=N\varphi=\varphi''$，而解 (2) 取下列形式

$$u(x,y)= \tag{5}$$

$$=\begin{cases}(c_1x+c_2)(c_3y+c_4), & \lambda=0,\\ (c_1e^{\mu x}+c_2e^{-\mu x})(c_3e^{\mu y}+c_4e^{-\mu y}), & \lambda=-\mu^2,\\ (c_1\cos\mu x+c_2\sin\mu x)(c_3\cos\mu y+c_4\sin\mu y), & \lambda=\mu^2,\end{cases}$$

其中 $c_i(1\leqslant i\leqslant 4)$ 是任意常数，$\mu>0$ 当 $c_1=0$，$\lambda=\mu^2(\mu=1,2,\ )$ 时，解 (5) 满足边界条件

$$u(0,y)=u(\pi,y)=0,\ y\geqslant 0 \qquad (6)$$

由这些函数组成的所谓 Fourier 级数

$$U(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx(a_n\cos ny+b_n\sin ny) \qquad (7)$$

给出初边值问题 (4)，(6) 和

$$U(x,0)=\varphi(x),\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,0)=\psi(x),\ 0\leqslant x\leqslant\pi$$

(初始条件) 的解，如果 a_n 和 b_n 是已知函数 φ 和 ψ 的 Fourier 系数

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx,$$

$$nb_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(x)\sin nx\,dx,$$

这里假设 φ, ψ 是足够光滑的 对于更一般类型的方程 (1)，也可类似地得到初边值问题的解，这时，线性算子的谱理论起着与展开式 (7) 有关的 Fourier 级数理论的作用

Fourier 法同作为含特定算子 M 和 N 的方程 (3) $(m=n=1)$ 之解的特殊函数密切相关 许多特殊函数原来都是这样产生的 例如，当应用 Fourier 法求解 Helmholtz 方程

$$u_{xx}+u_{yy}+u=0$$

时，转换为极坐标以后，便得到

$$M=r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}+r\frac{\partial}{\partial r}+r^2,\ N=-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},$$

(3) 中的第一个方程成为 Bessel 微分方程

一般地说，一个微分方程具有一族坐标系，在其中它可以分离变量，即化为形式 (1)．求这种坐标系的问题，同微分方程的群性质密切相关 应用 Lie 群论的方法，可以描述许多经典的数学物理方程 (Laplace 方程、Helmholtz 方程、Schrodinger 方程、波动方程等) 的一切可分离变量的解 这样，也就得到特殊函数理论中的一系列关系式

分离变量法是 J d'Alembert 为了解波动方程而提出的 (1749)，这种方法在 19 试纪初被 J Fourier 充分地发展了，而在 1828 年由 M B Остроградский 作了十分一般的表述．

参考文献

[1] Бицадзе, А В , Уравнения математической физики, М , 1976

[2] Miller, U , Symmetry and separation of variables, Addison-Wesley, 1977

А П Солдатов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bluman, G W and Cole, G D , Similarity method for differential equations, Springer, 1974

张鸿林 译

Fourier 数 [Fourier number，Фурье число]

非定常热过程的一个相似判据 它描述了周围介质中热条件的变化速度与所研究系统 (物体) 内部温度场重建速度间的关系．此数决定于物体的尺寸及其导热系数 Fourier 数 $F_o=at_0/l^2$，这里 $a=\lambda/\rho c$ 是导温系数，λ 是导热系数，ρ 是密度，c 是比热，l 是物体的特征线性尺度，t_0 是外部条件变化的特征时间

它以 J Fourier 命名．

取材于 БС Э-3 同名条文

【补注】

参考文献

[A1] Sedov, L I , Similarity and dimensional methods in mechanics, Infosearch, 1959 (译自俄文) (中译本 Л И 谢多夫，力学中的相似方法与量纲理论，科学出版社，1982)

[A2] Birkhoff, G , Hydrodynamics, Princeton Univ Press, 1960

唐福林 译

Fourier 级数 [Fourier series，Фурье ряд]，函数 f 的关于 (a,b) 上的正交函数系 $\{\varphi_n\}$ 的级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k,$$

其中的系数由公式

$$c_k=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx,\quad k=0,1, \qquad (1)$$

确定，这些系数称为 f 的 Fourier 系数 (Fourier coefficients) 一般假定 f 在 (a,b) 上平方可积 对许多函数系 $\{\varphi_k\}$ 来说，这一要求可以减弱而用保证 (1) 中的所有积分都存在的其他条件来代替

对于在 $(0,2\pi)$ 上可积的每个函数 f，都可以定义它的关于三角函数系的 Fourier 级数．这就是级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \qquad (2)$$

其中系数

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos kx dx,\ b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin kx dx \quad (3)$$

类似地可构造多元函数的 Fourier 级数 更进一步的推广导出 Hilbert 空间中元素的 Fourier 系数与 Fourier 级数

关于三角函数系的 Fourier 级数理论已经研究得比较深透，它们是 Fourier 级数的第一个例子．如果讨论的是关于三角函数系的 Fourier 级数，通常不指明函数系而简称为 Fourier 级数．

Fourier 级数构成**三角级数**(trigonometric series)理论的一个重要部分．Fourier 级数首先出现在 J Fourier 的一篇研究热传导问题的文章（1807）中．他提出将给定在 $(0, 2\pi)$ 上的函数 f 用三角级数（2）来表示，其中系数由（3）确定 从许多角度来看，系数的这种选取是很自然的 譬如，如果级数（2）一致收敛到 f，则由逐项积分便导出（3）中给出的系数 a_k 和 b_k 的表达式．这些公式已经由 L Euler（1777）用逐项积分得到．

用（3）式可以对每个在 $[0, 2\pi]$ 上可积的函数构造 Fourier 级数（2)．函数的可积性可以按各种不同的意义来理解，例如 Riemann 意义下或 Lebesgue 意义下的可积性 由此而被称为 Fourier - Riemann 级数，Fourier - Lebesgue 级数，等等 Riemann 积分和 Lebesgue 积分概念本身的产生，在相当大的程度上与 Fourier 级数的研究有关．Fourier 级数理论的现代形式是在建立了 Lebesgue 积分之后得到的，从此以后，它主要已发展成 Fourier - Lebesgue 级数理论．下面假定函数 f 以 2π 为周期且在周期区间上 Lebesgue 可积．

在 Fourier 级数理论中，人们研究函数的性质与它们的 Fourier 级数的性质之间的联系，特别研究用 Fourier 级数来表示函数的问题．

Fourier 级数的部分和的极小性的证明起源于 F Bessel 的工作（1828） 给定 $f \in L_2$，则在所有 n 阶三角多项式

$$t_n(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

中，使积分值

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x) - t_n(x)]^2 dx$$

最小的是 f 的 Fourier 级数（2）的部分和

$$s_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

这个最小值等于

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

由此得出 **Bessel 不等式**（Bessel inequality）

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx,$$

它对 L_2 中的每个函数 f 都成立

三角函数系是闭函数系（见**闭元素（函数）系**（closed system of elements (functions)），即，如果 $f \in L_2$，则，**Parseval 等式**（Parseval equality）

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx$$

成立，其中 a_k，b_k 是 f 的 Fourier 系数．特别地，对于 L_2 中的函数 f，级数

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \qquad (4)$$

收敛．逆命题也成立 如果对于一组数 a_k，b_k，级数（4）收敛，则这些数是某个函数 $f \in L_2$ 的 Fourier 系数（F Riesz 和 E Fischer，1907）

任意一个可积函数的 Fourier 系数趋于零 这个结论称为 Riemann - Lebesgue 定理（Riemann - Lebesgue theorem） B Riemann 对 Fourier - Riemann 级数而 H Lebesgue 对 Fourier - Lebesgue 级数证明了这个定理

如果函数 f 是绝对连续的，则导数 f' 的 Fourier 级数可以从对 f 的 Fourier 级数逐项求导得到 由此推得 如果函数 f 的 $r \geqslant 0$ 阶导数绝对连续，则对 f 的 Fourier 系数，估计式

$$a_k, b_k = o(k^{-(r+1)}), \ k \to \infty,$$

成立

Fourier 级数的第一个收敛判别法是由 P G L Dirichlet 于 1829 年建立的 他的结果（**Dirichlet 定理**（Dirichlet theorem)）叙述如下 如果函数 f 在周期上有有限个极大值和极小值，并且除有限个点可以是第一类间断点外是处处连续的，则 f 的 Fourier 级数对所有的 x 收敛，而且，在 f 的连续点处收敛到 $f(x)$，在 f 的间断点处收敛到 $[f(x+0) + f(x-0)]/2$ 后来，这个论断被推广到任意有界变差函数（C Jordan，1881）

根据由 Riemann 证明的局部化原理（1853），函数 f 的 Fourier 级数在点 x 处的收敛性或发散性，以及当它收敛时级数和的值，都只与 f 在 x 点的一个任意小的邻域内的性质有关

关于 Fourier 级数在一点处的收敛有许多不同的判别法 R．Lipschitz（1864）证明了 如果在点 x 处，$|f(x+h) - f(x)| \leqslant M|h|^{\alpha}$ 对所有充分小的 h 成立，其中 M 和 α 是某个正常数，则函数 f 的 Fourier 级数在 x 点收敛（Lipschitz 准则（Lipschitz criterion)） **Dini 准则**（Dini criterion）更一般些 函数 f 的 Fourier 级数在点 x 收敛到 S，如果积分

$$\int_0^{\pi} |\varphi_x(t)| \frac{dt}{t}$$

收敛，其中 $\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2S$ 通常

取 $f(x)$ 的值作为 S 例如，如果函数 f 的 Fourier 级数在点 x 收敛且 x 是 f 的连续点，则级数的和必定等于 $f(x)$

Lebesgue (1905) 证明了 如果当 $h\to 0$ 时估计式

$$\int_0^h |\varphi_x(t)|\,dt = o(h),$$

$$\int_h^{\pi} |\varphi_x(t+h)-\varphi_x(t)|\,\frac{dt}{t} = o(1)$$

成立，则 f 的 Fourier 级数在点 x 收敛到 S 这个 **Lebesgue 判别法** (Lebesgue criterion) 比前面提到的所有判别法都强，也比 **de la Vallée-Poussin 准则** (de la Vallée-Poussin criterion) 及 **Young 准则** (Young criterion) 强．但是用它来检验比较困难

另外一类收敛判别法是由 Hardy-Littlewood 定理 (Hardy-Littlewood theorem) (1932) 给出的 函数 f 的 Fourier 级数在点 x 收敛，如果满足下面的条件

1) 当 $h\to 0$ 时，$f(x+h)-f(x)=o\left(\ln^{-1}\frac{1}{|h|}\right)$，

2) 对 f 的 Fourier 系数估计式

$$a_k,\ b_k = O(k^{-\delta}),\ \delta>0,$$

成立

除了研究 Fourier 级数在一点的收敛判别法外，还研究了它的一致收敛判别法 设 f 是以 2π 为周期的连续函数．f 的 Fourier 级数在整个实轴上一致收敛到它，如果 f 的**连续模** (continuity, modulus of) $\omega(f,\delta)$ 满足条件

$$\omega(f,\delta)\ln\delta\to 0,\ \delta\to 0$$

(**Dini-Lipschitz 准则** (Dini-Lipschitz criterion))，或者，如果 f 有有界变差 (**Jordan 准则** (Jordan criterion))

如果利用一致收敛的局部化原理，则可得到 Fourier 级数在某个区间上一致收敛的判别法．这个局部化原理叙述如下 如果两个函数在区间 $[a,b]$ 上相等，则在每个严格包含在 $[a,b]$ 内部的区间 $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ $(\varepsilon>0)$ 上，或者它们的 Fourier 级数都一致收敛，或两者都不一致收敛．换句话说，函数 f 的 Fourier 级数在一个区间上的一致收敛性只与 f 在该区间的任意小的扩张中的性质有关

P du Bois Reymond (1876) 证明了，函数在某点的连续性并不能保证它的 Fourier 级数在该点的收敛性 后来证明了，连续函数的 Fourier 级数可以在一个属于第二范畴的处处稠密的零测度集上发散

如果除了可积性外，对函数不假定任何别的条件，则它的 Fourier 级数可以是几乎处处甚至是处处发散的．这种函数的第一个例子是由 A H Колмогоров (1923, 1926) 构造的．后来证明，这个结论对函数本身的 Fourier 级数以及它的共轭函数的 Fourier 级数都成立

早在 1915 年，H H Лузин 就猜测每个 L_2 中函数的 Fourier 级数几乎处处收敛．在很长的时间里，在这个方向上只得到部分的结果，表明了这个问题是非常困难的，直到 1966 年，L Carleson 才证明了上述猜测的正确性（见 **Carleson 定理** (Carleson theorem)） 当 $p>1$ 时 L_p 中函数的 Fourier 级数也几乎处处收敛 Колмогоров 的反例表明，从空间 L_p 的观点看这个结果不可能再有任何进一步的加强．

因为 Fourier 级数的部分和并不总是收敛的，所以也可考虑用部分和的某种平均值作为 **Fourier 级数求和** (summation of Fourier series) 并用它表示函数．最简单的例子之一是 **Fejér 和** (Fejér sum)，它是 Fourier 级数的部分和 $s_k(f,x)$ 的算术平均值

$$\sigma_n(f,x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}s_k(f,x)$$

对每个可积函数 f，$\sigma_n(f,x)$ 几乎处处收敛到 $f(x)$，而且，在 f 的每个连续点 x 收敛到 $f(x)$，如果 f 处处连续，则它们一致收敛．

根据 **Denjoy-Лузин 定理** (Denjoy-Luzin theorem)，如果三角级数 (2) 在一个正测度集的每一点 x 上绝对收敛，则级数

$$\sum_k (|a_k|+|b_k|) \qquad (5)$$

收敛，从而级数 (2) 对所有的 x 绝对收敛 因此，(2) 的绝对收敛性等价于 (5) 的收敛性

S N Bernstein (S N Bernshtein) (1934) 证明了，如果函数 f 的连续模 $\omega(f,\delta)$ 满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\,\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)<\infty,$$

则 f 的 Fourier 级数绝对收敛．这一条件不可能减弱 设 $\omega(\delta)$ 是使得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

发散的函数类的连续模，则存在函数 f，其连续模满足 $\omega(f,\delta)\leqslant\omega(\delta)$，但 f 的 Fourier 级数不绝对收敛．

特别地，若函数满足阶数 $\alpha>1/2$ 的 **Lipschitz 条件** (Lipschitz condition)，则它的 Fourier 级数绝对收敛．而当 $\alpha=1/2$ 时并不一定绝对收敛 (Bernshtein, 1914)

如果 f 是有界变差函数且其连续模满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\omega(f, \frac{1}{n})} < \infty, \qquad (6)$$

则 f 的 Fourier 级数绝对收敛（见[9]），条件（6）已不可能减弱（见[10]）

和以上的讨论不同，下面的定理对于单个函数给出绝对收敛的判别法．函数 f 的 Fourier 级数绝对收敛的充分必要条件是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} e_n(f)$$

收敛，其中 $e_n(f)$ 是 f 用包含 n 阶谐函数在内的三角多项式依 L_2 度量的**最佳逼近**（best approximation）（见[11]）

级数（2）可以看作幂级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - i b_k) e^{ikx}$$

的实部．虚部

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kx + a_k \sin kx) \qquad (7)$$

称为级数（2）的共轭级数．

设 $f \in L_1$ 并设（2）是它的 Fourier 级数，则对几乎所有的 x，函数

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x-t) - f(x+t)}{2\tan(t/2)} dt$$

存在（И И Привалов, 1919） 函数 $\tilde{f}$ 称为 f 的共轭函数，它不一定是可积的 但是，如果 $\tilde{f} \in L_1$，则 $\tilde{f}$ 的 Fourier 级数就是级数（7）（В И Смирнов, 1928）

在许多情况下，可以从函数 f 或它的 Fourier 级数（2）的性质推断出共轭级数（7）的这种或那种性质．例如，依 L_p 度量的收敛性、在一个点上的收敛性或可和性、几乎处处收敛，等等

也可对 Fourier 系数加上某些特殊的假定来研究 Fourier 级数的性质 例如**缺项三角级数**（lacunary trigonometric series），其中非零的系数只是那些脚标为 n_m 的项，而 n_m 构成一个**缺项序列**（lacunary sequence），即 $n_{m+1}/n_m \geqslant \lambda > 1$ 特殊级数的另一个例子是具有单调系数的级数．

上面所谈到的都是关于形式（2）的 Fourier 级数．对于关于重排的三角函数系的 Fourier 级数来说，关于取通常次序的三角函数系的 Fourier 级数的某些性质不再成立．例如，存在一个连续函数，它的 Fourier 级数经某种重排后几乎处处发散（见[12]－[15]）

多元函数的 Fourier 级数理论（多重 Fourier 级数）有较小程度的发展．多维情形 的部分结果与一维的类似．但存在本质的差别．

设 $x = (x_1, \quad, x_N)$ 是 N 维空间中的点，$k = (k_1, \quad, k_N)$ 是整数坐标的 n 维向量，$(k, x) = k_1 x_1 + \cdot + k_N x_N$ 设函数 $f(x)$ 对每个变量以 2π 为周期且在 N 维方体 $[0, 2\pi]^N$ 上是 Lebesgue 可积的，则关于三角函数系的 Fourier 级数是

$$\sum_k c_k e^{i(k\ x)} \qquad (8)$$

其中求和遍历所有的 k，

$$c_k = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} \quad \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i(k\ x)} dx$$

是 f 的 Fourier **系数**（Fourier coefficients） Fourier 级数（8）是按复数形式写的 若写成余弦和正弦乘积的三角级数形式，则会显得十分繁琐．

级数（8）的部分和可以有各种定义，例如，矩形部分和

$$\sum_{|k_1| \leqslant n_1} \quad \sum_{|k_N| \leqslant n_N} c_k e^{i(k\ x)},$$

及球形部分和

$$\sum_{|k| \leqslant n} c_k e^{i(k, x)}, \qquad (9)$$

其中 n 是半径且 $|k| = \sqrt{k_1^2 + \quad + k_N^2}$

用球形部分和（9）来表示函数不如用其 Riesz 平均

$$\sum_{|k| \leqslant n} \left[1 - \frac{|k|}{n}\right]^{\alpha} c_k e^{i(k\ x)}$$

更为合适 对于 L_2 中函数的 Fourier 级数的阶数 $\alpha \geqslant (N-1)/2$ 的 Riesz 平均，局部化原理成立，但对较小的 α 不成立（S Bochner, 1936） 球形部分和的临界阶 $\alpha = (N-1)/2$ 的 Riesz 平均在研究多元函数的 Fourier 级数的其他一些问题中也起着重要的作用．

存在一个二元连续函数，其 Fourier 级数的矩形部分和在正方形 $[0, 2\pi]^2$ 的每个内点上都不收敛（见[16]）

关于三角函数系的 Fourier 级数的某些结果可以有相当大的推广，例如，它们可以按相应的方式被转移到对应于自伴椭圆型微分算子的谱分解中去．

参考文献

[1] Бари, Н К , Тригонометрические ряды, М , 1961（英译本 Bary, N K [N K Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964）

[2] Zygmund, A , Trigonometric series, 1－2, Cambridge Univ Press, 1979

[`] Hardy, G H and Rogosinsky W W , Fourier series, Cambridge Univ Press, 1965

[4] Лузин, Н Н , Интеграл и тригонометрический ряд, М -Л , 1951

[5] Lebesgue, H , Leçons sur les séries trigonométriques, Gauthier-Villars, 1906
[6] Паплаускас, А Б , Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега, М , 1966
[7] Ульянов, П Л , 《Успехи матем наук》, **19**(1964), 1, 3 – 69
[8] Алимов, Ш А , Ильин В А , Никишин Е М , 《Успехи матем наук》, **31**(1976), 6, 28 – 83
[9] Salem, R , On a theorem of Zygmund, *Duke Math J* , **10**(1943), 23 – 31
[10] Бочкарев, С В ,《Изв АН СССР Сер Матем》, **37** (1973), 630–638
[11] Стечкин, С Б , 《Докл АН СССР》, **102**(1955), 37 –40
[12] Kolmogoroff, A N [A N Kolmogorov] and Menschoff, D E [D E Menshov], Sur la convergence des series de fonctions orthogonales, *Math Z* , **26** (1927), 432 – 441
[13] Zahorski, Z , Une série de Fourier permutee d une fonction de classe L^2 divergente partout, *C R Acad Sci Paris*, **251** (1960), 501 – 503
[14] Ульянов, П Л ,《Успехи матем наук》, **16**(1961), 3, 61 – 142
[15] Олевский, А М , 《Докл АН СССР》, **141**(1961), 28 – 31
[16] Fefferman, C , On the divergence of multiple Fourier series, *Bull Amer Math Soc* , **77**(1971), 191 – 195

С А Теляковский 撰

【补注】 闭函数系也称为完全函数系 (见**完全函数系** (complete system of functions)) Riemann-Lebesgue 定理经常称为 Riemann-Lebesgue 引理 (Riemann-Lebesgue lemma)

对于多重 Fourier 级数，例如见 [A5] 的第 7 章 .

参考文献

[A1] Edwards, R E , Fourier series A modern introduction, 1 – 2, Springer, 1979 – 1982
[A2] Kahane, J -P , Series de Fourier absolument convergentes, Springer, 1970
[A3] Katznelson, Y , An introduction to harmonic analysis, Wiley, 1968
[A4] Dym, H and Mckean, H P , Fourier series and integrals, Acad Press, 1972
[A5] Stein, E M and Weiss G , Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ Press, 1971

朱学贤 译 潘文杰 校

Fourier 级数 (关于正交多项式的) [Fourier series (in orthogonal polynomials), Фурье ряд (по ортогональным многочленам)]

形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n \qquad (1)$$

的级数，其中 $\{P_n\}$ 是在区间 (a, b) 上关于权函数 h 正交的多项式系 (见**正交多项式** (orthogonal polynomials))，系数 $\{a_n\}$ 由公式

$$a_n = \int_a^b h(x) f(x) P_n(x) dx \qquad (2)$$

给出 . 这里，f 属于函数类 $L_2 = L_2[(a, b), h]$，即它的平方在正交性区间 (a, b) 上关于权函数 h 可和 (Lebesgue 可积) .

对任意正交级数，(1)的部分和 $\{s_n(x, f)\}$ 是 f 的依 L_2 度量的最佳逼近，且 a_n 满足条件

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (3)$$

在证明级数 (1) 在一个点 x 或在 (a, b) 中的某个集合上收敛时，通常利用等式

$$f(x) - s_n(x, f) = \mu_n [a_n(\varphi_x) P_{n+1} - a_{n+1}(\varphi_x) P_n(x)],$$

其中 $\{a_n(\varphi_x)\}$ 是辅助函数 φ_x 的 Fourier 系数，对于固定的 x,

$$\varphi_x(t) = \frac{f(x) - f(t)}{x - t}, \ t \in (a, b),$$

而 μ_n 是由 **Christoffel-Darboux 公式** (Christoffel-Darboux formula) 给出的系数 如果正交性区间 $[a, b]$ 有限，$\varphi_x \in L_2$ 且序列 $\{P_n\}$ 在给定的点 x 有界，则级数 (1) 收敛到值 $f(x)$

对于 $f \in L_1 = L_1[(a, b), h]$，即在区间 (a, b) 上关于权函数 h 可和的函数类，也可定义系数 (2) 对有限区间 $[a, b]$，如果 $f \in L_1[(a, b), h]$ 且序列 $\{P_n\}$ 在整个区间 $[a, b]$ 上一致有界，则条件 (3) 成立 在这些条件下，在点 $x \in [a, b]$ 处如果 $\varphi_x \in L_1[(a, b), h]$，则级数 (1) 收敛到值 $f(x)$.

设 A 是区间 (a, b) 中的某个集合，序列 $\{P_n\}$ 在 A 上一致有界，设 $B = [a, b] \setminus A$, 记 $L_p(A) = L_p[A, h]$ 是在 A 上关于权函数 h 的 p 次可和的函数类 . 如果对固定的 $x \in A$, 有 $\varphi_x \in L_1(A)$ 及 $\varphi_x \in L_2(B)$, 则级数 (1) 收敛到 $f(x)$

对于级数 (1), 关于收敛性条件的局部化原理成立 设 $x \in A$, 如果空间 L_2 中两个函数 f 和 g 在区间 $(x-\delta, x+\delta)$ 上相等，则它们的关于正交多项式系的 Fourier 级数在 x 点同时收敛或同时发散 . 如果 f 和 g 属于 $L_1(A)$ 和 $L_2(B)$ 且 $x \in A$, 则类似的结论也成立 .

对于经典的正交多项式，关于级数 (1) 与某个相关联的 Fourier 三角级数的等度收敛性的定理成立 (见**等度收敛级数** (equiconvergent series))

在研究级数 (1) 在有限的正交性区间 $[a, b]$ 的全体上或在它的部分上一致收敛时，通常要利用 Lebesgue

不等式

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x)\right| \leqslant [1+L_n(x)] E_n(f),\ x\in[a,b],$$

其中 Lebesgue 函数

$$L_n(x)=\int_a^b h(t)\left|\sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_k(t)\right| dt$$

与 f 无关，而 $E_n(f)$ 是在区间 $[a, b]$ 上用不超过 n 次的多项式对连续函数 f 的最佳一致逼近（见**最佳逼近**（best approximation））与权函数 h 的性质有关，Lebesgue 函数序列 $\{L_n\}$ 在 $[a, b]$ 中的不同点上可以按不同的速度增长 但是，对整个区间 $[a, b]$ 可以引进 Lebesgue 常数

$$L_n=\max_{x\in[a,b]} L_n(x),$$

当 $n\to\infty$ 时 L_n 无限增大，而且对不同的正交多项式系，Lebesgue 常数可能以不同的速度增大 由 Lebesgue 不等式推得，如果满足条件

$$\lim_{n\to\infty} L_n E_n(f)=0,$$

则级数（1）在整个区间 $[a,b]$ 上一致收敛到 f. 另一方面，序列 $\{E_n(f)\}$ 趋于零的速度依赖于函数 f 的可微性. 因此，在许多情形不难描述当 $n\to\infty$ 时 Lebesgue 不等式的右边趋于零的充分条件（例如，见 **Legendre 多项式**（Legendre polynomials），**Чебышев 多项式**（Chebyshev polynomials）及 **Jacobi 多项式**（Jacobi polynomials） 在任意权函数的一般情形，如果对于所研究的正交多项式的渐近公式或估计式是已知的，则可以得到一些具体的结果

参考文献

[1] Szego, G , Orthogonal polynomials, Amer Math Soc , 1975

[2] Геронимус, Я Л , Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке, М , 1958 (英译本 Geronimus, Ya L , Polynomials orthogonal on a circle and interval, Pergamon, 1960)

[3] Суетин, П К , Классические ортогональные многочлены, 2 изд , М , 1979

也见**正交多项式**（orthogonal polynomials）的参考文献.

П К Суетин 撰

【补注】 也见 [A1] 中的第 4 章及 [A2] 中的第一部分 对在有限区间上关于属于 Szego 类（Szego class）的权函数 h(即 $\log h\in L$) 的正交多项式的情形，等度收敛性定理已被更一般地证明了，参见 [A2] 中的第 4 12 节 对在无穷区间上关于加权正交的多项式系的 Fourier 级数见 [A2] 中的第二部分.

参考文献

[A1] Freud, G , Orthogonal polynomials, Pergamon, 1971 (译自德文)

[A2] Nevai, P and Freud, G , Orthogonal polynomials and Christoffel functions (A case study), *J Approx Theory*, **48** (1986), 3-167

朱学贤 译 潘文杰 校

殆周期函数的 Fourier 级数 [Fourier series of an almost-periodic function, Фурье ряд почти периодической функции]

形式为

$$f(x)\sim\sum_n a_n e^{i\lambda_n x} \qquad (*)$$

的级数，其中 λ_n 是 Fourier 指数，a_n 是殆周期函数 f 的 Fourier 系数（见**殆周期函数的 Fourier 指数**（Fourier indices of an almost-periodic function），**殆周期函数的 Fourier 系数**（Fourier coefficients of an almost-periodic function）） 任意实值或复值的殆周期函数都有形式（*）的级数与之对应 Fourier 级数的性质本质上依赖于该函数的 Fourier 指数集的结构，也依赖于加在这个函数的 Fourier 系数上的限制条件

例如，下面的定理成立 如果

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty,$$

则存在一个 **Besicovitch 殆周期函数**（Besicovitch almost-periodic functions），使得三角级数（*）是它的 Fourier 级数 对于一致殆周期函数，如果 $a_n>0$，则级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

收敛 如果一致殆周期函数的 Fourier 指数线性无关，则该函数的 Fourier 级数绝对收敛. 如果一个一致殆周期函数有一个缺项 Fourier 级数，则这个级数一致收敛

参考文献

[1] Левитан, Б М , Почти-периодические функции, М , 1953

[2] Купцов, Н П , 《Успехи матем наук》, **23** (1968), 4 (142), 117 - 178

[3] Гапошкин, В Ф , 《Успехи матем наук》, **21** (1966), 6 (132), 3 - 82

Е А Бредихина 撰

【补注】 一致殆周期函数也称为 **Bohr 殆周期函数**（Bohr almost-periodic functions） 关于缺项 Fourier 级数的概念见**缺项三角级数**（lacunary trigonometric series）

参考文献

[A1] Corduneanu, C , Almost periodic functions, Wiley, 1968

朱学贤 译 潘文杰 校

Fourier 正弦变换 [Fourier sine transform, синус-преобразование Фурье]

见 **Fourier 变换** (Fourier transform)

Fourier-Stieltjes 级数 [**Fourier-Stieltjes series**, **Фурье-Стилтьеса ряд**]

级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dF(x),\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dF(x),$$
$$n=0,1,2,$$

(这里的积分是 Stieltjes 意义下的)，$F(x)$ 是 $[0,2\pi]$ 上的有界变差函数．还可写成另一种形式

$$dF(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\qquad(*)$$

如果 $F(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上是绝对连续的，则 $(*)$ 是函数 $F'(x)$ 的 Fourier 级数　在复数形式下，级数 $(*)$ 是

$$dF(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{inx},$$

其中

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-inx}dF(x),$$

这时，

$$F(x)-c_0x\sim C_0+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{c_n}{in}e^{inx},$$

而 $\{c_n\}$ 是有界的　如果 $c_n\to 0$，则 $F(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上是连续的．存在连续函数 $F(x)$，使得当 $n\to+\infty$ 时，c_n 不趋向于 0　级数 $(*)$ 按 Cesàro 法 (C,r) $(r>0)$ 在 $[0,2\pi]$ 上几乎处处是可和的，其和为 $F'(x)$

参考文献

[1] Zygmund, A, Trigonometric series, 1, Cambridge Univ Press, 1988

А А Конюшков 撰　张鸿林 译

Fourier-Stieltjes 变换 [**Fourier-Stieltjes transform**, **Фурье-Стилтьеса преобразование**]

与 **Fourier 变换** (Fourier transform) 有关的一种**积分变换** (integral transform)　令函数 F 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有有界变分．函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixy}dF(y)\qquad(*)$$

称为 F 的 Fourier-Stieltjes 变换 (Fourier-Stieltjes transform) 由积分 $(*)$ 确定的函数 φ 是有界且连续的　每个可展为绝对收敛的 Fourier 级数 $\sum_{-\infty}^{+\infty}a_ne^{inx}$ 的周期函数 φ 能写成积分 $(*)$，其中 $F(x)=\sum_{n\leq x}a_n$

公式 $(*)$ 是可逆的　如果 F 有有界变分且

$$\dot F(x)=\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2},$$

那么

$$\dot F(x)-\dot F(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\frac{e^{i\xi x}-1}{i\xi}\,d\xi.$$
$$x\in(-\infty,+\infty),$$

其中积分取为在 ∞ 的主值

如果只允许公式 $(*)$ 中的 F 是非减的有界变差函数，那么如此获得的连续函数 φ 的集合完全由下面性质刻画　对任一实数组 $t_1,\ \ ,t_n$，

$$\sum_{i,j=1}^{n}\varphi(t_i-t_j)\xi_i\bar\xi_j\geq 0,$$

其中 $\xi_1,\ \ ,\xi_n$ 是任意复数 (Bochner-Хинчин 定理 (Bochner-Khinchin theorem))．这样的函数称为正定的 (positive definite)　Fourier-Stieltjes 变换被广泛地应用在概率论中，其中非减函数

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(x)$$

满足附加的限制 $\lim_{x\to-\infty}P(x)=0$，$\lim_{x\to+\infty}P(x)=1$，而且 P 是左连续的，它称为分布 (distribution)，而

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixy}dP(y)$$

称为 (分布 P 的) 特征函数 (characteristic function)．于是 Bochner-Хинчин 定理给出一个连续函数 Φ (满足 $\Phi(0)=1$) 是某个分布的特征函数的充要条件

Fourier-Stieltjes 变换在 n 维情形也已得到发展．

参考文献

[1] Bochner, S, Lectures on Fourier integrals, Princeton Univ Press, 1959 (译自德文)
[2] Zygmund, A, Trigonometric Series, 2, Cambridge Univ Press, 1988
[3] Гнеденко, Б В, Курс теории вероятностей, 5 изд, М, 1969 (中译本 Б В 格涅坚科，概率论教程，高等教育出版社，1956)

П И Лизоркин 撰　陈一元 译　郑维行 校

Fourier 变换 [**Fourier transform**, **Фурье преобразование**]

一种**积分变换** (integral transform)．它是作用在由 n 元实变量函数 f 组成的空间上的线性算子 F　F 的最小的定义域是集合 $D=C_0^\infty$，即具有紧支集的无穷次可微函数 φ 的集合　对于这类函数

$$(F\varphi)(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(\xi)e^{-ix\cdot\xi}d\xi \qquad (1)$$

在某种意义上，F 的最自然的定义域是集合 S，它由所有这样的无穷次可微函数 φ 组成 φ 连同其各阶导数在无穷远处趋于零的速度比 $1/|x|$ 的任何次幂都要快 公式（1）对 $\varphi\in S$ 仍成立并有 $(F\varphi)(x)\equiv\varphi(x)\in S$ 此外，F 是 S 到自身的同构，逆映射 F^{-1}（Fourier 逆变换（inverse Fourier transform））是 Fourier 的反演且由公式

$$\varphi(x)=(F^{-1}\psi)(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi \qquad (2)$$

给出

公式（1）也可作用于可积函数的空间 $L_1(\mathbf{R}^n)$ 进一步扩大算子 F 的定义域需要推广（1）式 在经典分析中，这种推广是对局部可积函数（当 $|x|\to\infty$ 时）的性质加上某种限制后作出的（见 **Fourier 积分**（Fourier integral）） 在广义函数理论中，算子 F 的定义摆脱了经典分析的许多要求

与 Fourier 变换 F 的研究相关的基本问题是 研究算子 F 的定义域 Φ 及值域 $F\Phi=\Psi$，研究映射 $F\ \Phi\to\Psi$ 的性质（特别地，逆算子 F^{-1} 存在的条件及其表达式）. Fourier 变换的反演公式是非常简单的

$$F^{-1}[g(x)]=F[g(-x)]$$

在 Foureir 变换的作用下，原空间上保持平移不变的线性算子，（在某些条件下）变为象空间中的乘法算子. 特别地，两个函数 f 和 g 的卷积变为函数 Ff 和 Fg 的乘积

$$F(f*g)=Ff\cdot Fg,$$

而求导变为用自变量乘

$$F(D^\alpha f)=(ix)^\alpha Ff$$

在空间 $L_p(\mathbf{R}^n)$ 中（$1\leqslant p\leqslant 2$），算子 F 是用公式（1）在集合 $D_F=(L_1\cap L_p)(\mathbf{R}^n)$ 上定义的，它是从 $L_p(\mathbf{R}^n)$ 到 $L_q(\mathbf{R}^n)$（$p^{-1}+q^{-1}=1$）的有界算子

$$\left\{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbf{R}^n}|(Ff)(x)|^q dx\right\}^{1/q}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p dx\right\}^{1/p}$$

（Hausdorff-Young 不等式（Hausdorff-Young inequality）） 由连续性，算子 F 容许开拓到全空间 $L_p(\mathbf{R}^n)$（$1<p\leqslant 2$）， 由公式

$$(Ff)(x)=\lim_{R\to\infty}{}^q\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{|\xi|<R}f(\xi)e^{-i\xi x}d\xi=\tilde{f}(x) \quad (3)$$

给出，收敛性依 $L_q(\mathbf{R}^n)$ 的模来理解. 如果 $p\neq 2$，则 L_p 在 F 作用下的象并不是整个 L_q，即当 $1\leqslant p<2$ 时，嵌入 $FL_p\subset L_q$ 是严格的（当 $p=2$ 时，见 **Plancherel 定理**（Plancherel theorem）） 逆算子 F^{-1} 由公式

$$(F^{-1}\tilde{f})(x)=\lim_{R\to\infty}{}^p\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{|\xi|<R}\tilde{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi,$$

$$1<p\leqslant 2$$

定义在 FL_p 上

将 Fourier 变换推广到尽可能大的函数类的问题在分析及其应用中经常出现 例如，见**广义函数的 Fourier 变换**（Fourier transform of generalized function）

参考文献

[1] Titchmarsh, E C, Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford Univ Press, 1948

[2] Zygmund, A, Trigonometric series, 2, Cambridge Univ Press, 1988

[3] Stein, E M and Weiss, G, Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ Press, 1971

П И Лизоркин 撰

【补注】 经常使用术语“分布”（distribution）代替“广义函数”

设 $x=(x_1,\ \ ,x_n)$ 及 $\xi=(\xi_1,\ \ ,\xi_n)$，则 $x\cdot\xi$ 表示数量积 $\sum_{i=1}^n x_i\xi_i$

如果（1）中的“正规因子”$(1/2\pi)^{n/2}$ 用某个常数 α 代替，则在（2）中必须用满足 $\alpha\beta=(1/2\pi)^n$ 的 β 来代替

通常，至少还有另外两种关于“正规因子”的约定

$$(F\varphi)(x)=\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(\xi)e^{-ix\cdot\xi}d\xi, \qquad (A1)$$

$$(F^{-1}\varphi)(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi,$$

$$(F\varphi)(x)=\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(\xi)e^{-2\pi ix\cdot\xi}d\xi, \qquad (A2)$$

$$(F^{-1}\varphi)(x)=\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi$$

适当的约定可使 Fourier 变换成为 $L_2(\mathbf{R}^n)$ 到自身的**酉算子**（unitary operator），约定（A2）正是如此 约定（A1）为的是与**调和分析**（harmonic analysis）一致.

参考文献

[A1] Rudin, W, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973

朱学贤 译 潘文杰 校

离散 Fourier 变换 [Fourier transform, discrete, Фурье преобразование дискретное]

用于在离散点集上给定函数进行调和分析的一种变换

如果在点集 $t_k=k\Delta t$ 给定一个函数的值 x_k，$k=0, 1, \cdots, N-1$，$\Delta t=T/N$，其中 $T>0$ 是函数的周期，那么向量 $x=(x_0, \cdots, x_{N-1})$ 的离散 Fourier 变换是向量 $\hat{x}=Fx$，其中 F 是元素为

$$\exp\{-2\pi i\omega_m t_k\}$$

的矩阵，i 是虚单位，$\omega_m=m\Delta\omega$，$m=0, \cdots, N-1$，$\Delta\omega=1/T$．向量 $\hat{x}$ 的分量类似于通常三角展开中的 Fourier 系数 离散 Fourier 变换通常是近似地计算这些系数、谱和自相关及互相关函数等等 直接计算一次离散 Fourier 变换需要 N^2 次左右算术运算，这是一个很大的机器时间开销．快速 Fourier 变换方法（见[1]）能大大减少运算次数 当 $N=n_1\cdots n_m$ 时，这个方法大概需要 $N(n_1+n_2+\cdots+n_m)$ 次运算完成离散 Fourier 变换，并提高了计算精度 当 $N=2^m$ 时，有一些在实用中特别方便的算法．已有大量的程序实现或利用快速 Fourier 变换来解决应用问题 快速 Fourier 变换方法包括广为人知的计算离散 Fourier 变换的有效方法，如，Runge 方法（见[2]和 **Runge-Kutta 法**（Runge-Kutta method））

参考文献

[1] Cooley, J and Tukey, J, An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, *Math Comp*, **19** (1965), 297－301.

[2] Runge, C Z, *Math Phys*, **48** (1903), 443

В А Морозов 撰

【补注】 J Cooley 和 J Tukey 的快速 Fourier 变换（fast Fourier transform）探讨了矩阵 F 的特殊结构 对于 $N=2^n$，它得出矩阵 F 可以被分解成 n 个矩阵因子，这些因子的每行仅包含很少的非零元素，而这些非零元素相等或有相反的符号．例如，$N=8$，那么 $F=ABC$，因子矩阵 A, B, C 的行中只包含两个非零元素 a 和 b，或者 $a=b$ 否则 $a=-b$（在[A1]的 255 页可以找到 $N=8$ 时写成的公式）．从而，计算向量 $Fx=ABCx$ 只需 $n\cdot N=24$ 次代替了 $N^2=64$ 次运算 专著[A2]提供了快速 Fourier 变换详细的理论论述和算法方面的信息．

参考文献

[A1] Froberg, C E, Introduction to numerical analysis, Benjamin/Cummings, 1985

[A2] Brigham, E D, The fast Fourier transform, Prentice-Hall, 1974

[A3] Ramirez, R W, The FFT fundamentals and concepts, Prentice-Hall, 1985

[A4] Elliot, D F and Rao, K R, Fast transforms algorithms, analysis, applications, Acad Press, 1982

蔡大用 译

广义函数的 Fourier 变换 [Fourier transform of a generalized function, Фурье преобразование обобщенной функции]

从检验函数到广义函数的 Fourier 变换的推广（见**广义函数**（generalized function）） 设 K 是一个检验函数空间，在其上定义了 Fourier 变换 F

$$\varphi \to F[\varphi]=\int\varphi(x)e^{i(\xi, x)}dx, \quad \varphi\in K,$$

且 F 是从 K 到一个检验函数空间 $\widetilde{K}$ 上的同构，那么广义函数空间 $\widetilde{K}'$ 上的 Fourier 变换 $f\to F[f]$ 由

$$(F[f], \varphi)=(f, F[\varphi]), \quad \varphi\in K$$

定义，它是从 $\widetilde{K}'$ 到广义函数空间 K' 上的同构．

例．1) $K=S=\widetilde{K}$，$K'=S'=\widetilde{K}'$ 这里 F 的逆变换是运算

$$F^{-1}[f]=\frac{1}{(2\pi)^n}F[f(-\xi)], \quad f\in S',$$

对 $f\in S'$ 的基本公式是

$$D^\alpha F[f]=F[(ix)^\alpha f],$$

$$F[D^\alpha f]=(-i\xi)^\alpha F[f].$$

2) 令 $K=\bigcap_{s\geq 0}L_2^s$，$\widetilde{K}=D_{L_2}=\bigcap_{s\geq 0}H_s$，

$$\widetilde{K}'=D'_{L_2}=\bigcup_{s\geq 0}H_{-s},$$

其中 L_2^s 是所有使 $(1+\xi^2)^{s/2}\varphi\in L_2$ 的函数 φ 的集合，$H_s=\widetilde{L}_2^s$，$-\infty<s<\infty$

3) $K=D$，$\widetilde{K}=Z$，其中 Z 是所有满足如下增长条件的整函数 $\varphi(z)$ 之集合 存在数 $a=a_\varphi\geq 0$，使得对任何 $N\geq 0$，都可找到 $C_N>0$，使

$$|\varphi(z)|\leq C_N e^{a|\operatorname{Im} z|}(1+|z|)^{-N}, \quad z\in\mathbf{C}^n$$

广义函数的 Fourier 级数 如果广义函数 f 是以 $T=(T_1, \cdots, T_n)$ $(T_j>0)$ 为 n 周期的周期函数，那么 $f\in S'$，且可展成三角级数

$$f(x)=\sum_{|k|=0}^{\infty}c_k(f)e^{i(k\omega, x)}, \quad |c_k(f)|\leq A(1+|k|)^m,$$

此级数在 S' 中收敛到 f，这里

$$\omega=\left[\frac{2\pi}{T_1}, \cdots, \frac{2\pi}{T_n}\right], \quad k\omega=\left[\frac{2\pi k_1}{T_1}, \cdots, \frac{2\pi k_n}{T_n}\right]$$

例 4) $F(X^\alpha)=(2\pi)^n(-i)^{|\alpha|}D^\alpha\delta(\xi)$，特别

$$F(1)=(2\pi)^n\delta(\xi).$$

5) $F[D^\alpha\delta]=(-i\xi)^\alpha$，特别 $F[\delta]=1$

6) $F[\theta]=i/(\xi+i0)=\pi\delta(\xi)+iP(1/\xi)$，其中 θ 是 Heaviside 函数

广义函数卷积的 Fourier 变换．设 $D'(\mathbf{R}^n)$ 中两个广义函数 f 和 g 的直积 $f(x)\times g(y)$ 允许延拓

到形如 $\varphi(x+y)$ 的函数，对一切 $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ 即是说，假定对 $D(\mathbf{R}^{2n})$ 中有如下性质的序列 $\eta_k(x; y)$，$k \to \infty$. $|D^\alpha \eta_k(x, y)| \leqslant c_\alpha$, $\eta_k(x, y) \to 1$, $D^\alpha \eta_k(x; y) \to 0$, $|\alpha| \geqslant 1$, $k \to \infty$（在任何紧集上一致），序列

$$(f(x) \times g(y), \eta_k(x, y) \ \varphi(x+y)), k \to \infty$$

有极限，且不依赖于所指明的类中序列 $\{\eta_k\}$ 的选取，就记作 $(f(x) \times g(y), \varphi(x+y))$ 这时，根据公式 $(f*g, \varphi) = (f(x) \times g(y), \varphi(x+y))$, $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ 确定的泛函 $f*g$ 称作广义函数 f 和 g 的卷积 (convolution), $f*g \in D'(\mathbf{R}^n)$，并非对一切广义函数对 f 和 g 卷积都存在．如果对任意 $R>0$，集合

$$T_R = \{(x, y) \ \ x \in \operatorname{supp} f, y \in \operatorname{supp} g, |x+y| \leqslant R\}$$

在 $\mathbf{R}^{2n}$ 中有界（特别，如果 f 和 g 有紧支集），卷积自动存在．如果卷积 $f*g$ 存在，那么它是交换的．$f*g = g*f$，它也和移位以及求导运算可交换：$f*D^\alpha g = D^\alpha(f_* \ g) = D^\alpha f_* \ g$，Dirac δ 函数起着"单位元素"的作用 $f = \delta * f = f * \delta$ 卷积是非结合运算．但是，存在结合的（和交换的）卷积代数．Dirac δ 函数 δ 是它们的单位元素 例如，设 Γ 是顶点在原点的闭凸锐角锥，$D'(\mathbf{R}^n)$ 中支集在 Γ 中的广义函数构成的集合 D_Γ 是一个卷积代数．集合 $S_\Gamma = S' \cap D_\Gamma$ 构成 D_Γ 的卷积子代数．记号．$D'_+ = D_{[0\ \infty)}$, $S'_t = S_{[0\ \infty)}$（当 $n=1$ 时）．在下列情形下，卷积的 Fourier 变换公式

$$F[f*g] = F[f]F[g]$$

成立·

a) $f \in S'$, g 有紧支集，

b) f, $g \in D_{L_2}$,

c) $f \in D'$, g 有紧支集，

d) f, $g \in S'_\Gamma$ 在这种情形下，广义函数 $F[f]$ 和 $F[g]$ 的积 $F[f]F[g]$ 理解为积 $\tilde{f}(\zeta)\tilde{g}(\zeta)$ $(\zeta = \xi + i\eta)$ 当 $\eta \to 0$ 时，$\eta \in \operatorname{Int} \Gamma^*$ 时在 S' 中的极限，其中 $\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$ 表示 f 和 g 的 Laplace 变换（见**广义函数的积**（generalized functions, product of））

参考文献

[1] Владимиров, В С, Обобщенные функции в математической физике, 2 изд, М, 1979（英译本 Vladimirov, V S, Generalized functions in mathematical physics, Mir, 1979）

[2] Гельфанд, И М, Шилов, Г Е, Обобщенные функции, в 1, М, 1958（中译本 И М 盖尔芳特，Г Е 希洛夫，广义函数，I，科学出版社，1965）

[3] Schwartz, L, Théorie des distributions, 2, Hermann, 1951

[4] Antosik, P, Minkusiński, J and Sikorski, R, Theory of distributions the sequential approach, Elsevier, 1973

[5] Hormander, L, The analysis of linear partial differential operators, 1, Springer, 1983

В С Владимиров 撰

【补注】 关于在定义 Fourier 变换中用到的其他正规化可见 **Fourier 变换**（Fourier transform）

R 上的 Heaviside 函数 θ 如下定义· 当 $x<0$ 时 $\theta(x)=0$，当 $x>0$ 时 $\theta(x)=1$

参考文献

[A1] Yosida, K, Functional analysis, Springer, 1980（中译本 吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1980）

[A2] Jones, D S, The theory of generalized functions, Cambridge Univ Press, 1982

余庆余 译

分形维数 [**fractal dimension**, **дробная размерность**]

【补注】 一个可能取非整数值的维数概念．设 M 为度量空间，并设 $X \subset M$ 为有界子集．对每个 ε 令 $N_\varepsilon(X)$ 是能覆盖 X 的半径为 ε 的球的最小个数 那么

$$d_F(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup \frac{\ln(N_\varepsilon(X))}{\ln(\varepsilon^{-1})}$$

为 X 的分形维数．它也称为 X 的容量（capacity），Mandelbrot 维数（Mandelbrot dimension）或 Шнирельман-Колмогоров 维数（Shnirel'man-Kolmogorov dimension）

这里有

$$d_F(X) = \inf\{d>0 \ \ \lim_{\varepsilon \to 0} \sup \varepsilon^d N_\varepsilon(X) = 0\}$$

若用 $d_H(X)$ 表示 X 的 **Hausdorff 维数**（Hausdorff dimension），则 $d_H(X) \leqslant d_F(X)$

参考文献

[A1] Mandelbrot, B B, Form, chance and dimension, Freeman, 1977

【译注】

参考文献

[B1] Falconer, K J, Fractal geometry, John Wiley, Chichester, 1990

郑维行 译 沈永欢、陈一元 校

分形集 [**fractals** 或 **fractal sets**, **фракталы**]

【补注】 最先由 B B Mandelbrot 定义为具有 Hausdorff-Besicovitch 意义下的非整数维（见**维数**（dimension））的点集 典型的例子有 Cantor 三元集（triadic Cantor set）与不可微 von Koch 曲线．代表性说法是，分形是在确定或随机意义下的自相似集．D Sullivan 引进拟自相似性概念 定义在度量空间 (M, d) 上的函数 f 称为 K 拟等距（K-quasi-isometry），如果对一切 $x, y \in M$，有

$$\frac{1}{K} d(x, y) < d(f(x), f(y)) < Kd(x, y)$$

集合 F 称为拟自相似的(quasi-self-similar),如果存在常数 K 与 r_0,使集合 $F \cap D_r(x)$ 乘以 $1/r$ 后被拟等距映射到 F 中,对一切 $r < r_0$ 与一切 $x \in F$(这里 $D_r(x)$ 是中心为 x 半径为 r 的开球) 因此,分形可定义为一个拟自相似集 在某些重要情形下,分形集的相似变换有一种非扩展变换**半群**(semi-group)的结构,这种半群具有两个或两个以上的生成元.解析函数 $f(z)$ 的 **Julia 集**(Julia set)是这样的分形,其中 f 的逆为相应半群的生成元 分形概念有多种推广方法,但尚无可被一般接受的定义.一种推广是把**分形维数**(fractal dimension)仅看成局部性质 多重分形测度与几何支集上的分布有关,它可以是平常意义下的分形

分形领域发展很快,尤其是它们在统计物理、自然科学与计算机图形学中的应用.例如,应用分形于图象处理,可对有关数据给出可观的压缩.

自然界中的许多"对象",例如海岸线([A1])、沸石、放电式样([A5])、Anderson 局部化波函数、支状生长与粘指([A6])等,可以用确定或随机型(多重)分形结构来描述.近来([A5]),利用 Laplace 方程与随机域知识来理解分形结构的发生与发展趋势,已经取得了进展.

参考文献

[A1] Mandelbrot, B B, The fractal geometry of nature, Freeman, 1983

[A2] Falconer, K J, The geometry of fractal sets, Cambridge Univ Press, 1985

[A3] Peitgen, H -O and Richter, P H, The beauty of fractals, Springer, 1986

[A4] Mandelbrot, B B, Fractals and multifractals, Noise, turbulence and galaxies, Springer, 1988

[A5] Pietronero, L, Evertsz, C and Siebesma, A P, Fractal and multifractal structures in kinetic critical phenomena, in S Albeverio, Ph Blanchard, M Hazewinkel and L Streit (eds) Stochastic processes in physics and engineering, Reidel, 1988, 253 – 278

[A6] Pietronero, L and Tosatti, E (eds), Fractals in physics, North-Holland, 1986

【译注】

参考文献

[B1] Falconer, K J, Fractal geometry, John Wiley, Chichester, 1990

郑维行 译 沈永欢、陈一元 校

分数 [fraction, дробь],算术的

由单位的一个或若干个相等部分(份)组成的数,用记号 a/b(或 $\frac{a}{b}$)来表示,其中 a 和 $b \neq 0$ 是**整数**(integer) 分数 a/b 的分子(numerator)a 表示所取的单位部分的数(份数),单位被分成的份数等于作为分母(denominator)b 而出现的数.也可把分数看成 a 被 b 除所得到的商

如果把分数 a/b 的分子和分母同乘以一个不为零的整数,则这个分数保持不变 因此,可以把任何两个分数 a/b 和 c/d 化为同分母的分数,也就是说,把 a/b 和 c/b 分别用与它们相等而具有相同分母的两个分数来代替.也可以把分数的分子和分母同除以一个数来化简.因此,任何分数都可以表示为既约分数,即分子和分母没有公因数的分数.

两个同分母的分数 a/b 与 c/b 的和与差由下式给出

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

为了把两个不同分母的分数相加或相减,必须首先把它们化为同分母的分数.通常把 a 和 b 的**最小公倍数**(least common multiple)取作共同的分母.两个分数的乘法和除法按下列规则来进行

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad \frac{a}{b} \quad \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \ (c \neq 0)$$

分数 a/b 称为真分数(proper fraction),如它的分子小于分母,反之,称为假分数(improper fraction) 如果一个分数的分母是 10 的幂,则这个分数称为**十进小数**(decimal fraction)

分数的形式定义(formal definition of fraction) 分数可以表示为整数的有序对 (a, b), $b \neq 0$,对于它们给定了一个等价关系(分数相等的关系),即如果 $ad = bc$,则认为 $(a, b) = (c, d)$ 在这个分数集合中,加法、减法、乘法和除法四则运算按下列规则来定义·

$$(a, b) \pm (c, d) = (ad \pm bc, bd),$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd),$$
$$(a, b) \quad (c, d) = (ad, bc)$$

(因此,仅当 $c \neq 0$ 时除法有定义).

有一种类似的分数定义对于推广来说是方便的,在近世代数中采用了(见**分式环**(fractions, ring of)).

C A Степанов 撰

【补注】 (整数的)分数的集合记为 **Q** 由于有上面正文中定义的算术运算和自然序,这个集合成为一个**序域**(ordered field) 分数的**绝对值**(absolute value)给出了 **Q** 上的一个度量 在这个度量中对 **Q** 的**完全化**(completion)(例如,利用 Cauchy 序列,见**基本序列**(fundamental sequence))得到 **R**——**实数**(real number)的有序域.因此,分数也称为有理数(rational number),而 **R** 中的不是分数的数称为无理数(irrational number),例如见[A1]

关于利用 **Dedekind 分割**(Dedekind cut)由 **Q** 构造 **R**,例如见[A2]

形如 $1/n$(n 是正整数)的数称为**单分数**(aliquot ratio)

参考文献

[A1] Hewitt, E and Stromberg, K, Real and abstract analysis, Springer, 1965

[A2] Rudin, W, Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1953（中译本 W 卢丁，数学分析原理，高等教育出版社，1979）

张鸿林 译

分式合同 [fractional congruence, дробная конгруэнция]

商系统 $\mathbf{A}/\theta$ 中由下式定义的合同 η/θ

$$[x]_\theta(\eta/\theta)[y]_\theta \Leftrightarrow x\eta y,$$

其中 η 是**代数系统** (algebraic system) $\mathbf{A}$ 的一个包含给定合同 θ 的合同，并且 $[a]_\theta=\{x\in\mathbf{A}\ x\theta a\}$ 商系统 $(\mathbf{A}/\theta)/(\eta/\theta)$ 同构于系统 $\mathbf{A}/\eta$

Д М Смирнов 撰 卢景波 译

分式理想 [fractional ideal, дробный идеал]

交换整环 R 的分式域 K 的形如 $Q=a^{-1}I$ 的子集 Q，其中 $a\in R$, $a\neq 0$, I 是 R 的理想 换句话说，Q 是域 K 的一个 R 子模，其全体元素有一个公分母，即存在 $a\in R$, $a\neq0$，使得对所有的 $x\in Q$，都有 $ax\in R$ 全体分式理想对于乘法构成一个以 R 为幺元的半群 $\mathfrak{A}$ 对于 **Dedekind 环** (Dedekind ring)，而且仅对于这种环，这个半群是群 半群 A 的可逆元素称为可逆理想 (invertible ideal). 任一可逆理想在 R 上有有限基

参考文献

[1] Zariski, O and Samuel P, Commutative algebra, 1 Springer, 1975

[2] Bourbaki, N, Elements of mathematics Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972（译自法文）

Л А Бокуть 撰 赵春来 译 冯绪宁 校

分数阶积分与微分 [fractional integration and differentiation, дробное интегрирование и дифференцирование]，亦称分数次积分与微分

积分与微分运算到分数阶情形的推广，设 f 为区间 $[a,b]$ 上可积函数，并设 $I_1^a f(x)$ 为 f 在 $[a,x]$ 上的积分，而 $I_\alpha^a f(x)$ 为 $I_{\alpha-1}^a f(x)$ 在 $[a,x]$ 上的积分，$\alpha=2,3,$ ，那么有

$$I_\alpha^a f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt,\ a\leqslant x\leqslant b, \tag{1}$$

其中 $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$ 为 Γ 函数 (gamma function). 上式右边对每个 $\alpha>0$ 都有意义 等式 (1) 定义了 f 以 a 为始点的 α 阶分数阶积分 (fractional integral) 或 Riemann-Liouville 积分 (Riemann-Liouville integral) 对于复值参数 z，算子 I_z^a 被 B Riemann (1847) 研究过，算子 I_α^a 是线性的且有半群性质

$$I_\alpha^a[I_\beta^a f(x)]=I_{\alpha+\beta}^a f(x)$$

分数阶积分的逆运算称为分数阶微分 若 $I_\alpha f=F$，则 f 为 F 的 α 阶分数阶导数 (fractional derivative). 若 $0<\alpha<1$，则有 Marchaut 公式 (Marchaut formula)

$$f(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty\left\{\frac{F(x)-F(x-t)}{t^{1+\alpha}}\right\}dt$$

分数阶积分与微分概念最先为 J. Liouville (1832) 引进，他特别研究算子 $I_\alpha^{-\infty}=I_\alpha$, $\alpha>0$

$$I_\alpha f=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^x\frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt$$

(对 f 给予适当的限制，见 [1]，那里还包含算子 I_α 关于 L_p 的估计)

下列定义 (H Weyl, 1917) 对可积的具有 2π 周期并在周期上具零均值的函数是方便的 设

$$f(x)\sim\sum_{|n|>0}c_n e^{inx}=\sum{}'c_n e^{inx},$$

则 f 的 $\alpha(\alpha>0)$ 阶 Weyl 积分 (Weyl integral) 用式

$$f_\alpha(x)\sim\sum{}'\frac{c_n e^{inx}}{(in)^\alpha} \tag{2}$$

定义，并且 $\beta(\beta>0)$ 阶导数 f^β 用方程

$$f^\beta(x)=\frac{d^n}{dx^n}f_{n-\beta}(x)$$

定义，这里 n 是大于 β 的最小整数 (应注意 $f_\alpha(x)$ 与 $I_\alpha f(x)$ 重合)

这些定义在广义函数论的框架中有进一步的发展 对周期的广义函数

$$f\sim\sum{}'c_n e^{inx}$$

分数阶积分 $I_\alpha f=f_\alpha$ 的运算可据式 (2) 对一切实值 α 实现 (若 α 为负的，$I_\alpha f$ 与 α 阶偏导数一致) 且有关于参数 α 的半群性质

在 n 维空间 X 中分数阶积分运算的类似式为 **Riesz 位势** (Riesz potential，或位势型积分 (integral of potential type))

$$R_\alpha f(x)=\pi^{\alpha-n/2}\frac{\Gamma((n-\alpha)/2)}{\Gamma(\alpha/2)}\int_X\frac{f(x)}{|x-t|^{n-\alpha}}dt$$

R_α 的逆运算称为 α 阶 Riesz 导数 (Riesz derivative)

参考文献

[1] Hardy, G H, Littlewood, J E and Pólya, G, Inequalities, Cambridge Univ Press, 1934（中译本 G H 哈代，J E 李特伍德，G 波利亚，不等式，科学出版社，1965）

[2] Zygmund, A, Trigonometric series, 1, Cambridge Univ Press, 1979

[3] Hille, E and Phillips, R, Functional analysis and semi-groups, Amer Math Soc, 1957(中译本 E 希尔, R 菲列浦斯, 泛函分析与半群, 上海科学技术出版社, 1964)

[4] Джрбашян, M M, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, M, 1966

П И Лизоркин 撰 郑维行 译

分式线性函数 [fractional-linear function, дробнолинейная функция]

形式为

$$W=L(z)=\frac{a_1z_1+\quad+a_nz_n+b}{c_1z_1+\quad+c_nz_n+d}$$

的函数, 其中 $z=(z_1,\quad,z_n)$ 是复或实自变量, a_j, b, c_j, d 是复或实系数, 且 $|c_1|+\quad+|c_n|+|d|>0$ 如果 $|c_1|=\quad=|c_n|=0$, 则分式线性函数是一个整线性函数, 如果矩阵

$$A=\begin{Vmatrix}a_1 & & a_n & b\\ c_1 & & c_n & d\end{Vmatrix}$$

的秩等于 1, 则 $L(z)$ 是常数 如果 $|c_1|+\quad+|c_n|>0$ 且 A 的秩等于 2, 则得到正常分式函数, 下面均假定这些条件满足

如果 $n=1$, 且 $a_1=a$, $c_1=c$, $z_1=z$ 是实的, 则分式线性函数的图形是等轴双曲线, 其渐近线是 $z=-d/c$ 和 $w=a/c$ 如果 $n=2$, 且 a_1, a_2, b, c_1, c_2, d, z_1, z_2 是实的, 则分式线性函数的图形是双曲抛物面

如果 $n=1$, 则分式线性函数 $L(z)$ 在扩充复平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 上处处是复变量 z 的解析函数, 只有点 $z=-d/c$ 例外, 在这里 $L(z)$ 具有一个简单极点 如果 $n\geqslant 1$, 则分式线性函数 $L(z)$ 在空间 $\mathbf{C}^n$ 中是复变量 $z=(z_1,\quad,z_n)$ 的亚纯函数, 以集合

$$\{z=\mathbf{C}^n, c_1z_1+\quad+c_nz_n+d=0\}$$

作为其极点集

亦见**分式线性映射**(fractional-linear mapping)

Е П Долженко, Е Д Соломенцев 撰 张鸿林 译

分式线性映射 [fractional-linear mapping, дробно-линейное отображение], 分式线性变换 (fractional-linear transformation)

用分式线性函数来实现的复空间 $\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ 的映射 (见**分式线性函数** (fractional-linear function)).

在复平面 $\mathbf{C}^1=\mathbf{C}$ 的情形下, 这是形如

$$z\to w=L(z)=\frac{az+b}{cz+d}\qquad(1)$$

的非常数映射, 其中 $ad-bc\neq 0$, 通常采用幺模正规化 (unimodular normalization) $ad-bc=1$ 任一分式线性映射可通过补充定义 $\infty\to a/c$ 及 $-d/c\to\infty$ 而成为扩充复平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 到自身的一一映射 最简单的分式线性映射是线性映射 $z\to w=\widetilde{a}z+\widetilde{b}$, 当 $c=0$ 时便得到这种映射 所有非线性的分式线性映射均可表为两个线性映射同映射 L_0 $z\to w=1/z$ 的复合 分式线性映射 L_0 的性质可以在 **Riemann 球面** (Riemann sphere) 上描述, 因若采用球极平面射影, 它对应于绕过点 $\pm 1\in\mathbf{C}$ 的象点的直径作 180° 旋转

特有性质 分式线性映射将 $\overline{\mathbf{C}}$ 一一共形地映射为自身. 圆性质 (circle property) 在分式线性映射下, $\overline{\mathbf{C}}$ 中任一圆 (即 $\mathbf{C}$ 中圆或添上点 ∞ 的直线) 变成 $\overline{\mathbf{C}}$ 中的圆. 两对称点的比的不变性 关于 $\overline{\mathbf{C}}$ 中任一圆对称的一对点 z,z^*, 在分式线性映射下变为关于该圆的象对称的一对点 w,w^* $\overline{\mathbf{C}}$ 中四点的交比关于分式线性映射不变, 即若该映射把点 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 分别变成点 $\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4$, 则

$$\frac{\xi_3-\xi_1}{\xi_3-\xi_2}\quad\frac{\xi_4-\xi_1}{\xi_4-\xi_2}=\frac{\zeta_3-\zeta_1}{\zeta_3-\zeta_2}\quad\frac{\zeta_4-\zeta_1}{\zeta_4-\zeta_2}\qquad(2)$$

对于任意给定的 $\overline{\mathbf{C}}$ 中两两不同的三点组 ξ_1、ξ_2、ξ_3 和 ζ_1、ζ_2, ζ_3, 存在一个唯一的分式线性映射, 分别把 ξ_k 变成 ζ_k, $k=1,2,3$ 这一分式线性映射可从方程 (2) 用 z 和 w 分别代换 ξ_4 和 ζ_4 后求出 群性质 (group property) 全体分式线性映射的集合关于复合 $(L_1L_2)(z)=L_1(L_2(z))$ 构成非交换群, 其单位元素为 $E(z)=z$ 万有性质 (universality property) $\overline{\mathbf{C}}$ 的任一共形自同构是分式线性映射, 因此所有分式线性映射的群与 $\overline{\mathbf{C}}$ 的所有共形自同构的群 $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbf{C}}$ 一致

单位圆盘 $B=\{z\in\mathbf{C}\ \ |z|<1\}$ 的所有共形自同构构成群 $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbf{C}}$ 的子群 $\mathrm{Aut}\,B$, 它由形如

$$z\to w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z},\ |\alpha|<1,\ \mathrm{Im}\,\theta=0$$

的分式线性映射组成 这也适用于上半平面 $\{z\in\mathbf{C}\ \mathrm{Im}z>0\}$ 的共形自同构, 它们具有形式

$$z\to w=\frac{az+b}{cz+d},\ \mathrm{Im}(a,b,c,d)=0,\ ad-bc>0,$$

其中 (a,b,c,d) 表示点 a,b,c,d 的交比. 上半平面到单位圆盘的所有共形自同胚具有形式

$$z\to w=e^{i\theta}\frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}},\ \mathrm{Im}\beta>0,\ \mathrm{Im}\,\theta=0$$

除恒等式分式线性映射 $E(z)$ 外, 分式线性映射在 $\overline{\mathbf{C}}$ 中至多有两个不同的不动点 ξ_1,ξ_2 若存在两个不动点 $\xi_1\neq\xi_2$, 则过 ξ_1 和 ξ_2 的圆周族 Σ 经该分式线性变换 (1) 变为自身, 与 Σ 的圆周正交的所有圆周的族 Σ' 也变为自身 在这一方面, 有三种可能的情形

1) Σ的每个圆周变为自身，这样的分式线性映射称为**双曲的**（hyperbolic），且可表示成**正规形式**（normal form）

$$\frac{w-\xi_1}{w-\xi_2}=\mu\frac{z-\xi_1}{z-\xi_2}, \tag{3}$$

其中该映射的**乘子**（multiplier）$\mu>0$, $\mu\neq1$, ∞ 幺模分式线性映射（1）是双曲的，当且仅当 $a+d\in\mathbf{R}$，且 $|a+d|>2$

2) Σ′的每个圆周变为自身，这样的分式线性映射称为**椭圆的**（elliptic），其标准形式（3）由乘子 μ 满足 $|\mu|=1$, $\mu\neq1$ 来刻画　幺模分式线性映射（1）是椭圆的，当且仅当 $a+d\in\mathbf{R}$, $|a+d|<2$

3) 族Σ和Σ′中没有一个圆周变为自身，这样的分式线性映射称为**斜驶的**（loxodromic），其标准形式（3）由乘子 $\mu\in\mathbf{C}$, $|\mu|\neq1$，且 $\mathrm{Im}\,\mu\neq0$ 或 $\mu<0$ 来刻画　幺模分式线性映射（1）是斜驶的，当且仅当 $a+d\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$

当两个不动点合并为一个点 ξ_1 时，该分式线性映射称为**抛物的**（parabolic）　在这种情形下，族Σ由所有在 ξ_1 有公共切点的圆周组成，每个圆周变为自身　抛物的分式线性映射的标准形式为，当 $\xi_1\neq\infty$ 时，

$$\frac{1}{w-\xi_1}=\frac{1}{z-\xi_1}+\alpha,\ \alpha\in\mathbf{C},\ \alpha\neq0,$$

或当 $\xi_1=\infty$ 时，

$$w=z+\alpha,\ \alpha\in\mathbf{C},\ \alpha\neq0$$

幺模分式线性映射（1）是抛物的，当且仅当 $a+d=\pm2$

由于上列的许多初等性质，分式线性映射在单复变函数论的所有分支及各种应用学科中有广泛的应用　特别地，借助分式线性映射，可构造出 **Лобачевский几何学**（Lobachevskiĭ geometry）模型

在分式线性映射完全群的子群中，分式线性映射的离散群Γ是最重要的子群，可应用于微分方程解析理论，自守函数理论及分析学中的其他问题　分式线性映射的初等离散群是有限群，它们同构于 Riemann 球面的循环旋转群或正多面体旋转群　在 $\overline{\mathbf{C}}$ 中有不变圆周 γ 的分式线性映射的离散群Γ称为 **Fuchs群**（Fuchsian group），这里 γ 是Γ的所有变换的公共不变圆周，γ 的内部在Γ的所有变换下均变为自身　Fuchs 群不可能包含斜驶分式线性映射．在历史上，椭圆函数论中提出的**模群**（modular group）是 Fuchs 群的最早例子（亦见**模函数**（modular function））．模群由系数 a,b,c,d 为整数的所有幺模分式线性映射（1）所组成，实轴关于模分式线性映射不变．非初等、非 Fuchs 的分式线性映射群——**Klein群**（Kleinian group）——则要复杂得多，较少被研究．

复空间 $\mathbf{C}^n(n\geqslant1)$ 的分式线性映射是非退化映射

$$z=(z_1,\ \ ,z_n)\to$$
$$\to w=(w_1,\ \ ,w_n)=(L_1(z),\ \ ,L_n(z)),$$

由分式线性映射

$$L_k(z)=\frac{a_{1k}z_1+\ \ +a_{nk}z_n+b_k}{c_{1k}z_1+\ \ +c_{nk}z_n+d_k},\ k=1,\ \ ,n$$

来实现．$\mathbf{C}^n$ 的最重要的分式线性映射是那些可延拓到 $\mathbf{C}^n$ 的某个紧化空间的映射　例如，所有涉及坐标重排的线性变换，以及形如

$$z=(z_1,\ \ ,z_n)\to w=(L_1(z_1),\ \ ,L_n(z_n))$$

的分式线性映射，其中 $L_k(z_k)$ 是 z_k 平面中的（1）型分式线性映射，可延拓至函数论空间 $\overline{\mathbf{C}}^n$　由这些映射生成的分式线性映射群同紧化空间 $\overline{\mathbf{C}}^n$ 的所有双全纯自同构的群 $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbf{C}}^n$ 一致　相应的子群 $\mathrm{Aut}\,U^n$，具有

$$L_k(z_k)=e^{i\theta_k}\frac{z_k-\alpha_k}{1-\overline{\alpha}_k z_k},\ \ |\alpha_k|<1,\ \mathrm{Im}\,\theta_k=0,$$

取遍单位多圆柱 $U^n=\{z\in\mathbf{C}^n\ \ |z_j|<1,\ j=1,\cdot\ \ ,n\}$ 的所有自同构　具有

$$L_k(z)=\frac{a_{1k}z_1+\ \ +a_{nk}z_n+b_k}{c_1z_1+\ \ +c_nz_n+d}=\frac{l_k(z)}{l(z)} \tag{4}$$

的分式线性映射，可延拓至空间 $\mathbf{C}^n$ 的射影闭包 $\mathbf{C}P^n$　这种延拓具有如下的齐性坐标形式

$$(z_0,\ \ ,z_n)\to\left[z_0l\left(\frac{z}{z_0}\right),\ \ ,z_0l_n\left(\frac{z}{z_0}\right)\right]$$

这些映射穷尽了 $\mathbf{C}P^n$ 的所有双全纯自同构的群 $\mathrm{Aut}\,\mathbf{C}P^n$　单位球 $B^n=\{z\in\mathbf{C}^n\ \ |z|<1\}$ 的自同构构成群 $\mathrm{Aut}\,\mathbf{C}P^n$ 的子群 $\mathrm{Aut}\,B^n$，它由所有（4）型分式线性映射组成，其系数满足某些附加条件（见[2]，Vol 2）

参考文献

[1] Привалов, И И, Введение в теорию функуий комплексного переменного, 11 изд, М, 1967（中译本 И И 普里瓦洛夫，复变函数引论，高等教育出版社，1956）

[2] Шабат, Б В, Введение в комплексный анализ, 2 изд, ч 1－2, М, 1976

[3] Стоилов, С, Теория функций комплексного переменного, пер с рум, т 1, М, 1962

[4] Ford, L R, Automorphic functions, Chelsea, reprint, 1951

Е П Долженко, Е Д Соломенцев, Е М Чирка 撰

【补注】 关于 $\mathrm{Aut}\,B^n$ 的出色的参考文献有[A1]　分式线性映射，也称为 **Möbius 变换**（Möbius transformations）

参考文献

[A1] Rudin, W , Function theory in the unit ball of $\mathbf{C}^n$, Springer, 1980
[A2] Nehari, Z , Conformal mapping, Dover, reprint, 1975
[A3] Schwerdtfeger, H , Geometry of complex numbers, Dover, reprint, 1979
[A4] Маркушевич, А И , Теория аналитических функций, 2 изд , т 1, М , 1967 (中译本 А И 马库雪维奇, 解析函数论, 高等教育出版社, 1957)

杨维奇 译

小数部分 [**fractional part** , **дробная доля**], 实数的

对一切实数 x 定义的一个函数, 它等于 x 与数 x 的**整数部分** (integral part) $[x]$ 之间的差, 通常记作 $\{x\}$ 例如, $\{1\ 03\}=0\ 03$, $\{-1\ 25\}=0\ 75$, $\{\pi\}=\{3\ 14\ \ \}=0\ 14$ С А Степанов 撰 张鸿林 译

分数幂 [**fractional power**, **дробная степень**], 复 Banach 空间 E 上的线性算子 A 的

这个算子 A 的一个函数 $f(A)$, 使得 $f(z)=z^{\alpha}$ 如果算子 A 有界, 且它的谱不含零点, 同时也不包围零点, 则 A^{α} 定义为沿着围绕 A 的谱的一个不含零点的围道的 **Cauchy 积分** (Cauchy integral). 如果 A 是无界的, 则围道必须取为无穷的, 而且出现了积分的收敛性问题 如果 A 有着一个稠密于 E 中的定义域 $D(A)$, 而且对于 $\lambda<0$ 有预解式

$$R(\lambda, A)=(A-\lambda I)^{-1},$$

它满足估计

$$\|R(-s, A)\| \leqslant M(1+s)^{-1}, s>0, \qquad (1)$$

那么

$$A^{-\alpha}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\lambda^{-\alpha}R(\lambda, A)d\lambda,$$

其中, Γ 由一个依赖于 M 的角的两条边构成. 算子 $A^{-\alpha}$ 有界, 且对任何 $x\in E$, 当 $\alpha\to 0$ 时, $A^{-\alpha}x\to x$ 正幂则定义如下 $A^{\alpha}=(A^{-\alpha})^{-1}$, 它们是无界的. 对任何实数 α 及 β, 对 $x\in D(A^{\gamma})$, 且 $\gamma=\max\{\alpha,\beta,\alpha+\beta\}$, 幂的以下基本性质成立

$$A^{\alpha}A^{\beta}x=A^{\beta}A^{\alpha}x=A^{\alpha+\beta}x$$

如果 $0<\alpha<1$, 则 $(A^{\alpha})^{\beta}=A^{\alpha\beta}$ 对任何 $\alpha<\beta<\gamma$ 以及 $x\in D(A^{\gamma})$,

$$\|A^{\beta}x\| \leqslant C(\alpha,\beta,\gamma)\|A^{\alpha}x\|^{(\gamma-\beta)/(\gamma-\alpha)}\|A^{\gamma}x\|^{(\beta-\alpha)/(\gamma-\alpha)}$$

(**矩量不等式** (inequality of moments)) 乘幂半群 $A^{-\alpha}$ 可以延拓为半群 A^{-z}, 它在右半平面内是解析的

以上的性质可以推广到包括当 A 无有界逆, 且估计 $\|R(-s, A)\|\leqslant Ms^{-1}$ $(s>0)$ 成立时的情形 如果条件 (1) 满足, 且 $0<\alpha<1$, 那么

$$A^{-\alpha}=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^{\infty}s^{-\alpha}R(-s, A)ds$$

如果 B 是一个压缩半群 $U(t)$ 的无穷小算子, 那么

$$(-B)^{-\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}U(t)dt$$

由条件 (1) 不能导出 $-A$ 是某个强连续半群的无穷小算子, 但是如果 $\alpha\leqslant 1/2$, 则算子 $-A^{\alpha}$ 是一个解析半群的无穷小算子

一个算子 B 受另一个算子 A 所**控制** (dominated) 如果 $D(B)\supset D(A)$, 且 $\|Bx\|\leqslant c\|Ax\|$, $x\in D(A)$ 如果 B 为 A 所控制, 且两个算子的预解式均具有性质 (1), 那么当 $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1$ 时, B^{α} 为 A^{β} 所控制 .

如果 A 是一个 Hilbert 空间上的正自共轭算子, 它的分数幂由谱分解定义 (见**线性算子的谱分解** (spectral decomposition of a linear operator))

$$A^{\alpha}=\int_0^{\infty}\lambda^{\alpha}dE_{\lambda}$$

在矩量不等式中, 对这样的算子有 $c(\alpha, \beta, \gamma)=1$ 设 A, B 为分别作用于 Hilbert 空间 H 及 H_1 上的两个正自共轭算子, 如果 T 是由 H 到 H_1 的一个有界线性算子, 具有范数 M, 使得 $TD(A)\subset D(B)$, 且 $\|BTx\|\leqslant M_1\|Ax\|$, $x\in D(A)$, 那么 $TD(A^{\alpha})\subset D(B^{\alpha})$, 且

$$\|B^{\alpha}Tx\|\leqslant M^{1-\alpha}M_1^{\alpha}\|A^{\alpha}x\|, 0\leqslant\alpha\leqslant 1$$

(Heinz **不等式** (Heinz inequality)) 特别地, 如果 $H=H_1$, 且 $T=I$, 那么当 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, B 为 A 所控制的事实便蕴含 B^{α} 为 A^{α} 所控制 算子的分数幂在非线性方程的研究中要用到 对于由椭圆型值问题生成的算子已被详细地研究过

参考文献

[1] Крейн, С Г , Функциональный анализ [Справочная математическая библиотека], 2 изд , М , 1972 (英译本 Krein, S G (ed), Functional analysis, Wolters-Noordhoff, 1972)
[2] Крейн, С Г , Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М, , 1967 (英译本 Krein, S G , Linear differential equations in a Banach space, Amer Math Soc , 1971)
[3] Seeley, R T , Complex powers of elliptic operators, in Proc Symp Pure Math ,Vol 10, Amer Math Soc , 1967, 288 - 307

С Г Крейн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hille, E and Phillps, R , Functional analysis and semigroups, Amer Math Soc , 1957

十卢望 译 郑维行 校

分式有理函数 [fractional-rational function, дробно-рациональная функция]

见**有理函数** (rational function)

分步法 [fractional steps, method of, дробных шагов метод]

构造经济的（对运算次数而言）、稳定的差分格式求解数学物理中微分方程的一种方法

随着问题维数增加，得到数值解所需的运算量相应地增加，这既是由于点数很多也是由于编计算程序时逻辑困难所造成的　对于微分方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \tag{1}$$

其中 $L=L(\partial/\partial x)$ 是个微分算子，$u=u(x,t)$，$x=(x_1, \quad, x_n)$，简单逼近的绝对稳定的隐式格式

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1}+\Lambda_0 u^n, \tag{2}$$

$$\Lambda_0 \sim L_0,\ \Lambda_1 \sim L_1,\ L_0+L_1=L,$$

在多维问题的情况下变得无效　在某些情况下，在时间方向上需要非常小的步长，此外，求得每一个 u^{n+1} 需要常数 · $N^{\alpha(m)}$ 次运算，其中 N 是每一层上的点数，m 是空间维数并且 $\alpha(m)$ 随 m 迅速增加

为了得到经济稳定的差分格式，基于下面的想法提出了另一些方法

1) 差分格式的分裂，

2) 近似因子化，

3) 微分方程的分裂（弱逼近）.

在方程 (1) 的情形下，相应的差分格式有下述形式（为了简单起见，取两个分步并考虑周期的 **Cauchy 问题** (Cauchy problem)）

分裂格式

$$\left.\begin{aligned} \frac{u^{n+1/2}-u^n}{\tau} &= \Lambda_{11}u^{n+1/2}+\Lambda_{01}u^n, \\ \frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{\tau} &= \Lambda_{12}u^{n+1}+\Lambda_{02}u^{n+1/2}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

近似因子化格式

$$\left.\begin{aligned} (E-\tau\Lambda_{11})(E-\tau\Lambda_{12})u^{n+1}&=(E+t\Omega)u^n, \\ \Lambda_{11}+\Lambda_{12}=\Lambda_1,\quad \Omega &\sim \Lambda_0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

弱逼近格式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\alpha_1 L_1+\alpha_2 L_2)u = Lu,\ L=L_0+L_1, \tag{5}$$

$$\alpha_1(t,\tau)=2,\ \alpha_2(t,\tau)=0 \quad 如果\ t\in\left[n\tau, \left(n+\frac{1}{2}\right)\tau\right],$$

$$\alpha_1(t,\tau)=0,\ \alpha_2(t,\tau)=2 \quad 如果\ t\in\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau, (n+1)\tau\right]$$

在格式 (3) 和 (4) 的情况下，求算子 $E-\tau\Lambda_1$ 的逆由求算子 $(E-\tau\Lambda_{11})(E-\tau\Lambda_{12})$ 的逆所代替，也就是，依次求算子 $E-\tau\Lambda_{11}$，$E-\tau\Lambda_{12}$ 的逆，这些算子的结构往往比较简单

(5) 的含意使人们把分裂格式

$$\frac{u^{n+1/2}-u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1/2},\quad \frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 u^{n+1}$$

看作为方程 (5) 的简单逼近，而方程 (5) 弱逼近于方程 (1)

这样，就有基于用较简单算子表示复杂算子的方法，并且把积分原来的方程化为积分结构较简单的方程，而且分步法仅须在最终结果里（当写成“整”步时）满足逼近和稳定性条件　数学物理中的很多复杂问题可以用分裂方法求解

高阶精度的分裂格式现已达到高级阶段　这种方法的一个修正方案是所谓的“粒子在胞腔中”的方法　分裂按照物理进程来实现，并和减少算子的维数无关

参考文献

[1] Яненко, Н Н, Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосиб, 1967 (英译本 Yanenko, N N, The method of fractional steps solution of problems of mathematical physics in several variables, Springer, 1971)

[2] Самарский, А А, Введение в теорию разностных схем, М, 1971

Н Н Яненко 撰

【补注】 分裂法和局部一维方法以及跳步法一样常出现于西方文献中　它们的用途比较局限，因为这种方法需要相当规则的区域（如正方形）

参考文献

[A1] Gourlay, A R, Splitting methods for time-dependent partial differential equations, in The state-of-the-art in numerical analysis Proc Conf Univ York, 1976, Acad Press, 1977, 757 − 796

[A2] Twizell, E H, Computational methods for partial differential equations, E Horwood, 1984

蔡大用 译

分式环 [fractions, ring of, частных кольцо]

与含有恒等元的结合环 R 相联系的一个环 R 的（右经典的）**分式环** (ring of fractions) 是这样的环 $Q_{cl}(R)$，在此环中 R 的每个正则元（即非零因子）是可逆的，并且 $Q_{cl}(R)$ 的每个元素有形式 ab^{-1}，其中，$a, b\in R$　环 $Q_{cl}(R)$ 存在当且仅当 R 满足右 Ore 条件（见**结合环与结合代数** (associative rings and algebras)）R 的极大（或完全）的右分式环是环 $Q_{max}(R) = \mathrm{Hom}_H(\hat{R}, \hat{R})$，其中 $\hat{R}$ 作为右 R 模是 R 的内射

包，$H = \mathrm{Hom}_R(\hat{R}, \hat{R})$是右 R 模 $\hat{R}$ 的自同态环 环 $Q_{\max}(R)$ 也可定义为方向极限

$$\varinjlim \mathrm{Hom}(D, R),$$

其中 D 是 R 的所有稠密右理想集合（环 R 的一个右理想 D 称为稠密理想 (dense ideal)，如果

$$\forall 0 \neq r_1, r_2 \in R \ \exists r \in R \ (r_1 r \neq 0, r_1 r \in D).$$

参考文献

[1] Lambek, J , Lectures on rings and modules, Blaisdell, 1966

[2] Елизаров, В П , 《Алгебра и логика》, **8** (1969) 4, 381–424

[3] Stenstrom, B , Rings of quotients, Springer, 1975

Л А Бокуть 撰

【补注】 这个概念也被称为商环 (ring of quatient)

许永华 译

断裂的数学问题 [fracture, mathematical problems of, разрушения математические задачи]

【补注】 研究固体内各种缺陷（裂缝 (cracks)，杂质 (inclusions)，位错 (dislocations)，等等）附近应力 (stress) 和应变 (strain) 场的力学分支 有几个断裂准则 ([A1]) 被用于确定可能导致某种材料断裂的危险状态

按照有关的数学方法，人们可以将其分为两个范畴的问题 二维问题和三维问题 **复变函数论** (functions of a complex variable, theory of) ([A3]) 和 **Fourier 变换** (Fourier transform) 方法 ([A7]) 已被用于解**断裂中的二维问题** (two-dimensional problems in fracture)，而三维问题可用**积分变换法** (integral-transform method) ([A4]) 和 **Green 函数** (Green function) 方法 ([A2]) 来处理

可以将每个范畴的问题划分为与弹性体（线性和非线性），弹塑性体，粘弹性体等等相关的问题 ([A1]) 二维线弹性理论是发展最完善的理论 ([A3])，它包括了裂纹扩展过程的研究 但对三维问题的了解就少得多了 研究无限大，半无限大和有限大体所用的数学处理过程是不一样的．目前 (1988) 仅得到了弹性空间中含有一个圆形或椭圆形扁平裂纹的精确解 ([A4])．对于承受任意内部边界力，含有一个硬币形裂纹的弹性空间，曾获得过完整的封闭形式的解．

作为一个例子，考虑一个承受任意法向边界力 p，被一个一般形状的扁平裂纹削弱了的弹性空间．控制**积分-微分方程** (integro-differential equation) 具有下列形式

$$p(N_0) = -\frac{1}{4\pi^2 H}\Delta\iint_S \frac{w(N)dS}{R(N_0, N)}, \quad (A1)$$

其中 S 表示裂纹面积，Δ 是二维 **Laplace 算子** (Laplace operator)，w 表示裂纹张开位移，$H = (1-\nu^2)/(\pi E)$ (E 是弹性模量，ν 是 Poisson 系数)，$R(N_0, N)$ 表示两点 N_0 和 N_1 之间的距离 ($(N_0, N) \in S$) 仅仅对含有一个圆裂纹的情况，得到了方程 (A1) 的精确解，在极坐标下，它是

$$w(\rho, \varphi) =$$

$$= \frac{2}{\pi} H \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{P(\rho_0, \varphi_0)}{R} \tan^{-1}\left[\frac{\eta}{R}\right]\rho_0 d\rho_0 d\varphi_0, \quad (A2)$$

其中 a 是圆的半径，且

$$R = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\varphi - \varphi_0)]^{1/2}, \quad (A3)$$

$$\eta = \frac{(a^2 - \rho^2)^{1/2}(a^2 - \rho_0^2)^{1/2}}{a}$$

在文献 [A2] 中得到了一个含有一般形状裂纹，承受均匀压力 p 的近似解 ([A1]) 在极坐标中将裂纹边界定义为 $\rho = a(\varphi)$，则裂纹张开位移可用下式逼近

$$w = \frac{\delta}{a(\varphi)}[a^2(\varphi) - \rho^2]^{1/2}, \quad (A4)$$

其中裂纹最大位移 δ 与作用压力 p 有如下关系

$$p = \frac{\delta B}{8\pi H}, \quad B = \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a(\varphi)} \quad (A5)$$

坐标原点取在裂纹中心，它被定义在 B 值取最小的点 对很多形状的裂纹，解 (A4)–(A5) 已被证明是相当精确的 ([A2])

考虑承受剪切载荷 $\tau = \tau_{zx} + i\tau_{yz}$，含有一般扁平裂纹的情形，可以得到下列控制积分微分方程 ([A2])

$$\tau(N_0) = \quad (A6)$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2(G_1^2 - G_2^2)}\left[G_1\Delta\iint_S \frac{u(N)}{R(N, N_0)}dS_N + \right.$$

$$\left. + G_2\Lambda^2\iint_S \frac{\overline{u}(N)}{R(N, N_0)}dS_N\right],$$

在此已引入复数切向位移 $u = u_x + iu_y$，且

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}, \quad (A7)$$

$$G_1 = \frac{(2-\nu)(1+\nu)}{\pi E}, \quad G_2 = \frac{\nu(1+\nu)}{\pi E}$$

最新的研究得到了含有一个圆裂纹情况下，(A6) 的封闭形式的精确解如下 ([A2])

$$u(\rho, \varphi) = \quad (A8)$$

$$= \frac{G_1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a\left[\frac{1}{R}\tan^{-1}\frac{\eta}{R} - \frac{G_2^2}{G_1^2}\frac{(3-\overline{t})\eta}{a^2(1-\overline{t})^2}\right]$$

$$\cdot \tau(\rho_0, \varphi_0)\rho_0 d\rho_0 d\varphi_0 +$$

$$+\frac{G_2}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a\left[\frac{q}{R\bar{q}}\tan^{-1}\frac{\eta}{R}+\frac{\eta\left[\left[\frac{q}{\bar{q}}\right]-te^{2i\varphi_0}\right]}{a^2(1-t)(1-\bar{t})}\right]$$

$$\cdot \bar{\tau}(\rho_0, \varphi_0)\rho_0 d\rho_0 d\varphi_0,$$

其中 R 和 η 由（A3)确定，上划横线表示复共轭值，而

$$t=\frac{\rho\rho_0}{a^2}e^{i(\varphi-\varphi_0)},\quad q=\rho e^{i\varphi}-\rho_0 e^{i\varphi_0}$$

对于含有一个一般扁平裂纹，承受多项式剪切载荷的情况，可推导出它的近似解（[A2]） 在最简单的均匀剪切载荷的情况下，裂纹面位移可近似地用下列表达式表示

$$u(\rho,\varphi)=u_0\frac{[a^2(\varphi)-\rho^2]^{1/2}}{a(\varphi)}, \qquad (A9)$$

在此，u_0 与所受到的剪切载荷 τ 之间具有下列关系

$$u_0=\frac{4\pi(G_1^2-G_2^2)}{G_1^2B^2-9G_2^2B_2^2}[G_1B\tau-3G_2B_2\bar{\tau}], \quad (A10)$$

B 由（A5)确定，且

$$B_2=\int_0^{2\pi}\frac{e^{2i\varphi}d\varphi}{a(\varphi)},$$

公式（A10)对椭圆裂纹是精确的，估计对各种其他形状的裂纹也颇为精确

在断裂力学中应力强度因子（stress intensity factors)(SIF)是非常重要的参量．它的定义如下

$$k_1=\lim_{\rho\to a}\{(\rho-a)^{1/2}\sigma_Z\}$$

是第Ⅰ型的应力强度因子，

$$k_2+ik_3=\lim_{\rho\to a}\{(\rho-a)^{1/2}\tau e^{-i\varphi}\}$$

对应于第Ⅱ和第Ⅲ型载荷．在硬币形裂纹承受任意分布压力的情况下，可以写出（[A1])

$$k_1=$$

$$=\frac{1}{\pi^2(2a)^{1/2}}\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{(a^2-\rho_0^2)p(\rho_0,\varphi_0)\rho_0 d\rho_0 d\varphi_0}{a^2+\rho_0^2-2a\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)}.$$

对承受任意分布剪切载荷的一般情况，应力强度因子具有下列形式（[A2])

$$k_2+ik_3=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{(a^2-\rho_0^2)^{1/2}}{\pi^2(2a)^{1/2}}\left[\frac{e^{-i\varphi}\tau(\rho_0,\varphi_0)}{\rho_0^2+a^2-2a\rho\cos(\varphi-\varphi_0)}+\right.$$

$$\left.+\frac{G_2}{G_1}\frac{(3a-\rho_0e^{i(\varphi-\varphi_0)})e^{i\varphi}\bar{\tau}(\rho_0,\varphi_0)}{a(a-\rho_0e^{i(\varphi-\varphi_0)})^2}\right]\rho_0 d\rho_0 d\varphi_0$$

对于非圆形的任意形状的裂纹，应力强度因子没有一个一般的表达式 [A4]中研究了几种含有一个椭圆裂纹承受一些特殊载荷的情况 （[A5])求解了各种含有微量夹杂的三维问题 关于裂纹扩展问题数学描述的研究还处于发展的过程中

参考文献

[A1] Черепанов, Г П, Механика хрупкого разрушения, Наука, 1974(中译本 脆性断裂力学，科学出版社，1990)

[A2] Fabrikant, V I, Applications of potential theory in mechanics, Kluwer, 1989

[A3] Muskhelishvili, N I, Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Noordhoff, 1953(译自俄文)

[A4] Kassir, M K and Sih, G, Three-dimensional crack problems, Noordhoff, 1975

[A5] Panasyuk, V V, Stadnik, M M and Silovanyuk, V P, Stress concentration in three-dimensional bodies with thin inclusions, Kiev, 1986(俄文)

[A6] Sih, G C and Liebowitz, H, Mathematical theories of brittle fracture, 2 Fracture, Acad Press, 1968

[A7] Sneddon, I N and Lowengrub, M, Crack problems in the classical theory of elasticity, Wiley, 1969

V I Fabrikant 撰 韩耀新、赵金平 译

标架 [frame, репер]

按一定次序取的从同一个共同原点出发的线性无关的向量集．任意三个不在同一平面内的非平行向量可以作为空间向量的一个标架，如果构成标架的向量彼此正交，那么就称这个标架是正交的（orthogonal)，如果这时这些向量的长度都等于一，那么就称这个标架是规范正交的（orthonormal)． БСЭ-3

【补注】 通常称标架为（空间中向量的）**基**（basis)．在这个意义下，"标架"这个词也常在物理中被采用（参考标架（frame of reference)，见**参考系**（reference system))．关于 Frenet 标架（Frénet frame)，见 **Frénet 三面体**（Frénet trihedron)．

n 维微分流形 M 的一个构架（framing)是它的切丛 TM 与平凡丛 $M\times\mathbf{R}^n$ 的一个向量丛同构（因而 M 可平行化)．利用 $\mathbf{R}^n$ 的标准基（e_1, , e_n)，这样一个同构定义一个标架场（frame field) 它对每一个 $x\in M$ 都在这一点的切空间指定一个标架或基．

一个流形 M 上的标架丛（frame bundle）是具有

结构群 $GL_n(\mathbf{R})$ 的**主纤维丛** (principal fibre bundle), 它在 $x \in M$ 上的纤维是在这一点的切空间 $T_x M$ 的所有基 (标架) 的全体

$\mathbf{R}^n$ 内一个 k 标架 (k-frame) 是 k 个线性无关的向量的有序集 令 $V_{n,k}$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 内一切 k 标架的集合 令 $G(k)$ 是 $GL_n(\mathbf{R})$ 的使一个取定的标架 v_0^k 不变的子群, 则 $V_{n,k} = GL_n(\mathbf{R})/G(k)$ 这样, $V_{n,k}$ 有一个实解析结构. 它称为 n 空间内 k 标架的 Stiefel 流形 (Stiefel manifold)

参考文献

[A1] Steenrod, N , The topology of fibre bundles Princeton Univ Press, 1951

郁炳山 译

Franklin 系 [Franklin system , Франклина система]

经典的连续函数的正交系之一. Franklin 系 $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ (见[1] 或 [2]) 是在区间 $[0, 1]$ 上对 **Faber-Schauder 系** (Faber-Schauder system) 施行 Schmidt 正交化过程 (见**正交化法** (orthogonalization method)) 得到的, 而 Faber-Schauder 系是用 $[0, 1]$ 上所有二进有理点的集合来构造的, 在这种情况下, Faber-Schauder 系与函数系 $\{1, \int_0^t \chi_n(x)\,dx\}$ 只差一个常数倍, 其中 $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 **Haar 系** (Haar system) 历史上, Franklin 系是具有正交性质的连续函数空间中的基 (basis) 的第一个例子 这个系也是所有 $L_p[0, 1]$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 空间中的基 (见 [3]) 设在 $[0, 1]$ 上上连续的函数 f 有连续模 $\omega(\delta, f)$, $S_n(t, f)$ 是 f 关于 Franklin 系的 Fourier 级数的 n 阶部分和, 则有

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t) - S_n(t, f)| \leqslant 8\omega\left(\frac{1}{n}, f\right), \quad n = 1, 2,$$

另外, f 的 Fourier-Franklin 系数 $a_n(f)$ 满足不等式

$$|a_n(f)| \leqslant \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{2^m}}\, \omega\left(\frac{1}{2^m}, f\right),$$

$$n = 2^m + k,\ k = 1, \quad , 2^m,\ m = 0, 1, \quad ,$$

且满足条件

a) $\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t) - S_n(t, f)| = O(n^{-\alpha})$, $n \to \infty$,

b) $a_n(f) = O(n^{-\alpha - 1/2})$, $n \to \infty$,

c) $\omega(\delta, f) = O(\delta^{\alpha})$, $\delta \to +0$,

这些条件对于 $0 < \alpha < 1$ 是等价的.

如果连续函数 f 满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, \omega\left(\frac{1}{n}, f\right) < \infty,$$

则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f) f_n(t)|$$

在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 而如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\, \omega\left(\frac{1}{n}, f\right) < \infty,$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)| < \infty$$

Franklin 系的所有这些性质都可以用不等式

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \sum_{k=1}^{2^n} |f_{2^n+k}(t)| \leqslant C\sqrt{2^n},$$

$$n = 0, 1, \quad , \quad C = 2^5\sqrt{3}$$

证得 Franklin 系是所有 $L_p[0, 1]$ 空间 $(1 < p < \infty)$ 中的无条件基, 并且也是所有自反的 Orlicz 空间中的无条件基 (见 [5]) 如果 f 属于 $L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, 则有不等式

$$A_p \|f\|_p \leqslant \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2(f) f_k^2(t) \right)^{1/2} \right\|_p \leqslant B_p \|f\|_p,$$

其中 $\|\cdot\|_p$ 表示 $L_p[0, 1]$ 中的模, 且常数 $A_p > 0$ 与 $B_p > 0$ 仅依赖于 p

Franklin 系在分析的各种问题中有着重要的应用. 特别地, 用这个函数系构造出空间 $C^1(I^2)$ (见 [4]) 及 $A(D)$ (见 [5]) 中的基 这里, $C^1(I^2)$ 是正方形 $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ 上所有连续可微函数 $f(x, y)$ 的空间, 其中 $f(x, y)$ 的模定义为

$$\|f\| = \max |f(x, y)| + \max \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + \max \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|,$$

而 $A(D)$, 即圆盘空间 (disc space), 是所有在复平面的开圆盘 $D = \{z \ |z| < 1\}$ 中解析且在闭圆盘 $\overline{D} = \{z \ |z| \leqslant 1\}$ 上连续的函数 $f(z)$ 的空间, $f(z)$ 的模定义为

$$\|f\| = \max_{|z| \leqslant 1} |f(z)|$$

关于在空间 $C^1(I^2)$ 及 $A(D)$ 中是否存在基的问题是由 S Banach 提出来的 ([6])

参考文献

[1] Franklin, P , A set of continuous orthogonal functions, *Math Ann* , **100** (1928), 522 – 529

[2] Kaczmarz, S and Steinhaus, H , Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea, reprint, 1951

[3] Ciesielski, Z , Properties of the orthogonal Franklin system, *Studia Math* , **23** (1963), 2, 141 – 157

[4] Ciesielski, Z , A construction of a basis in $C^{(1)}(I^2)$, *Studia Math* , **33** (1969), 2, 243 – 247

[5] Бочкарев, С В , 《Матем сб》, **95** (1974), 1, 3 – 18

[6] Banach, S S , Theorie des operations lineaires, Chel-

sea, reprint, 1955

Б И Голубов 撰 朱学贤 译 潘文杰 校

Fraser 图 [Fraser diagram, Фрезера диаграмма]

在点 $x=x_0+th$ 处获得以 x_0, $x_0\pm h$, $x_0\pm 2h$ · 为结点的插值公式的一种方法 该方法基于关系式

$$C_p^q f_r^q + C_{p+1}^{q+1} f_{r+1/2}^{q+1} = C_p^q f_{r+1}^q + C_p^{q+1} f_{r+1/2}^{q+1} =$$

$$= C_p^q f_{r+1/2}^q + \frac{1}{2}(C_{p+1}^{q+1} + C_p^{q+1}) f_{r+1/2}^{q+1},$$

其中 f_l^k 是函数 $f(x)$ 的有限差分，而 C_p^q 是二项式系数．从左侧列任意元素出发沿着 Fraser 图中菱形的边或水平对角线的每条路径都对应着某一个插值公式．可以按照如下法则得到它

f_{-4}		$C_{i+4}^2\}f_{-4}^2$		$C_{i+5}^4\}f_{-4}^4$	
	$\left.\begin{matrix}C_{i+4}^1\\C_{i+3}^1\end{matrix}\right\}f_{-7/2}^1$		$\left.\begin{matrix}C_{i+5}^3\\C_{i+4}^3\end{matrix}\right\}f_{-7/2}^3$		$\left.\begin{matrix}C_{i+6}^5\\C_{i+5}^5\end{matrix}\right\}f_{-7/2}^5$
f_{-3}		$\left.\begin{matrix}C_{i+4}^2\\C_{i+3}^2\end{matrix}\right\}f_{-3}^2$		$\left.\begin{matrix}C_{i+5}^4\\C_{i+4}^4\end{matrix}\right\}f_{-3}^4$	
	$\left.\begin{matrix}C_{i+3}^1\\C_{i+2}^1\end{matrix}\right\}f_{-5/2}^1$		$\left.\begin{matrix}C_{i+4}^3\\C_{i+3}^3\end{matrix}\right\}f_{-5/2}^3$		$\left.\begin{matrix}C_{i+5}^5\\C_{i+4}^5\end{matrix}\right\}f_{-5/2}^5$
f_{-2}		$\left.\begin{matrix}C_{i+3}^2\\C_{i+2}^2\end{matrix}\right\}f_{-2}^2$		$\left.\begin{matrix}C_{i+4}^4\\C_{i+3}^4\end{matrix}\right\}f_{-2}^4$	
	$\left.\begin{matrix}C_{i+2}^1\\C_{i+1}^1\end{matrix}\right\}f_{-3/2}^1$		$\left.\begin{matrix}C_{i+3}^3\\C_{i+2}^3\end{matrix}\right\}f_{-3/2}^3$		$\left.\begin{matrix}C_{i+4}^5\\C_{i+3}^5\end{matrix}\right\}f_{-3/2}^5$
f_{-1}		$\left.\begin{matrix}C_{i+2}^2\\C_{i+1}^2\end{matrix}\right\}f_{-1}^2$		$\left.\begin{matrix}C_{i+3}^4\\C_{i+2}^4\end{matrix}\right\}f_{-1}^4$	
	$\left.\begin{matrix}C_{i+1}^1\\C_{i}^1\end{matrix}\right\}f_{-1/2}^1$		$\left.\begin{matrix}C_{i+2}^3\\C_{i+1}^3\end{matrix}\right\}f_{-1/2}^3$		$\left.\begin{matrix}C_{i+3}^5\\C_{i+2}^5\end{matrix}\right\}f_{-1/2}^5$
f_0		$\left.\begin{matrix}C_{i+1}^2\\C_{i}^2\end{matrix}\right\}f_0^2$		$\left.\begin{matrix}C_{i+2}^4\\C_{i+1}^4\end{matrix}\right\}f_0^4$	
	$\left.\begin{matrix}C_{i}^1\\C_{i-1}^1\end{matrix}\right\}f_{1/2}^1$		$\left.\begin{matrix}C_{i+1}^3\\C_{i}^3\end{matrix}\right\}f_{1/2}^3$		$\left.\begin{matrix}C_{i+2}^5\\C_{i+1}^5\end{matrix}\right\}f_{1/2}^5$
f_1		$\left.\begin{matrix}C_{i}^2\\C_{i-1}^2\end{matrix}\right\}f_1^2$		$\left.\begin{matrix}C_{i+1}^4\\C_{i}^4\end{matrix}\right\}f_1^4$	
	$\left.\begin{matrix}C_{i-1}^1\\C_{i-2}^1\end{matrix}\right\}f_{3/2}^1$		$\left.\begin{matrix}C_{i}^3\\C_{i-1}^3\end{matrix}\right\}f_{3/2}^3$		$\left.\begin{matrix}C_{i+1}^5\\C_{i}^5\end{matrix}\right\}f_{3/2}^5$
f_2		$C_{i-1}^2\}f_2^2$		$C_i^4\}f_2^4$	

1) 当一列差分从左到右被穿过时，就加上一项．

2) 如果路径沿着菱形的一个边（从左）进入差分某一列，则所加的项等于路径和此列交点处的差分与所沿菱形边对应系数之积．

3) 如果路径沿着菱形水平对角线（从左）进入差分某一列，则所加项等于路径和此列交点处的差分与(从左边）到达同一个菱形顶点边上系数半和之积．

4) 如果路径（从左到右）沿着两个差分之间菱形水平对角线交于某一列差分，则加上一项，它等于那两个差分的半和与所沿对角线到达段上方（或下方）菱形边相应系数之积

5) 路径从右到左的每部分给出的项和从左到右给出的项相同，但符号相反

6) 可以把表中函数值那一列当成零阶差分，和其他列的差分按同样规则处理．

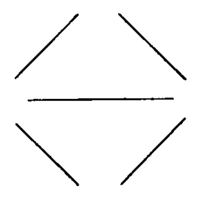
参考文献

[1] Березин, И С, Жидков, Н П, Методы вычислений, 3 изд т 1, М, 1966 (英译本 Berezin, I S and Zhidkov, N P, Computing methods, 1, Pergamon, 1973)

[2] Korn, G A and Korn, T, M, Mathematical handbook for scientists and engineers, McGraw-Hill, 1968

М К Самарин 撰

【补注】 “水平对角线”没画在前面的图里．“水平对角线”是块（菱形）中的水平直线



参考文献

[A1] Steffensen, J F, Interpolation, Chelsea, reprint, 1950

蔡大用 译

Frattini 子群 [Frattini subgroup, Фраттини подгруппа]

一个群 G 的**特征子群** (characteristic subgroup) $\Phi(G)$，定义为 G 的一切**极大子群**（maximal subgroup）的交，如果 G 中有极大子群，否则 G 就是它自己的 Frattini 子群．这是由 G Frattini 引入的 ([1])．Frattini 子群恰由 G 中这样的元素所组成，这些元素可以从这个群的包含它们的任一生成元系中去掉，即

$$\Phi(G)=\{x \quad x\in G, \{x, M\}=G\Rightarrow\{M\}=G\}$$

一个有限群是幂零的，当且仅当它的导出群包含在它的 Frattini 子群内 对于每个有限群和每个多循环群 G 来说，群 $\Phi(G)$ 是幂零的．

参考文献

[1] Frattini, G, Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni, *Atti Accad Lincei*, *Rend* (IV), **1** (1885), 281-285

[2] Курош, А Г, Теория групп, 2 изд, М, 1967 (中译本 А Г 库洛什，群论，高等教育出版社，上册，1987，下册，1982)

Н Н Вильямс 撰 郝钢新 译

Fréchet 导数 [**Fréchet derivative**, **Фреше производная**], 强导数 (strong derivative)

泛函或映射的一种最广泛的导数（连同 **Gâteaux 导数**（Gâteaux derivative），或称弱导数（weak derivative））. 设 X, Y 均为赋范空间, $x_0 \in X$, 映射 $f: X \to Y$ 在点 x_0 的 Fréchet 导数为线性连续算子 $\Lambda: X \to Y$, 满足条件

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\Lambda h+\varepsilon(h),$$

其中

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\varepsilon(h)\|}{\|h\|}=0$$

满足这些条件的算子 Λ 是唯一的（如果存在）并记为 $f'(x_0)$, 线性映射 $h \to f'(x_0)h$ 称为 **Fréchet 微分**（Fréchet differential）. 若 f 在 x_0 有 Fréchet 导数, 则它称为 Fréchet 可微的（Frechet differentiable）. 对于 Fréchet 导数, 微分学中最重要的两个定理——复合函数微分法定理与中值定理成立. 若 f 在一点 x_0 的一邻域为连续 Frechet 可微, 并且若 Fréchet 导数 $f'(x_0)$ 为 Banach 空间 X 与 Y 之间的同胚, 则逆映射定理成立. 亦见**映射的微分法**（differentiation of a mapping）.

B. M. Тихомиров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M. S., Nonlinearity and functional analysis, Acad. Press, 1977

郑维行 译 沈永欢 校

Fréchet 微分 [**Fréchet differential**, **Фреше дифференциал**]

设 X, Y 为赋范空间, 映射 $f: X\to Y$ 在一点 x_0 的 Fréchet 微分是指 X 到 Y 中的线性连续映射 $h\to D(x_0,h)$, 具有性质

$$f(x_0+h)=f(x_0)+D(x_0,h)+\varepsilon(h), \qquad (1)$$

其中

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\varepsilon(h)\|}{\|h\|}=0$$

若映射 f 在一点 x_0 有展式 (1), 则说它是 Fréchet 可微的 (Frechet differentiable), 并称算子

$$f'(x_0)h=D(x_0,h),\ f'(x_0)\in L(X,Y)$$

为映射 f 的 **Fréchet 导数** (Fréchet derivative).

对于有限个变元的函数 f, Fréchet 微分取线性函数

$$h\to\sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i=l_{x_0}h$$

的形式并有性质

$$f(x_0+h)=f(x_0)+l_{x_0}(h)+o(|h|), \qquad (2)$$

其中 $|h|=\{\sum_{i=1}^{n}h_i^2\}^{1/2}$ 或 $\mathbf{R}^n$ 中任何其他等价范数. 这里 $\alpha_i=\partial f/\partial x_i|_{x_0}$ 为 f 在 x_0 的偏导数.

明确地用显式表达如今认为很平常的定义 (2), 首次出现在 K. Weierstrass (1861, 见[1]) 的讲稿中. 19 世纪末此定义渐渐进入教科书中 (见[2], [3]等). 可是当 M. Frechet 开始发展无穷维分析时, 现时很经典的微分定义却是那样的不平常, 以致 Fréchet 自己认为他的在无穷维空间微分的定义即使在有限维情形也是一个新概念. 如今这一名词仅用于无穷维映射情形. 见 **Gâteaux 微分**（Gâteaux differential）, **微分**（differential）.

参考文献

[1] Dugac, P., Eléments d'analyse de Karl Weierstrass, Paris, 1972

[2] Stolz, O., Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, 1, Teubner, 1893

[3] Young, W., The fundamental theorems of the differential calculus, Cambridge Univ. Press, 1910

[4] Fréchet, M., Sur la notion de differentielle, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **152** (1911), 845–847, 1050–1051

[5] Frechet, M., Sur la notion de differentielle totale, *Nouvelles Ann. Math. Sér.* (4), **12** (1912), 385–403, 433–449

[6] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981 (中译本: А. Н. 柯尔莫果洛夫, С. В. 佛明, 函数论与泛函分析初步, 高等教育出版社, 1992)

[7] Алексеев, В. М., Тихомиров, В. М., Фомин, С. В., Оптимальное управление, М., 1979 (英译本: Alekseev, V. M., Tikhomirov, V. M., and Fomin, S. V., Optimal control, Consultants bureau, 1987)

B. M. Тихомиров 撰 郑世骏 译

Fréchet 空间 [**Fréchet space**, **Фреше пространство**]

完全的可度量局部凸拓扑向量空间. Banach 空间提供了 Frechet 空间的例子, 但是有一些重要的函数空间是 Fréchet 空间而不是 Banach 空间. 其中有: Schwartz 空间（Schwartz space）$S(\mathbf{R}^n)$, 它由 $\mathbf{R}^n$ 上那些无穷次可微复值函数组成, 这些函数以及它们的各阶导数在无穷远处递降快于任何多项式, 并由半范数组

$$p_{\alpha\beta}(x(\cdot))=$$

$$=\sup_{t\in\mathbf{R}^n}\left|t_1^{\beta_1}\cdots t_n^{\beta_n}\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}x(t_1,\cdots,t_n)}{\partial t_1^{\alpha_1}\cdots\partial t_n^{\alpha_n}}\right|$$

给出拓扑, 其中 α 和 β 是非负整向量, 复平面的某个开子集 D 上的所有全纯函数的空间 $H(D)$, 其拓扑为在 D 的紧子集上一致收敛, 等等.

Fréchet 空间的闭子空间仍是 Fréchet 空间, Fréchet 空间关于闭子空间的商空间也是 Fréchet 空间, Fréchet 空间是**桶型空间**（barrelled space）, 因而对从 Fréchet 空间到局部凸空间的映射, **Banach-Steinhaus 定理**（Ban-

ach-Steinhaus theorem)成立．如果一个可分局部凸空间是某个 Fréchet 空间在开映射下的象，那么它本身是 Fréchet 空间．从 Fréchet 空间到 Fréchet 空间上的一一连续线性映射是同构(一个与 Banach 定理类似的结论)．

命名 Fréchet 空间是为了纪念 M Fréchet

参考文献

[1] Bourbaki, N, Topological vector spaces, Springer, 1987(译自法文)

[2] Robertson, A and Robertson, W, Topological vector spaces, Cambridge Univ Press, 1973

В М Тихомиров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Schaefer, H H, Topological vector spaces, Macmillan, 1966

[A2] Kelley, J L and Namioka, I, Linear topological spaces, Springer, 1963

[A3] Kothe, G, Topological vector spaces, 1, Springer, 1969

余庆余 译

Fréchet 曲面[Fréchet surface, Фреше поверхность]

Euclid 空间中曲面概念在任意度量空间 A 情形下的推广 设 M^2 是一个紧二维流形(或者是闭的，或者具有边界)．M^2 的点起着参数的作用．连续映射 $f\ M^2\to A$ 称为参数化曲面(parametrized surfaces)．两个参数化曲面被视为等价的，如果

$$\rho(f_1,f_2)\equiv\inf_{\sigma}\max_{x\in M^2}d(f_1(x),f_2(\sigma(x)))=0,$$

这里 d 是 A 中的距离，$\sigma\ M^2\to M^2$ 为 M^2 到其自身上的所有可能的同胚．参数曲面的等价类称为 Fréchet 曲面(见[1])，此类中每一参数化曲面称为 Fréchet 曲面的一个参数化．参数化曲面的许多性质乃是 Fréchet 曲面的性质，并非是其具体参数化的性质．对两个 Fréchet 曲面而言，$\rho(f_1,f_2)$ 的值与参数化 f_1 与 f_2 的选取无关，称它为两 Fréchet 曲面之间的 Fréchet 距离(Fréchet distance) 如果把 Fréchet 曲面的定义中参数区域 M^2 改成圆周或者闭区间，就得到了 Fréchet 曲线(Fréchet curve)的定义(见[2])

参考文献

[1] Fréchet, M, *Ann Soc Polon Math*, **3** (1924), 4-19

[2] Frechet, M, Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rend Circolo Mat Palermo*, **74** (1906), 1-74

В А Залгаллер 撰 沈纯理 译

Fréchet 变差[Fréchet variation, Фреше вариация]

多元函数的一个数量特征，它可以看成是一元函数的变差(variation of a function)的多维类似 假设实值函数 $f(x)=f(x_1,\cdot\ ,x_n)$ 定义在 n 维平行多面体 $D_n=[a_1,b_1]\times\ \times[a_n,b_n]$ 上 今引入记号

$$\Delta_{h_k}(f,x)=f(x_1,\ ,x_k+h_k,\ ,x_n)-f(x_1,\ ,x_k,\ ,x_n),\quad k=1,\ ,n,$$

$$\Delta_{h_1\ h_k}(f,x)=\Delta_{h_k}(\Delta_{h_1\ h_{k-1}},x),\ k=2,\ ,n$$

设 Π 表示以超平面

$$x_s=x_s^{(r_s)}\ (x_s^{(r_s)}<x_s^{(r_s+1)},\quad x_s^{(r_s+1)}-x_s^{(r_s)}=h_s^{(r_s)},\quad x_s^{(0)}=a_s,$$

$$x_s^{(l_s)}=b_s,\quad r_s=0,\ \ ,l_s,\ s=1,\cdot\ ,n)$$

将 D_n 分成 n 维小平行多面体的任意一种分划，并设 $\varepsilon_1^{(r_1)},\ ,\varepsilon_n^{(r_n)}$ 依任意方式取值 ±1 这时，Fréchet 变差的定义如下

$$F(f,D_n)=\sup_{\varepsilon}\sup_{\Pi}\left|\sum_{r_1=0}^{l_1-1}\cdot\sum_{r_n=0}^{l_n-1}\varepsilon_n^{(r_1)}\quad\varepsilon_n^{(r_n)}\times\right.$$

$$\left.\times\Delta_{h_1^{(r_1)}\ h_n^{(r_n)}}(f,x_1^{(r_1)},\cdot\ ,x_n^{(r_n)})\right|$$

若 $F(f,D_n)<\infty$，则称 f 在 D_n 上有有界(有限)Fréchet 变差(bounded (finite) Fréchet variation)并记一切这样函数的类为 $F(D_n)$ 对于 $n=2$，这个类是 M Fréchet([1])研究定义在形如 $\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$ 的函数空间上的双线性连续泛函 $U(\varphi_1,\varphi_2)$ 的一般形式时引进的，其中 $\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$ 是正方形 $Q_2=[a,b]\times[a,b]$ 上的连续函数 他证明，每个这样的泛函可表为

$$U(\varphi_1,\varphi_2)=\int_a^b\int_a^b\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)d_{x_1}d_{x_2}u(x_1,x_2),$$

其中 $u(x_1,x_2)\in F(Q_2)$，$u(a,x_2)\equiv u(x_1,b)\equiv0$

关于 Fourier 级数收敛性的经典判别法的许多类似对类 $F(Q_n)$ 中 2π 周期函数是成立的($Q_n=[0,2\pi]\times\times[0,2\pi]$，见[2]) 例如，若 $f\in F(Q_n)$，$n=2,3,\ $，则 f 的 Fourier 级数的矩形部分和在每一点 $x=(x_1,\ ,x_n)$ 收敛于

$$\frac{1}{2^n}\sum f(x_1\pm0,\ \ ,x_n\pm0),$$

其中求和号取遍一切符号为 $\pm$ 的 2^n 个组合．这里，若函数连续，收敛性是一致的(Jordan 判别法的一个类似)．

参考文献

[1] Fréchet, M, Sur les fonctionelles bilineaires, *Trans Amer Math Soc*, **16**(1915), 3, 215-234

[2] Morse, M and Transue, W, The Frechet variation and the convergence of multiple Fourier series, *Proc Nat Acad Sci USA*, **35**(1949), 7, 395-399

Б И Голубов 撰 郑维行 译

Fredholm 抉择定理[Fredholm alternative, Фредгольма

альтернатива]

一个来自 **Fredholm 定理** (Fredholm theorems) 的二择一的陈述．对第二类线性 Fredholm 积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=f(x),\quad x\in[a,b], \tag{1}$$

Fredholm 抉择定理陈述为 或者方程 (1) 和它的共轭方程

$$\psi(x)-\overline{\lambda}\int_a^b \overline{K(s,x)}\,\psi(s)\,ds=g(x),\quad x\in[a,b], \tag{2}$$

对任意给定的函数 f 和 g 有唯一的解 φ，ψ，或者对应的齐次方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=0, \tag{1'}$$

$$\psi(x)-\overline{\lambda}\int_a^b \overline{K(s,x)}\,\psi(s)ds=0 \tag{2'}$$

有非零解，其中线性独立的解的个数是有限的，且对两方程个数相同．

在第二种情形方程 (1) 有解，当且仅当

$$\int_a^b f(x)\overline{\psi_k(x)}\,dx=0,\quad k=1,\quad ,n,$$

其中 ψ_1， ，ψ_n 是 (2′) 的线性独立解的一个完全组 这里 (1) 的通解具有形式

$$\varphi(x)=\varphi_*(x)+\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x),$$

其中 φ_* 是 (1) 的某一个解，φ_1， ，φ_n 是 (1′) 的线性独立解的一个完全组，而 c_k 是任意常数 类似的陈述对方程 (2) 也成立

令 T 是一个映 Banach 空间 E 到自身的连续线性算子 而 E^* 和 T^* 表示对应的对偶空间和对偶算子 考虑方程

$$T(x)=y,\qquad x,y\in E, \tag{3}$$
$$T^*(g)=f,\qquad g,f\in E^*, \tag{4}$$
$$T(x)=0,\qquad x\in E, \tag{3'}$$
$$T^*(g)=0,\qquad g\in E^* \tag{4'}$$

对 T 的 Fredholm 抉择定理可陈述为 1)或者对任意的右端，方程 (3)，(4) 有唯一的解，或者 2)齐次方程 (3′) 和 (4′) 分别有相同个数的线性独立解 x_1， ，x_n 和 g_1， ，g_n，这时方程 (3) 或 (4) 有解的充要条件分别是 $g_k(y)=0$，$k=1$， ，n 和 $f(x_k)=0$，$k=1$， ，n，(3) 的通解为

$$x=x^*+\sum_{k=1}^n c_kx_k,$$

(4) 的通解为

$$g=g^*+\sum_{k=1}^n c_kg_k,$$

其中 $x^*(g^*)$ 是 (3) ((4)) 的某一解而 c_1， ，c_n 是任意常数

以下两条件中的任一个都是 Fredholm 抉择定理对算子 T 成立的充要条件

1) T 可表为

$$T=W+V,$$

其中 W 是一个具有双边连续逆的算子而 V 是一个紧算子．

2) T 可表为

$$T=W_1+V_1$$

其中 W_1 是一个具有双边连续逆的算子而 V_1 是一个有限维算子

参考文献

[1] Смирнов, В И , Курс высшей математики, т 4, ч 1, 6 изд , М , 1974(中译本 В И 斯米尔诺夫，高等数学教程，第四卷，人民教育出版社，1962)

[2] Владимиров, В С , Уравнения математической физики, 4 изд , М , 1981 (英译本 Wladimirow, W S [V S Vladimirov] and Vladimirov, V S , Equations of mathematical physics, Mir, 1984)

[3] Канторович, Л В , Акилов, Г П , Функциональный анализ, 2 изд , М , 1977 (中译本 Л В Канторович, Г П Акилов，泛函分析，上、下册，高等教育出版社，1984)

Б В Хведелидзе 撰

【补注】 Fredholm 抉择定理的简洁形式如下：考虑有连续核 K 的方程 (1) 和 (1′) 那么或者对任意的右端 f，方程 (1) 有一个连续解 φ，或者齐次方程 (1′) 有非平凡解 用抽象的形式，抉择定理可陈述如下 对一个作用在 **Banach 空间** (Banach space) 上的指标为零 (见**算子的指标** (index of an operator)) 的 **Fredholm 算子** (Fredholm operator) T，以下陈述是正确的 或者 T 是可逆的或者 T 有一个非平凡的核 (见**线性算子的核** (kernel of a linear operator)，**积分算子的核** (kernel of an integral operator))

参考文献

[A1] Gohberg, I [I Gokhberg] and Goldberg, S , Basic operator theory, Birkhauser, 1977

[A2] Taylor, A E and Lay, D C , Introduction to functional analysis, Wiley, 1980

陈一元 译 郑维行 校

Fredholm 方程 [**Fredholm equation**, **Фредгольма уравнение**]

一个形如

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=f(x),\quad x\in[a,b]$$

的积分方程——第一类 Fredholm 方程（Fredholm equation of the first kind），或一个形如

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds=f(x),\quad x\in[a,b] \quad (1)$$

的积分方程——第二类 Fredholm 方程（Fredholm equation of the second kind），如果积分算子

$$K\varphi(x)=\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds,\quad x\in[a,b], \quad (2)$$

在某个函数空间 E 中是全连续的 这里假设自由项 f 和函数 φ 都属于 E．Fredholm 方程的一个重要例子是其核 K 满足条件

$$B^2=\int_a^b\int_a^b |K(x,s)|^2\,dxds<\infty, \quad (3)$$

且 $E=L_2([a,b])$ 的情形．

数值参数 λ 和函数 f，φ 及 K 可取实值也可取复值．对第一类 Fredholm 方程见**具有对称核的积分方程**（integral equation with symmetric kernel），**Fredholm 方程，数值方法**（Fredholm equation, numerical methods）和**不适定问题**（ill-posed problems） 下面仅考虑第二类 Fredholm 方程．

解第二类 Fredholm 方程的逐步逼近法（method of successive approximation） 这是解方程（1）的第一种方法 为了叙述它，将（1）写为下列形式

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda K\varphi(x),\quad x\in[a,b] \quad (4)$$

假设 K 满足条件（3），且 $E=L_2([a,b])$ 令所求解的初始近似为 $\varphi_0=f$，如果第（$n-1$）次近似 φ_{n-1} 已被构造，那么

$$\varphi_n=f+\lambda K\varphi_{n-1},$$

这时

$$\varphi_n=\sum_{m=0}^{n}\lambda^m K_m f, \quad (5)$$

其中 K_m 表示 K 的第 m 次叠核．函数（5）是级数

$$\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m K_m f \quad (6)$$

的部分和 （6）称为 Neumann 级数（Neumann series）．如果 $|\lambda|<B^{-1}$，那么（6）依二次平均收敛于（1）的一个解，且这个解是唯一的（例如见[5]） 如果存在一个正常数 A，使得

$$\int_a^b |K(x,s)|^2 ds\leqslant A,\quad x\in[a,b],$$

那么（6）一致且绝对收敛 一般地说，如果 $|\lambda|\geqslant B^{-1}$，那么（6）是发散的 当 K 有一个本征值时确实如此 但是如果 K 没有本征值（例如在 **Volterra 核**（Volterra kernel）的情形），那么（6）对每个 λ 的值收敛．

解 Fredholm 第二类方程的 Fredholm 法（Fredholm method） 一般地说，仅对小的 λ 值，逐次逼近法可用来构造（1）的解 一个可对任意的 λ 值求解（1）的方法，首先由 E I Fredholm (1903) 提出．下面假设 K 在正方形 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续且自由项和所求解在 $[a,b]$ 上连续，给出这个方法的一个简洁描述．

把区间 $[a,b]$ 划分为长度为 $h=(b-a)/n$ 的 n 等份．如果（1）中的积分用 Riemann 和代替，那么方程（1）应由近似

$$\varphi(x)-\lambda h\sum_{j=1}^{n}K(x,s_j)\varphi(s_j)=f(x),\quad x\in[a,b] \quad (7)$$

代替．在（7）中逐次取 $x=s_1,\ \cdot,s_n$ 决定未知函数 φ 在点 s_j 的值，于是获得线性代数方程组

$$\varphi_i-\lambda h\sum_{j=0}^{n}K_{ij}\varphi_j=f_i,\quad i=1,\quad ,n, \quad (8)$$

其中 $f(s_i)=f_i$，$\varphi(s_i)=\varphi_i$，$K(s_i,\ s_j)=K_{ij}$．方程组（8）是否有一解要由行列式

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda hK_{11}-\lambda hK_{12} & -\lambda hK_{1n}\\ \\ -\lambda hK_{n1}-\lambda hK_{n2}\cdot & 1-\lambda hK_{nn}\end{vmatrix}$$

的值决定．这行列式是 λ 的多项式．如果 λ 不是这多项式的根，那么（8）有一解 解这方程组再把所得的值 $\varphi_j=\varphi(s_j)$ 代入（7），获得（1）的一个近似解

$$\varphi(x)\approx f(x)+\lambda\frac{Q(x,s_1,\quad,s_n,\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad (9)$$

其中 Q 和 Δ 是 λ 的多项式 上述的方法是构造 Fredholm 方程（1）的一个近似解的可能的方法之一（见[6]）

人们希望当 $n\to\infty$ 使 Riemann 和（7）趋于（1）中的积分，而（9）的右端的极限成为（1）的一个准确解 在两个类似的表达式中利用形式极限转移，Fredholm 建立了表示（1）的解的一个公式

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,s,\lambda)f(s)ds, \quad (10)$$

其中

$$R(x,s,\lambda)=\frac{D(x,s,\lambda)}{D(\lambda)}, \quad (11)$$

$$D(\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}A_m\lambda^m, \tag{12}$$

$$D(x,s,\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}B_m(x,s)\lambda^m, \tag{13}$$

$$A_m=\int_a^b\ \int_a^b K\begin{bmatrix}s_1, & ,s_m\\ s_1, & ,s_m\end{bmatrix}ds_1\quad ds_m, \tag{14}$$

$$B_m(x,s)=\int_a^b\ \int_a^b K\begin{bmatrix}x,s_1, & ,s_m\\ s,s_1, & ,s_m\end{bmatrix}ds_1\quad ds_m, \tag{15}$$

$$K\begin{bmatrix}x_1, & ,x_n\\ s_1, & ,s_n\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}K(x_1,s_1) & K(x_1,s_n)\\ \\ K(x_n,s_1) & K(x_n,s_n)\end{vmatrix}.$$

在计算 A_m 和 $B_m(x,s)$ 时，可用以下的递推关系代替公式 (14) 和 (15)

$$A_0=1,\ B_0(x,s)=K(x,s),\quad A_m=\int_a^b B_{m-1}(s,s)ds,$$

$$B_m(x,s)=K(x,s)A_m-m\int_a^b K(x,t)B_{m-1}(t,s)dt,$$
$$m=1,2,\quad .$$

级数 (12) 和 (13) 称为 Fredholm 级数 (Fredholm series) 函数 $D(\lambda)$ 称为 K 的 Fredholm 行列式 (Fredholm determinant)，$D(x,s,\lambda)$ 称为 $D(\lambda)$ 的第一 Fredholm 子式 (Fredholm minor)，函数 (11) 称为 K 的预解式 (resolvent) (或解核 (solving kernel) 或互反核 (reciprocal kernel))．

上述导致 (10) 的极限转移的证明是由 D Hilbert 完成的 (见**积分方程** (integral equation)) Fredholm 构造了级数 (12) 和 (13) 后，他直接且严格地证明了它们对 λ 的所有有限值收敛，而且 (13) 对 x 和 s 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上一致收敛 $D(\lambda)$ 和 $D(x,s,\lambda)$ 之间关系的建立能使他证明下面的命题 如果 $D(\lambda)\neq 0$，那么方程 (1) 有且仅有一解，它由公式 (10) 给出

从这个命题可知，如果 λ 的一个值不是 Fredholm 行列式的根，那么它是对应于 (1) 的齐次方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=0,\ x\in[a,b] \tag{1_0}$$

的一个正则值，即这时 (1_0) 仅有零解．如果 λ 是方程 $D(\lambda)=0$ 的一个根，那么 λ 是方程 (1_0) 的预解式 (11) 的一个极点且是方程 (1_0) 的一个本征值．为了用 Fredholm 法去构造对应于这个本征值的本征函数，引入 $D(\lambda)$ 的第 p 个子式的概念 令

$$B_0\begin{bmatrix}x_1, & ,x_p\\ s_1, & ,s_p\end{bmatrix}=K\begin{bmatrix}x_1, & ,x_p\\ s_1, & ,s_p\end{bmatrix},$$

$$B_m\begin{bmatrix}x_1, & ,x_p\\ s_1, & ,s_p\end{bmatrix}=\int_a^b\ \int_a^b K\begin{bmatrix}x_1, & ,x_p,t_1, & ,t_m\\ s_1, & ,s_p,t_1, & ,t_m\end{bmatrix}dt_1\quad dt_m$$

那么 $D(\lambda)$ 的第 p 个子式 (minor) 是级数

$$D\begin{bmatrix}x_1, & ,x_p\\ s_1, & ,s_p\end{bmatrix},\ \lambda\Bigg]=$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}B_m\begin{bmatrix}x_1, & ,x_p\\ s_1, & ,s_p\end{bmatrix}\lambda^{m+p}, \tag{16}$$

当 $p=1$ 时它等于 $D(x,s,\lambda)$．级数 (16) 对 λ 的所有有限值是绝对收敛的，而对满足条件 $a\leqslant x_k\leqslant b$，$a\leqslant s_k\leqslant b$，$k=1,\ ,p$ 的 $x_1,\ ,x_p,s_1,\ ,s_p$ 是一致收敛的．现在假设 λ_0 是 K 的一个本征值，由于 $D(0)=1$，有 $D(\lambda_0)=0$，$\lambda_0\neq 0$ 用 r 表示方程 $D(\lambda)=0$ 的根 λ_0 的重数．存在一个自然数 $q\leqslant r$ 使 $D(\lambda_0)$ 的所有阶数比 q 小的子式恒等于零，而 q 阶子式不等于零．存在某个数集 $x_1',\ ,x_q',s_1',\ ,s_q'$ 使

$$D\begin{bmatrix}x_1', & ,x_q'\\ s_1', & ,s_q'\end{bmatrix},\ \lambda_0\Bigg]\neq 0.$$

数 q 称为本征值 λ_0 的秩 (rank) (或重数 (multiplicity))．函数

$$\varphi_k(x)=\frac{D\begin{bmatrix}x_1', & ,x_{k-1}',x,x_{k+1}', & ,x_q'\\ s_1', & ,s_{k-1}',s_k',s_{k+1}', & ,s_q'\end{bmatrix},\ \lambda_0\Bigg]}{D\begin{bmatrix}x_1', & ,x_q'\\ s_1', & ,s_q'\end{bmatrix},\ \lambda_0\Bigg]} \tag{17}$$

是 (1_0) 的线性独立解

假设 λ_0 有本征函数 $\varphi_1,\ ,\varphi_q$ 如果属于这个本征值的本征函数都是 $\varphi_1,\ ,\varphi_q$ 的线性组合，那么这些函数称为 (1_0) (或核 K) 的一个完全本征函数系 (complete system of eigen functions)

如果 λ_0 是齐次方程 (1_0) 的一个 q 重本征值，那么它也是 (1_0) 的转置方程

$$\psi(x)-\lambda_0\int_a^b K(s,x)\psi(s)ds=0 \tag{$1_0'$}$$

的一个 q 重本征值，这里 (1_0) 的一个完全本征函数系由公式 (17) 定义，而 ($1_0'$) 的完全本征函数系可对转置核 $K(s,x)$ 由类似的公式构造出来．

如果 λ_0 是 K 的一个 q 重本征值，那么方程 (1) 有解的充要条件是

$$\int_a^b f(t)\psi_k(t)dt=0,\quad k=1,\ ,q, \tag{18}$$

其中 $\psi_1,\ ,\psi_q$ 是 ($1_0'$) 的一个完全本征函数系 如果条

件 (18) 满足，那么 (1) 的所有解由公式

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^b H(x,s)f(s)ds+\sum_{k=1}^{q}c_k\varphi_k(x)$$

给出，其中 $c_1, \quad, c_q$ 是任意常数，$\{\varphi_k\}$ 是 (1_0) 的一个完全本征函数系，而 H 由方程

$$H(x,s)=\frac{D\begin{bmatrix}x, x_1', & , x_q' \\ s, s_1', & , s_q'\end{bmatrix}, \lambda_0}{D\begin{bmatrix}x_1', & , x_q' \\ s_1', & , s_q'\end{bmatrix}, \lambda_0}$$

定义．一个连续核 K 的所有本征值最多组成一个可数集，而这集的可能的极限点为 $\lambda=0$

以上对方程 (1) 陈述的命题称为 **Fredholm 定理** (Fredholm theorems)．Fredholm 推广这些定理到由这样的方程构成的方程组和一类有弱奇异性核的情形 (见**积分算子** (integral operator))

Fredholm 抉择定理 (Fredholm alternative) 就是由这些 Fredholm 定理组成的

在 Fredholm 定理中，代替转置 $(1_0')$，常考虑 (1) 的伴随方程

$$\psi(x)-\overline{\lambda}_0\int_a^b\overline{K(s,x)}\,\psi(s)ds=0\,.$$

这时条件 (18) 由条件

$$\int_a^b f(t)\overline{\psi_k(t)}dt=0,\ k=1, \quad ,q$$

所替代．

以上描述的 Fredholm 法由 T Carleman [9] (亦见 [7], [11]) 推广到 (1) 中的 f, φ 和 K 是平方可积的情形 在这些假设下，以上陈述的 Fredholm 的结果仍成立

除了解 Fredholm 方程的逐步逼近法和 Fredholm 方法外，E Schmidt 受 Hilbert 研究的影响，发展了一个不依赖于 Fredholm 理论的，建立在有实对称核的方程 (1) 的理论结构上的方法

Hilbert 和 Schmidt 的研究为 Fredholm 理论的抽象化奠定了基础．Hilbert 注意到 Fredholm 理论是建立在具有核 K 的积分变换的所谓全连续性 (紧性) 性质上的 Hilbert 对双线性型阐述了这性质．F Riesz (见 [8]) 证明了，如果 (1) 中的积分算子用任意的作用在一个完全函数空间上的全连续算子替代，那么 Fredholm 理论的主要结论还是有效的 J Schauder 发展了 Riesz 的研究 (见 [10])，他借助于 Banach 空间中伴随算子概念的引入．这概念使 Banach 空间中 Fredholm 定理的类似结论的抽象完美表达成为可能．这些定理常称为 Riesz-Schauder 定理 (Riesz-Schauder theorems) 下面假设算子 V 是作用在 Banach 空间 E 上的，E^* 表示对偶于 E 的 Banach 空间，而 V^* 是伴随算子．

定理 1 齐次方程

$$\varphi-\lambda V\varphi=0,\ \varphi\in E, \tag{19}$$

及其伴随方程

$$\psi-\lambda V^*\psi=0,\ \psi\in E^* \tag{20}$$

仅有零解或相同个数线性独立解 $\varphi_1, \quad ,\varphi_q,\psi_1, \quad ,\psi_q$

定理 2 非齐次方程

$$\varphi-\lambda V\varphi=f,\ f,\ \varphi\in E, \tag{21}$$

有解存在的充要条件是 $\varphi_k(f)=0$, $k=1, \quad ,q$，如果这些条件满足且 φ_0 是 (21) 的任一解，那么它的通解有形式

$$\varphi_0+\sum_{k=1}^{q}c_k\varphi_k,$$

其中 c_k 是任意常数

定理 3 对每个 $r\neq0$，圆盘 $|\lambda|\leqslant r$ 最多包含 V 的有限多个本征值，即，使方程 $\varphi-\lambda V\varphi=0$ 有非零解的 λ 值

这些定理可用来证明方程 (1) 的 Fredholm 定理，其中积分算子 (2) 可属于种种具体的类，例如问题中给定的和要求的函数是平方可积的．

代替区间 $[a,b]$，可取任意维空间中有界或无界可测集 D 作为积分区域 代替通常的积分，可取相对于非负测度的 Lebesque-Stieltjes 积分

参考文献

[1] Смирнов, В И, Курс высшей математики, 6 изд, т 4, ч 1, М, 1974 (中译本 В И 斯米尔诺夫，高等数学教程，第四卷第一分册，人民教育出版社，1962)

[2] Goursat, E, Cours d'analyse mathématique, 3, Gauthier-Villars, 1923, p Chapt 2

[3] Петровский, И Г, Лекции по теории интегральных уравнений, 3 изд М, 1965 (中译本 И Г 彼得罗夫斯基，积分方程论讲义，高等教育出版社，1954)

[4] Lovitt W V, Linear integral equations, Dover, reprint, 1950

[5] Михлин, С Г, Лекции по линейным интегральным уравнениям, М, 1959 (英译本 Mikhlin, S G, Linear integral equations, Hindushtan Publ Comp Delhi, 1960)

[6] Канторович, Л В, Крылов, В И, Приближенные методы высшего анализа, 5 изд, М -Л, 1962 (英译本 Kantorovich, L V and Krylov, V I, Approximate methods of higher analysis, Noordhoff, 1958)

[7] Михлин, С Г, 《Докл АН СССР》, **42** (1944), 9, 387 − 390

[8] Riesz, F, Ueber lineare Funktionalgleichungen, *Acta Math.*, **41** (1918), 71 − 98.

[9] Carleman, T, Zur Theorie der linearen Integralgleichungen, *Math Z*, **9**(1921), 196－217

[10] Schauder, J, *Studia Math*, **2**(1930), 183－196

[11] Smithies, F, The Fredholm theory of integral equations, *Duke Math J*, **8**(1941), 107－130

Б В Хведелидзе 撰

【补注】 亦见 **Noether 积分方程** (Noether integral equation)

关于术语转置或伴随方程见 **Fredholm 定理** (Fredholm theorems) **完全连续算子** (completely-continuous operator) 现时常称为**紧算子** (compact operator)

"第 m 次叠核" 见**叠核** (iterated kernel)

如果 $|\lambda|<B^{-1}$，那么 (6) 在有界集上对 f 一致收敛 对 $|\lambda|\geqslant B^{-1}$，在[A4]中有一个关于 (6) 的点态收敛的结果 对这方面的研究的参考文献还有[A1],[A2]和[A5].

第一类 Fredholm 方程 (Fredholm equation of the first kind) 这样的 Fredholm 方程

$$(K\varphi)(x)=\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=f(x), x\in[a,b], \quad (A1)$$

是不适定的(见**不适定问题** (ill-posed problems)) 解的概念通常用的是由

$$\|K^+\varphi-f\|\to\inf, \ \|\varphi\|\to\inf, \quad (A2)$$

定义的最佳近似解 (best approximate solution) $K^+\varphi$，其中 $\|\cdot\|$ 表示 L_2 范数，K^+ 是 "Moore-Penrose 广义逆算子" (Moore-Penrose generalized inverse) (见[A3]) 定义域 $D(K^+)$ 等于 $R(K)\oplus R(K)^{\perp}$，它是象空间中的一个稠密的但通常是真子集，这是因为，如果 K 是紧的，那么 $R(K)$ 是闭的充要条件是 $\dim R(K)<\infty$，即 K 有一个**退化核** (degenerate kernel) 这里 $R(K)$ 表示 K 的值域. 如果 $R(K)$ 是非闭的，那么 K^+ 是无界的，即 (A2) 的解即使存在，它也是不连续地依赖于 f. 关于第一类 Fredholm 方程的数值方法见**正则化方法** (regularization method) 和 **Fredholm 方程，数值方法** (Fredholm equation, numerical methods)

参考文献

[A1] Hochstadt, H, Integral equations, Wiley, 1973

[A2] Jorgens, K, Lineare Integraloperatoren, Teubner, 1970

[A3] Nashed M Z, Generalized inverses and applications, Acad Press, 1976

[A4] Suzuki, N, On the convergence of Neumann series in Banach space, *Math Ann*, **220**(1976), 143－146

[A5] Widom, H, Lectures on integral equations, American Book Company, 1969

[A6] Gohberg, I and Goldberg, S, Basic operator theory, Birkhauser 1981

[A7] Zabreiko, P P et al, Integral equations_a reference text Noordhoff, 1958 (译自俄文)

陈一元 译 郑维行 校

Fredholm 方程，数值方法 [**Fredholm equation, numerical methods, Фредгольма уравнение, Численные методы решения**]

解第二类 Fredholm 积分方程的近似方法，只须进行有限次数值运算

令

$$\varphi(x)-\lambda\int_D K(x,s)\varphi(s)ds=f(x) \quad (1)$$

是一个第二类的 Fredholm 积分方程，其中 λ 是一个复数，$f(x)$ 是一个已知向量函数，$\varphi(x)$ 是一个未知向量函数，$K(x,s)$ 是方程 (1) 的核，并且 D 是某个 m 维 Euclid 空间中的一个区域 下面假设 λ 不属于以 K 为核的积分算子的谱 (即对给定的 λ，方程 (1) 在对应于 K 的光滑阶的某个函数类中有唯一的解) 表达式 (1) 自然包括 Fredholm 方程组的情形

我们用**泛函分析** (functional analysis) 的语言，对解第二类 Fredholm 方程的数值方法的研究和构造的问题来给出一般描述，积分方程 (1) 可写为线性算子方程

$$(E-\lambda A)\varphi=f, \quad (2)$$

其中 φ 是某个 Banach 空间 Φ 中的一个未知元素，f 是 Φ 中的一个给定元素而 A 是从 Φ 到 Φ 的一个有界线性算子 假设 $E-\lambda A$ 是从 Φ 到 Φ 的可逆算子 解 (1) 的一个数值方法的构造如下 令 $\widetilde{\Phi}$ 是以某种方式联系于 Φ 的一个 Banach 空间，但一般说两者不同，而令 $\widetilde{A}$ 是一个从 $\widetilde{\Phi}$ 到 $\widetilde{\Phi}$ 的线性算子 方程

$$(E-\lambda\widetilde{A})\widetilde{\varphi}=\widetilde{f} \quad (3)$$

称为 (2) 的一个近似方程 近似算子 $\widetilde{A}$ 通常是这样取的 或者使 $\widetilde{\varphi}$ 可直接由 (3) 求得，或者 (更一般地) 可找到 (3) 的形如

$$\widetilde{\widetilde{\varphi}}=\psi(\widetilde{A},\widetilde{f}) \quad (4)$$

的近似解，使 (4) 的右端能由有限次算术运算获得. 表达式 $\psi(\widetilde{A},\widetilde{f})$ 表示在 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{f}$ 上确定的某种运算，特别 ψ 可为 $\widetilde{A}$ 的一个简单的算子函数 (例如，$\psi(\widetilde{A},\widetilde{f})=(E-\lambda\widetilde{A})^{-1}\widetilde{f}$) $\widetilde{A}$, ψ 和 $\widetilde{f}$ 的选取及空间 $\widetilde{\Phi}$ 的选取是服从这样的要求，使 $\widetilde{\widetilde{\varphi}}$ 和 (1), (2) 的准确解接近 (在某种意义下)，一般而言不是唯一的. 同样，对一个具体的数值方法 (A 的一个具体的近似公式) $\widetilde{\Phi}$ 的选取也不是唯一的. Φ 和 $\widetilde{\Phi}$ 的具体选取既要满足 $\widetilde{\varphi}$ 和 φ 的 "接近程度" 的要求又要研究方便. 解第二类 Fredholm 方程的数值方法的特点主要由某一个借助于 $\widetilde{A}$ 的 A 的具体近似决定 于是一个近似方法的命名通常也适用于解 (1) 的某一个数值方法

$\Phi, \widetilde{\Phi}, \widetilde{A}$ 和 $\widetilde{f}$ 取定后，φ 和 $\widetilde{\varphi}(\widetilde{\widetilde{\varphi}})$ 的接近程度由解算子方程的近似方法的一般理论中的定理建立

当 $\Phi=\widetilde{\Phi}$ 时，为了建立 $\widetilde{\varphi}$ 和 φ 是接近的，只要证明 $\|\widetilde{A}-A\|$ 是小的就够了．对 Φ 的一个适当的选取，对大多数的近似求解第二类 Fredholm 方程的经典方法，这总是办得到的

在多数具体方法中，(3) 的求解能容易地化为一个线性代数方程组的求解，为了构造 (4) 中的 ψ，常用一些解线性代数方程组的算法（见**线性代数中的数值方法**（linear algebra, numerical methods in））.

构造近似算子的主要办法如下

求积法 (quadrature methods) 及其推广．这些是逼近 (1) 中积分算子 A 的最普遍的方法．这些能应用于 $K(x,s)$, $\varphi(s)$ 和 $f(x)$ 为连续情形的方法的基础是，用关于结点 $\{s_i\}\in D$ 的网格的**求积公式** (quadrature formula) 代替 (1) 中的积分（对 s）

这时

$$\widetilde{A}y=\sum_{i=1}^{N} a_i^{(N)}K(x,s_i)y(s_i), \tag{5}$$

其中 $a_i^{(N)}$ 是求积公式的系数

近似方程 (3) 可视为一个算子方程，其基本空间与方程 (1) 相同（例如，在 D 上的连续向量函数空间 $C(D)$ 中）．这时它有形式

$$\widetilde{\varphi}(x)-\lambda\sum_{i=1}^{N} a_i^{(N)}K(x,s_i)\widetilde{\varphi}(s_i)=f(x). \tag{6}$$

方程 (6) 可化为 $\widetilde{\varphi}(s_i)$, $i=1, \quad ,N$ 的一个线性代数方程组

$$\widetilde{\varphi}(s_j)-\lambda\sum_{i=1}^{N} a_i^{(N)}K(s_j,s_i)\widetilde{\varphi}(s_i)=f(s_j),\ j=1, \quad ,N. \tag{7}$$

方程组 (7) 的解（准确的或近似的）给出 $\widetilde{\widetilde{\varphi}}$.

有时可取方程 (7) 本身作为 (1) 的近似，那么 (7) 对应于方程 (3)

在此方法中，空间 $\widetilde{\Phi}$ 和 Φ 不是相同的　例如空间 $\widetilde{\Phi}$ 可等同于 Φ 关于 Φ 中由在点 $\{s_i\}_{i=1}^{N}$ 为零的函数组成的子空间的商空间．方法 (5) 有各种推广，这些推广便于应用．例如，可应用于 $K(x,s)$ 是不连续的情形．在这些推广的方法中，算子 $\widetilde{A}$ 有形式

$$\widetilde{A}y=\sum_{i=1}^{N} a_i^{(N)}(x)y(s_i), \tag{5'}$$

其中 $a_i^{(N)}(x)$ 是和核 $K(x,s)$ 有联系的函数

亦见**求积和方法** (quadrature-sum method).

核的近似代替法，这些方法是利用形如

$$\widetilde{A}y=\int_D \widetilde{K}(x,s)y(s)ds$$

的近似算子 $\widetilde{A}$，其中 $\widetilde{K}$ 是接近于 K 但更简单一些的某一函数．$\widetilde{K}$ 常是一个**退化核** (degenerate kernel)，即

$$\widetilde{K}(x,s)=\sum_{i=1}^{N} a_i(x)b_i(s). \tag{8}$$

这时 (3) 是一个有退化核的 Fredholm 积分方程（亦见**退化核法** (degenerate kernels, method of)）．它的求解化为解一个线性代数方程组　然而，所得方程组的矩阵元素可表为已知函数的积分，而要得到它们的一个数值解，一般而言一定要用积分和来逼近它们

有很多方法由公式 (8) 具体地选取 $\widetilde{K}$（例如，见**带形法（积分方程）** (strip method (integral equations))．在这些方法中方程 (3) 和方程 (1) 的解的接近程度的理论研究通常比求积方法等更简单，这是因为在多数情形能取 $\widetilde{\Phi}=\Phi$，且 Φ 的选取本质上由所提问题的方式直接决定　如果 $\widetilde{K}$ 和 K 是接近的，那么照例，A 和 $\widetilde{A}$ 在 Φ 的范数下是接近的　然而，在大多数情况下这些方法的实现比求积方法及其推广更费力．

投影法 (projection methods) 导致一个形如 $\widetilde{\varphi}-\lambda PA\widetilde{\varphi}=Pf$ 的近似方程，其中 $\widetilde{\Phi}$ 是 Φ 的子空间而 P 是到这子空间上的投影．由于 $\Phi, \widetilde{\Phi}$，甚至 P 本身的自由选取，可得到解第二类 Fredholm 方程的很多具体的投影方法．投影方法的一个典型例子是 **Галёркин 法** (Galerkin method)．为了获得这个方法的具体的计算公式，一定（若有可能）要把积分方程 (1) 作为 D 上平方可积函数的 Hilbert 空间 $L_2(D)$ 中的一个算子方程处理，而 P 取为把 $L_2(D)$ 中的函数映成它的对某个 $L_2(D)$ 中的完全规范正交系 $\{\psi_K\}$ 的 Fourier 级数的 N 项截段的正交投影

在另一种解释中，Галеркин 法等价于用一个形如

$$\widetilde{K}(x,s)=\sum_{i=1}^{N}\int_D K(x,s)\varphi_i(x)dx\cdot\varphi_i(x)$$

的退化核代替原核而同时用一个接近于其右端的函数

$$\widetilde{f}(s)=\sum_{i=1}^{N}\int_D f(s)\varphi_i(s)ds\cdot\varphi_i(s)$$

代替它　作为投影方法的另一个例子，可取**配置法** (collocation method)　如果 $K(x,s)$ 和 $f(x)$ 是连续函数，那么 (1) 可看作 D 上的连续函数空间 $C(D)$ 中的一个算子方程 (2)．配置法对应于形如

$$Py=Z(y),\quad y\in D,$$

的 P 的一个选取，其中 Z 是对 D 中某结点网格的 Lagrange 插值多项式（亦见 **Lagrange 插值公式** (Lagrange interpolation formula)）　在大多数应用于第二类 Fredholm 积分方程的投影方法的实现中，会产生附加的积分近似的困难，它使这些方法（正像用近似核代替给定核的方法）常比典型的求积方法更费力　然而，这断言是相对的，因为方法的实际分类是一个约定问

题．例如配置法既能解释为投影法也能解释为广义的求积方法

解近似方程的方法 通常解近似方程（3）可化为解一个线性代数方程组 对相对小的 $|\lambda|$ 可用逐次逼近法（这是最简单的方法），且通过必要的修改（例如，在平均泛函校正法中）可把它们用于 λ 不属于 A 的谱的情形．

求更精确的近似序列的方法 在一些数值方法的理论研究中，在大多数情形仅得到这样明显的结论 当 $\widetilde{A}$ 在某种意义下收敛于 A 时，近似 $\widetilde{\varphi}$ 和 $\widetilde{\widetilde{\varphi}}$ 收敛于（1）和（2）的一个解．而极少能获得 $\widetilde{\varphi}$ 和 $\widetilde{\widetilde{\varphi}}$ 与（1），（2）的解的接近程度的有效估计 要验证精确性，在实际中用有递增精确算子 $\widetilde{A}$ 的方程（3）的一个近似解序列．这个验证的最简单方式是 比较这个近似解序列的两个相邻项．当两个邻接的项相近到一个给定的精度时就不再去求进一步的近似 直接获得如此序列各项的繁重性在用迭代获得更精确近似解的各种算法中已部分地得到克服 如此算法的一个典型例子如下 如果近似算子序列 $\{A_n\}$ 依某个 Banach 函数空间 Φ 的范数收敛于（2）中的 A，那么迭代过程

$$(E-\lambda A_0)\varphi_{n+1}=\lambda(A_{n+1}-A_0)\varphi_n+f_n \tag{9}$$

给出一个收敛于 φ 的近似序列 φ_n，只要 f_n 依范数收敛于 f 且 A_0 依范数充分接近于 A 应用序列（9）时只要求一个算子有逆．A_0 依范数越接近于 A，其收敛性越好．例如选取形如（5）的算子是很方便的．这时如果核满足某些条件的话，可得出 φ_n 在 D 中一致收敛于 φ 的结论．

А Б Бакушинский 撰

【补注】 对某些具体的方法，要求 $\|A-\widetilde{A}\|$ 很小的条件太强 代替这条件，常用假设（2）可由一个序列 $(E-\lambda A_n)\varphi_n=f_n$ 逼近，其中（A_n）逐点收敛于 A 且是集体紧的（collectively compact）（即对所有有界集 B，$\bigcup_{n\in N}A_n(B)$ 是紧的）．在这些假设下可证明近似解 φ_n 的收敛性并给出误差的界．应用这个理论的一个例子是 Nystrom 法（Nystrom method），它是先解（7），再用（6）外推到整个 D 上．关于集体紧算子及其在积分方程方面的应用，见 [A1]．

在配置法中也可用异于多项式的插值函数，例如样条（"样条配置"）．由于样条有较好的收敛性（见**样条逼近**（spline approximation）），样条配置优于多项式配置

对第二类 Fredholm 方程的各种具体的数值方法在 [A2]（连同 Fortran 程序），[A3] 和 [A4] 中给出．当 $\lambda\neq0$ 是一个本征值时，解 Fredholm 方程的数值方法，见 [A5]，p 368 及以后

上述文章仅讨论第二类 Fredholm 方程 然而，对第一类的 Fredholm 积分方程也有它的理论

第一类 Fredholm 积分方程（Fredholm integral equations of the first kind） 它们是形如

$$(A\varphi)(s)=\int_D K(x,s)\varphi(s)ds=f(x) \tag{A1}$$

的方程．它们在下述意义下通常是不适定的 其解可能不存在，不唯一，或者其解（如果存在）一般而言不连续地依赖于 f（见**不适定问题**（ill-posed problems））．通常用的解的概念是"最佳近似解" $A^+\varphi$，其中 A^+ 是 A 的 Moore-Penrose 广义逆算子（见 **Fredholm 方程**（Fredholm equation））．A^+ 一般是无界的．于是，(A1) 的一个'单纯的'数值逼近，例如用离散化，将会导出病态线性组 求（A1）的数值解可用**正则化方法**（regularization method） 一般而言，（A1）的正则化就是用一个有界线性算子 $R_\alpha(\alpha>0)$ 的参数族来代替无界算子 A^+ 于是由特定的"正则化算子" R_α 和噪声数据 $f_\delta(\|f-f_\delta\|\leq\delta)$ 而获得的正则解是 $\varphi_\alpha^\delta=R_\alpha f_\delta$ 通常取 R_α 为 $(\alpha I+A^*A)^{-1}A^*$（Тихонов 正则化（Tikhonov regularization）） 另外的方法有迭代 Тихонов 正则化，类似于 Landweber 迭代的迭代方法和截断奇值展开，其中

$$\varphi_\alpha^\delta=\sum_{\substack{n=1\\ \sigma_n>\alpha}}\frac{<f_\delta,V_n>}{\sigma_n}U_n$$

这里 $<\cdot,\cdot>$ 表示 L_2 中的**内积**（inner product），且 $<\sigma_n, u_n, v_n>$ 是 A 的奇异组（singular system）（即 σ_n^2 是 A^*A 的本征值，$\{u_n\}$ 是对应的本征向量的规范正交集，$\sigma_n v_n=Au_n$）

正则化方法的收敛速度依赖于已知数据的先验光滑性假设，此数据也影响正则化参数（regularization parameter）α 的选取 对这些问题和正则化方法的详细讨论可见，例如，[A6] 和 [A7]．

关于数值的实现，正则化方法必须和投影方法结合，后者也可直接用于正则化（见 [A8]）

参考文献

[A1] Anselone, P M, Collectively compact operator approximation theory and applications to integral equations, Prentice-Hall, 1971

[A2] Atkinson, K E, A survey of numerical methods for the solution of Fredholm integral equations of the second kind, SIAM, 1976.

[A3] Baker, C T H, The numerical treatment of integral equations, Clarendon Press, 1977.

[A4] Delves, L M and Mohamed, J L, Computational methods for integral equations, Cambridge Univ Press, 1985

[A5] Nashed, M Z, Generalized inverses and applications, Acad Press, 1976

[A6] Engl, H W and Groetsch, C W (eds), Inverse and ill-posed problems, Acad Press, 1987

[A7] Groetsch, C W, The theory of Tikhonov regularization

for Fredholm equations of the first kind, Pitman, 1984
[A8] Natterer, F, The finite element method for ill-posed problems, *RAIRO Anal Numer*, 11(1977), 271 – 278
[A9] Канторович, Л В и Крылов, В И, Приближенные методы высшего анализа, 5 изд (英译本 Kantorovich, L V and Krylov, V I, Approximate methods of higher analysis, Noordhoff, 1958)
[A10] Гохберг, И Ц и Фельдман, И А, Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, М, Наука, 1971 (英译本 Gohberg, I C [I C Gokhberg] and Feld'man, I A, Convolution equations and projection methods for their solution, Amer Math Soc, 1974)
[A11] Zabreiko, P P et al, Integral equations-a reference text, Noordhoff, 1975 (译自俄文)

陈一元 译 郑维行 校

Fredholm 核 [Fredholm kernel, Фредгольма ядро]

1) Fredholm 核是一个定义在 $\Omega\times\Omega$ 上的函数 $K(x, y)$，由它可定义一个**完全连续算子** (completely-continuous operator)

$$K\varphi\equiv\int_{\Omega}K(x,y)\varphi(y)dy\quad E\rightarrow E_1,\qquad(*)$$

其中 Ω 是 n 维 Euclid 空间中的一个可测集，而 E 和 E_1 是函数空间．称算子 (*) 是一个从 E 到 E_1 的 Fredholm 积分算子 (Fredholm integral operator) 一类重要的 Fredholm 核是那些定义在 $\Omega\times\Omega$ 上的可测函数 $K(x, y)$，满足

$$\iint_{\Omega\,\Omega}|K(x,y)|^2dxdy<+\infty\ .$$

满足这条件的 Fredholm 核也称为 L_2 核 (L_2-kernel)．

如果一个 Fredholm 核 $K(x,y)$ 能表为

$$K(x,y)=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(x)\beta_k(y),$$

其中 α_K 只是 x 的函数而 β_K 只是 y 的函数，那么 $K(x, y)$ 称为退化的 (degenerate)

如果对几乎所有的 $(x,y)\in\Omega\times\Omega$ 有 $K(x,y)=K(y, x)$，那么 Fredholm 核 $K(x,y)$ 称为对称的 (symmetric)，而如果 $K(x,y)=\overline{K(y,x)}$ (横线表示复共轭)，那么 $K(x,y)$ 称为 Hermite 的 (Hermitian) 满足 $\overline{K(x,y)}=-K(y,x)$ 的 Fredholm 核称为斜 Hermite 的 (skew-Hermitian)．

Fredholm 核 $K(x,y)$ 和 $K(y,x)$ 称为相互转置的 (transposed) 或联合的 (allied)，而核 $K(x, y)$ 和 $\overline{K(y,x)}$ 称为相互伴随的 (adjoint)

参考文献

[1] Смирнов, В И, Курс высшей математики, 6 изд, т 4, ч 1, М, 1974 (中译本 В И 斯米尔诺夫，高等数学教程，第四卷第一分册，人民教育出版社，1962)

Б В Хведелидзе 撰

【补注】 现时通常称全连续算子为**紧算子** (compact operator)

在以上的主要文章中，没有区分实值的核和复值的核．通常对称性 $K(x,y)=K(y,x)$ 和斜对称性 (skew-symmetry) $K(x,y)=-K(y,x)$ 都是对实值核定义的而 Hermite 性和斜 Hermite 性是复值核的性质．然而这些术语在文献中用法相当不一致

关于术语联合的 (转置的) 和伴随的亦见条目 **Fredholm 定理** (Fredholm theorems) 的补注

2) Fredholm 核是一个双叶的张量 (见**向量空间上的张量** (tensor on a vector space))，由它可定义一个 **Fredholm 算子** (Fredholm operator)．令 E 和 F 是**局部凸空间** (locally convex space)，而令 $E\overline{\otimes}F$ 为这些空间的**张量积** (tensor product) $E\otimes F$ 依归纳拓扑 (inductive topology) 的完全化，这里所谓归纳拓扑是使典则双线性映射 $E\times F\rightarrow E\overline{\otimes}F$ 为连续的最强局部凸拓扑．元素 $u\in E\overline{\otimes}F$ 称为一个 Fredholm 核，如果它能表为

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_ie_i\otimes f_i,$$

其中 $\{\lambda_i\}$ 是一个可和数列，而 $\{e_i\}$ 和 $\{f_i\}$ 分别是由 E 和 F 的某完全凸平衡有界集中元素组成的序列．假设 E 是局部凸空间 G 的对偶 G' (见**伴随空间** (adjoint space))，那么一个 Fredholm 核定义一个 Fredholm 算子 $A\cdot G\rightarrow F$，

$$x\rightarrow\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i<x,\ e_i>f_i,$$

其中 $<x,e_i>$ 是泛函 $e_i\in G'$ 在 $x\in G$ 的值 如果 E 和 F 是 Banach 空间，那么 $E\overline{\otimes}F$ 中每个元素都是 Fredholm 核．

Fredholm 核的概念也能推广到多个局部凸空间的张量积的情形 Fredholm 核和 Fredholm 算子构成 Fredholm 理论应用的一个自然领域．

参考文献

[1] Grothendieck, A, La theorie de Fredholm, *Bull Amer Math Soc*, 84(1956), 319 – 384
[2] Grothendieck, A, Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires, *Mem Amer Math Soc*, 5(1955)

Г Л Литвинов 撰

【补注】 正规域 K 上的一个拓扑线性空间中的集合 A 称为是圆形的 (circled) 或平衡的 (balanced)，如果对 K 中满足 $|k|\leqslant1$ 的 k 有 $kA\subset A$ 陈一元 译 郑维行 校

Fredholm 算子 [Fredholm operator, Фредгольмов оператор]

1) 一个作用在 Banach 空间 E 上的线性正规可解算子 B，其指标 χ_B 等于零 ($\chi_B=\dim\ker B-$

dim coker B) Fredholm 算子经典的例子是形如

$$B = I + T \qquad (1)$$

的算子，这里 I 是单位算子，并且 T 是 E 上的**完全连续算子**（completely-continuous operator） 特别地，空间 $C(a, b)$ 或 $L_2(a, b)$ 上形如

$$B\varphi = \varphi(x) + \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds \qquad (2)$$

的算子是 Fredholm 算子，这里 $K(x, s)$ 是一个在 $[a, b] \times [a, b]$ 上分别为连续的、平方可积的函数．

存在着不同于 (1) 的 Fredholm 算子（见 [2]） 其中有，例如说，在一定条件下形如 $I + K$ 的算子，这里 K 为一个在半轴上或整个轴上的卷积积分算子（非全连续的），以及许多微分算子

容易陈述种种定理，它们是关于求解形如 $B\varphi = f$ 的算子方程的，其中 B 为 Fredholm 算子（见 **Fredholm 核**（Fredholm kernel））

我们也遇到术语 "Fredholm 算子" 的其他用法 例如，有时一个 Fredholm 算子是指具有有限指标 χ_B 的任一 E 上的有界线性算子 B

在线性积分方程的经典理论中，Fredholm 算子常常是指（2）中那个确切的积分算子

参考文献

[1] Крейн, С Г, Линейные уравнения в банаховом пространстве, М, 1971 А Б Бакушинский 撰

【补注】 在现代文献中，术语 "全连续算子" 常常用 "**紧算子**"（compact operator）来代替 同样，术语 "Fredholm 算子" 一般用于具有有限指标的线性算子 Fredholm 算子类（偶而也称为 Φ 算子（Φ-operators）或 Noether 算子（Noether operators）），包含了很多重要的算子，而且关于这一课题有着大量的文献 指标满足对数律 $\chi_{AB} = \chi_A + \chi_B$ 对于特殊类型的 Fredholm 算子，指标可与某些拓扑概念，如曲线的卷绕数相关联，一个有界线性算子为 Fredholm 算子，当且仅当它关于紧算子类模是可逆的，亦即当且仅当它对应于 Calkin 代数（Calkin algebra）中的一个可逆元 正规可解性（即具有闭值域性质）由指标的有限性导出

参考文献

[A1] Booss, B, Topologie und Analysis, Einführung in die Atiyah-Singer Indexformel, Springer, 1977

[A2] Conway, J B, A course in functional analysis, Springer, 1985

[A3] Gohberg, I C [I C Gokhberg] and Kreĭn, M G, The basic propositions on defect numbers, root numbers and indices of linear operators, *Transl Amer Math Soc* (2), **13** (1960), 185−264 (Uspekhi Mat Nauk **12**, no 2 (74) (1957), 43−118)

[A4] Goldberg, S, Unbounded linear operators, McGraw-Hill, 1966

[A5] Kato, T, Perturbation theory for linear operators, Springer, 1976

2）把一个**局部凸空间**（locally convex space）映射到另一个局部凸空间的线性算子，它是关于这些空间中的 **Mackey 拓扑**（Mackey topology）的**核型算子**（nuclear operator）

А Б Бакушинский 撰 王声望 译 郑维行 校

Fredholm 定理 [**Fredholm theorems**, **Фредгольма теоремы**]，关于积分方程的

定理 1 齐次方程

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds = 0 \qquad (1)$$

和它的转置方程（transposed equation）

$$\psi(x) - \lambda\int_a^b K(s, x)\psi(s)ds = 0, \qquad (2)$$

对一个固定的参数值 λ，或者只有平凡解，或者具有同样多的有限个线性无关的解 $\varphi_1, \ , \varphi_n, \psi_1, \ , \psi_n$

定理 2 为使非齐次方程

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds = f(x) \qquad (3)$$

存在解，必要和充分条件是 其右端 $f(x)$ 与对应的齐次转置方程（2）的线性无关解的完全系是正交的

$$\int_a^b f(x)\psi_j(x)dx = 0, \ j = 1, 2, \ \ , n \qquad (4)$$

定理 3 （Fredholm 抉择定理（Fredholm alternative）） 或者非齐次方程（3）具有解，而不论其右端 $f(x)$ 如何，或者对应的齐次方程（1）具有非平凡解.

定理 4 方程（1）的特征值集合至多是可数的，唯一可能的极限点在无穷远处.

为使这些 Fredholm 定理在函数空间 $L_2[a, b]$ 中成立，其充分条件是 方程（3）的核 K 在集合 $[a, b] \times [a, b]$（a, b 可以是无穷大）上是平方可积的. 如果这个条件不成立，则（3）可能变成**非 Fredholm 积分方程**（non-Fredholm integral equation） 当（3）中所含参数 λ 和函数取复数值时，代替转置方程（2），常常考虑（1）的伴随方程（adjoint equation）

$$\psi(x) - \overline{\lambda}\int_a^b \overline{K(s, x)}\,\psi(s)ds = 0$$

在这种情况下，条件（4）由

$$\int_a^b f(x)\overline{\psi_j(x)}\,dx = 0, \ j = 1, 2, \ \ , n$$

代替.

这些定理是 E I Fredholm 证明的（[1]）

参考文献

[1] Fredholm, E I, Sur une classe d'equations fonctionnelles, *Acta Math*, **27** (1903), 365 – 390

Б В Хведелидзе 撰

【补注】 有时把"转置方程"和"伴随方程"分别称为"伴随方程"和"共轭方程(conjugate equation)"(见[A4]),当采用后一种术语时,$\bar{\lambda}$ 由 λ 来代替

参考文献

[A1] Gohberg, I and Goldberg, S, Basic operator theory, Birkauser, 1981

[A2] Jorgens, K, Lineare integraloperatoren, Teubner, 1970

[A3] Смирнов, В И, Курс высшей математики, 4, М, 1961 (中译本 В И 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第四卷, 高等教育出版社, 1958)

[A4] Zabreĭko, P P, Koshelev, A I, Krasnoselskiĭ, M A, Mikhlin, S G, Rakovshchik, L S, Stetsenko, V Ya, Shaposhnikova, T O and Anderssen, R S (eds), Integral equations – a reference text, Noordhoff, 1975

张鸿林 译

自由 Abel 群 [free Abelian group, свободная Абелева группа]

一个在一切 Abel 群的簇中是自由的群(见**自由代数**(free algebra)) (有限或无限个)无限循环群的直和,而且只有这些,在 Abel 群类中是自由的 这里,一切循环直被加项的生成元所成的集合是这个自由 Abel 群的一个自由生成元系(也称为基(base)) 在一个自由 Abel 群里,并不是每一个极大线性无关元素组都是它的基 自由 Abel 群是同构的,当且仅当它们的基具有相同的基数 一个自由 Abel 群的基数与这个群的 Prufer 秩一致 一个自由 Abel 群的每个非零子群都是自由的 一个 Abel 群是自由的,当且仅当它有一个子群的上升序列(见**子群列**(subgroup series)),其中每一个因子都同构于一个无限循环群

参考文献

[1] Курош, А Г, Теория групп, 3 изд, М, 1967 (中译本 А Г 库洛什, 群论, 高等教育出版社, 上册, 1987, 下册, 1982)

[2] Каргаполов, М И, Мерзляков, Ю И, Основы теории групп, 3 изд, М, 1982 (英译本 Kargapolov, M I and Merzlyakov, Yu I, Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979)

О А Иванова 撰

【补注】 关于 Prufer 秩见 **Abel 群**(Abelian group).

参考文献

[A1] Fuchs, L, Infinite abelian groups, 1, Acad Press, 1970

郝钢新 译

自由代数 [free algebra, свободная алгебра], 在泛代数类 $\mathfrak{K}$ 中的 $\mathfrak{K}$ 中的一个具有自由生成系(free generating system)(或基(base)) X 的代数 F, 即 F 具有一个生成元集合 X 使得 X 到 $\mathfrak{K}$ 的任一代数 A 内的每一个映射皆可扩充为 F 到 A 内的一个同态(见**自由代数系统**(free algebraic system)) 如果一个非空代数类关于子代数,直积封闭,并且包含非单元代数,那么这个代数类有自由代数 特别地,非平凡的泛代数簇及非平凡的泛代数拟簇中,总存在自由代数(见**泛代数簇**(variety of universal algebras),**代数系统拟簇**(algebraic systems, quasi-variety of)) 给定表征 Λ 的所有代数构成的类中的自由代数称为绝对自由的(absolutely free).表征为 Λ 的一个代数 A 是表征为 Λ 的某一个泛代数类中的一个自由代数,当且仅当 A 是内在自由的(intrinsically free)时候,即,如果它有一个生成元集合 X 使得 X 到 A 内的每一个映射皆可扩充为 A 的一个自同态 如果一个自由代数有一个无限基,那么它的所有基都有相同的基数(见**自由 Abel 群**(free Abelian group),**环上的自由代数**(free algebra over a ring),**自由结合代数**(free associative algebra),**自由 Boole 代数**(free Boolean algebra),**自由群**(free group),**自由半群**(free semi-group),**自由格**(free lattice),**自由广群**(free groupoid),**自由模**(free module),也可见**自由积**(free product)) 显然基为 X 的自由代数的每一个元素可以表示为该代数所在类的表征内字母表 X 上的一个字 自然要问,自由代数的不同字(指形式上)什么时候是自由代数的相同元素? 在某些情况下,回答几乎是平凡的(半群,环,群,结合代数),然而在其他情况下,这是个相当复杂的问题(Lie 代数,格,Boole 代数),并且有时这个问题没有递归解法(交错环)

Л А Скорняков 撰

【补注】 有时"自由代数"和"自由代数系统"的意义相同,见**自由代数系统**(free algebraic system)

卢景波 译

环上的自由代数 [free algebra over a ring, свободная алгебра над кольцом]

结合的和交换的环 Φ 上的代数簇中的一个自由代数(见**环与代数**(rings and algebras)) 具有自由生成系 X 的此种自由代数的元素是由 X 生成的**自由广群**(free groupoid)的元素及系数在 Φ 上的线性组合.换句话说,这种自由代数是 Φ 上一个**自由模**(free module)且以上述广群作为它的基.如果 Φ 是整数环,那么 Φ 上自由代数称为自由环(free ring)(见**自由结合代数**(free associative algebra)) 一个域 Φ 上自由代数的非零子代数是自由代数

П А Скорняков 撰 许永华 译 牛凤文 校

自由代数系统 [free algebraic system, свободная алгеб-

раическая система]

某一代数系统类中的自由对象

设 $\mathfrak{K}$ 是代数系统的一个非空类（见**代数系统类** (algebraic system, class of)）．如果代数系统 F 属于 $\mathfrak{K}$ 并且 F 有一个生成元集合 X 使得 X 到 $\mathfrak{K}$ 中的任一代数系统 A 内的任一映射 $\varphi_0: X\to A$ 都可扩充为一个同态，那么就称系统 F 在 $\mathfrak{K}$ 中是自由的，或称 $\mathfrak{K}$ 自由的 ($\mathfrak{K}$-free)．在这种情况下，我们也说在类 $\mathfrak{K}$ 中 F 在 X 上是自由的．具有这个性质的生成元集合 X 称为系统 F 的 $\mathfrak{K}$ 自由基，并且把它的基数称为 F 的秩 (rank)．秩相同的 $\mathfrak{K}$ 自由系统彼此同构．如果类 $\mathfrak{K}$ 有一个秩为 r 的自由代数系统，那么 $\mathfrak{K}$ 的每一个具有基数至多为 r 的生成元集合的代数系统都是它的同态象．一个 $\mathfrak{K}$ 自由系统的一个 $\mathfrak{K}$ 自由基也是它的一个极小生成集合，因此，如果类 $\mathfrak{K}$ 有两个秩不相同的同构的自由系统 F 和 F_1（说它们的秩分别为 r 及 r_1），那么基数 r 和 r_1 皆为有限数．

一个代数系统类称为平凡的 (trivial) 或退化的 (degenerate)，如果在它的每一个系统中等式 $x=y$ 成立，即如果这个类的所有代数系统皆为一元系统．否则就称其为非平凡的 (non-trivial) 或非退化的 (non-degenerate)，在任一非退化的代数系统拟簇（或簇）中（见**代数系统拟簇** (algebraic systems, quasi-variety of)，**代数系统簇** (algebraic systems, variety of)），存在任意秩的自由代数系统．一个退化代数系统类中仅有秩为 1 的自由系统．

假定类 $\mathfrak{K}$ 有有限秩分别为 l 和 k 的自由系统 F_l 和 F_k，并且假定 $k<l$，那么同构 $F_k\simeq F_l$ 成立，当且仅当存在 $\mathfrak{K}$ 的表征中的项

$$s_i(x_1,\ldots,x_k),\quad i=1,\ldots,l,$$
$$t_j(x_1,\ldots,x_l),\quad j=1,\ldots,k,$$

使得下列等式在 $\mathfrak{K}$ 中成立

$$s_i(t_1(x_1,\ldots,x_l),\ldots,t_k(x_1,\ldots,x_l))=x_i,$$
$$t_j(s_1(x_1,\ldots,x_k),\ldots,s_l(x_1,\ldots,x_k))=x_j,$$

其中 $i=1,\ldots,l$，$j=1,\ldots,k$．如果 $\mathfrak{K}$ 包含一个基数 ≥ 2 的有限系统 A，那么不同秩的 $\mathfrak{K}$ 自由系统不同构．特别地，在所有群簇，半群簇，格簇以及结合环簇中，不同秩的自由系统不同构．另外，在某些模簇中（见**自由模** (free module))，所有有限秩的自由模彼此同构．

存在一些代数系统的有限表现簇（见**代数系统** (algebraic system))，其中所有有限秩的自由代数系统彼此同构．例如型为 $<1,1,2>$ 的代数 $<A,\varphi_1,\varphi_2,\omega>$ 的代数簇 $\mathfrak{A}_{1,2}$，该簇用下列等式定义

$$\varphi_i(\omega(x_1,x_2))=x_i,\quad i=1,2,$$

$$\omega(\varphi_1(x),\varphi_2(x))=x$$

已经证明（见[3]），在具有 m 元运算 $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ 和 n 元运算 $\omega_1,\ldots,\omega_m$，并且由等式

$$\varphi_i(\omega_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\omega_m(x_1,\ldots,x_n))=x_i,$$
$$\omega_j(\varphi_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,\varphi_n(x_1,\ldots,x_n))=x_j,$$
$$i=1,\ldots,n,\quad j=1,\ldots,m,$$

定义的代数 $<A,\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\omega_1,\ldots,\omega_m>$ 的簇 $\mathfrak{A}_{m,n}$ ($1\leq m\leq n$) 中，对于固定的 m 和 n，两个有限秩（秩分别为 k,l 且 $k\neq l$）自由代数同构当且仅当

$$k\equiv l \bmod (n-m),\quad k,l\geq m$$

存在没有自由系统的全称类．例如由全称公式

$$(x^2=1)\ \vee\ (x^3=1),\ xy=yx$$

(省略了量词) 定义的群类就是一例．如果一个全称类 $\mathfrak{U}$ 具有任意有限秩的自由系统，那么它有任意秩的自由系统．

设 Σ 是由形如

$$\neg G_1\vee\cdots\vee\neg G_p\vee G_{p+1}\vee\cdots\vee G_q$$

的全称公式 $G(x_1,\ldots,x_n)$ 构成的相容公式集合，其中 $G_1,\ldots,G_q$ 是表征为 $\wedge$ 的原子公式．令

$$ng\,G=G_1\&\cdots\&G_p.$$

如果对于 Σ 中任一公式 $G(x_1,\ldots,x_n)$ 和变元在 r 个变元 $x_1,\ldots,x_r$ 中的任意项

$$t_1(x_1,\ldots,x_r),\ldots,t_n(x_1,\ldots,x_r),$$

下列断言成立

$$\Sigma\vdash(\forall x_1)\cdots(\forall x_r)ng\,G(t_1,\ldots,t_n)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\exists i>p)\Sigma\vdash(\forall x_1)\cdots(\forall x_r)G_i(t_1,\ldots,t_n),$$

那么就说 Σ 有 r 代换性质 (substitution property) ($r\geq 1$)．在一个由全称公式集合 Σ 定义的非退化的全称类 $[\Sigma]$ 中，存在一个有限秩为 $r\geq 1$ 的自由系统当且仅当 Σ 有 r 替换性质 ([4])．特别地，如果 Σ 中的所有公式皆为不可约的，并且 Σ 包含一个具有 $q\geq 2$ 个不同成员的正公式

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_r)G_1\vee\cdots\vee G_q,$$

那么全称类 $[\Sigma]$ 没有秩 $n\geq r$ 的自由系统．例如，表征为 $<\leqslant,\cdot,^{-1}>$ 的全序群类中，没有秩 $r\geq 2$ 的自由代数系统．

参考文献

[1] Мальцев, А.И., Алгебраические системы, М., 1970 (英译本 Mal'tsev, A.I., Algebraic systems, Springer, 1973)

[2] Jonsson, B and Tarski, A, On two properties of free algebras, *Math Scand*, **9** (1961), 95－101

[3] Swierczkowski, S, On isomorphic free algebras, *Fund Math*, **50** (1961), 1, 35－44

[4] Gratzer, G, On the existence of free structures over universal classes, *Math Nachr*, **36** (1968), 3-4, 135－140

Д М Смирнов 撰

【补注】 时常用**自由代数** (free algebra) 这个术语代替"自由代数系统"，特别是当考虑的类的表征仅含运算符号时更是如此．显然，基为 X 的自由代数的每一元素用所考虑的类的表征皆可写成字母表 X 上的一个**字** (word)，自由代数的一个重要问题 (字问题 (word problem)) 是 找出一个**算法** (algorithm)，以决定一个自由代数中的两个字是否相等 在某些代数簇中 (例如半群，给定环上的模，结合代数) 这个问题有平凡解，在另外一些簇中 (例如，Lie 代数，格，Boole 代数) 这个问题的解法是知道的，但不是平凡的 另外也还有一些簇 (例如，交错环，模格) 已经证明那样的算法不存在 对某些特殊情况的更详细的论述，见**自由 Abel 群** (free Abelian group)，**环上的自由代数** (free algebra over a ring)，**自由结合代数** (free associative algebra)，**自由 Boole 代数** (free Boolean algebra)，**自由群** (free group)，**自由广群** (free groupoid)，**自由格** (free lattice)，**自由模** (free modul)，**自由半群** (free semi-group)，**群** (group)

参考文献

[A1] Cohn, P M, Universal algebra, Reidel, 1981

卢景波 译

自由结合代数 [free associative algebra , свободная ассоциативная алгебра]

域 k 上非交换变元取在 X 中的多项式代数 $k<X>$ $k<X>$ 在同构意义下由下列泛性质 (universal property) 唯一确定 存在一个映射 ι $X \to k<X>$ 使得 X 到 k 上含有单位元的代数 A 的映射以唯一方式通过 ι 作因子分解．$k<X>$ 的基本性质有

1) $k<X>$ 可嵌入于一个除环中 (Мальцев - Neumann 定理 (Mal'tsev - Neumann theorem)),

2) $k<X>$ 有一个弱除法算法，这就是，对于 $a_i, b_i \in k<X>$, a_i 不等于零 $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 且 $d(a_1) \leqslant \leqslant d(a_n)$, 则下面关系式

$$d\left[\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right] < \max_i \left\{ d(a_i) + d(b_i) \right\}$$

总蕴含着 存在一个整数 $r(1 \leqslant r \leqslant n)$ 及元素 $c_1, \quad , c_{r-1}$, 使得

$$d\left[a_r - \sum_{i=1}^{r-1} a_i c_i \right] < d(a_r)$$

及

$$d(a_i) + d(c_i) \leqslant d(a_r), \ 1 \leqslant i \leqslant r-1$$

(这里 $d(a)$ 表示多项式 $a \in k<X>$ 的通常意义下的次数， $d(0) = -\infty$),

3) $k<X>$ 是一个左 (或右) 自由理想环 (即 $k<X>$ 的任何左 (或右) 理想是有唯一秩的自由模),

4) $k<X>$ 中非系数元的中心化子 (即与一个已给元素交换的元素的集合) 同构于 k 上一元多项式代数 (Bergman 定理 (Bergman theorem))

参考文献

[1] Cohn, P M, Universal algebra, Reidel, 1981

[2] Cohn, P M, Free rings and their relations, Acad Press, 1971

Л А Бокуть 撰 许永华、朱胜林 译

自由 Boole 代数 [free Boolean algebra , свободная Булева алгебра]

具有一个生成子组的 **Boole 代数**，使得从这个组到一个 Boole 代数的每一个映射都能扩充成一个同态．每个 Boole 代数都同构于某个自由 Boole 代数的一个商代数．

对每个基数 a，存在唯一的 (在同构意义下) 一个具有 a 个生成子的自由 Boole 代数．它的 **Stone 空间** (Stone space) 是简单冒号 (即两点离散空间) 的拓扑积，也就是说，它是一个**二进不连续统** (dyadic discontinuum)

一个有限 Boole 代数是自由的，当且仅当它的元素的个数具有形式 2^{2^n}，这里 n 是生成子的数目 这样的自由 Boole 代数可藉助 n 个变元的 Boole 函数的代数来实现，见 **Boole 函数** (Boolean function) 一个可数的自由 Boole 代数同构于 **Cantor 集** (Cantor set) 的开 - 闭子集所成的代数 一个自由 Boole 代数的每一个由两两不相交元素组成的集合是有限的或可数的．

一个无限自由 Boole 代数不可能是完全的 另一方面，任意无限完全 Boole 代数的基数是它的自由子代数的基数的最小上界 (见[5])

参考文献

[1] Sikorski, R, Boolean algebras, Springer, 1969

[2] Владимиров, Д А, Булевы алгебры, М, 1969

[3] Halmos, P R, Lectures on Boolean algebras, v Nostrand, 1963

[4] Birkhoff, G, Lattice theory, Colloq Publ, 25, Amer Math Soc, 1973

[5] Кисляков, С В,《Сиб матем ж》, **14** (1973), 3, 569－581

Д А Владимиров 撰 蓝以中 译

自由合成 [free composition , свободное объединение]

在某些泛代数类中的一种运算 它与这个类的一

个给定的代数的集合相关联（在某种意义下）它是这个类的“最弱自由”代数，它包含同构于诸给定代数的子代数，并且由这些子代数生成 该术语与**自由积**(free product) 有密切关系 О А Иванова 撰

【补注】 这个术语在西方的文献中不使用

卢景波 译

自由群 [free group，свободная группа]

一个具有生成元系 X 的群 F，使得任意由 X 到任意一个群 G 内的映射都可以扩张为 F 到 G 内的一个同态 这样的一个生成元系 X 称为一个自由生成元系 (system of free generators)，它的基数称为 F 的秩 (rank) 集合 X 也称为一个字母表 (alphabet) F 的元素是字母表 X 上的字，即形如

$$v = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$$

的表示式，这里 $x_{i_j} \in X$，$\varepsilon_j = \pm 1$ 对一切 j，以及空字 一个字 v 称为不可约的 (irreducible)，如果对于每一个 $j = 1, \cdots, n-1$ 来说，$x_{i_j}^{\varepsilon_j} \neq x_{i_{j+1}}^{-\varepsilon_{j+1}}$ 不可约字是自由群 F 内互不相同的元素，并且每一个字都等于唯一的一个不可约字．如果字 v 是不可约的，则数 n 称为字 v 的长度 (length of the word)

一个群的元素 $a_1, \cdots, a_k$ 所组成的有限序集的 Nielsen 变换 (Nielsen transformation) 是 1) 这个集合的两个元素的对换，2) 某一元素 a_i 代以 a_i^{-1}，3) 某一元素 a_i 代以 $a_i a_j$，这里 $j \neq i$ 如果一个自由群 F 是有限秩的，那么在自由生成元系上施行 Nielsen 变换后仍得到一个新的自由生成元系，并且任意自由生成元系都可以由另外任一自由生成元系通过累次施行 这种变换而得到 (Nielsen 定理 (Nielsen theorem)，见 [2]) 自由群的重要性乃是基于这样一个事实，即任何一个群都同构于某一自由群的商群．自由群的子群也是自由群 (Nielsen-Schreier 定理 (Nielsen-Schreier theorem)，见 [1]，[2])

在一个**群簇** (variety of groups) $\mathfrak{D}$ 内的自由群的定义与自由群类似，只不过是在 $\mathfrak{D}$ 内，它也称为 $\mathfrak{D}$ 自由群 ($\mathfrak{D}$-free group) 或相对自由群 (relatively-free group) (也称约化自由群 (reduced free group))．如果 $\mathfrak{D}$ 是由一组恒等式 $v=1$ 所定义的，这里 $v \in V$，那么 $\mathfrak{D}$ 中一个具生成元系 X 的自由群同构于商群 $F/V(F)$，这里 F 是具生成元系 X 的自由群，$V(F)$ 是由 V 所定义的字子群，即由 F 中所有包含字 $v \in V$ 的元素所生成的子群 特定的簇的自由群有特殊的名称，例如，自由 Abel 群，自由幂零群，自由可解群，自由 Burnside 群，它们依次是簇 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{N}_c$，$\mathfrak{A}^l$，$\mathfrak{B}_n$ 的自由群

参考文献

[1] Курош, А Г, Теория групп, 3 изд, М, 1967 (中译本 А Г 库洛什，群论，高等教育出版社，上册，1987，下册，1982)

[2] Magnus, W, Karras, A and Solitar, D, Combinatorial group theory presentations of groups in terms of generators and relations, Interscience, 1966

[3] Neumann, H, Varieties of groups, Springer, 1967

А Л Шмелькин 撰 郝锕新 译

自由广群 [free groupoid，свободный группоид]

广群簇中的一个自由代数 自由生成元集合 X 上的一个自由广群与 X 中的所有带括号的字的集合相同 (见**字** (word)) (假定每一个符号皆置于括号中，并且括号的安排要使每次仅对两个括号的元素相乘) 字 (a) 与字 (b) 的积是 ((a)(b))

О А Иванова 撰 卢景波 译

自由谐振动 [free harmonic oscillation，свободное гармоническое колебание]

正弦振动 设 t 表示时间，如果力学量或物理量 $x(t)$ 按规律

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (1)$$

变化，则称 $x(t)$ 进行自由谐振动．这里，$A>0$，$\omega>0$，φ 是实常数，分别称为自由谐振动的振幅 (amplitude)、频率 (frequency) 和相位 (phase) 周期 (period) 是 $T = 2\pi/\omega$ 在物理学和工程中往往采用下述术语 自由谐振动称为谐振动 (harmonic oscillation) 或简谐振动 (simple harmonic oscillation)，形式为 (1) 的函数称为**谐波** (harmonics)，变量 $\omega t + \varphi$ 称为瞬时相位 (instantaneous phase)，φ 称为初始相位 (initial phase) 量 ω 也称为圆频率 (circular frequency 或 cyclic frequency)，而把 $f = \omega/2\pi$ 称为频率 (frequency) 自由谐振动 (1) 可以写成

$$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t,$$

其中 a，b 和 A 之间存在下列关系．

$$A = \sqrt{a^2+b^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

或者写成

$$x = \mathrm{Re}(Ae^{i(\omega t+\varphi)})$$

往往取 $-\varphi$ 而不取 φ 作为相位．

单自由度的力学或物理系统在稳定非退化平衡位置附近的微小振动在很大程度上是自由谐振动．例如，摆的微小振动，由弹簧悬挂的载荷的振动，音叉的振动，振荡电路中电流方向和强度的变化，船舶的摆动，等等 进行自由谐振动的系统称为线性谐振子

(harmonic oscillator)，其振动由下列方程来描述

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0$$

对于长度为 l、质量为 m 的数学摆来说，$\omega^2=g/l$，对于处在弹性系数为 k 的弹簧上的质量为 m 的载荷来说，$\omega^2=k/m$，对于电容为 C、电感为 L 的振荡电路来说，$\omega^2=1/CL$ 自由谐振子的相平面上的平衡位置 $x=0$，$\dot{x}=0$ 是中心，而相轨道是圆．

两个自由谐振动之和 $x_1(t)+x_2(t)$ 仍然是一个谐振动，这里

$$x_j(t)=A_j\cos(\omega_j t+\varphi_j),\ j=1,2$$

具有可公度的频率 ω_1 和 ω_2 如果 ω_1 和 ω_2 是不可公度的，则 $x_1(t)+x_2(t)$ 是一个**殆周期函数**(almost-periodic function)，并且

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}(x_1(t)+x_2(t))=A_1+A_2=$$

$$=-\inf_{t\in\mathbf{R}}(x_1(t)+x_2(t))$$

具有有理无关频率 $\omega_1,\ \ ,\omega_n$ 的 n 个自由谐振动之和也是殆周期振动．对于两个自由谐振动，$\Omega=|\omega_1-\omega_2|$ 称为更列(derangement) 如果 Ω 是小量，$\Omega/\omega_1\ll 1$，并且 ω_1 和 ω_2 具有相同的数量级，则

$$x_1(t)+x_2(t)=A(t)\cos(\omega_1 t+\varphi(t)),$$

$$A^2(t)=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\psi(t)-\varphi_1),$$

$$\psi(t)=\Omega t+\varphi_2.$$

"振幅" $A(t)$ 是周期为 $2\pi/\Omega$ 的缓变函数，$A^2(t)$ 在 $(A_1-A_2)^2$ 和 $(A_1+A_2)^2$ 之间变化．振动 $x_1(t)+x_2(t)$ 称为脉动(beat)，"振幅" $A(t)$ 交替增加和减小 这种情况在接收器的分析中是重要的．

假设给定 n 个方程的方程组

$$M\ddot{x}+Kx=0,\ x\in\mathbf{R}^n,$$

其中 M 和 K 是实对称正定矩阵，其元素为常数．通过变量变换 $x=Ty$，可将这个方程组化为分解的方程组

$$\ddot{y}_j=\omega_j^2 y_j=0,\ j=1,\ \ ,n.$$

坐标 $y_1,\ \ ,y_n$ 称为法坐标(normal coordinates)．在法坐标中，$x(t)$ 是沿坐标轴的自由谐振动的向量和．

参考文献

[1] Андронов, А А , Витт, А А , Хайкин, С Э , Теория колебаний, 2 изд , М , 1981 (中译本 А А 安德罗诺夫，А А 维特，С Э 哈依金，振动理论，科学出版社，上册 1973，下册 1974)

[2] Горелик, Г С , Колебания и волны, М , 1959

[3] Ландау, Г С , Лифшиц, Е М , Механика, 3 изд , т 1, М , 1973

张鸿林 译

自由理想环 [**free ideal ring, fir, кольцо свободных идеалов**]

【补注】 所有(单侧)理想均为自由的(有单位元的)(非交换)环．更准确地讲，右自由理想环(right fir) R 是所有右理想作为右 R 模有唯一秩的自由模的环．左自由理想环(letf fir)可对应地定义．自由理想环可被认为是主理想整区的推广．

考虑如下形式的关系式 $x\cdot y=x_1y_1+\ \ +x_ny_n$，$x_i,y_i\in R$($x$ 是行向量，y 是列向量) 如果对任一 $i=1,\cdot,n$，或 $x_i=0$ 或 $y_i=0$，那么称此关系式是平凡的(trivial) 一个 n 项关系式 $x\cdot y=0$ 称为可由一个可逆 $n\times n$ 矩阵 M 平凡化，如果关系式 $(xM)(M^{-1}y)=0$ 是平凡的 令 R 是一个有单位元的非零环，则下列性质等价 i) 任一 m 项关系式 $\Sigma x_iy_i=0$ ($m\leqslant n$)均可由一个可逆 $m\times m$ 矩阵平凡化，ii) 给定右线性相关元素 $x_1,\ \ ,x_m\in R$，$m\leqslant n$，存在($m\times m$)矩阵 M,N 使得 $MN=1_m$ 且 $(x_1,\ \ ,x_m)$ M 至少有一个分量为零，iii) R 的任一由 $m\leqslant n$ 个右线性相关元生成的右理想含有少于 m 个生成元，以及 iv) 至多有 n 个生成元的 R 的理想为有唯一秩的自由模．这些性质具有左右对称性．此外还有一些等价条件，见[A1]

满足上述条件的环称为 n 自由理想环(n-fir) 对所有 n 均为 n 自由理想环的环称为半自由理想环(semi-fir)

整环 R 称为右 Ore 环(right Ore ring)，若它对所有 $a,b\in R^*=R\setminus\{0\}$ (Ore 条件(Ore condition))均有 $aR\cap bR\neq\{0\}$ (亦见**结合环与结合代数**(associative rings and algebras))中的 Ore 定理．由此，环 R 是一个 Bezout 整环(见 **Bezout 环**(Bezout ring))，当且仅当它是 2 自由理想环并且是右 Ore 环

对环 R 下列情况等价 1) R 是半自由理想环上全矩阵环，2) R 与一个半自由理想环 Morita 等价(见 **Morita 等价**(Morita equivalence))，3) R 是右半遗传的(right semi-hereditary)(即所有有限生成右理想为投射的)并且 R 是投射平凡的，4) 条件 3) 的左-右对称性 这里称一个环是投射平凡的(projective-trivial)，如果存在一个投射右模 P(称为 R 的极小投射(minimal projective)模)使得任一有限投射右模 M 是 n 个 P 拷贝的直和，其中 n 是由 M 唯一确定的

对环 R 下列情况等价 a) R 是右自由理想环上全矩阵环，b) R 与一个右自由理想环 Morita 等价，c) R 是右遗传的(right hereditary)(即所有右理想是投射的)并且是投射平凡的

如果 R 是半右自由理想环，那么一个右模 P 是平坦的，当且仅当 P 的任一有限生成子模是自由的(即当且仅当 P 是局部自由的 (locally free))

参考文献

[A1] Cohn, P M , Free rings and their relations, Acad Press, 1971

许永华、朱胜林 译

自由格 [free lattice, свободная решетка]

在所有的格所成的簇中的一个**自由代数** (free algebra) 在一个自由格内，词的等同问题和词的规范表示问题已经被解决 (见[1])

参考文献

[1A] Whitman, P M , Free lattices, *Ann of Math* , **42** (1941), 325 - 330

[1B] Whitman, P M , Free lattices Ⅱ, *Ann of Math* , **43** (1942), 104 - 115

Т С Фофанова 撰

【补注】 关于自由格的字问题的解答使人们有可能来指出，在三个生成子上的自由格是无限的，虽然在三个生成子上的自由模格是有限的 (它有 28 个元素——一个在 R Dedekind 的[A1] 内已经知道的事实)，且在任意有限的生成子集合上的自由分配格也是有限的．作为这个结果的推广，A W Hales ([A2]) 指出，在三个生成子上的**自由完全格** (free complete lattice) 是不存在的 (即有一个不同词所成的特殊类，它可利用完全格算法用三个生成子来构成)．

参考文献

[A1] Dedekind, R , Ueber die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe, *Math Ann* , **53** (1900), 371 - 403

[A2] Hales, A W , On the non-existence of free complete algebras, *Fund Math* , **54** (1964), 45 - 66

蓝以中 译

自由模 [free module, свободный модуль]

一个固定环 R 上模簇中的一个自由对象 (自由代数) 如果 R 是结合的且含有单位元，那么一个自由模是含有一个基的模，此基是线性独立的生成系．自由模的一个基的基数称为它的秩 (rank) 此秩并非总是唯一定义的，就是说，存在这样的环，在此环上的一个自由模可以有不同个数的元素所构成的二个基 这等价于，存在 R 上的二个矩阵 A 及 B 使得

$$AB = I_m, \ BA = I_n, \ m \neq n,$$

其中 I_m 及 I_n 分别表示阶为 m 及 n 的单位矩阵 但是，非唯一性仅仅对有限基成立，如果一个自由模的秩是无限的，那么所有基均有相同基数 另外，容许有同态映到一个除环中的环上 (特别，在交换环上)，自由模始终能唯一地定义它的秩

一个视作其自身上左模的环 R 是秩为 1 的自由模．每个左自由模是秩为 1 的自由模之直和．每个模 M 可表示为一个自由模 F_0 的商模 F_0/H_0. 依此，子模 H_0 表示为一个自由模 F_1 的商模 F_1/H_1 如此继续下去便得下面正合序列

$$\to F_2 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0,$$

它被称为 M 的**自由分解** (free resolution). 除环有在其上的所有模都是自由的特性．主理想整环上自由模的子模是自由的 接近于自由模是**投射模** (projective module) 及**平坦模** (flat module)

参考文献

[1] Cohn, P M , Free rings and their relations, Acad Press, 1971

[2] MacLane, S , Homology, Springer, 1963

В Е Говоров 撰 许永华 译

自由积 [free product, свободное произведение]

在一个泛代数类 $\mathfrak{K}$ 中，诸 A_α $(\alpha \in \Omega)$ 是 $\mathfrak{K}$ 中的代数．$\mathfrak{K}$ 中的一个代数 A 是诸 A_α $(\alpha \in \Omega)$ 的自由积，如果每一代数 A_α $(\alpha \in \Omega)$ 皆为 A 的子代数，并且诸 A_α 到 $\mathfrak{K}$ 中的另一代数 B 内的任一同态族都可以唯一地扩充为 A 到 B 内的一个同态 如果 $\mathfrak{K}$ 是一个泛代数簇，那么自由积一定存在 每个自由代数都是单元素集生成的自由代数 (即一个元素生成的自由代数) 的自由积 在 Abel 群类中，自由积与直和一致 在某些情况下，对自由积的子代数有某种刻画，例如，对群 (见**群的自由积** (free product of groups))，非结合代数及 Lie 代数

在泛代数的范畴中，自由积与这些范畴中的对**余积** (coproduct) 一致

Л А Скорняков 撰

【补注】 在一个代数簇中，自由积不一定总存在 例如，模 2 的整数环和模 3 的整数环在有 1 的环簇中没有自由积 然而对偶积 (它不同于自由积，它不要求典范同态 $A_\alpha \to A$ 是单射) 在代数簇中总存在 ([A1])．

参考文献

[A1] Linton, F E J , Coequalizors in categories, in Seminar on Triples and Categorical Homology Theory, Lecture Notes in Math , Vol 80, Springer, 1969, 75 - 90

卢景波 译

群 G_ι $(\iota \in I)$ 的自由积 [free product of groups, свободное произведение групп]

一个由群 G_ι 生成的群 G，使得 G_ι 到任意群 H 内的任意一个同态 φ_ι $G_\iota \to H$ 都可以开拓为一个群同态 φ $G \to H$ 符号 * 常被用来表示自由积，例如，

$$G = \prod_{\iota \in I}^{*} G_\iota,$$

在集合 I 是有限的情形，

$$G = G_1 * \quad * G_k$$

自由积G的任意非单位元素都可以唯一地表示成一个不可约字$v=g_{\iota_1}\cdots g_{\iota_n}$，这里$g_{\iota_j}\in G_{\iota_j}$，$g_{\iota_j}\neq 1$且$\iota_j\neq\iota_{j+1}$，对任意$j=1,\cdots,n-1$．自由积的构成在研究由一组生成元和定义关系所定义的群中是重要的．据此可以如下定义．假设每一个群G_ι是由生成元集X_ι和定义关系集Φ_ι定义的，此处$X_\iota\cap X_j=\emptyset$若$\iota\neq j$．那么由生成元集$X_\iota=\bigcup_{\iota\in I}X_\iota$和定义关系集$\Phi=\bigcup_{\iota\in I}\Phi_\iota$所定义的群$G$就是群$G_\iota(\iota\in I)$的自由积．

一个自由积G的每一个子群都可以分解成子群的自由积，其中有一些子群是无限循环群，其他的每一个子群都共轭于在G的自由分解中某一个群G_ι的一个子群（Курош定理（Kurosh theorem））．

参考文献

[1] Курош，А Г，Теория групп，3 изд，М，1967（中译本 А Г 库洛什，群论，高等教育出版社，上册，1987，下册，1982）

[2] Magnus，W，Karras，A and Solitar，D，Combinatorial group theory presentations of groups in terms of generators and relations，Interscience，1966

А Л Шмелькин 撰

【补注】 群的自由积的概念是具有共合子群的自由积概念的特殊情形(见**群的共合**(amalgam of groups))

郝钢新 译

自由分解 [free resolution，свободная резольвента]

投射分解的一个特殊情况．一个结合环R上的每一个模M都是一个自由R模F_0对其一子模N_0的商模F_0/N_0．子模N_0有相似的表示式F_1/N_1，等等．于是就得到自由模的正合序列

$$F_0\leftarrow F_1\leftarrow\cdots\leftarrow F_n\leftarrow\cdots,$$

称为M的自由分解．规范同态$F_0\to M$称为一个补同态（supplementing homomorphism）（或称增广（augmentation））

В Е Говоров 撰

【补注】 亦见**自由模**（free module）

周伯埙 译

自由半群 [free semi-group，свободная полугруппа]，在字母表(alphabet)A上的

一个半群，它的元素是A中元素（字母）一切可能的有限序列，它的运算是将一个序列放置在另一个序列的后面．一个自由半群的元素通常称为字（word），它的运算通常称为毗连（concatenation）．为了方便起见，常把空字1添进去（它的长度定义为零），并且约定，对于任意字w来说，$w1=1w=w$，由这种方式所产生的有单位元的半群称为A上自由幺半群（free monoid）．A上的自由半群（分别地，自由幺半群）常记作A^+(分别地，A^*)．自由半群A^+的字母表A是恰由那些不能分解成乘积的元素所组成的唯一的不可约生成元系．A的字母称为自由生成元（free generators）．一个自由半群在同构意义下由它的字母表的基数唯一确定．这个基数称为这个自由半群的秩（rank of the free semi-group）．秩为2的自由半群有具可数秩的自由子半群．

自由半群是一切半群的范畴内的自由对象（见**自由代数**（free algebra））．对于一个半群F来说，下列条件是等价的：1)F是自由的，2)F有一个生成元系A，使得F的任意元素可以唯一地表示成A中元素的乘积，3)F满足消去律，不含幂等元，F的每一个元素有有限个除子，并且对于$u,v,u',v'\in F$来说，若$uv=u'v'$，那么或者$u=u'$，或者u和u'中的一个是另一个的左除子．

一个自由半群的每一个子半群H都有唯一的一个不可约生成元系，它由那些不能在H内分解成乘积的元素所组成，然而，并不是自由半群的每一个子半群都是自由的．以下条件对于自由半群F的一个子半群H来说是等价的：1)H是一个自由半群，2)对于任意的$w\in F$来说，若$wH\cap H\neq\emptyset$且$Hw\cap H\neq\emptyset$，则$w\in H$，3)对于任意的$w\in F$来说，若$wH\cap Hw\cap H\neq\emptyset$，则$w\in H$．对于一个自由半群$F$里任意两个不同的字$u,v$来说，或者$u$和$v$是由它们所生成的子半群的自由生成元，或者有$w\in F$和自然数$k,l$，使得$u=w^k$，$v=w^l$，第二种情形成立，当且仅当$uv=vu$．在一个自由半群里，每一个具有三个生成元的子半群都是有限表现的，然而存在具有四个生成元的子半群不是有限表现的．

自由半群自然地产生于**自动机的代数理论**(automata, algebraic theory of)（见[5]，[6]），编码理论（见**字母表编码**（coding, alphabetical），[4]－[6]），以及形式语言和**形式文法**（grammer, formal）（亦见[3]，[5]，[6]）理论．与这些课题相关联的是在自由半群内解方程问题（见[7]－[9]）．有识别在一个自由半群里任意方程可解性的算法．

参考文献

[1] Clifford，A H and Preston，G B，The algebraic theory of semigroups，1-2，Amer Math Soc，1961－1967

[2] Ляпин，Е С，Полугруппы，М，1960（英译本 Lyapin，E S，Semigroups，Amer Math Soc，1974）

[3] Gross，M and Lentin，A，Introduction to formal grammers，Springer，1970（译自法文）

[4] Марков，А А，Введиние в теорию кодирования，М，1982

[5] Eilenberg，S，Automata，languages and machines，A-B，Acad Press，1974－1976

[6] Lallement，G，Semi-groups and combinatorial applications，Wiley，1979

[7] Lentin，A，Equations dans les monoids libres，Mouton，1972

[8] Хмелевский，Ю И，Уравнения в свободной полугруппе，

М , 1971 (Тр Матем ин-та АН СССР, т 107)

[9] Маканин, Г С , «Матем сб », 103 (1977), 2, 147–236

Л Н Шеврин 撰

【补注】 集合 A 上自由半群 F 的（范畴的）自由性质如下 对于每一个半群 S 和集合的映射 α $A \to S$, 存在唯一的半群同态 $F \to S$, 它是 α 的扩张．类似的性质对于自由幺半群也成立．

郝钢新 译

自由集 [**free set** , **свободное множество**], 域 K 上向量空间 X 中的

空间 X 中的线性无关向量组，即元素的集合 $A=\{a_t\}\subset X$, $t\in T$, 使从 $\sum\xi_t a_t=0$,（其中除有限个指数 t 外所有的 $\xi_t=0$）可推出对所有的 t 有 $\xi_t=0$ 非自由集也称为相关的（dependent）

域 K 上拓扑向量空间 X 中的自由集（拓扑自由集（topologically-free set））是这样的集 $A=\{a_t\}\subset X$, 对任何 $s\in T$, 由点 a_t $(t\neq s)$ 生成的闭子空间不包含 a_s 拓扑自由集是向量空间中的自由集，但其逆不真 例如在 $[0, 1]$ 上连续函数组成的赋范空间 C 中，函数 $\exp[2\pi k\iota x]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 构成拓扑自由集，而与之形成对照的是，函数组 x^k 不构成拓扑自由集（因为，例如 x 就包含在由 $\{x^{2k}\}$ 生成的闭子空间中）

一般地，X 中的所有（拓扑）自由集之集合在包含关系下不是归纳的，此外，它不必含有极大拓扑自由集 例如，设 X 是 $\mathbf{R}$ 上由连续函数构成的空间，并赋予如下的 Hausdoff 拓扑 X 中零点的基本邻域系由均衡吸收集 $V_{\delta,\varepsilon}=\{x \ |f(x)|\leqslant\delta$ 在一个测度不大于 ε 的开集（与 f 有关）外处处成立，$0<\varepsilon<1$, $\delta>0\}$ 组成．那么每个连续线性泛函为 0, X 不含有极大自由集

A 成为 X 中弱拓扑 $\sigma(X, X^*)$ 下的（拓扑）自由集的必要充分条件是：对每个 t, 存在 $b_t\in X^*$ 使 $\langle a_t, b_t\rangle\neq 0$, 和对一切 $s\neq t$, $\langle a_s, b_t\rangle=0$ 对局部凸空间来说，弱拓扑下的自由集是原拓扑下的自由集．

М И Войцеховский 撰 余庆余 译

自由变元 [**free variable** , **свободная переменная**], 变元的自由出现（free occurrence of a variable）

在语言的一个表示式中作为参数的变元的出现．这一概念的严格定义只有对**形式化语言**（formalized language）才能给出．每一个语言都有它自己的自由变元定义方式，这依赖于各个语言构成表示式的规则．其语义准则是下列条件· 由于某种固有的原因，用任一对象代替变元给定的某些出现后不能导致一个不合理的表示式．例如，在表示式 $\{(x, y)\cdot x^2+y^2=z^2\}$（表示半径为 z 的圆的点的集合）中，变元 z 是自由的，而 x 和 y 不是（见**约束变元**（bound variable））如果 f 表示映射 $X\times Y\to Z$, 并且 x 和 y 分别从 X 和 Y 取值，那么在表示式 $f(x, y)$ 中，变元 x 和 y 皆是自由的（并且如果把 f 视为函数变元，它也是自由的）.对一个固定的 x, 让 y 变化，就得到形如 $Y\to Z$ 的一个函数，记之为 $\lambda y f(x, y)$ 在这个表示式中 x 是自由的，y 不是．在表示式 $(\lambda y f(x, y))$ (y) 中 y 的最后一个出现是自由的，而其他两个出现不是，$(\lambda y f(x, y))$ (y) 表示函数 $\lambda y f(x, y)$ 在任一点 y 处的函数值，y 的第一个出现（在算子符号下）称为算子出现（operator occurrence），并且第二个出现称为约束出现（bound occurrence）

对于一个非形式化语言，即在现实的数学教科书中，对于个别的表示式不是总能确切地识别出自由变元和约束变元．例如，在 $\sum_{\iota<k}a_{\iota k}$ 中，依照上下文，变元 ι 可能是自由的并且 k 是约束的，或者相反，但它们不能同时是自由的．指出一个变元是自由的是通过其他办法实现的．例如，如果遇到上下文形如“设 $f(k)=\sum_{\iota<k}a_{\iota k}$”的表示式，那么 k 是自由的．如约定在 k 上没有求和，那么 k 是一个参数．表示式 $\{a_\iota\}$（数学中时常使用）有时表示一个元素的集合，此时变元 ι 是自由出现，有时它表示所有 a_ι 的集合，其中 ι 遍取某一指定的定义域内的元素，这时 ι 是约束变元．

В Н Гришин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kleene, S C , Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951（中译本 S C 克林，元数学导论，科学出版社，1984, 1985）

卢景波 译

自由向量 [**free vector** , **свободный вектор**]

见**向量**（vector）.

自由形成序列 [**freely-formed sequence** , **свободно становящаяся последовательность**]

见**直觉主义**（intuitionism）.

Frénet 公式 [**Frénet formulas** , **Френе формулы**]

正则曲线的单位切向量 τ, 法向量 ν 及**副法线**（binormal）向量 β 关于**自然参数**（natural parameter）s 的导数用这些向量及曲线的曲率 k_1、挠率 k_2 来表示的一个公式

$$\tau_s = k_1\nu,$$
$$\nu_s = -k_1\tau - k_2\beta,$$
$$\beta_s = k_2\nu$$

该公式是由 F Frénet (1847) 得到的

Д Д Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hsiung, C C, A first course in differential geometry, Wiley, 1981 沈纯理 译

Frénet 三棱形 [Frénet trihedron, Френе трехгранник], 自然三棱形 (natural trihedron)

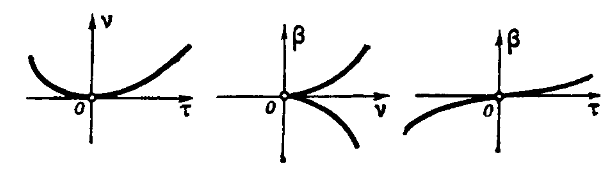
由从一条正则曲线 γ 的一点 P 分别按曲线的切向 τ, 法向 ν 及**副法线** (binormal) β 的方向发出的射线所构成的三面角. 如果坐标轴 x, y, z 分别位于 Frénet 三棱形的边上, 则曲线在此坐标系下的方程具有形式

$$x=\Delta s-\frac{k_1^2\Delta s^3}{6}+o(\Delta s^3),$$

$$y=\frac{k_1\Delta s^2}{2}+\frac{k_1\Delta s^3}{6}+o(\Delta s^3),$$

$$z=-\frac{k_1k_2}{6}\Delta s^3+o(\Delta s^3),$$

这里 k_1 和 k_2 是曲线的曲率和挠率, s 为**自然参数** (natural parameter). 当 $k_1\neq 0$ 和 $k_2\neq 0$ 时, 曲线在 Frénet 三棱形的各平面上的投影的定性形状能从图中看出.



此三面体是由 F. Frénet (1847) 研究的

Д Д Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hsiung, C C, A first course in differential geometry, Wiley, 1981 沈纯理 译

频率定理 [frequency theorem, частотная теорема]

一个陈述在控制论中 Лурье 方程 (Lur'e equations)

$$P^*H+HP+hh^*=G,\ H_q-h\kappa=g \tag{1}$$

的可解性条件的定理, 这里 $P, G=G^*, q, g, \kappa$ 分别是给定的 $n\times n$, $n\times n$, $n\times m$, $n\times m$ 和 $m\times m$ 矩阵, 而 $H=H^*$, h 是所求的 $n\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵 Лурье 方程有另外两个等价的形式 如果 $\det\kappa\neq 0$,

$$HQ_0H+(P_0^*H+HP_0)+G_0=0, \tag{2}$$

这里 $Q_0=Q_0^*\geqslant 0$, $G_0=G_0^*$, 而在一般情形

$$2\mathrm{Re}\,x^*H(Px+q\xi)=\mathscr{G}(x,\xi)-|h^*x-\kappa\xi|^2\ (\forall x,\xi), \tag{3}$$

这里 $\mathscr{G}(x,\xi)$ 是一个给定的两个向量 $x\in\mathbf{C}^n$, $\xi\in\mathbf{C}^m$ 的 Hermite 型

$$\mathscr{G}(x,\xi)=x^*Gx+2\mathrm{Re}(x^*g\xi)+\xi^*\Gamma\xi$$

这时, $\Gamma=\kappa^*\kappa\geqslant 0$, $G_0=g\Gamma^{-1}g^*-G$, $P_0=P-g\Gamma g^*$, $Q_0=q\Gamma^{-1}q^*$.

假设偶 $\{P,q\}$ 是可控制的 $\mathrm{rank}\|q,Pq,\ \ ,P^{n-1}q\|=n$, 则 Лурье 方程就简化为

$$P=\mathrm{diag}[\lambda_1,\ \ ,\lambda_n],\ \lambda_j+\lambda_n\neq 0,\ \lambda_j\in\mathbf{R}$$

的情形 如果 $m=1$, 并且所有这些矩阵都是实的, 那么 Лурье 方程的标量写法有形状

$$\sum_{k=1}^n q_k\frac{h_jh_k}{\lambda_j+\lambda_k}-h_j\sqrt{\Gamma}=\gamma_j,\ j=1,\ \ ,n,$$

这里 $h=[h_1,\ \ ,h_n]$ 是所求的向量.

频率定理是说, Лурье 方程是可解的充分必要条件为对于一切 $\xi\in\mathbf{C}^m$, $\omega=\mathbf{R}^1$, $\det\|i\omega I-P\|\neq 0$ (I 是单位矩阵),

$$\mathscr{G}[(i\omega I-P)^{-1}q\xi,\xi]\geqslant 0$$

频率定理也说明了确定矩阵 H 和 h 的一个程序, 并且断言, 如果

$$\det\Gamma\neq 0,\ \det\|i\omega I-P\|\neq 0,\ \mathscr{G}[\|i\omega I-P\|^{-1}q\xi,\xi]>0$$

(对一切 $\xi\neq 0$ 和一切 ω), 则存在 (唯一的) 矩阵 H 和 h 使得 (除方程 (3) 的情形外) $P+q\kappa^{-1}h^*$ 是一个 Hurwitz 矩阵 (见 [3])

具有形式 (2) 的 Лурье 方程有时也称为矩阵代数的 Riccati 方程 (matrix algebraic Riccati equation) 频率定理在解绝对稳定问题 ([2], [4]-[6]), 控制和适应问题 (例如, 见 [7]-[9]) 时被用到.

参考文献

[1] Лурье, А И, Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, М-Л, 1951
[2] Popov, V M, Hyperstability of control systems, Springer, 1973 (译自罗马尼亚文)
[3] Якубович, В А, 《Сиб матем ж》, **14** (1973), 2, 384-420
[4] Гелиг, А Х, Леонов, Г А, Якубович, В А, Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия, М, 1978
[5] Методы исследования нелинейных систем автоматического управления, М, 1975
[6] Siljak, D D, Nonlinear systems, Wiley, 1969
[7] Фомин, В Н, Фрадков, А Л, Якубович, В А, Адаптивное управление динамическими объектами, М, 1981
[8A] Willems, J C, Almost invariant subspaces an approach to high gain feedback design I Almost controlled invariant subspaces, *IEEE Trans Autom Control*, **1** (1981), 235-252
[8B] Willems, J C Almost invariant subspaces an approach to high gain feedback design I Almost conditionally

invariant subspaces, *IEEE Trans. Autom. Control*, **5** (1982), 1071－1084.

[9] Coppel, W., Matrix quadratic equations, *Bull. Austr. Math. Soc.*, **10** (1974), 377－401.

Г. А. Леонов 撰

【补注】 频率定理更多地被称为 Kalman - Якубович 引理 (Kalman - Yakubovich lemma).

参考文献

[A1] Kalman, R. E., Lyapunov functions for the problem of Lurie in automatic control, *Proc. Nat. Acad. Soc. USA*, **49** (1963), 2, 201－205.

[A2] Anderson, B. D. O. and Vongpanitlerd, S., Network analysis and synthesis : a modern systems theory approach, Prentice - Hall, 1973.

郝钢新 译

Fresnel 积分 [Fresnel integrals; Френеля интегралы]

特殊函数

$$C(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x^2}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x\cos t^2dt,$$

$$S(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x\sin t^2dt;$$

$$\lim_{x\to+\infty}C(x)=\lim_{x\to+\infty}S(x)=\frac{1}{2}.$$

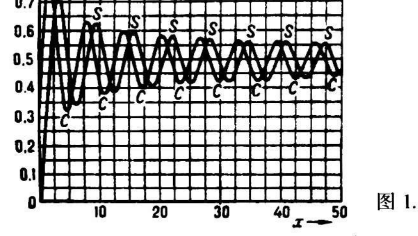


图 1.

Fresnel 积分能够表示为级数形式:

$$C(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{4k}}{(2k)!(4k+1)},$$

$$S(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{2(2k+1)}}{(2k+1)!(4k+3)}.$$

对于大的 x 值, 其渐近表示是:

$$C(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,x}\sin x^2+O\left[\frac{1}{x^2}\right],$$

$$S(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,x}\cos x^2+O\left[\frac{1}{x^2}\right].$$

在直角坐标系 (x, y) 中, 曲线

$$x=t,\ y=C\left[\frac{\pi}{2}t^2\right],\ z=S\left[\frac{\pi}{2}t^2\right],$$

(其中 t 是实参数) 在坐标平面上的投影是 **Cornu 螺线** (Cornu spiral) 和曲线 $y=C(\pi t^2/2)$, $z=S(\pi t^2/2)$ (见图 2).

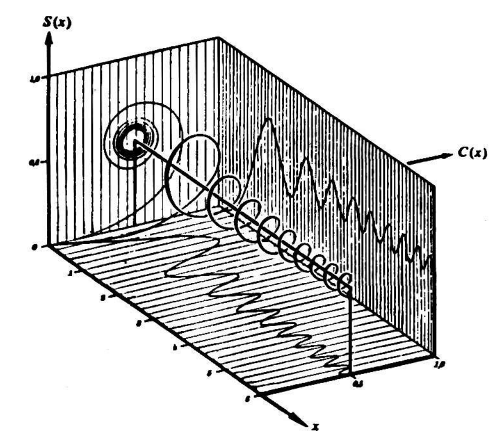


图 2.

广义 Fresnel 积 (见 [1]) 是下列形式的函数:

$$C(x,\alpha)=\int_x^{\infty}t^{\alpha-1}\cos t\,dt,$$

$$S(x,\alpha)=\int_x^{\infty}t^{\alpha-1}\sin t\,dt.$$

Fresnel 积分和广义 Fresnel 积分的关系如下:

$$C(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}C\left[x^2,\frac{1}{2}\right];$$

$$S(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}S\left[x^2,\frac{1}{2}\right].$$

参考文献

[1] Batman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions. Bessel functions, 2, McGraw - Hill, 1953.

[2] Jahnke, E. and Emde, F., Tables of functions with formulae and curves, Dover, reprint, 1945 (译自德文).

А. Б. Иванов 撰

【补注】 注意: 在应用中 Fresnel 积分有不同的定义, 例如在 [A3] 中, 它们定义为

$$C_1(z)=\int_0^z\cos\frac{\pi t^2}{2}dt,\ S_1(z)=\int_0^z\sin\frac{\pi t^2}{2}dt,$$

于是

$$C_1(z)=C\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}z\right]\text{和}S_1(z)=\left[S\sqrt{\frac{\pi}{2}}z\right].$$

在本文中定义的 Fresnel 积分与复变元 $z=\sqrt{i}\,x$ 的**概率积分** (probability integral)

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt$$

之间的关系是

$$\frac{\Phi(\sqrt{i}\,x)}{\sqrt{i}}=\sqrt{2}\,C(x)-i\sqrt{2}\,S(x)$$

参考文献

[A1] Segun, A and Abramowitz, M, Handbook of mathematical functions, Appl Math Ser, 55, Nat Bur Stand, 1970

[A2] Spanier, J and Oldham, K B, An atlas of functions, Hemisphere & Springer, 1987, Chapt 39

[A3] Lebedev, N N, Special functions and their applications, Dover, reprint, 1972(译自俄文) 张鸿林 译

Freudenthal 紧化 [Freudenthal compactification, Фрейденталя бикомпактное расширение]

具有零维剩余(见空间的剩余(remainder of a space))的极大紧化. 每个**边界紧空间**(peripherally-compact space)都有 Freudenthal 紧化(这是 H Freudenthal([1])证明的). 在所有具有零维剩余的紧化中存在唯一一个极大紧化，称为 Freudenthal 紧化 (有时 Freudenthal 紧化也指任何一个具有零维剩余的紧化). Freudenthal 紧化也可以定义为(唯一)具有零维剩余的完满紧化，或极小完满紧化(见[3])

参考文献

[1A] Freudenthal, H, Neuaufbau der Endentheorie, *Ann of Math*, **43** (1942), 2, 261 – 279

[1B] Freudenthal, H, Kompaktisierungen und Bikompaktisierungen, *Indag Math*, **13** (1951), 184 – 192

[2] Скляренко, Е Г, 《Докл АН СССР》, **120** (1958), 6, 1200 – 1203

[3] Скляренко, Е Г, 《Изв АН СССР, Сер матем》, **26** (1962), 3, 427 – 452, **27** (1963), 5, 1165 – 1180 И Г Кошевникова 撰

【补注】 亦见**紧扩张**(compact extension), **紧化**(compactification)

Freudenthal 紧化用于**拓扑群**(topological group))的理论. 胡师度、白苏华 译

Friedrichs 不等式 [Friedrichs inequality; Фридрихса неравенство]

形如

$$\int_\Omega f^2\,d\Omega\leqslant C\left\{\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2d\Omega+\int_\Omega f^2\,d\Gamma\right\} \quad (1)$$

的不等式，其中 Ω 是 n 维 Euclid 空间中点 $x=x(x_1, \ldots, x_n)$ 的有界区域，其 $(n-1)$ 维边界 Γ 满足局部 Lipschitz 条件，函数 $f\equiv f(x)\in W_2^1(\Omega)$ (**Соболев 空间**(Sobolev space))

Friedrichs 不等式的右端给出 $W_2^1(\Omega)$ 中的等价范数. 用 $W_2^1(\Omega)$ 中的其他等价范数，可以得到(见[2]) Friedrichs 不等式的如下变形

$$\int_\Omega f^2\,d\Omega\leqslant C\left\{\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2d\Omega+\left[\int_\Gamma f\,d\Gamma\right]^2\right\} \quad (2)$$

Friedrichs 不等式有一些到加权空间的推广(见[3]–[5], **加权空间**(weighted space), **嵌入定理**(imbedding theorems)) 设 $\Gamma\subset C^{(l)}$, r, p, α 是实数，r 是自然数，$1\leqslant p<\infty$ 称 $f\in W_{p,\alpha}^r(\Omega)$，如果范数

$$\|f\|_{W_{p,\alpha}^r(\Omega)}=\|f\|_{L_p(\Omega)}+\|f\|_{\omega_{p,\alpha}^r(\Omega)}$$

有限，其中

$$\|f\|_{L_p(\Omega)}=\left[\int_\Omega|f|^p\,d\Omega\right]^{1/p},$$

$$\|f\|_{\omega_{p,\alpha}^r(\Omega)}=\sum_{|k|=r}\|\rho^\alpha f^{(k)}\|_{L_p(\Omega)}$$

$$f^{(k)}=\frac{\partial^{|k|}f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}},\quad |k|=\sum_{i=1}^n k_i,$$

$\rho=\rho(x)$ 是 $x\in\Omega$ 到 Γ 的距离函数

设 s_0 是使

$$r-\alpha-\frac{1}{p}\leqslant s_0<r-\alpha+1-\frac{1}{p}$$

的自然数，那么，如果 $\Gamma\subset C^{(s_0+1)}$, $-p^{-1}<\alpha<r-p^{-1}$, $r/2\leqslant s_0$，对 $f\in W_{p,\alpha}^r(\Omega)$ 以下的不等式成立

$$\|f\|_{L_p(\Omega)}\leqslant C\left\{\sum_{l+s<r/2}\left\|\left[\left.\frac{\partial^s f}{\partial n^s}\right|_\Gamma\right]^{(l)}\right\|_{L_p(\Gamma)}+\|f\|_{w_{p,\alpha}^r(\Omega)}\right\},$$

其中 $(\partial^s f/\partial n^s)|_\Gamma$ 是在 Γ 上的点沿 Γ 的内法线的 s 阶导数.

也可以得出(2)型的不等式，在最简单的情形其形式为

$$\|f\|_{L_p(\Omega)}^p\leqslant C\left[\|f\|_{\omega_{p,\alpha}^1(\Omega)}^p+\left|\int_\Gamma u\tau\,d\Gamma\right|^p\right],$$

其中 $p,\gamma>1$, $-\frac{1}{p}<\alpha<1-\frac{1}{p}-\frac{1}{\gamma}$,

$$\tau\in L_\gamma(\Gamma),\ \int_\Gamma\tau\,d\Gamma\neq 0$$

所有常数 C 都与 f 无关

不等式是以 K O Friedrichs 的名字命名的，他对 $n=2$, $f\in C^{(2)}(\overline{\Omega})$ 得到了该不等式(见[1])

参考文献

[1] Friedrichs, K O, Eine invariante Formulierung des Newtonschen Gravitationsgesetzes und des Grenzuberganges von Einsteinschen zum Newtonschen Gesetz, *Math Ann*, **98** (1927), 566 – 575

[2] Соболев, С Л, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Ново-

сиб , 1962 (中译本 С Л 索伯列夫，泛函分析在数学物理中的应用，科学出版社，1959)
[3] Никольский, С М , Лизоркий, П И , 《Докл АН СССР》, **159** (1964), 3, 512 – 515
[4] Никольский, С М , Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд , М , 1977 (英译本 Nikol'skiĭ, S M , Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, Springer, 1975)
[5] Калиниченко, Д Ф , 《Матем сб》, **64** (1964), 3, 436 – 457
[6] Courant, R and Hilbert, D , Methods of mathematical physics, Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (中译本 R 柯朗，D 希尔伯特，数学物理方法，Ⅱ，科学出版社)
[7] Nirenberg, L , On elliptic partial differential equations, *Ann Scuola Norm Sup Pisa Ser* 3, **13** (1959), 2, 115 – 162
[8] Sandgren, L , A vibration problem, *Medd Lunds Univ Mat Sem* , **13** (1955), 1 – 84
Д Ф Калиниченко, Н В Мирошин 撰 余庆余 译

Frobenius 代数 [Frobenius algebra, Фробениусова алгебра]

域 P 上一个有限维代数 R, 作为左 R 模与 $\mathrm{Hom}_P(R,P)$ 是同构的．用表示论语言, 这意味着左和右的正则表示是等价的 域上每个有限群的群代数是 Frobenius 代数．每个 Frobenius 代数是**拟 Frobnius 环** (quasi - Frobenius ring) 反之不然．有限维 P 代数 R 的下列性质是等价的:

1) R 是 Frobenius 代数,

2) 存在一个非退化双线性型 f $R\times R\to P$ 使得 $f(ab, c)=f(a, bc)$ 对所有 $a, b, c\in R$ 皆成立,

3) 如果 L 是 R 的左理想, H 是 R 的右理想, 那么 (见**零化子** (annihilator))

$$\mathfrak{Z}_l(\mathfrak{Z}_r(L)) = L,\ \mathfrak{Z}_r(\mathfrak{Z}_l(H)) = H,$$
$$\dim_P \mathfrak{Z}_r(L)+\dim_P L = \dim_P R = =\dim_P \mathfrak{Z}_l(H)+ \dim_P H$$

Frobenius 代数首先出现在 G. Frobenius 的论文 [3] 中．

参考文献

[1] Curtis, C W and Reiner, I , Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962
[2] Faith, C , Algebra rings, modules and categories, 1–2, Springer, 1973–1976
[3] Frobenius, G , Theorie der hyperkomplexen Grossen, *Sitzungsber Konigl Preuss Akad Wiss* , **24** (1903), 504–537, 634–645
Л А Скорняков 撰

【补注】 一个代数 A 是 Frobenius 代数的判别法，存在 A 上的一个线性型 φ 使得 如果 $\varphi(ab)=0$ 对所有 $a\in A$ 成立，那么 $b=0$ 进一步，如果 φ 对所有 $a, b\in A$ 满足 $\varphi(ab)=\varphi(ba)$, 那么 A 称为一个**对称代数** (symmetric algebra)

半单代数及群代数都是对称代数的例子．

许永华 译

Frobenius 自同构 [Frobenius automorphism, Фробениуса автоморфизм]

Galois 群中的一个特殊形式的元素 它在类域论中起关键作用 设 L 是有限域 K 的代数扩张，则 Frobenius 自同构 $\varphi_{L/K}$ 定义为 $\varphi_{L/K}(a)=a^q$，其中 $a\in L$, $q=|K|$ (K 的元素个数)．当 L/K 为有限扩张时，$\varphi_{L/K}$ 生成 Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 当 L/K 为无限扩张时，$\varphi_{L/K}$ 是 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 的拓扑生成元 若 $L\supset E\supset K$ 且 $[E\ K]<\infty$, 则 $\varphi_{L/E}=\varphi_{L/K}^{[E\ K]}$

设 k 为具有有限剩余类域 $\bar{k}$ 的局部域，K 是 k 的非分歧扩张，则剩余类域扩张的 Frobenius 自同构 $\varphi_{\bar{K}/\bar{k}}$ 可以唯一地提升为自同构 $\varphi_{K/k}\in\mathrm{Gal}(K/k)$, 称为**非分歧扩张 K/k 的 Frobenius 自同构** 设 $|\bar{k}|=q$, $\mathcal{O}_K$ 为 K 的整数环，$\mathfrak{p}$ 为 $\mathcal{O}_K$ 的极大理想，则 Frobenius 自同构 $\varphi_{K/k}$ 由下述条件唯一决定 对任一 $a\in\mathcal{O}_K$ 有 $\varphi_{K/k}(a)\equiv a^q \pmod{\mathfrak{p}}$ 设 K/k 为局部域的任一 Galois 扩张，任一自同构 $\varphi\in\mathrm{Gal}(K/k)$ 若在 K 的最大非分歧子扩张上诱导出上述意义下的 Frobenius 自同构，有时也称为 K/k 的 Frobenius 自同构

设 K/k 为整体域的 Galois 扩张，$\mathfrak{p}$ 是 k 的素理想，$\mathfrak{P}$ 是 K 中在 $\mathfrak{p}$ 之上的某一素理想 又设 $\mathfrak{P}$ 在 K 中不分歧，$\varphi_{\mathfrak{P}}\in\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}})$ 是局部域非分歧扩张 $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$ 的 Frobenius 自同构 如果将 Galois 群 $\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}})$ 与 $\mathfrak{P}$ 在 $\mathrm{Gal}(K/k)$ 中的分解子群等同，则 φ 可看作 $\mathrm{Gal}(K/k)$ 中的元素，这个元素称为对应素理想 $\mathfrak{P}$ 的 Frobenius 自同构．若 K/k 为有限扩张，由 Чеботарев **密度定理** (Chebotarev density theorem) 可知，对任一自同构 $\sigma\in\mathrm{Gal}(K/k)$, 存在无限个在 K/k 中不分歧的素理想 $\mathfrak{P}$ 使 $\sigma=\varphi_{\mathfrak{P}}$ 对任一 Abel 扩张，$\varphi_{\mathfrak{P}}$ 仅依赖于 $\mathfrak{p}$, 这时 $\varphi_{\mathfrak{P}}$ 记为 $(\mathfrak{p}, K/k)$, 称为素理想 $\mathfrak{p}$ 的 **Artin 符号** (Artin symbol)

参考文献

[1] Weil, A , Basic number theory, Springer, 1974
Л В Кузьмин 撰 裴定一 译 赵春来 校

Forbenius 自同态 [Frobenius endomorphism, Фробениуса эндоморфизм]

q 个元素的有限域 $\mathbf{F}_q$ 上**概形** (scheme) X 的**自同态** (endomorphism) φ $X\to X$, 使得 φ 限制在 $X(\mathbf{F}_q)$ 上是恒等映射，并且结构层的映射 φ^* $\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_X$ 是自乘到 q 次幂的映射 (即把 t 映到 t^q). Frobenius 自同态是纯不可分态射，且具有零微分．对于定义在 $\mathbf{F}_q$ 上的仿射簇

$X \subset A^n$, Frobenius 自同态 φ 把点 $(x_1, \quad , x_n)$ 映到 $(x_1^q, \quad , x_n^q)$

定义在 $\mathbf{F}_q$ 上的 X 的几何点的个数等于 φ 的不动点的个数，因此，能够利用 **Lefschetz 公式** (Lefschetz formula) 来确定这些点的个数

参考文献

[1] Hartshorne, R , Algebraic geometry, Springer, 1977

Л В Кузьмин 撰

【补注】 这里，$X(\mathbf{F}_q)$ 是 X 的 $\mathbf{F}_q$ 点的集合，即 X 的定义在 $\mathbf{F}_q$ 上的点的集合

参考文献

[A1] Gabriel, P , Etude infinitésimal des schémas en groupes, in M Demazure and A Grothendieck (eds) *SGA*3 *Exp* Ⅶ, Lecture notes in math, Vol 151, Springer, 1970

蔡金星 译

Frobenius 公式 [Frobenius formula, Фробениуса формула]

一个将广义 **Vandermonde 行列式** (Vandermonde determinant) 与通常 Vandermonde 行列式之间的关系表成幂的和形式的公式．一个**对称群的表示** (representation of the symmetric groups) 的特征标作为系数在 Frobenius 公式中出现

令 $x_1, \quad , x_n$ 是独立变量　对于满足条件 $\lambda_1 \geqslant \quad \geqslant \lambda_n$ 的任意非负整数的 n 元组 $\lambda=(\lambda_1, \quad , \lambda_n)$，令

$$W_\lambda = \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & & x_n^{\lambda_1+n-1} \\ x_1^{\lambda_2+n-2} & & x_n^{\lambda_2+n-2} \\ & & \\ x_1^{\lambda_n} & & x_n^{\lambda_n} \end{vmatrix},$$

则 W_0 就是通常的 Vandermonde 行列式．令 $\Sigma\lambda_i=m$，则舍去零之后，n 元组 λ 可以看成数 m 的一个划分．考虑对应的对称群 S_m 的不可约表示 T_λ　对于 m 的任意划分 $\mu=(\mu_1, \quad , \mu_r)$，用 $a_{\lambda\mu}$ 表示 T_λ 的特征标在由 μ 所确定的 S_m 的共轭类上的值，用 c_μ 表示这个类里任意置换的中心化子的阶　令 $s_\mu=s_{\mu_1} \quad s_{\mu_r}$，这里 $s_k=x_1^k+ \quad +x_n^k$，则

$$\frac{W_\lambda}{W_0}=\sum_\mu a_{\lambda\mu}c_\mu^{-1}s_\mu,$$

在这里对 m 的一切 (无序的) 划分求和．如果划分 μ 含有 k_1 个 1, k_2 个 2，等等，则

$$c_\mu=k_1!\,k_2! \quad 1^{k_1}2^{k_2}$$

如果 $n \geqslant m$，则 Frobenius 公式可以写成以下形式

$$\sum_\lambda a_{\lambda\mu}W_\lambda=s_\mu W_0,$$

这里对 m 的一切划分求和 (添进适当数目的零)　最后的公式可以用来计算对称群的特征标．就是说，$a_{\lambda\mu}$ 是多项式 $s_\mu W_0$ 里 $x_1^{\lambda_1+n-1}x_2^{\lambda_2+n-2} \quad x_n^{\lambda_n}$ 的系数．

参考文献

[1] Murnaghan, F D , The theory of group representations, J Hopkins, Baltimore, 1938

Э Б Винберг 撰

【补注】 亦见**群表示的特征标** (character of a representation of a group)

参考文献

[A1] Boerner, H , Representations of groups, North-Holland, 1970

[A2] Littlewood, D E , The theory of group characters, Oxford Univ Press, 1950

[A3] Macdonald, I G , Symmetric functions and Hall polynomials, Clarendon Press, 1979

[A4] Wybourne, B G , Symmetry principles and atomic spectroscopy, Wiley (Interscience), 1970

郝钢新 译

Frobenius 定理 [Frobenius theorem, Фробениуса теорема]

描述所有有限维无零因子结合实代数的一个定理，它是由 G Frobenius ([1]) 证明的　Frobenius 定理叙述如下

1) 实数域和复数域是仅有的有限维无零因子的结合的交换实代数

2) 四元数体是仅有的有限维无零因子的非交换的结合的实代数．

对所有的无零因子的有限维交错代数也有一个描述

3) Cayley 代数是仅有的无零因子的有限维非结合的实交错代数

这三个断言的综合称为广义 Frobenius 定理 (generalized Frobenius theorem) 在这定理中出现的所有代数被证明是有一且只有唯一除法的代数　Frobenius 定理不能推广到非交错代数的情形　但已经证明，所有有限维无零因子的实代数的维数只能是 1, 2, 4 或 8

参考文献

[1] Frobenius, G , Über lineare Substitutionen and bilineare formen, *J Reine Angew Math* , **84** (1878), 1-63

[2] Курош, А Г , Лекций но общей алгебре, 2 изд , М , 1973 (中译本　А Г　库洛什，一般代数学讲义，上海科学技术出版社，1964)

【补注】 亦见**交错环与交错代数** (alternative rings and algebras)

具有实系数的可除代数只能是实数、复数、四元数及 Cayley 数 (或八进制数 (octonians)) 代数，此定理由 M Kervaire ([A1]) 和 J Milnor ([A2]) 给出　它的证明依赖于拓扑方法以及 R Bott 的著名结果

除了上面提到的结果及 **Frobenius 定理** (关于

Pfaff 方程组的)(Frobenius theorem (on Pfaffian systems))外，还有一些（有时）以 Frobenius 定理命名的其他结果，其中有

i) 关于非负矩阵特征值的 **Perron-Frobenius 定理**(Perron-Frobenius theorem)

ii) 关于有限群理论中的下述结果．令 H 是有限群 G 的子群且对于 $x \in G \setminus H$ 有 $xHx_x^{-1} \cap H = \{e\}$，那么 $G \setminus \bigcup_x x(H \setminus \{e\})x^{-1} = N$ 是一个正规子群并且 $G = HN$ 此定理的推广通常称为 Frobenius-Wielandt 定理(Frobenius-Wielandt theorem)

iii) 关于正规 p 补定理，见**正规 p 补**(normal p-complement)

iv) 关于 Abel 簇的一个结果 令 A 是 **C** 上的一个 **Abel 簇**(Abelian variety) D 是 A 上的一个**除子**(divisor)，$\hat{A}$ 是 A 的 **Picard 簇**(Picard variety) 令 ψ_D $A \to \hat{A}$ 由除子 $(D_a)-D$ 的线性等价类 $a \mapsto$ 所定义，其中 D_a 是平移 $A \to A, b \mapsto a+b$ 下 D 的象 存在元素 $a_1, \quad, a_n$ 使得 $D_{a_1} \cdot \quad \cdot D_{a_n}$ 的交(积)有定义($n = \dim A$) 令 n_D 是零循环 $D_{a_1} \cdot \quad \cdot D_{a_n}$ 的次数 于是映射 ψ_D 的次数等于 $(n!)^{-1} n_D$ (Frobenius 定理(Frobenius theorem))

v) 关于诱导表示的 Frobenius 互反定理(Frobenius reciprocity theorem) 见**诱导表示**(induced representation)

vi) Frobenius-Schur 定理(Frobenius-Schur theorem) 令 K 是代数闭域，A 是 K 上一个代数，令 $M_1, \quad, M_k$ 是 K 上维数为 $n_r (r = 1, \quad, k)$ 的非同构的不可约左 A 模，令 φ_r $A \to \mathrm{End}_K(M_r)$ 是对应表示，表值函数为 f_{ij}^r，$1 \leqslant i, j \leqslant n_r, r = 1, \quad, k$ 那么这些坐标函数 f_{ij}^r 在 K 上是线性无关的

参考文献

[A1] Kervaire, M , Non-parallelizability of the n-sphere for $n > 7$, *Proc Nat Acad Sc USA*, **44** (1958), 280-283

[A2] Milnor, J W , Some consequences of a theorem of Bott, *Ann of Math* , **68** (1958), 444-449

[A3] Curtis, C W and Reiner, I , Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962

许永华、张印火 译 牛凤文 校

Frobenius 定理(关于 Pfaff 方程组的) [Frobenius theorem (on Pfaffian systems), Фробениуса теорема]

一个关于使 Pfaff 方程组(见 **Pfaff 方程**(Pfaffian equation))成为完全可积的条件，或(用几何术语)使一可微流形上 n 维切子空间的已给场成为某个**叶状结构**(foliation)的切场的条件的定理 关于 Frobenius 定理的若干等价描述，见**对合分布**(involutive distribution)，**Cauchy 问题**(Cauchy problem)，关于具最少可微性要求的论述，见[2] 定理的名称与[1]中的记载有关，但不符合其中所说的有关历史叙述

参考文献

[1] Frobenius, G , Ueber das Pfaffsche Problem, *J Reine Angew Math* **82** (1877), 230 - 315

[2] Hartman, P , Ordinary differential equations, Birkhauser, 1982

Д В Аносов 撰

【补注】 G Frobenius 实际上还讨论一次**微分形式**(differential form)的标准形式．

郑维行 译 沈永欢 校

Frommer 法 [Frommer method, Фроммера метод]

研究二阶常微分方程自治系统

$$\dot{p}=f(p), \quad p=(x,y), \; f=(X,Y) \quad G \to \mathbf{R}^2 \tag{1}$$

的奇点的一种方法，其中 f 是在区域 G 中解析或充分光滑的函数

假设 $O=(0,0)$ 是系统 (1) 的奇点，即 $f(O)=0$，并假设 X 和 Y 在 O 点解析且没有在 O 点取零值的公共解析因子 Frommer 法能明确找出 (1) 的所有 TO 曲线 (TO-curves) —— 沿一定方向进入 O 的系统的半轨道 (1) 的每一个不落在轴 $x=0$ 上的 TO 曲线是方程

$$y' = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)} \tag{2}$$

的 O 曲线(O-curve)(即在 O 点附近能表示为形式

$$y=\varphi(x), \varphi(x) \to 0, \quad x \to 0, \tag{3}$$

其中 φ $I \to \mathbf{R}$ 是 (2) 的一个解，$I=(0,\delta)$ 或 $(-\delta, 0)$，$\delta>0$，$\varphi(x) \equiv 0$ 或对每一个 $x \in I$，$\varphi(x) \neq 0$)，反之亦然．

首先在区域 $x>0$ 中考虑方程 (2) 如果它是一个简单 Bendixson 方程 (simple Bendixson equation)，即如果它满足条件

$$X(x,y) \equiv x^h, \; h \geqslant 1, \; Y_y'(0,0)=a \neq 0,$$

那么，对于 $a<0$，在区域 $x>0$ 中它有唯一的一条 O 曲线，对于 $a>0$，区域 $x>0$，$x^2+y^2<r^2$ 是一抛物扇形，其中 r 是一个充分小的正数 (见**常微分方程论中的扇形** (sector in the theory of ordinary differential equations)) 否则，要应用 Frommer 法来显示 (2) 在区域 $x>0$ 中的 O 曲线．应用它是基于这样一个事实，即方程 (2) 的每一条 O 曲线 (3)，$\varphi(x) \neq 0$，在 O 处有完全确定的渐近特性，换句话说，它能表示为形式

$$y=x^{v(x)} \operatorname{sign} \varphi(x),$$

并且容许有一个有穷或无穷的极限

$$v=\lim_{x \to 0} v(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln|\varphi(x)|}{\ln x} \in [0, +\infty],$$

称为它在 O 点曲率的阶 (order of curvature)，并且对于 $\nu\in(0,+\infty)$，它也容许有一个有穷或无穷的极限

$$\gamma=\lim_{x\to 0}\varphi(x)x^{-\nu}\in[-\infty,+\infty],$$

称为它在 O 点的曲率的测度 (measure of curvature) 这里规定 O 曲线 $y=0\ (x\in(0,\delta))$ 的曲率的阶 $\nu=+\infty$.

Frommer 法中的第一步组成如下 用代数方法计算曲率所有可能的阶 ν(它们的数目总是有限的)，并对每一个阶 $\nu\in(0,+\infty)$ 计算 (2) 的 O 曲线曲率的所有可能的测度．在这个方法的一般理论的基础上，能够阐明 (2) 是否有具有给定的可能的曲率阶和曲率测度的 O 曲线的问题，除了有限个 ($\geqslant 0$) 所谓特征对 (characteristic pairs) (ν,γ) 以外 对于它们中的每一个有 $\nu=r/s$，其中 r 和 s 是自然数，且 $0<|r|<+\infty$ 因此，替换 $x=x_1^s$，$y=(\gamma+y_1)x_1^r$ 把 (2) 变成相同形式的导出方程 (derived equation) (2_1)，将 (2) 是否具有曲率阶 ν 和曲率测度 γ 的 O 曲线的问题转换为 (2_1) 在区域 $x_1>0$ 中是否有 O 曲线的问题

如果 (2) 没有特征对或者如果它的每一个导出方程证明是简单 Bendixson 方程，那么 (2) 的在区域 $x>0$ 中的所有 O 曲线在进程的第一步已经表示出来．否则执行第二步——根据第一步的计划，研究非简单 Bendixson 方程的导出方程 在此过程中得到第二系列的导出方程，等等．一般讲，在每一步上进程会产生分支，但是对一个固定的方程 (2)，进程的分支数是有限的，并且每一分支终止于或是一个简单 Bendixson 方程，或是一个没有特征对的约化方程 (reduced equation)．

这样，借助 Frommer 法的有限步能在区域 $x>0$ 中将 (1) 的所有 TO 曲线与它们在 O 点的渐近特性一起表示出来．在 (1) 中把 x 改为 $-x$，可以对区域 $x<0$ 同样做，而直接验证能够确定 $x=0$ 的半轴是否为 TO 曲线 在 O 点邻域内，(1) 的所有轨道的特性能在这个信息的基础上按如下方式确定

如果系统 (1) 没有 TO 曲线，那么对于它 O 是中心 (见**拓扑动力系统的中心** (centre of a topological dynamical system))，**焦点** (focus) 或**中心焦点** (centro-focus)．如果 (1) 的所有 TO 曲线的集合 H 是非空的，那么用 Frommer 法获得的关于它在 O 点渐近特性的信息能将 H 分成有限个不相交的 TO 曲线丛 H_1, , $H_k\ (k\geqslant 2)$，其中的每一个或者是开的 即它由一类 (正的或负的) 充满一个区域的半轨道构成，或者是"闭的" 它由单个 TO 曲线构成 这些丛的代表 l_1, , l_k 在 O 点有不同的渐近特性，当沿着充分小半径 r 的圆 C 围绕 O 点时，能对这些丛建立一个循环序列阶，并且它们将以 C 为边界的圆盘划分成 k 个扇区 S_1, · , S_k．

假设扇区 $S_i\ (i\in\{1,\ ,k\})$ 以 TO 曲线 l_i 和 l_{i+1} 作为它的侧棱，这里 l_{k+1} 和 l_1 相同．那么根据丛 H_i 和 H_{i+1} 分别是 a) 两个开的，b) 两个"闭的"或者 c) 不同类型，得到 S_i 分别是 a) 椭圆的，b) 双曲的或者 c) 抛物的．

于是，用 Frommer 法能够在有限步中或是对系统 (1) 找到一个连接点 O 的双曲的、抛物的和椭圆的扇区的循环序列，因而由此完全确定在 O 点邻域内它的轨道分布的拓扑类型，或是去说明出现在 O 点的区分中心，焦点和中心焦点的问题 (见**中心和焦点问题** (centre and focus problem))

这个方法是由 M Frommer 给出的 ([1]) 它也适合于研究三阶系统的奇点．

参考文献

[1] Frommer, M , Die Integralkurven einer gewohnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen, *Math Ann* , **99** (1928), 222 – 272

[2] Андреев, А Ф , Особые точки дифференциальных уравнений, Минск, 1979

А Ф Андреев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hartman, P , Ordinary differential equations, Birkhauser, 1982, 220 – 227

周芝英 译 叶彦谦 校

Froude 数 [Froude number , Фруда число]

在引力影响重要的情况下使用的液体或气体运动的相似判据之一 Froude 数表征作用在液体或气体基元容积上的惯性力和重力间的关系．Froude 数为

$$\mathrm{Fr}=\frac{v^2}{gl},$$

其中 v 为流动速度 (或运动物体的速度)，g 为重力加速度，而 l 为流动或物体的特征长度．

Froude 数是 W Froude 于 1870 年引进的

取材于 БСЭ-3 同名条目

【补注】

参考文献

[A1] Седов, Л И , Методы подобия и размерности в механике, изд 8 е, 1977 (中译本 Л И 谢多夫，力学中的相似方法与量纲理论，科学出版社，1982)

[A2] Birkhoff, G , Hydrodynamics, Priceton Univ Press, 1960

沈 青 译

冻结积分 [frozen-in integral , вмороженности интеграл]

理想导电介质极限情况下的磁场感应方程的积

分．冻结积分的物理意义是，由于液体的运动，磁力线也随液体质点一起运动

理想导电介质运动时，磁场强度 **H** 由下列方程描述

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\mathbf{H}}{\rho}\right]=\left[\frac{\mathbf{H}}{\rho},\nabla\right]\mathbf{v},$$

这里 ρ 是密度，$\mathbf{v}$ 是介质的速度．描述磁力线线元 $d\mathbf{l}$ 变化的方程为

$$\frac{d}{dt}d\mathbf{l}=(d\mathbf{l},\nabla)\mathbf{v}$$

矢量 **H** 和 $d\mathbf{l}$ 是共线的

$$\frac{\mathbf{H}}{\rho}=\text{常数}\cdot d\mathbf{l}$$

称为冻结积分（forzen-in integral）的下列方程成立

$$\frac{\mathbf{H}\,d\mathbf{l}_0}{\rho}=\frac{\mathbf{H}_0}{\rho_0}d\mathbf{l},$$

这里下标“0”系指初始时刻的参数值．

由冻结积分得出，穿过任何被液体质点周线所包围的面的磁通与时间无关．

参考文献

[1] Cowling, T G , Magneto-hydrodynamics, Interscience, 1957（中译本 T G ，柯林，电磁流体力学，科学出版社，1960）

[2] Ландау, Л Д , Лифшиц, Е М , Электродинамика сплошных сред, М , 1959（中译本 Л Д 朗道，Е М 栗弗席兹，连续媒质电动力学，人民教育出版社，1963）

[3] Куликовский, А Г , Любимов, Г А , Магнитная гидродинамика, М , 1962（中译本 А Г 库里柯夫斯基，Г А 留比莫夫，磁流体力学，上海科学技术出版社，1966）

А П Фаворский 撰 唐福林 译

Fubini 形式 [Fubini form, Фубини форма]

作为**射影微分几何**（projective differential geometry）构造的基础的微分形式（二次型 F_2 或者三次型 F_3）它们是由 G Fubini 导入的（见[1]）

设 $x^\alpha(u_1,u_2)$ 是曲面上具有内蕴坐标 u^1，u^2 的点的（齐次）射影坐标，令

$$b_{ij}=(x^\alpha,x_1^\alpha,x_2^\alpha,x_{ij}^\alpha),$$

$$b_{ijk}=a_{ijk}-\frac{1}{2}\partial_k b_{ij}+\frac{1}{2}b_{ij}\partial_k\ln\sqrt{|b|},$$

$$b=\det(b_{ij}),\ a_{ijk}=(x^\alpha,x_1^\alpha,x_2^\alpha,x_{ijk}^\alpha)$$

于是 Fubini 形式定义如下．

$$F_2=b_{ij}du^idu^j|b|^{-1/4},\ F_3=b_{ijk}du^idu^jdu^k|b|^{-1/4}$$

但是，射影坐标本身不是唯一确定的 它们允许导入任意的因子及齐次线性变换 因此 Fubini 形式只定义到允许差一个因子，为了避免由此引起的困难，可将坐标归一化后来定义这些形式 例如，Fubini 形式在单模射影变换下保持其值（允许差一个符号） 比率 F_3/F_2 称为射影线元（projective line element），它与归一化无关（于是确定了射影度量元素）

由**第二基本形式**（second fundamental form）及（由 **Darboux 张量**（Darboux tensor）定义的）Darboux 形式出发，利用度量手段所构造出来的 Fubini 形式

$$f_2=\lambda F_2,\ f_3=\lambda F_3$$

在等-仿射变换下是不变的，于是能被用来作为等-仿射微分几何的基础

参考文献

[1] Fubini, G and Čech, E , Geometria proettiva differenziale, 1-2, Bologna, 1926-1927

[2] Каган, В Ф , Основы теории поверхностей , т 2, М -Л , 1948

[3] Широков, П А , Широков, А П , Аффинная дифференциальная геомеирия , М , 1959（英译本 Shirokov, P A and Shirokov, A P , Differentialgeometrie, Teubner, 1962）

М И Войцеховский 撰 沈纯理 译

Fubini 模型 [Fubini model, Фубини интерпретация]

在二维椭圆平面 S_2 的偶对上表出三维椭圆空间 S_3 中直线的流形的一种模型 S_3 中互极的直线偶能以一一方式用 Euclid 空间 $\mathbf{R}^3$ 中两个单位半径的球面的对径点偶来表出．如将对径点等同，则能利用两个椭圆平面 S_2 的点得到 S_3 中极线偶的一一表示．极线偶的流形同胚于这两个平面 S_2 的拓扑乘积．在 Fubini 模型下，S_3 的运动可用两个平面 S_2 的独立运动来表出 S_3 的每一个连通运动群同构于 S_2 的两个运动群的直积，S_3 的运动群同构于平面 S_2 偶的两个运动群的直积．

也能对三维双曲空间 ${}^2S_3$ 构造 Fubini 模型．在这情形下，能利用 ${}^3S_5$ 中射影空间 P_3 的 **Plucker 解释**（Plucker interpretation） ${}^2S_3$ 的运动群同构于两个 ${}^1S_2$ 的运动群的直积，在 Plucker 模型下，它能表为 ${}^3S_5$ 的运动群中由映两个互极的双曲 2 平面到其自身中的那些运动所构成的子群 这些平面与 ${}^3S_5$ 的绝对形的交线形成了一族能生成一个直纹二次曲面的直线 ${}^2S_3$ 中极椭圆直线偶的流形同胚于两个平面 ${}^1S_2$ 的真区域的拓扑乘积，即两个圆盘的拓扑乘积，且极双曲直线偶的流形同胚于两个平面 ${}^1S_2$ 的理想区域的乘积，即两个 Mobius 带的拓扑乘积．

此模型由 G Fubini（[1]）提出．

参考文献

[1] Fubini, G , *Ann Scuola Norm Sup Pisa*, **9**（1904），

1 - 74

[2] Розенфельд, Б А, Неевклидовы пространства, М, 1969

Л А Сидоров 撰

【补注】 Fubini 构造可容易地由四元数给出的 SO(4) 正交群的分解中得出，见 [A1]

参考文献

[A1] Berger, M, Geometry, 2, Springer, 1987, Sect, 8, 9 (中译本 M 贝尔热，几何，2，科学出版社，1989)

沈纯理 译

Fubini-Study 度量 [Fubini-Study metric, Фубини-Штуди метрика]

一个复射影空间 CP^n 上由 C^{n+1} 中 Hermite 标量积定义的 **Hermite 度量** (Hermitian metric)．它几乎同时由 G Fubini([1]) 和 E Study ([2]) 引进．Fubini-Study 度量是由公式

$$ds^2 = \frac{1}{|x|^4}\left(|x|^2|dx|^2 - (x, dx)(\bar{x}, d\bar{x})\right)$$

给出的，这里 $(\cdot, \cdot)$ 是 C^{n+1} 中的标量积和 $|x|^2 = (x, x)$，两点 $\hat{x} = Cx$，$\hat{y} = Cy$ (这里 $x, y \in C^{n+1}\backslash\{0\}$) 之间的距离 $\rho(\hat{x}, \hat{y})$ 是由公式

$$\cos\rho(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{|(x, y)|}{|x| \cdot |y|}$$

决定的．Fubini-Study 度量是 Kahler 度量 (甚至是一个 Hodge 度量)，相伴的 Kahler 形式是

$$\omega = \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\ln|z|^2$$

在差一个比例的情况下，Fubini-Study 度量是 CP^n 上在保持标量积的酉群 $U(n+1)$ 下不变的唯一 Riemann 度量．空间 CP^n 赋以 Fubini-Study 度量是一个秩为 1 的紧 Hermite 对称空间．它也称为椭圆 Hermite 空间 (elliptic Hermitian space)

参考文献

[1] Fubini, G, Sulle metriche definite da una forme Hermitiana, *Atti Istit Veneto*, **63** (1904), 502 - 513

[2] Study, E, Kürzeste Wege im komplexen Gebiet, *Math Ann*, **60** (1905), 321 - 378

[3] Cartan, E, Leçons sur la géometrie projective complexe, Gauthier-Villars, 1950

[4] Helgason, S, Differential geometry and symmetric spaces, Acad Press, 1962

[5] Chern, S S, Complex manifolds, Univ Recife, 1959

А Л Онищик 撰

【补注】 下面的参考文献 [A1] 是 [4] 的扩充和修正本．Fubini-Study 度量在 (多维) 复分析中有极广泛的应用 ([A2], [A3])．

关于 Hodge 和 Kahler 度量见 **Kahler 度量** (Kahler metric)

参考文 献

[A1] Helgason, S, Differential geometry, Lie group, and symmetric spaces, Acad Press, 1978

[A2] Wells, jr, R O, Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980

[A3] Chirka, E M, Complex analytic sets, Kluwer, 1989 (译自俄文)．

陈志华 译

Fubini 定理 [Fubini theorem, Фубини теорема]

建立重积分与累次积分之间联系的一条定理 设 $(X, \mathfrak{S}_X, \mu_x)$ 与 $(Y, \mathfrak{S}_Y, \mu_y)$ 是两个测度空间，其中 μ_x，μ_y 分别是定义在 σ 代数 $\mathfrak{S}_X$ 与 $\mathfrak{S}_Y$ 上的 σ 有限完全测度 若函数 $f(x, y)$ 在乘积空间 $X\times Y$ 上关于 μ_x 和 μ_y 的乘积测度 $\mu=\mu_x\times\mu_y$ 可积，则几乎对一切 $y\in Y$，作为变元 x 的函数 $f(x, y)$ 在 X 上关于测度 μ_x 可积，函数 $g(y)=\int_X f(x, y)d\mu_x$ 在 Y 上关于 μ_y 可积，且有等式

$$\int_{X\times Y} f(x, y)d\mu = \int_Y d\mu_y \int_X f(x, y)d\mu_x \qquad (1)$$

特别，对于 $X=\mathbf{R}^m$，$Y=\mathbf{R}^n$，$X\times Y=\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^{m+n}$ (Euclid 空间)，μ_x，μ_y 与 μ 为相应的 Lebesgue 测度与 $f=f(x, y)$ 为 $\mathbf{R}^{m+n}$ 上 Lebesgue 可测函数时，$x\in\mathbf{R}^m$，$y\in\mathbf{R}^n$，Fubini 定理成立 在此情形下，公式 (1) 取下列形式

$$\iint_{\mathbf{R}^{m+n}} f(x, y)\, d(x, y) = \int_{\mathbf{R}^n} dy \int_{\mathbf{R}^m} f(x, y)\, dx \qquad (2)$$

对于定义在任意 Lebesgue 可测集 $E\subset\mathbf{R}^{m+n}$ 上的函数 f，为使重积分表示成累次积分，必须将 f 扩充定义到整个 $\mathbf{R}^{m+n}$ 上使在 E 外 f 取零值，然后应用 (2) 亦见**累次积分** (repeated integral)

此定理为 G Fubini ([1]) 所建立．

参考文献

[1] Fubini, G, Sugli integrali multipli, in Opere scelte, Vol 2, Cremonese, 1958, 243-249

Л Д Кудрявцев 撰 郑维行 译

Fuchs 方程 [Fuchsian equation, Фукса уравнение], Fuchs 类方程 (equation of Fuchsian class)

复域中具有解析系数的线性齐次常微分方程

$$w^{(n)} + p_1(z)w^{(n-1)} + \quad + p_n(z)w = 0, \qquad (1)$$

$p_1(z)$, $\ \ ,p_n(z)$ 在 **Riemann 球面** (Riemann sphere) 上的所有奇点都是**正则奇点** (regular singular point) 方程 (1) 属于 Fuchs 类，当且仅当其系数具有形式

$$p_j(z) = \prod_{m=1}^{k}(z-z_m)^{-j}q_j(z),$$

其中 z_1, $\ \ ,z_k$ 是不同的点，$q_j(z)$ 是次数 $\leqslant j(k-1)$ 的多项式．由 n 个方程构成的方程组 $w' = A(z)w$ 属于 Fuchs 类，如果它具有形式

$$\frac{dw}{dz}=\sum_{m=1}^{k}\frac{A_m}{z-z_m}w, \tag{2}$$

其中 $z_1, \cdots, z_k$ 是不同的点，$A_m \neq 0$ 是 $n\times n$ 维常数矩阵．点 $z_1, \cdots, z_k, \infty$ 是方程 (1) 与方程组 (2) 的奇点．对于 (1)，Fuchs 恒等式 (Fuchs identity)

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{k}\rho_j^m+\rho_j^\infty\right)=(k-1)\frac{n(n-1)}{2}$$

成立，其中 $\rho_1^m, \cdots, \rho_n^m$ 是 z_m 处而 $\rho_1^\infty, \cdots, \rho_n^\infty$ 是 ∞ 处的**特征指数** (characteristic exponent)．Fuchs 方程（及方程组）也称为正则方程 (regular equation)（及正则方程组 (regular system)）．这类方程及方程组是由 J. L. Fuchs 引进的 ([1])．

设 D 是除去点 $z_1, \cdots, z_k, \infty$ 的 Riemann 球面．(1) 的每个非零解（对应地，(2) 的每个解分量）是 D 中的解析函数，一般地说，它是无穷多值的，而且 (1)（或 (2)）的所有奇点是其无穷阶分枝点．

以 $z_1, \cdots, z_k, \infty$ 为奇点的二阶 Fuchs 方程具有形式

$$w''+\sum_{m=1}^{k}\frac{1-(\rho_1^m+\rho_2^m)}{z-z_m}w'+ \tag{3}$$

$$+\sum_{m=1}^{k}\left[\frac{\rho_1^m\rho_2^m\prod_{j=1}^{k}{}'(z_m-z_j)}{z-z_m}+Q_{k-2}(z)\right]\frac{w}{\prod_{m=1}^{k}(z-z_m)}=0,$$

其中 $Q_{k-2}(z)$ 是 $k-2$ 次多项式．变换 $w=(z-z_m)^l w$ 把 Fuchs 方程变为 Fuchs 方程，但

$$(\rho_1^m, \rho_2^m)\to(\rho_1^m-l, \rho_2^m-l),$$
$$(\rho_1^\infty, \rho_2^\infty)\to(\rho_1^\infty+l, \rho_2^\infty+l),$$

而其他奇点处的特征指数不变．方程 (3) 可通过这样的变换化简为形式

$$w''+\sum_{m=1}^{k}\frac{1-(\rho_2^m+\rho_1^m)}{z-z_m}w'+$$

$$+(\bar{\rho}_1^\infty\bar{\rho}_2^\infty z^{n-2}+d_1z^{n-3}+\cdots+d_{n-2})\frac{w}{\prod_{m=1}^{k}(z-z_m)}=0,$$

$$\bar{\rho}_j^\infty=\rho_j^\infty+\sum_{m=1}^{k}\rho_j^m$$

具有 N 个奇点的二阶 Fuchs 方程可通过规定奇点处特征指数的值完全确定，当且仅当 $N<4$．此时通过 Möbius 变换可把方程化简为下列形式：a) $N=1$，$\widetilde{w}''=0$，b) $N=2$，$\zeta^2\widetilde{w}''+a\zeta\widetilde{w}'+b\widetilde{w}=0$（Euler 方程 (Euler equation)），c) $N=3$，**Papperitz 方程** (Papperitz equation) 或 Riemann 方程．

矩阵 Fuchs 方程具有形式

$$\frac{dW}{dz}=\sum_{m=1}^{k}\frac{WU_m}{z-z_m}. \tag{4}$$

其中 $z_1, \cdots, z_k$ 是不同的点，W 是 $n\times n$ 维矩阵函数，$U_m \neq 0$ 是常数矩阵．矩阵 U_m 称为 z_m 处的微分代换 (differential substitution)．设 γ 是从一个非奇点 b 出发循正向的闭连续曲线，且其内部仅含有奇点 z_m．如果 $W(z)$ 是 (4) 的在 b 处全纯的解，则在沿 γ 的解析延拓下，

$$W\to V_m W, \tag{5}$$

此处 V_m 是常数矩阵，称为 z_m 处的积分代换 (integral substitution)．H. Poincaré 对于形如 (4) 的方程组提出了所谓第一正则 Poincaré 问题 (first regular Poincaré problem)（见 [2]）．它由下述三个问题组成：

A) 在整个存在域中表示解 $W(z)$，

B) 构造点 z_m 处的积分代换，

C) 给出解的奇点的解析刻画．

特别是，解出问题 B) 就能构造 (4) 的单值群．I. A. Lappo-Danilevskiĭ 得到了 Poincaré 问题的解 ([3])．令 $L_b(z_{j_1}, \cdots, z_{j_\nu}|z)$，$j_m\in\{1, \cdots, k\}$ $(\nu=1,2, \cdots)$ 是超对数：

$$L_b(z_m|z)=\int_b^z\frac{dz}{z-z_m},$$

$$L_b(z_{j_1}, \cdots, z_{j_\nu}|z)=\int_b^z\frac{L_b(z_{j_1}, \cdots, z_{j_{\nu-1}}|z)}{z-z_{j_\nu}}dz,$$

设 $W_0(z)$ 是 (4) 的解在 b 处的元素（芽），并由条件 $W_0(b)=I$ 规范化，并设 $W(z)$ 是由这个元素生成的 D 中的解析函数，则 $W(z)$ 是矩阵 $U_1, \cdots, U_k$ 的整函数并有级数展开式

$$W(z)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1, \cdots, j_\nu}^{(1, \cdots, k)}U_{j_1}\cdots U_{j_\nu}L_b(z_{j_1}, \cdots, z_{j_\nu}|z),$$

此级数在每个紧集 $K\subset D$ 上一致收敛，对应于解 $W(z)$ 在 z_m 处的积分代换 V_m 是 $U_1, \cdots, U_k$ 的整函数并有级数展开式

$$V_m=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1, \cdots, j_\nu}^{(1, \cdots, k)}U_{j_1}\cdots U_{j_\nu}P_j(z_{j_1}, \cdots, z_{j_\nu}|b),$$

其中 P_j 可通过超对数表示（见 [3]，[6]）．

也已得到给出问题 C) 的解的公式（见 [3]）．

参考文献

[1A] Fuchs, J. L., Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit Veranderlichen Koeffizienten, *J. Reine Angew. Math.*, **66** (1866), 121–160

[1B] Fuchs, J. L., Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit Veranderlichen koeffizienten. Ergänzung, *J. Reine Angew. Math.*, **68** (1868), 354–385

[2] Poincare, H , Papers on Fuchsian functions, Springer, 1985 (译自法文)

[3] Лаппо-Данилевский И А , Применение функций от матриц к теории линейных систем обкновенных дифференциальных уравнений, М , пер с франц , 1957(译自法文)

[4] Coddington, E A , Levinson, N , Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955

[5] Голубев, В В , Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд , М -Л , 1950 (中译本 В В 高鲁别夫，微分方程解析理论讲义，高等教育出版社，1956)

[6] Смирнов, В И , Курс высщей математики, т 3, ч 2, М , 1974(中译本 В И 斯米尔诺夫，高等数学教程，第3卷第2分册，人民教育出版社，1958)

[7] Ince, E L , Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956

М В Федорюк 撰

【补注】 方程 (5) 的矩阵 V_m 也称为 Fuchs 方程组(4)在 z_m 处的局部单值或单值矩阵．Riemann 所提的 Riemann单值问题 (Riemann monodromy problem)，是对给定的 V_i 求具有这些给定的单值矩阵的 Fuchs 方程组 这个问题本质上是由 J Plemelj ([A3])，G Birkhoff ([A4]，[A5]) 和 I A Lappo-Danilevskiĭ ([A2]) 解决的．基于取通过所有 z_i 和 ∞ 的围道 γ 以及 γ 上的一个分段常数矩阵函数 (在 z_1, z_2 之间取值 V_1，在 z_2, z_3 之间取值 $V_2 V_1$，)，所提问题可转化为 **Riemann-Hilbert 问题** (Riemann-Hilbert problem) 加于诸点 z_i 和各矩阵 U_m 上的条件，使之对于所给方程组在这些参数的光滑替换下保持相同的单值为必要并且充分，采取称为同单值方程 (isomonodromy equation) 或 Schlessinger 方程 (Schlessinger equation) 的微分方程形式 这些方程与 (完全) **可积系统** (integrable system)以及量子场有关，例如，见 [A6]，[A7]

参考文献

[A1] Hille, E , Ordinary differential equations in the complex domain, Wiley, 1976

[A2] Lappo-Danilevskiĭ, I A , Mémoire sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires, Dover, reprint, 1953

[A3] Plemelj, J , Problems in the sense of Riemann and Klein, Wiley, 1964

[A4] Birkhoff, G D , Singular points of ordinary linear differential equations, *Trans Amer Math Soc* , **10** (1909), 434 – 470

[A5] Birkhoff, G D , A simplified treatment of the regular singular point, *Trans Amer Math Soc* , **11** (1910), 199 – 202

[A6] Chudnovsky, D V , Riemann, monodromy problem, isomonodromy deformations and completely integrable systems, 载于 C Bardos and D Bessis (eds), Bifurcation phenomena in mathematical physics and related topics, Reidel, 1980, 385 – 447

[A7] Jimbo, M , Miwa, T , Sato, M , Holonomic quantum fields — the unanticipated link between deformation theory of differential equations and quantum fields, 载于 K Osterwalder (ed), Mathematical problems in theoretical physics, Springer, 1980, 119 – 142

沈永欢 译

Fuchs 群 [Fuchsian group，Фуксова группа]

一个 (开) 圆盘 K 到 Riemann 球面上，即一个圆盘或半平面到复平面上的全纯变换的离散群 (见**离散变换群** (discrete group of transformations))．最常见的是取 K 为上半平面

$$U=\{z\in\mathbf{C} \quad \operatorname{Im} z>0\}$$

或单位圆盘

$$D=\{z\in\mathbf{C} \quad |z|<1\}$$

在第一种情形，Fuchs 群的元素是实系数 Möbius 变换 (见**分式线性映射** (fractional-linear mapping))

$$z\mapsto\frac{az+b}{cz+d},$$

而 Fuchs 群不外乎是 PSL_2 的一个**离散子群** (discrete subgroup) 在第二种情形 Fuchs 群的元素是具有伪酉矩阵的 Möbius 变换

如果将圆盘 K 看作 Лобачевский 平面的保形模型，那么 Fuchs 群可以定义为它的一个保持方向的离散运动群 Fuchs 群是 **Klein 群** (Kleinian group) 的一个特殊情形

任意Fuchs 群首先是由 H Poincaré 在 1882 年联系**单值化** (uniformization) 问题而加以研究的 ([2]) 他称这个群为 Fuchs 群以纪念 L. Fuchs，他是受到 Fuchs 的论文 [1] 的启发而引入这个概念的．为了描述 Fuchs 群，Poincaré 使用了一种组合几何学的方法，这个方法随后成为离散变换群论中主要的方法之一．Fuchs 群的概念给 Poincaré 和 F Klein 所创立自守函数论提供了一个基础

保持 K 的闭包 $\bar{K}$ 内某个点不变或保持一条在 Лобачевский 几何学意义下的直线不变的 Fuchs 群称为初等的 (elementary) 如果 Γ 是一个非初等的 Fuchs 群，那么位于圆 ∂K 上一点 $x\in\bar{K}$ 的轨道的极限点的集合 $L(\Gamma)$ 与 x 无关，并且称为群 Γ 的极限集 (limit set of the group)．群 Γ 称为第一种 Fuchs 群 (Fuchsian group of the first kind)，如果 $L(\Gamma)=\partial K$，否则称为第二种的 (second kind) (于是 $L(\Gamma)$ 是 ∂K 的一个疏的完满子集)．

有限生成的 Fuchs 群是第一种的，当且仅当它的基本区域的面积 (在 Лобачевский 几何学意义下) 是有限的．作为这样一个群 Γ 的基本区域，可以如此选取 Лобачевский 平面的一个多边形 P，它的边为

$$a_1, b_1', a_1, b_1, \quad, a_g, b_g', a_g, b_g, c_1, c_1', \quad, c_n, c_n',$$

使得

$$a_i=\alpha_i(a_i'),\ b_i=\beta_i(b_i'),\ c_i=\gamma_i(c_i'),$$

这里

$$\alpha_1, \quad, \alpha_g, \beta_1, \quad, \beta_g, \gamma_1, \quad, \gamma_n$$

是生成 Γ 的某些元素，具有定义关系

$$\prod_{i=1}^{g}(\alpha_i\beta_i\alpha_i^{-1}\beta_i^{-1})\prod_{i=1}^{n}\gamma_i=1,$$

$$\gamma_i^{k_i}=1,\ i=1, \quad, n,$$

这里 k_i 是整数 $\geqslant 2$ 或 ∞　元素 γ_i 保持 P 的与 c_i 和 c_i' 公共的顶点 C_i 不动．如果 $k_i<\infty$，它是椭圆的，如果 $k_i=\infty$，它是抛物的，后一情形 C_i 位于 ∂K 上，即是说，它是 Лобачевский 平面的一个非正常点　Γ 的每一个椭圆的或抛物的元素都共轭于某个唯一的生成元 γ_i 的幂　P 的在顶点 C_i 处的角等于 $2\pi/k_i$，$i=1,\cdot\cdot,n$，剩下的所有角的和等于 2π　边 a_i 和 a_i' 有同一长度，b_i 和 b_i'，c_i 和 c_i' 也有同一长度　反之，在 Лобачевский 平面上满足这些条件的每一个凸多边形都是某个有限生成的第一种的 Fuchs 群的上述类型的基本多边形．

Γ 的任何一个由上述方法得到的生成元系称为标准的（standard）．在有限生成的第一种 Fuchs 群的一个抽象同构之下，一个群的抛物元素的集合被映成另一个群的抛物元素的集合，每一个标准的生成元系被映成一个标准的生成元系．

Γ 的一个基本区域的面积等于 $-2\pi\chi(\Gamma)$，这里

$$\chi(\Gamma)=\chi(g, k_1, \quad, k_n)=2-2g-\sum_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{k_i})$$

数组 $(g, k_1, \quad, k_n)$，其中 $k_1, \quad, k_n$ 是无序的，是将 Γ 看成圆盘的同胚群时的一个拓扑不变量，称为它的符号差（signature）．对于符号差所作的唯一限制是条件

$$\chi(g, k_1, \quad, k_n)<0 \qquad (*)$$

对于 Fuchs 群 Γ 内一个有限指数的子群 Δ 来说，Riemann-Hurwitz 公式（Riemann-Hurwitz formula）

$$\chi(\Delta)=\chi(\Gamma)[\Gamma \quad \Delta]$$

成立．在每一个 Fuchs 群里都有一个有限指数的子群，它没有有限阶的元素．

商空间 K/Γ 通过添加有限个对应于一个基本多边形的非正常顶点的点而被紧化　在紧化了的空间 S 上有唯一的复结构使得商映射 $p\quad K\to S$ 是全纯的．这里 S 是一个亏格为 g 的 Riemann 曲面，而 p 是一个具有分支指标 $k_1, \quad, k_n$ 的正则分支覆叠　反之，单值化定理（uniformization theorem）表明，对于任意具有给定点 $x_1, \quad, x_n$ 的紧 Riemann 曲面 S 和任意满足条件（$*$）的 $k_1, \quad, k_n$（k_i 是一个整数 $\geqslant 2$ 或 ∞）来说，存在一个正则全纯分支覆叠 $p\quad K\to S$，它恰在点 $x_1, \quad, x_n$ 上有分支，分支指标分别是 $k_1, \quad, k_n$　覆叠 p 除开 K 的一个自同构外是唯一确定的　它的覆叠变换群是一个符号差为 $(g, k_1, \quad, k_n)$ 的 Fuchs 群

具有固定的符号差 $(g, k_1, \quad, k_n)$ 的第一种有限生成的 Fuchs 群可以被某个同胚于一个胞腔的 $(3g-3+n)$ 维复流形，即一个 **Teichmuller 空间**（Teichmuller space）$T(g, k_1, \quad, k_n)$ 的点参数化（见[4]）在这里，Teichmuller 空间的两个点对应于同一 Fuchs 群（在圆盘的自同构群内的共轭意义下），当且仅当这两个点关于 $T(g, k_1, \quad, k_n)$ 的某个全纯变换的离散群是等价的——这个群称为模群（modular group）$\mathrm{Mod}(g, k_1, \quad, k_n)$．存在一个同构

$$T(g, k_1, \quad, k_n)\to T(g, \infty, \quad, \infty)$$

（n 个 ∞），在这个同构之下 $\mathrm{Mod}(g, k_1, \quad, k_n)$ 被映成 $\mathrm{Mod}(g, \infty, \quad, \infty)$ 内的一个有限指数的子群

如果一个符号差为 $(g, k_1, \quad, k_n)$ 的 Fuchs 群包含一个符号差为 $(h, l_1, \quad, l_m)$ 的有限指数的子群，那么空间 $T(g, k_1, \quad, k_n)$ 可以以唯一的方式作为一个闭子集嵌入 $T(h; l_1, \quad, l_m)$　在某些例外的情形，这些空间是重合的（[10]）　例如，$T(2)=T(0,2,2,2,2,2,2)$，这就是说，每一个亏格为 2 的紧 Riemann 曲面都容许一个超椭圆对合，因而是一条**超椭圆曲线**（hyper-elliptic curve）．

符号差为 $(0, k_1, k_2, k_3)$ 的 Fuchs 群称为三角群（triangular groups），对于这种群，并且只对于这种群来说，Teichmuller 空间由单独一点组成．每一个三角群都是关于一个角为 $\pi/k_1, \pi/k_2, \pi/k_3$ 的三角形的边的反射所生成的群内一个指数为 2 的子群（见**反射群**（reflection group））　三角群的一个例子是模 Klein 群（modular Kleinian group），它的符号差等于 $(0,2,3,\infty)$．

每一个第二种的有限生成的 Fuchs 群都拓扑地同构于（作为圆盘的群）一个第一种的有限生成的 Fuchs 群，并且容许一个类似的几何描述，所不同的只是基本多边形的某些对的边 c_i，c_i' 没有公共点，即使是不正常点也没有，而对应的生成元 γ_i 是双曲型变换．紧化的商空间是一个有边界的 Riemann 曲面．

每一个无限生成的 Fuchs 群都是循环子群的自由积．它的基本区域可以作为有限生成群的基本区域的极限构造出来（见[5]）

参考文献

[1] Fuchs, L , Uber eine Klasse von Funktionen mehrerer Variablen, welche durch Umkehrung der Integrale von Losungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coeffizienten entstehen, *J Reine Augew Math*, **89** (1880),

151－169
[2] Poincare, H, Théorie des groupes Fuchsiennes, *Acta Math*, **1** (1882), 1－62
[3] Fricks, R and Klein, F, Vorlesungen uber die Theorie der automorphen Funktionen, 1－2, Teubner, 1897－1912
[4A] Ahlfors, L, The complex analytic structure of the space of closed Riemann surfaces, in *Analytic functions*, Princeton Univ Press, 1960, 45－66
[4B] Bers, L, Quasiconformal mapings and Teichmüller's theorem, in *Analytic functions*, Princeton Univ Press, 1960, 89－120
[5] Крушкаль, С Л, Апанасов, Б Н, Гусевский, Н А, Клейновы группы и униформизация в примерах и задачах, Новосиб, 1981 (英译本 Krushkal, S L, Apanasov, B N and Gusevskiĭ, N A, Kleinian groups and uniformization in examples and problems Amer Math Soc, 1986)
[6] Натанзон, С М,《Успехи матем наук》, **27** (1972), 4, 145－160
[7] Итоги науки и техники Алгебра, Топология, Геометрия, т **16**, М, 1978, 191－245
[8] Lehner, J, Discontinuous groups and automorphic functions, Amer Math Soc, 1964
[9] Magnus, W, NonEuclidean tesselations and their groups, Acad Press, 1974
[10] Singerman, D, Finitely maximal Fuchsian groups, *J London Math Soc*, **6** (1972), 1, 29－38

Э Б Винберг 撰

【补注】 在[A3], [A2]里讨论了与Riemann曲面的关系 [A1]阐述Fuchs群与自守函数的理论．

令Γ是分式变换

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d\in\mathbf{R},\ ad-bc=1$$

的群PSL(2, **R**)的一个离散子群 对于扩充复平面内任意z和Γ的任意由不同的元素γ_i所组成的序列来说，$\{\gamma_i z\}$的一个聚点称为Γ的一个极限点(limit point) 如果有0, 1或2个极限点，则Γ共轭于这个平面的一个运动群．否则就有无穷多个极限点，而Γ就称为一个拟Fuchs群（Fuchsoid group）．一个拟Fuchs群是Fuchs群，如果它是有限生成的 对于一个实点$x\in\mathbf{R}\cup\{\infty\}$，令$\Gamma_x$是$x$在$\Gamma$内的稳定化子 点$x$称为一个尖点(cusp)或抛物尖点（parabolic cusp)，如果Γ_x是由一个抛物变换所生成的自由循环群，且$\neq\{1\}$（见**分式线性映射**（fractional-linear mapping））．Γ的尖点由一个基本多边形在实轴上的顶点表示．

参考文献

[A1] Ford, L R, Automorphic functions, Chelsea, reprint, 1951
[A2] Ahlfors, L V and Sario, L, Riemann surfaces, Princeton Univ Press, 1974
[A3] Farkas, H M and Kra, I, Riemann surfaces, Springer, 1980
[A4] Beardon, A F, The geometry of discrete groups, Springer, 1983
[A5] Maskit, B, Kleinian groups, Springer, 1988

郝钢新 译

满子范畴 [full subcategory, полная подкатегория]

一个范畴$\mathfrak{K}$的子范畴$\mathfrak{C}$，使得对$\mathfrak{C}$的任两个对象A与B，有等式

$$H_{\mathfrak{C}}(A,B)=H_{\mathfrak{K}}(A,B)$$

因此，一个满子范畴是由其对象的类所完全确定的 反过来，一个范畴$\mathfrak{K}$的对象类的任何子类都唯一地确定一个满子范畴，此子类就是所述子范畴的对象之类 这个子范畴只包含那些其源与靶（即通常所述的定义域与上域）都属于此子类的态射 特别，对应于单独一个对象A的子范畴是由集合$H_{\mathfrak{K}}(A,A)$所组成的

许多重要的子范畴都是满子范畴（反射的与上反射的子范畴，簇，等等） М Ш Цаленко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Mitchell, B, Theory of categories, Acad Press, 1965

周伯埙 译

全特征合同 [fully-characteristic congruence, вполне характеристическая конгруэнция]

代数系统 (algebraic system) $A=\langle A,\Omega\rangle$的一个合同$\theta$是全特征的，如果它在这个系统的任一自同态$\sigma$之下不变，即如果$x\theta y$，那么$\sigma(x)\theta\sigma(y)$ $(x,y\in A)$ 一个代数系统A的所有全特征合同对于（集合的）包含关系构成$C(A)$的一个完全子格$C_t(A)$，其中$C(A)$是A的所有合同构成的格 如果$\mathfrak{M}$是Ω系统的一个簇，并且F是$\mathfrak{M}$中一个具有可数无限生成元集合的**自由代数**(free algebra)，系统F的全特征合同的格$C_t(F)$对偶同构于$\mathfrak{M}$的所有子簇的格 Ω代数A的具有有限生成元集合，并且在A中的指数有限（即具有有限个合同类a/κ, $a\in A$）的任一合同κ，都包含A的一个全特征合同，并且该合同在A中的指数也是有限的．

参考文献

[1] Мальцев, А И, Алгебраические системы, М, 1970 (英译本 Mal'tsev, A I, Algebraic systems, Springer, 1973)

Д М Смирнов 撰

【补注】 全特征合同也称为全不变合同 (fully-invariant congruences)

参考文献

[A1] Cohn, P M Universal algebra, Reidel, 1981．

卢景波 译

全特征子群 [fully-characteristic subgroup, вполне харак-

теристическая подгруппа]

群G的一个对于G的一切自同态都不变的子群 全特征子群的集合组成一切子群的格中一个子格 在任意群里，换位子群和下中心序列里的成员都是全特征子群．再者，一个群的任意**字子群**（verbal subgroup）是全特征的 对于自由群来说，逆命题也成立 任意全特征子群都是字子群．

参考文献

[1] Magnus, W , Karrass, A and Solitar, D , Combinatorial group theory Presentations of groups in terms of generators and relations, Interscience, 1966

В Н Ремесленников 撰 郝钢新 译

全闭映射 [**fully-closed mapping**, **вполне замкнутое отображение**]

一个连续映射f $X \to Y$，具有下述性质 对任何点$y \in Y$以及空间X中满足$f^{-1}(y) = \bigcup_{i=1}^{s} O_i$的任何有限多个开集$O_1$, , O_s，集合$\{y\} \cup \bigcup_{i=1}^{s}(f^{\#}O_i)$都是开集，其中$f^{\#}O_i$表示集合$O_i$在映射$f$下的**小象**（small image） 任何全闭映射都是闭映射 对于正规空间X的任何全闭映射f $X \to Y$，不等式$\dim X \leq \max\{\dim Y, \dim f\}$成立．因此，全闭映射可以用来对维数 dim 和 ind 不同的紧统进行相当广泛的分类 此外，$\dim Y \leq \dim X+1$与映射f的重数无关．设$y \in Y$，f $X \to Y$是全闭映射，$R(f, y)$是X的分解，其元素是所有点的原象$f^{-1}(y')$以及$f^{-1}(y)$的所有点 于是，对于正则空间X而言，X关于分解$R(f, y)$的商空间X_f^y也是正则的，这是全闭映射在闭映射类中的特性．

В В Федорчук 撰 胡师度、白苏华 译

函数 [**function**, **функция**]

数学中的一个基本概念 设X与Y为给定的两个集合并设对每个元素$x \in X$有一个元素$y \in Y$与之对应，记为$f(x)$ 在此情形称函数f在X上给定（也称变量y是变元x的函数，或y依赖于x）并写成f $X \to Y$

在古代数学中函数依赖的思想没有明显地表达出来而且不是独立的研究对象，尽管当时已经知道一大类特殊的函数关系并加以系统研究．函数概念的雏形在中世纪开始出现于学者的著作中，而仅仅是在17世纪数学家，首先是在 P Fermat, R Descartes, I Newton 与 G Leibniz 的工作中，才作为一个独立概念而逐渐定形 函数一词最先出现在 Leibniz 的著作中 几何、分析与运动的概念被用来描述函数，可是渐渐地函数概念便作为某种解析表示开始盛行起来．18世纪函数的叙述便有了确切的形式，J Bernoulli 的定义为 一个变量的函数 是由变量与常数依一定方式构成的数 L．Euler 采纳这一定义并在他的分析教科书中写道 一切无穷小分析都是围绕变量与它们的函数展开的（[1]） Euler 已经有了一个更一般的办法来处理函数概念，即作为一个变量对另一变量的依赖性．此观点在 J Fourier, Н И Лобачевский, P Dirichlet, B Bolzano 与 A. L. Cauchy 的工作中得到进一步发展，那里函数概念作为两个数集之间对应关系开始定形 因此在1834年 Лобачевский（[2]）写道 “函数的一般概念要求x的函数是一个数，它对每个x是给定的并逐渐地随x变化．函数的值可以这样给出，或者用一个解析表示或者用一个条件，使它能给出试验所有数的方法并选定其中之一，或者最后，存在一种依赖性，它的具体形式不必知道 ” 函数的定义作为两个任意集合（未必是数集）的对应关系由 R Dedekind 于1887年（[3]）给出．

对应关系概念，从而函数概念，有时导致其他概念（集合（[4]），关系（[5]）或某些其他的集论或数理逻辑概念（[6]））并且有时取作原始的、不加定义的概念（[7]） 例如，A Church 表明下列观点 “最终必须把函数概念（或某些像类那样的类似概念）看作原始的或不可定义的 ”（[8]）（对更多的情况，见[9], [10]．）

下面所考虑的函数概念是以集合与集合上最简单运算的概念为基础的．

我们说集合A的元素的个数等于1或者说集合A由一个元素构成，如果它包含元素a且不含其他元素（换句话说，A除去集合$\{a\}$便成为空集）．非空集A称为具有两个元素的集合或一个**对**（pair），$A=\{a,b\}$，如果由A除去仅由一个元素$a \in A$构成的集合，便得到由一个元素$b \in A$构成的集合（此定义不依赖于所取元素$a \in A$的选择）

若给出一个对（二元集）$A=\{a, b\}$，则对$\{a,\{a,b\}\}$称为元素$a \in A$与$b \in A$的**序对**（ordered pair）并记成(a, b) 元素$a \in A$称为它的第一个元素而$b \in A$称为第二个元素

给定集合X与Y，一切序对(x, y) $(x \in X, y \in Y)$称为**集合X与Y的积**（product of sets）并记成$X \times Y$ 此外，不必假定X与Y不同，即可能有$X=Y$

由序对(x, y) $(x \in X, y \in Y)$所成的集合$f=\{(x, y)\}$称为**函数**（function）或**映射**（mapping），如果满足条件 如果对$(x', y') \in f$, $(x'', y'') \in f$，则当$y' \neq y''$时有$x' \neq x''$．

除了术语“函数”与“映射”以外，在某些情形也用“变换”，“态射”，“对应”等术语，它们彼此等价

一个给定函数f的序对(x, y)中一切第一个元素的集合称为函数的**定义域**（domain of definition）（或称定义集）并记成X_f，而一切第二个元素的集合称为函数的**值域**（range of values）（或称值集）并记成

Y_f 序对本身的集合 $f=\{(x,y)\}$，看作积 $X\times Y$ 的子集，称为 f 的图象（graph）

元素 $x\in X$ 称为函数的自变量（argument）或自变量（independent variable），而元素 $y\in Y$ 称为应变量（dependent variable）.

若 $f=\{(x,y)\}$ 为函数，则写 f $X_f\to Y$ 并说 f 映集合 X_f 到集合 Y 中　当 $X=X_f$ 时，简记 f $X\to Y$

若 f $X\to Y$ 为函数且 $(x,y)\in f$，则写成 $y=f(x)$（有时简记 $y=fx$ 或 $y=xf$），也写成 f $x\mapsto y$，$x\in X$，$y\in Y$，并说函数 f 配置元素 y 对应于元素 x（映射 f 映 x 为 y）或同样的，元素 y 对应于元素 x　此时，也说 y 为 f 在点 x 的值，或 y 为元素 x 在 f 下的象（image）.

除了记号 $f(x_0)$ 以外，也用记号 $f(x)|_{x=x_0}$ 来表示 f 在 x_0 的值.

有时把函数 f 本身用记号 $f(x)$ 表示．用同样记号 $f(x)$ 表示函数 f $X\to Y$ 与它在点 x 处的值两者通常不会引起误解，因为，在任何特定情形下，一般地说，它的含意在文中总是清楚的．在计算中用记号 $f(x)$ 往往较用记号 f $x\mapsto y$ 更为便利　例如，在分析运算中写 $f(x)=x^2$ 比写 f $x\mapsto x^2$ 要更加简便些.

给定 $y\in Y$，满足 $f(x)=y$ 的所有元素 $x\in X$ 的集合称为元素 y 的原象（pre-image）并记成 $f^{-1}(y)$　这样，

$$f^{-1}(y)=\{x\quad x\in X,\ f(x)=y\}$$

显然，若 $y\in Y\backslash Y_f$，则 $f^{-1}(y)=\phi$，空集

设给定映射 f $X\to Y$　换句话说，对每个 $x\in X$，对应唯一的元素 $y\in Y$ 且对每个 $y\in Y_f\subset Y$，至少对应一个元素 $x\in X$　若 $Y=X$，则称 f 映集合 X 到其自身中（into itself）．若 $Y=Y_f$ 即 Y 与 f 的值域相合，则称 f 映 X 到集合 Y 上（onto the set），或称 f 为一个**满射**（surjection 或 surjective mapping）　这样，映射 f $X\to Y$ 为满射，如果对每个元素 $y\in Y$，至少有一个元素 $x\in X$ 使 $f(x)=y$.

如果在映射 f $X\to Y$ 下不同的元素 $x\in X$ 对应于不同的元素 $y\in Y$，即若 $x'\neq x''$ 蕴涵 $f(x')\neq f(x'')$，则称 f 为 X 到 Y 中的一对一映射（one to one mapping），亦称单叶映射（univalent mapping）或**单射**（injection）这样，映射 f $X\to Y$ 为单叶的（单射），当且仅当属于 f 的值域的每个元素 y 即 $y\in Y_f$ 的原象恰由一个元素构成．若映射 f $X\to Y$ 既是单叶的，又是映 X 到集合 Y 上的（见**一一对应**（one-to-one correspondence）），即同时是单射与满射，则称为**一一映射**（bijection 或 bijective mapping）.

若 f $X\to Y$ 且 $A\subset X$，令

$$S=\{y.\ y\in Y,\ y=f(x),\ x\in A\},$$

即一切这样的 y 的集合，使至少有 A 的一个元素被 f 映成 y，则称 S 为子集 A 的象（image of the subset）并写成 $S=f(A)$　特别，恒有 $Y_f=f(X)$　关于集合 $A,B\subset X$ 的象，下列关系式成立

$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B),$$

$$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B),$$

$$f(A)\backslash f(B)\subset f(A\backslash B),$$

并且若 $A\subset B$，则 $f(A)\subset f(B)$

若 f $X\to Y$ 与 $S\subset Y$，则集合

$$A=\{x\quad x\in X,\ f(x)\in S\}$$

称为集合 S 的原象（pre-image of the set）并写成 $A=f^{-1}(S)$　这样，集合 S 的原象由这样的元素 $x\in X$ 构成，它们被 f 映成 S 的元素，或同样的，由一切元素 $y\in S$ 的原象构成　$f^{-1}(S)=\bigcup_{y\in S}f^{-1}(y)$　关于集合 $S\subset Y$，$T\subset Y$ 的原象，下列关系式成立

$$f^{-1}(S\cup T)=f^{-1}(S)\cup f^{-1}(T),$$

$$f^{-1}(S\cap T)=f^{-1}(S)\cap f^{-1}(T),$$

$$f^{-1}(S\backslash T)=f^{-1}(S)\backslash f^{-1}(T),$$

并且若 $S\subset T$，则 $f^{-1}(S)\subset f^{-1}(T)$

若 $A\subset X$，则由函数 f $X\to Y$ 用自然方式生成一个定义在 A 上的函数使 $f(x)$ 对应于元素 $x\in A$．此函数称为函数 f 在集合 A 上的限制（restriction of the function to the set）并有时记成 f_A　这样，f_A $A\to Y$ 且对任意 $x\in A$ 有 f_A $x\mapsto f(x)$　若集合 A 不与集合 X 相合，则 f 在 A 上限制 f_A 可以与 f 有不同的定义域，从而异于 f

设 f $X\to Y$，若每个元素 $y\in Y_f$ 为一些元素的集合，$y=\{z\}$，并且此外，在这些集合中至少有一个集合含有多于一个元素，则 f 称为**多值函数**（multi-valued function，many-valued function）　再者，集合 $f(x)=\{z\}$ 中的元素常称为 f 在 x 的值　若每个集合 $f(x)$ $(x\in X)$ 仅由一个元素构成，则函数 f 也称为单值函数（single-valued function）.

若 f $X\to Y$ 与 g $Y\to Z$，则对每个 $x\in X$ 由等式 $F(x)=g(f(x))$ 定义的函数 F $X\to Z$ 称为函数 f 与 g 的复合（composition 或 superposition），也称**复合函数**（composite function）并记成 $g\circ f$

设函数 f $X\to Y$ 给定并令 Y_f 为它的值域　形如 $(y,f^{-1}(y))$ $(y\in Y_f)$ 的一切可能序偶的集合构成一个函数，称为 f 的**反函数**（inverse function）并记成 f^{-1}，在反函数 f^{-1} 之下，每个 $y\in Y_f$ 对应于原象 $f^{-1}(y)$，即某些元素的集合　因此，一般说，反函数是多值函数　若一映射 f $X\to Y$ 是单射的，则逆映射是单值函数并映 f 的值域 Y_f 到它的定义域 X 上

数值函数 重要的一类函数是复值函数(complex-valued function)$f: X\to Y$, $Y\subset\mathbf{C}$, 其中 $\mathbf{C}$ 是复数集．对复值函数可以进行各种算术运算．若 f,g 是定义在同一个集合 X 上的两个复值函数，且若 λ 为复数，则函数 λf 定义为在每个点 $x\in X$, 取值 $\lambda f(x)$, 函数 $f+g$ 在每个点 x 取值 $f(x)+g(x)$, 函数 fg 在每个点 x 取值 $f(x)\cdot g(x)$, 最后，f/g 在每个点 $x\in X$ 取值 $f(x)/g(x)$(当然，只有当 $g(x)\neq 0$ 它才有意义).

函数 $f: X\to\mathbf{R}$ 称为实值函数(real-valued function)．实值函数 $f: X\to\mathbf{R}$ 称为在集合 X 上是上有界的(bounded from above)(下有界的(bounded from below)), 如果它的值域是上有界的(下有界的)．换句话说，函数 $f: X\to\mathbf{R}$ 在 X 上是上有界的(下有界的), 如果存在常数 $c\in\mathbf{R}$ 使对每个 $x\in X$, 不等式 $f(x)\leqslant c$ 满足(相应地，$f(x)\geqslant c$ 满足)．函数 f 在 X 上既是上有界又是下有界的，就简称它在 X 上是有界的(bounded)．$f: X\to\mathbf{R}$ 的值域的上(下)界是函数 f 的一个上(下)界(upper (lower) bound).

在数学分析中起主要作用的是数值函数(function of numbers), 更确切地说，复变量的复值函数，称为复变量复函数(complex function of complex variable), 简称复变函数(function of complex variable) $X\to Y$, 这里 $X, Y\subset\mathbf{C}$．如果这样的函数的定义域及其值域两者都是实数集的子集，此函数便称为实函数(real function), 或更确切地，实变量的实值函数．数值函数概念的推广首先是多复变量的复值函数，称为多复变量复函数(complex function of several complex variables), 简称多复变函数．进一步推广有向量值函数(见**向量函数**(vector function)), 并且一般地，函数的定义域与值域都赋予一定结构．例如，若函数的值域属于某一向量空间，则这样的函数可以相加，若它们属于一个环，则这样的函数可以相加与相乘，若它们属于特定意义的有序集，则可以对这些函数推广有界性、上下界等概念．如果集合 X 与 Y 有拓扑结构，则可引进**连续函数**(continuous function) $f: X\to Y$ 的概念．当 X, Y 是拓扑向量空间时，可以引进函数 $f: X\to Y$ 的可微性(见**可微函数**(differentiable function)).

表示函数的方法．数值函数(与它们的某些推广)可以用公式给出．这是表示函数的解析方法(analytic method)．对此已有一批被研究过的函数可供应用，它们有专用记号(首先是初等函数), 也可有代数运算，函数的复合与极限过程(包括数学分析中微分，积分，级数求和等运算), 例如

$$y=ax+b,\ y=ax^2,\ y=1+\sqrt{\log\cos 2\pi x}\ ,$$

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}\ ,$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\ \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\ ,$$

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\ \frac{\sin\beta x}{x}\,dx.$$

在确定意义下用级数的和甚至三角级数的和来表达的函数类是相当广的．一个函数能用显式解析地给出，即用公式 $y=f(x)$ 给出，也能用**隐函数**(implicit function)给出，即用方程 $F(x,y)=0$ 给出．有时借助于几个公式来给出函数，例如，

$$f(x)=\begin{cases}2^x\ , & 对\ x>0,\\ 0\ , & 对\ x=0,\\ x-1, & 对\ x<0\end{cases}\qquad (*)$$

函数也可以用对应关系来描述．例如，令数 1 对应于每个 $x>0$, 数 0 对应于数 0 以及数 -1 对应于每个 $x<0$．结果得到定义在整个数轴上并取三个值 $1, 0, -1$ 的函数．此函数有一个专用记号 $\operatorname{sign} x$ (或 $\operatorname{sgn} x$)．另一例子．令数 1 对应于每个有理数而数 0 对应于每个无理数．所得函数称为 **Dirichlet 函数**(Dirichlet function)．同一函数可用不同方法给出，例如，函数 $\operatorname{sign} x$ 与 Dirichlet 函数不仅能逐点描述而且能用公式表示．

每个公式是某种业已描述过的对应关系的记号表示，因此用公式表示函数与用文字描述对应关系两者之间没有本质差别，这种差别往往是表面的．应当注意，每个用这种或那种方法所新定义的函数，如果使用一个特殊的符号，要有利于应用包括此新符号在内的公式去定义其他函数．然而，对于函数的解析表示，公式中要用到的关于函数以及运算的提供是很本质的，通常人们试图使这种提供尽可能地小，以便选择函数与运算在某种确定意义下尽可能地简单.

在讨论一个实变量的实值函数时，为了给出函数的相互依赖特性的直观表示，人们往往在坐标平面上作出函数的图形，换句话说，对给定的函数 $f: X\to\mathbf{R}$, $X\subset\mathbf{R}$, 人们考察 (x,y) 平面上的点集 $(x,f(x))$, $x\in X$

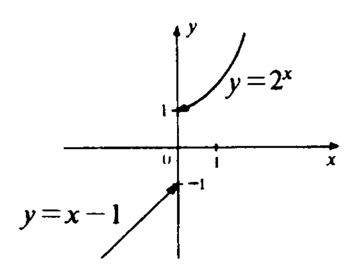


图 1

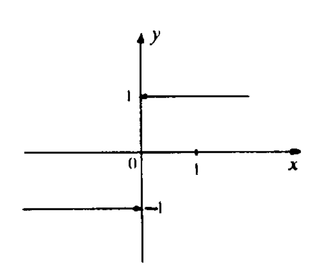


图 2

这样，函数 (*) 的图形如图 1 所示，函数 $\operatorname{sign} x$ 的图形如图 2 所示，并且函数 $y=1+\sqrt{\log\cos 2\pi x}$ 的图形由图 3 中孤立点集所构成

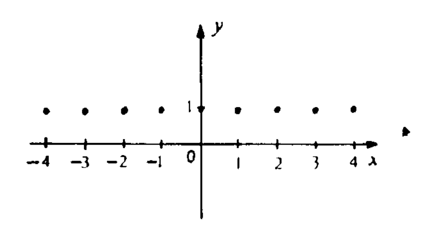


图 3

函数的图形表示也可以用来揭示函数的依赖关系．这种揭示是近似的，因为实际上，区间的测量只能做到一定的精度，更不用说当函数的定义域为无界时，原则上不可能在坐标平面上画出它的图形了

对于数值函数的表示，列表法也是广泛采用的　或者在一系列指定点造出函数的数值表，或者把数据放到机器存储器中去，或者制定一个程序用计算机来计算函数值

复或实函数的分类．最简单的复函数是**初等函数** (elementary functions)，其中分为代数多项式，三角多项式以及**有理函数** (rational function) 等　这些函数的特殊作用在于　用这些函数以及它们按一定方式的复合 (见**样条** (spline)) 来逼近一般的函数是研究并应用一般函数的方法之一　函数论的一个分支，研究在一定意义下用较简单的函数类来逼近函数，称为**逼近论** (approximation theory)．在此理论中用一类算子来逼近函数也是十分重要的

解析函数 (analytic function)，即可用幂级数表示的函数，构成了包含有理函数在内的一个重要类．解析函数可分为**代数函数** (algebraic function) 与超越函数两类　前者指的是由方程 $P(x_1, \quad, x_n, y)=0$ 给出的函数 $y=f(x_1, \quad, x_n)$，这里 P 是既约复系数多项式，而后者指的是非代数函数．借助于**导数** (derivative) 概念，人们可以引进可微一定次数的函数类，借助于**积分** (integral) 概念，可以引进在某种意义下可积的函数类，并且借助于连续概念，人们可以引进连续函数类　**Baire 类** (Baire classes) 由连续函数类逐次取逐点极限而得到 (亦见 **Borel 函数** (Borel function))．**可测函数** (measurable function) 的定义则以可测集与测度概念为基础．在函数论中，研究与测度概念有关的函数性质的分支，常称为**函数的度量理论** (metric theory of functions)

函数空间是作为具有某些一般性质的函数族而产生的　这样，定义在 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中某子集 X 上的一切函数，以及例如，Lebesgue 可测的，连续的，或满足给定阶的 **Hölder 条件** (Hölder condition) 的函数，分别形成了向量空间．类似地，m 次 (连续) 可微函数空间 ($m=1,2,\quad$)，无穷次可微函数类，具紧支集的函数类，解析函数类等等也都构成向量空间

在很多函数的向量空间中可以引进范数．例如，在紧空间 X 上连续函数空间中，$f\quad X\to\mathbf{C}$，一种范数是 $\|f\|=\sup_{x\in X}|f(x)|$，具有此范数的连续函数的赋范空间记成 $C(X)$　设 $(X,\mathfrak{S},\mu)$ 为测度空间，其中 X 为某一集合，$\mathfrak{S}$ 为 X 的某些子集所成的一个 σ 代数而 μ 为定义在集合 $A\in\mathfrak{S}$ 上的测度　对于定义在 $(X,\mathfrak{S},\mu)$ 上的可测函数 $f\quad X\to\mathbf{C}$ 的空间，令

$$\|f\|_p=\begin{cases}\left[\int_X(|f(x)|^p d\mu\right]^{1/p}, & \text{对于 } 1\leqslant p<+\infty,\\ \operatorname{ess\,sup}_{x\in X}|f(x)|, & \text{对于 } p=+\infty,\end{cases}$$

在此可测函数空间中，对满足 $\|f\|_p<\infty$ 的 f，赋予**范数** (norm) $\|f\|_p$．具有这样的范数的空间常称为 Lebesgue 函数空间 (Lebesgue function space) $L_p(X)$　在数学分析中起重要作用的其他函数空间还有 **Hölder 空间** (Hölder space)，**Никольский 空间** (Nikol'skiĭ space)，**Orlicz 空间** (Orlicz space) 与 **Соболев 空间** (Sobolev space) 等．所有这些空间都是完全度量空间，它们无论在研究函数论自身的许多问题中，还是在有关数学分支中出现的这些空间与某些推广的问题中，在很大程度上都是不可缺少的　在函数空间的嵌入理论 (见**嵌入定理** (imbedding theorem)) 中研究同时属于数种不同函数空间的函数的不同范数之间的关系　基本函数空间的一个重要性质是无穷可微函数类在其中稠密，这就使人们能把关于充分光滑函数空间的一系列性质，用极限过程转移到所考虑的函数空间上去

函数的相关性 (dependence of functions)　这是函数组的一个性质，推广了函数组的线性相关概念，并意味着在给定函数组的各个函数值之间存在着确定的关系，特别，组中之一的值可用其他函数值来表示　例如，两个函数 $f_1(x)=\sin^2 x$ 与 $f_2(x)=\cos^2 x$ 在整个实直线上是相关的，因为有 $\sin^2 x=1-\cos^2 x$　设 D 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个**区域** (domain)，$\bar{D}$ 为 D 的闭包并设 $f\quad\bar{D}\to\mathbf{R}^n$，

$f(x)=\{y_i=f_i(x)\ i=1,\cdot\ ,n\},\ x\in\bar{D}$ 称函数组 $\{f_1,\ \ ,f_n\}$ 在 $\bar{D}$ 上是相关的 (dependent)，如果存在一个连续可微函数 $F(y)$, $y\in\mathbf{R}^r$，它的零点构成 $\mathbf{R}^n$ 中的一个**疏集** (nowhere-dense set) 而且复合函数 $F\circ f$ 在 $\bar{D}$ 上恒等于零

函数组 $f_i\ G\to\mathbf{R}\,(i=1,\ \ ,n)$ 称为在区域 $G\subset\mathbf{R}^n$ 上是相关的，如果对满足 $\bar{D}\subset G$ 的任何区域 D，它们在 $\bar{D}$ 上是相关的

设函数组 $f_i\,(i=1,\ \ ,n)$ 在区域 $G\subset\mathbf{R}^n$ 上连续可微，则它们在 G 上是相关的，当且仅当它们的 **Jacobi 行列式** (Jacobian) $\partial(f_1,\ \ ,f_n)/\partial(x_1,\ \ ,x_n)$ 在 G 上恒等于零．

今设

$$f_i\ \ G\to\mathbf{R}^m,\quad i=1,\ \ ,m\leqslant n,\quad G\subset\mathbf{R}^n \tag{1}$$

如果对 $y_i=f_i(x)$, $x\in G$, $i=1,\ \ ,m$, $G\subset\mathbf{R}^n$，存在 $\mathbf{R}^{m-1}_{y_1\ \ y_{m-1}}$ 中的开集 Γ 与 Γ 上连续可微函数 $\Phi(y_1,\ \ ,y_{m-1})$，使在任何点 $x\in G$，有

$$(f_1(x),\ \ ,f_{m-1}(x))\in\Gamma$$

与

$$\Phi(f_1(x),\ \ ,f_{m-1}(x))=f_m(x),$$

则 f_m 称为在 G 上与函数组 $f_1,\ \ ,f_{m-1}$ 是相关的 (dependent)．

若函数组 $f_i(i=1,\ \ ,m\leqslant n)$ 在区域 G 上连续并且在每点 $x\in G$ 的某一邻域中，组中之一与其他函数是相关的，则函数组 $f_i(i=1,\ \ ,n)$ 在 G 上是相关的

设函数组 $f_i\,(i=1,\ \ ,m\leqslant n)$ 在域 $G\subset\mathbf{R}^n$ 中连续可微 若在每点 $x\in G$ 的某一邻域中，组中之一与其他函数是相关的，则在 G 的任一点，Jacobi 矩阵

$$\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\|,\quad i=1,\ \ ,m,\ j=1,\ \ ,n \tag{2}$$

的秩小于 m，即梯度 $\nabla f_1,\ \ ,\nabla f_m$ 在每点 $x\in G$ 是线性相关的．

设函数组 (1) 在区域 $G\subset\mathbf{R}^n$ 中连续可微并设它们的 Jacobi 矩阵 (2) 的秩在每点 $x\in G$ 不超过某个数 r，$1\leqslant r<m\leqslant n$，此外，假定在某一点 $x^{(0)}\in G$ 此秩等于 r 换句话说，存在变量 $x_{j_1},\cdot\ ,x_{j_r}$ 与函数 $y_{i_1}=f_{i_1}(x),\ \ ,y_{i_r}=f_{i_r}(x)$ 满足

$$\left.\frac{\partial(f_{i_1},\ \ ,f_{i_r})}{\partial(x_{j_1},\ \ ,x_{j_r})}\right|_{x=x^{(0)}}\neq 0 \tag{3}$$

那么，不存在 $x^{(0)}$ 的邻域，在其中函数组 $f_{i_1},\ \ ,f_{i_r}$ 中的任一个与其他函数相关，并且存在 $x^{(0)}$ 的一邻域，在其中其余函数 $f_i\,(i\neq i_k,\ k=1,\ \ ,r)$ 中的每一个与 $f_{i_1},\ \ ,f_{i_r}$ 相关．特别，若梯度 $\nabla f_1,\ \ ,\nabla f_m$ 在区域 G 的一切点线性相关，并且在某一点 $x^{(0)}\in G$ 其中 $m-1$ 个是线性独立的，从而其中之一，例如 ∇f_m，成为其他的 ∇f_i 的线性组合，那么，存在 $x^{(0)}$ 的一邻域，使在其中 f_m 与函数 $f_1,\cdot,f_{m-1}$ 相关．

参考文献

[1] Euler, L , Einleitung in die Analysis des Unendlichen, 1, Springer, 1983 (译自拉丁文)

[2] Лобачевский, Н И , Полное собр соч , т 5, М - Л , 1951

[3] Dedekind, R , The nature and meaning of numbers, The Open Court Publ Comp , 1901 (译自德文)

[4] Hausdorff, F, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914 重印英译本 (不完全) Set theory, Chelsea, 1978 (中译本 F 豪斯道夫，集论，科学出版社，1960)

[5] Tarski, A , Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences, Oxford Univ Press, 1946 (译自德文)

[6] Kuratowski, K , Topology, 1, Acad Press, 1966 (译自法文)

[7] Frege, G , Funktion und Begriff, H Pohle, 1891 (重印本 Kleine Schriften, G Olms, 1967)

[8] Church, A , Introduction to mathematical logic, 1, Princeton Univ Press, 1956

[9] Yushkevich, A P, The concept of function up to the middle of the nineteenth century, *Arch History of Exact Sci* , **16** (1977) , 37-85

[10] Медведев, Ф А , Очерки истории теории функций действительного переменого, М , 1975

Л Д Кудрявцев 撰

【补注】 原象也称为逆象 (inverse image) 函数 f 在集合 A 上的限制一般记成 $f|_A$ 或 $f|A$，在公理集合论中，象 $f(A)$ 常写为 $f''A$ 以避免任何误解．严格地说，正文中所述多值函数的定义是没有意义的 其实，函数 $f\ X\to Y$，其中 $Y=\mathscr{P}(Z)$ (Z 的子集所成的族) 称为一个多值函数 $f\ X\to Z$ 最后，**函数的度量理论** (metric theory of functions) 一词在西方不常用，在此研究领域中还没有被普遍采用的名词．

参考文献

[A1] MacLane, S , Mathematics form and function, Springer, 1986

[A2] Royden, H L , Real analysis, Macmillan, 1963

[A3] Rooy, A C M van and Schikhof, W H , A second course on real functions, Cambridge Univ Press, 1982

[A4] Gelbaum, B R and Olmsted, J M H , Counterexamples in analysis, Holden - Day, 1964

郑维行 译

有界特征函数 [**function of bounded characteristic, ограниченного вида функция**]，复平面 $\mathbf{C}$ 的区域 D 中的

如果 D 中的**亚纯函数** (meromorphic function) $f(z)$ 能在 D 中表示为两个有界解析函数之商.

$$f(z)=\frac{g_1(z)}{g_2(z)}, \quad |g_1|,|g_2|\leqslant 1, \quad z\in D, \qquad (1)$$

则称为有界型函数（function of bounded type）. 研究得最多的是单位圆盘 $\Delta=\{z\in\mathbf{C} \ |z|<1\}$ 中的有界型函数类 $N(\Delta)$ Δ 中的亚纯函数 $f(z)$ 属于 $N(\Delta)$，当且仅当它的特征（characteristic）$T(r, f)$ 为有界（Nevanlinna 定理（Nevanlinna theorem））

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta+\sum\ln\frac{r}{|b_\nu|}+\lambda\ln r$$
$$\leqslant C(f)<\infty, \ 0<r<1 \qquad (2)$$

这里右边的和是对 $f(z)$ 的满足 $0<|b_\nu|<r$ 的所有极点取的，而且每个极点按其重数重复取，$\lambda\geqslant 0$ 是原点处极点的重数. 因而类 $N(\Delta)$ 中的函数也称为有界特征函数（function of bounded characteristic）. 下述充分条件也是有趣的 如果 Δ 中的亚纯函数 $f(z)$ 不取具有正容量（capacity）的值集 E $\operatorname{cap}E>0$，则 $f(z)\in N(\Delta)$

$N(\Delta)$ 中的函数 $f(z)$ 具有下列性质 1) $f(z)$ 在单位圆周 $\Gamma=\{z\in\mathbf{C}. |z|=1\}$ 上几乎处处有角边界值 $f(e^{i\theta})$，且 $\ln|f(e^{i\theta})|\in L_1(\Gamma)$，2) 如果在 Γ 的一个正测度点集上 $f(e^{i\theta})=0$，则 $f(z)\equiv 0$，3) 函数 $f(z)\in N(\Delta)$ 可用形如

$$f(z)=z^m e^{i\lambda}\frac{B_1(z,a_\mu)}{B_2(z,b_\nu)}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\right.$$
$$\left.\cdot\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\Phi(\theta)\right\} \qquad (3)$$

的积分表示式刻画，其中 m 是使得 $f(z)=z^m\varphi(z)$，$\varphi(0)\neq 0$，∞ 的整数，λ 是实数，$B_1(z,a_\mu)$ 和 $B_2(z, b_\nu)$ 是取遍 $f(z)$ 在 Δ 内的所有零点 $a_\mu\neq 0$ 和极点 $b_\nu\neq 0$ 的 Blaschke 积，零点和极点都按其重数来取（见 **Blaschke 积**（Blaschke product）），$\Phi(\theta)$ 是 $[0,2\pi]$ 上导数几乎处处等于零的奇异有界变差函数.

$N(\Delta)$ 中由所有全纯函数 $f(z)$ 构成的子类 $N^*(\Delta)$ 也是有趣的. 全纯函数 $f(z)$ 属于 $N^*(\Delta)$ 的一个必要充分条件是它满足由 (2) 导出的下述条件

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant C(f)<\infty, \ 0<r<1 . \qquad (4)$$

对于 $f(z)\in N^*(\Delta)$，在 (3) 中必有 $B_2(z,b_\nu)\equiv 1$，$m\geqslant 0$.

条件 (4) 等价于要求次调和函数 $\ln^+|f(z)|$ 在整个圆盘 Δ 中具有调和优函数. 以这种形式叙述的条件常用来定义任意区域 $D\subset\mathbf{C}$ 上全纯函数的类 $N^*(D)$. $f(z)\in N^*(D)$，当且仅当 $\ln^+|f(z)|$ 在整个区域 D 中具有调和优函数.

假设函数 $w=w(z)$ 实现一个共形万有覆叠映射 $\Delta\to D$（即 Δ 上的一个单值解析函数，它对应到 D 且关于圆盘 Δ 到其自身上的分式线性变换群 G 是自守的） 于是 $f(w)\in N^*(D)$，当且仅当复合函数 $f(w(z))$ 关于 G 是自守的且 $f(w(z))\in N^*(\Delta)$ 如果 D 是有限连通域且其边界 ∂D 是可求长的，则 $f(z)\in N^*(D)$ 的角边界值 $f(\zeta)$ $(\zeta\in\partial D)$ 在 ∂D 上几乎处处存在，且 $\ln|f(\zeta)|$ 关于 ∂D 上的调和测度是可积的（细节见综述 [4]）.

设 $f(z)(z=(z_1, \ , z_n), n>1)$ 是单位多圆柱 $\Delta^n=\{z\in\mathbf{C}^n \ |z_j|<1, j=1, \ , n\}$ 上的多变量全纯函数，令 T^n 为 Δ^n 的骨架 $T^n=\{z\in\mathbf{C}^n \ |z_j|=1, j=1, \ , n\}$. 有界特征函数类 $N^*(\Delta^n)$ 由推广 (4) 的条件

$$\int_{T^n}\ln^+|f(r\zeta)|\,dm_n(\zeta)\leqslant C(f)<\infty, \ 0<r<1$$

来定义，其中 $\zeta=(\zeta_1, \ , \zeta_n)\in T^n$ 而 $m_n(\zeta)$ 是 T^n 上的规范化 Haar 测度，$m_n(T^n)=1$. 类 $N^*(\Delta^n)$ 中的全纯函数 $f(z)$ 在 T^n 上关于 Haar 测度 m_n 几乎处处有径向边界值 $\lim_{r\to 1}f(r\zeta)=f(\zeta)$，$\zeta\in T^n$，且 $\ln|f(\zeta)|$ 在 T^n 上是可积的. 如果保留 $D=\Delta^n$ 上有界型函数的原先定义 (1)，则有界型函数 $f(z)$ 是有界特征函数 $N(\Delta^n)\subset N^*(\Delta^n)$ 然而，对于 $n>1$，存在不能表示为两个有界全纯函数之商的函数 $g(z)\in N^*(\Delta^n)$（见 [5]）.

参考文献

[1] Nevanlinna, R , Analytic functions, Springer, 1970（译自德文）

[2] Маркушевич, А И , Теория аналитических функций, 2 изд , т 2, М , 1968（中译本 А И 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957）.

[3] Привалов , И И , Граничные свойства аналитических функций, 2 изд , М -Л , 1950（中译本 И И 普里瓦洛夫，解析函数的边界性质，科学出版社，1956）

[4] Итоги науки Математический анализ 1963 М., 1965, 5－80

[5] Rudin, W , Function theory in polydiscs, Benjamin, 1969

Е.Д Соломенцев 撰

【补注】 不应把上面定义的"有界型函数"概念同有界型整函数（entire function）概念相混淆. 为此，有时称函数 $f\in N(\Delta)$ 为有界型函数（functions of bounded form）或根本不赋予特殊名称；类 $N^*(\Delta)$ 更加重要.

沈永欢 译

有界变差函数 [**function of bounded variation**, **ограниченной вариации функция**]

一个函数，其变差是有界的（见**函数的变差**（variation of a function）） C Jordan 在考虑关于逐段单调函数的 Fourier 级数的收敛性的 **Dirichlet 定理**（Dirichlet theorem）的推广时，对一元实变函数引进了有界变差函数的概念（见关于 Fourier 级数收敛性的 **Jordan 准则**（Jordan criterion）） 在区间 $[a, b]$ 上定义的函数 $f(x)$ 是有界变差函数，当且仅当它可以表示为形式 $f(x)=$

$f_1(x)+f_2(x)$，其中 $f_1(x)$（相应地，$f_2(x)$）是 $[a, b]$ 上的增函数（相应地，减函数）（见有界变差函数的 **Jordan 分解**（Jordan decomposition））任何有界变差函数都是有界的，并且至多具有可数个间断点，它们都是第一类的 一个有界变差函数可以表示为一个绝对连续函数（见**绝对连续性**（absolute continuity））、一个**奇异函数**（singular function）和一个**跳跃函数**（jump function）之和（见有界变差函数的 **Lebesgue 分解**（Lebesgue decomposition））

在多元函数的情况下，有界变差函数的概念不是唯一的，在这种情况下，存在多个函数变差的定义（见 **Arzelà 变差**（Arzelà variation），**Vitali 变差**（Vitali variation），**Pierpont 变差**（Pierpont variation），**Tonelli 平面变差**（Tonelli plane variation），**Fréchet 变差**（Fréchet variation），**Hardy 变差**（Hardy variation））

参考文献

[1] Jordan, C , Sur la série de Fourier, *C R Acad Sci Paris*, **92** (1881), 228 − 230

[2] Натансон, И П , Теория функций вещественной переменной, 3 изд , М , 1974（中译本 И П 那汤松，实变函数论，高等教育出版社，1956）

Б И Голубов 撰 张鸿林 译

紧支集函数 [function of compact support, финитная функция]

定义在 E^n 的某个区域上的、具有属于这个区域的紧支集的函数 更确切地说，假定函数 $f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$ 定义在区域 $\Omega \subset E^n$ 上，f 的**支集**（support）是指使 $f(x)$ 不为 $0(f(x)\neq 0)$ 的点 $x\in\Omega$ 的集合的闭包．于是，Ω 中紧支集的函数是定义在 Ω 上的函数．其支集 Λ 是 Ω 中有界闭集，Λ 和 Ω 的边界 Γ 有正距离 $\delta>0$，其中 δ 充分小

通常考虑 k 次连续可微的紧支集函数，其中 k 是给定的自然数 甚至更经常地考虑无穷次可微的紧支集函数．函数

$$\psi(x)=\begin{cases} e^{-1/(|x|^2-1)}, & |x|<1,\ |x|^2=\sum_{j=1}^{n} x_j^2, \\ 0 & |x|\geqslant 1 \end{cases}$$

是紧支集含于区域 Ω 中的无穷次可微函数的例子，其中区域 Ω 包含球 $|x|\leqslant 1$

区域 $\Omega\subset E^n$ 中的无穷次可微紧支集函数的全体记作 D 可以在 D 上定义线性泛函（见**广义函数**（generalized function））借助于函数 $v\in D$ 可以定义边值问题的**广义解**（generalized solution））．

在与求解广义解问题有关的定理中，知道 D 在某个具体的函数空间中是否稠密常常是很重要的．例如已知，如果有界区域 $\Omega\subset E^n$ 的边界 Γ 充分光滑，那么 D 在以下的函数空间中是稠密的

$$\overset{o}{W}{}_p^r(\Omega)=\left\{f \ \ f\in W_p^r(\Omega),\ \left.\frac{\partial^s f}{\partial n^s}\right|_\Gamma=0,\ s=0, \ \ldots, r-1\right\}$$

$(1\leqslant p\leqslant\infty)$，它是由 **Соболев 空间**（Sobolev space）函数类 $W_p^r(\Omega)$ 中那些在边界 Γ 上本身及其直到 $r-1$ $(r=1, 2, \ldots)$ 阶法向导数都为零的函数组成的．

参考文献

[1] Владимиров, В С , Обобщенные функции в математической физике, 2 изд , М , 1979（英译本 Vladimirov, V S , Generalized functions in mathematical physics, Mir, 1979）

[2] Соболев, С Л , Некоторые применения функционального анализа в математической физике Новосиб , 1962（中译本 С Л 索伯列夫，泛函分析在数学物理中的应用，科学出版社，1959）

С М Никольский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Schwartz, L , Théorie des distributions, 1 − 2, Herman, 1950 − 1951

[A2] Lions, J L and Magenes, E , Non-homogenous boundary value problems and applications, 1 − 2, Springer, 1972（译自法文）．

[A3] Yosida, K , Functional analysis, Springer, 1980（中译本 吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1980）

余庆余 译

指数型函数 [function of exponential type, экспоненциального типа функция]

满足条件

$$|f(z)|<Ae^{a|z|},\ |z|<\infty,\ A, a<\infty$$

的**整函数**（entire function）$f(z)$

如果 $f(z)$ 由级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}z^k$$

表示，则

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}|a_k|^{1/k}<\infty$$

指数型函数最简单的例子是 e^{cz}，$\sin\alpha z$，$\cos\beta z$，$\sum_{k=1}^{n}A_k e^{\alpha_k z}$

指数型函数具有积分表示式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \gamma(t)e^{zt}dt,$$

其中 $\gamma(t)$ 是在 Borel 意义下与 $f(z)$ 相伴的函数（见 **Borel 变换**（Borel transform）），C 是包围 $\gamma(t)$ 的所有奇点的闭围道．

参考文献

[1] Левин, Б Я, Распределение корней целых функций, М, 1951 (英译本 Levin, B Ya, Distributions of zeros of entire functions, Amer Math Soc, 1964)

А Ф Леонтьев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Boas, R P, Entire functions, Acad Press, 1954

沈永欢 译

函数论 [function theory, функций теория]

研究函数 (function) 的一般性质的一个数学分支．函数论分为两部分 **实变函数论** (functions of a real variable, theory of) 和**复变函数论** (functions of a complex variable, theory of)

张鸿林 译

泛函 [functional, функционал]

任意集合 X 到实数集 **R** 或复数集 **C** 的**映射** (mapping) f 如果对 X 赋予**向量空间** (vector space)、**拓扑空间** (topological space) 或**序集** (ordered set) 的结构，则得到相应的重要泛函类型 **线性泛函** (linear functional)、**连续泛函** (continuous functional) 和单调泛函 (见**单调映射** (monotone mapping))

参考文献

[1] Колмогоров, А Н, Фомин, С В, Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд, М, 1981 (中译本 А Н 柯尔莫戈罗夫、С В 福明, 函数论与泛函分析初步, 高等教育出版社, 1957)

张鸿林 译

泛函分析 [functional analysis, функциональный анализ]

现代数学分析的一部分，其基本论题是研究函数 $y=f(x)$，其中至少一个变量 x 或 y 在无穷维空间上变化 大体上，这种研究可分成三个部分 (1) 引入和研究这种无穷维空间；(2) 研究最简单的函数，即当 x 在一个无穷维空间中取值而 y 在一个一维空间中取值 (这些函数称为**泛函** (functional)，由此有“泛函分析”这个名称)，(3) 研究一般的上述类型的函数——**算子** (operator) 对线性函数 $X\ni x\mapsto f(x)\in Y$，即线性算子已经有了最完满的研究．线性算子理论本质上是把**线性代数** (linear algebra) 推广到无穷维的情况．把经典分析和代数的方法结合起来是泛函分析方法的特征，这导致初看起来相距甚远的数学分支之间发生了关联

泛函分析作为一个独立的数学分支始于 19 世纪末而最终建立于 20 世纪 20－30 年代，这一方面是由于研究特殊类型的线性算子——积分算子和与其有关联的积分方程的影响，另一方面则是现代数学的内在发展的结果，即要求一般化从而阐明一些有规律的性态的真正本质．量子力学也对泛函分析的发展有巨大的影响，因为它的一些基本概念，例如能量，转化成无穷维空间上的一些线性算子 (起初物理学家们宁愿不严格地表述为无穷维矩阵)．

1 空间概念 **拓扑向量空间** (topological vector space) 是在泛函分析中出现的最一般的空间 它们是复数域 **C** (或任意的其他域，例如实数域 **R**) 上的向量 (线性) 空间 X，同时是拓扑空间，且线性结构与拓扑是相容的，即线性运算在所取的拓扑中是连续的．特别地，如果 X 是度量空间，则它是度量向量空间

更特殊的但很重要的情况是在一个向量空间中按公理化方法引入向量 $x\in X$ 的范数 $\|x\|$ (长度) 这个概念．带有范数的向量空间称为赋范空间 (normed space)．它是可度量化的 由公式 $\rho(x,y)=\|x-y\|$ 引入度量 ρ 带有范数的向量空间称为 **Banach 空间** (Banach space)，如果它关于上述的度量是完全的．

在大量问题中出现这样的情况，即在向量空间 X 中对任意两个向量能引入一个**内积** (inner product)，此内积是三维空间中通常标量积的推广 具有内积的空间称为准 Hilbert 空间，它是赋范空间的特殊情况 如果此空间是完全的，则称为 Hilbert 空间．

在泛函分析中研究无穷维空间 (infinite-dimensional spaces)，这些空间中有线性无关向量组成的无穷集

从几何观点看，最简单的空间是 Hilbert 空间 $X=H$，它有最类似于有限维空间的那些性质，因为借助于内积，可以引入类似于两向量间夹角的概念．特别地，两向量 x, y 称为正交的 ($x\perp y$)，如果 $(x,y)=0$ 在 H 中以下结论成立 设 G 是 H 的子空间，则任一向量 $x\in H$ 在 G 上有投影 x_G，即有向量 $x_G\in G$ 使得 $x-x_G$ 垂直于 G 中任一向量．由于这个事实，许多对有限维空间成立的几何结构能转移到 Hilbert 空间，这里它们通常具有解析的特征．

当从 Hilbert 空间转到 Banach 空间时，几何问题显然变得更为复杂，而在一般的拓扑向量空间中尤为复杂，因为在其中正交投影没有意义 例如，在空间 $l_p (p\geq 1)$ 中，向量组 $e_n=(0, \ ,0,1,0,0, \ )$ $(n=1,2, \ )$ 在以下意义下构成**基** (basis) 对每个向量 $x\in l_p$，“坐标样式”的展开式

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n e_n$$

成立．对空间 $C[a,b]$，基的构造已是稍为复杂一点，同时在每个已知的 Banach 空间的例子中，能构造出一个基 这样就提出了问题 每个 Banach 空间是否存在基? 这问题虽经很多数学家的努力，40 多年中未得到解决，直到 1972 年才得到否定的解答 (见 [23]) 在泛函分析中，“几何的”论题占有重要的地位，这些论题致力于阐明在 Banach 空间和其他空间中各种不同集合的性质，例如凸集、紧集 (这种集合 Q 中每一点列

有子序列收敛于 Q 中某一点）等等．这里，形式上很简单的问题常有很不平凡的解 这些问题与研究空间之间的同构有紧密关系，且与寻求某些类空间的一般表示有紧密关系．

一些特定的函数空间已被详细地研究过，因为当用泛函分析方法得到某个问题的解时，这些空间的性质通常决定了问题解的特征 所谓对 Соболев 空间 $W_p^l(G)(G\subseteq\mathbf{R}^n)$ 的**嵌入定理**（imbedding theorems），及其各种推广均可作为例子．

由于现代数学物理的要求，出现了许多特殊的空间，在这些空间中问题能自然地提出，因此必须对它们作研究．这些空间通常从一些原有的空间用一定的结构构造出来 以下用最简略的描述方式给出最通用的结构

1) Hilbert 空间 $H_n(n=1, 2, \ldots)$ 的正交和 $H=\oplus_{n=1}^{\infty}H_n$ 的构造是用空间 H_n 构造空间 H，类似于用一维空间来构造 H

2) 到商空间的转移 在向量空间 X 中给定了一个退化的内积 (x, y)（即当 $x\neq0$ 时可能有 $(x, x)=0$），首先把满足 $(x, x)=0$ 的所有向量 x 都看作 0，再对 $(\cdot, \cdot)$ 取 X 的完全化，则定义出 Hilbert 空间 H

3) 张量积 $\otimes_{j=1}^{n}H_j$ 的构造类似于通过一元函数 $f(x_1)$ 转换到多元函数 $f(x_1, \ldots, x_n)$，类似的构造也可用于无穷多个因子，也可考虑对称和反对称张量积，在函数的情况，它们由具有这些性质的多元函数所组成

4) Banach 空间 X_α 的射影极限 X 的构造，这里 α 遍及某一指标集 A 由定义，$X=\bigcap_{\alpha\in A}X_\alpha$，大体上说，$X$ 中的拓扑由 $x_n\to x$ 的收敛性给出，也就是说，对每个 X_α 的范数，$\|x_n-x\|\to0$

5) Banach 空间 X_α 的归纳限 X 的构造 由定义，$X=U_{\alpha\in A}X_\alpha$，大体上说，$X$ 中的拓扑由 $x_n\to x$ 的收敛性给出，即所有 x_n 落在某一确定的 X_α 中，且关于此空间的范数，$\|x_n-x\|\to0$

6) 插值（interpolation）是从两空间 X_1 和 X_2 构造“中间”空间 X_α，这里 $\alpha\in(0, 1)$，例如从 $W_p^1(G)$ 和 $W_p^2(G)$ 构造带有分数次导数的函数空间 $W_p^\alpha(G)$，$\alpha\in(1,2)$

程序(4)和(5)可一般地用于构造拓扑向量空间．这些空间中，具有特色的是一类很重要的空间，即所谓**核型空间**（nuclear space），每一个核型空间是作为具有以下性质的 Hilbert 空间 H_α 的射影极限而构造出来的 对每个 $\alpha\in A$，能找到 $\beta\in A$ 使 $H_\beta\subseteq H_\alpha$，且嵌入算子 $H_\beta\in x\to x\in H_\alpha$ 是 Hilbert - Schmidt 算子（见以下的第 3 段）

泛函分析的一个大的和重要的分支是研究带有偏序（按公理引进）的拓扑向量空间和赋范空间（偏序空间），这种空间有很自然的性质，此分支已得到发展

2 **泛函**（functionals） 在泛函分析中对**连续泛函**（continuous functional）和**线性泛函**（linear functional）的研究占有重要地位，它们的性质与原来的空间 X 的性质密切关联

设 X 是 Banach 空间且设 X' 是其上的连续线性泛函的集合，X' 按照通常的函数相加和用数乘函数的运算是向量空间，如果引入范数

$$\|l\|=\sup_{\substack{x\in X\\x\neq0}}\frac{|l(x)|}{\|x\|},$$

则它成为 Banach 空间

空间 X' 称为 X 的对偶（dual），亦见**伴随空间**（adjoint space）

如果 X 是有限维的，则每个线性泛函具有以下的形式．

$$l(x)=\sum_{j=1}^{n}x_j\overline{a}_j,$$

这里 x_j 是向量 x 关于某一基的坐标而 a_j 是由此泛函确定的数．可证明当 $X=H$ 是 Hilbert 空间时此公式仍成立（Riesz 定理（Riesz theorem）） 即在这种情况下，$l(x)=(x, a)$，这里 a 是 H 中某一向量．此公式表明 Hilbert 空间与其对偶空间实质上是重合的．

对 Banach 空间情况复杂得多 能构造出 $X''=(X')'$，$X'''=(X'')'$，$\ldots$，且这些空间可以全不相同．同时，总存在一种 X 到 X'' 中的典范嵌入，即对每个 $x\in X$，伴随着有泛函 L_x，这里 $L_x(l)=l(x)$，$l\in X'$．空间 X 称为自反的（reflexive），若 $X''=X$ 一般来说，在 Banach 空间的情况，即使非平凡（即非零）线性泛函的存在性也不是一个简单的问题．此问题借助于 **Hahn-Banach 定理**（Hahn - Banach theorem）容易得出肯定的答案

对偶空间 X' 在某种意义下比原空间 X 有“更好的”性质 例如，在 X' 中，除了范数拓扑外，能引入另一种（弱）拓扑，按收敛性来说，$l_n\to l$ 如果对所有的 $x\in X$，$l_n(x)\to l(x)$ 按这拓扑，X' 中单位球是紧的（对无穷维空间按由范数生成的拓扑，这种情况是决不会发生的）．这使得有可能对对偶空间中集合的许多几何问题作更详细的研究（例如确定凸集的结构等等）

对有些特殊的空间 X，其对偶空间 X' 能明确地找出．然而．对大多数的 Banach 空间，特别是对拓扑向量空间，其泛函是一类新的元素，不能简单地用古典分析的方法来表示 对偶空间的元素称为广义函数．

对泛函分析及其应用中的许多问题，空间的三元组 $\Phi'\supseteq H\supseteq\Phi$ 起着关键性作用，这里 H 是原有的 Hilbert 空间，Φ 是拓扑向量空间（特别是带有不同内

积的 Hilbert 空间）而 Φ' 是其对偶空间，其中的元素能作为广义函数 于是空间 H 本身称为具装备的 Hilbert 空间

对 X 上线性泛函的研究在许多方面促使对原空间 X 的性质有更深入的了解．另一方面必须研究一般的函数 $X \ni x \to f(x) \in \mathbf{C}$，即在无穷维空间 X 情况下的**非线性泛函**（non-linear functional） 由于这种空间中单位球是非紧的，其研究常常遇到一些实质性的困难，然而，例如 f 的可微性，它的解析性等一类概念容易推广．可以把具有一些确定性质的函数 $X \ni x \mapsto f(x) \in \mathbf{C}$ 的集合视作一个由"无穷多变元"函数组成的新的拓扑向量空间．在构造一元函数空间的无穷张量积 $\otimes_{n=1}^{\infty} H_n$ 中，也出现这种函数．研究这类空间及其上的算子是与量子场论的需要有关联的（见 [22]）

3 **算子**（operators），在泛函分析中研究的主要对象是算子 $X \ni x \mapsto f(x) \in Y$，这里 X 和 Y 是拓扑向量空间（就绝大部分而言是赋范空间或 Hilbert 空间），而首先是**线性算子**（linear operator）

当 X 和 Y 是有限维空间时，算子的线性性质推出它有如下的形式

$$(Ax)_j = \sum_{k=1}^{N} a_{jk} x_k, \quad j=1, \quad, M,$$

这里 $x_1, \quad, x_N$ 是向量 x 在某一基下的坐标，而 $(Ax)_1, \quad, (Ax)_M$ 类似地是 $y=Ax$ 的坐标 这样，在有限维的情况，对每个线性算子 A，按照 X 和 Y 的固定的基，对应于一个矩阵

$$\| a_{jk} \|_{j\ k=1}^{M\ N},$$

它给出了 A 的简单表达式 研究这种情况下的线性算子是线性代数的课题

当 X 和 Y 变为无穷维空间（即使是 Hilbert 空间）时，情况远为复杂 首先，这里出现两类算子 连续算子，即函数 $X \ni x \mapsto Ax \in Y$ 是连续的（它们也称为有界的，因为Banach 空间之间的线性算子的连续性等价于它的有界性），和无界算子，它们没有这种连续性 第一类型的算子较简单，但第二类型的算子更常见，例如微分算子是第二类型的

Hilbert 空间 H 上的**自伴算子**（self-adjoint operator）是重要的一类（特别对量子力学），对它们研究得最多．

与自伴算子密切关联的另外几类 H 上的算子（所谓**酉算子**（unitary operator）和**正规算子**（normal operator））也已经得到了很完善的研究．

关于作用在 Banach 空间 X 中的有界算子的一般性结果中，可举出解析函数的函数演算的构造 即算子 $R_z=(A-zI)^{-1}$ 称为算子 A 的预解式（resolvent of the operator），这里 I 是恒等算子而 $z \in \mathbf{C}$ 使逆算子 $(A-zI)^{-1}$ 存在的点 z 称为 A 的正则点（regular points），正则点集的补集称为 A 的谱（spectrum）$s(A)$ 谱一定不是空的且落在圆盘 $|z| \leq \|A\|$ 中，A 的本征值当然属于 $s(A)$，但一般地说，谱不是完全由本征值组成．如果 $f(z)$ 是定义在 $s(A)$ 的某邻域内的一个解析函数，且设 Γ 是包围 $s(A)$ 的闭围道且在 $f(z)$ 的解析区域内，则令

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) R_z \, dz,$$

且称 $f(A)$ 是算子函数（operator function） 如果 $f(z)$ 是一个多项式，则可在此多项式中简单地用 A 置换 z 而得出 $f(A)$ 对应关系 $f(z) \mapsto f(A)$ 有重要的同态性质

$$(f+g)(A) = f(A)+g(A), \quad (fg)(A) = f(A)g(A)$$

这样，在 A 的一定条件下，例如能定义 e^A, $\sin A$, $\sqrt{A}$ 等等．

在作用于 Banach 空间 X 上的特殊的算子类中，所谓**完全连续算子**（completely continuous operator）或**紧算子**（compact operator）占有最重要的地位 如果 A 是紧的，则方程 $x-Ax=y$（$y \in X$ 是一给定的向量而 $x \in X$ 是所求的向量）已经研究得很充分 对有限维空间中线性方程组成立的所有相类似的结果对此方程也成立（即所谓 Fredholm 理论（Fredholm theory）） 对紧算子 A，人们研究使 A 的本征向量及其相伴向量系在 X 中稠密的条件，即 X 中任一向量能用本征向量及其相伴向量的线性组合逼近的条件，等等．同时，即使对紧算子，存在一些自然地提出而很难解决的问题（例如，关于每个紧算子有一个异于 0 和全空间的不变子空间 G 的定理，这里子空间 G 满足 $AG \subseteq G$，在有限维情况 G 的存在性由谱非空这一事实即可推出）

紧算子的谱是离散的且仅可能聚集于 0 点．紧算子类中按照本征值趋于 0 的速度区分出重要的子类 经常碰到的是 Hilbert-Schmidt 算子．如果 A 是 $H=L_2(G)$ 上的算子，则它是 **Hilbert-Schmidt 算子**（Hilbert-Schmidt operator），当且仅当它是带有按两个变量平方可和核 $K(t,s)$ 的积分算子 紧 Volterra 算子也已得到详尽的研究 对谱算子也已作了研究，对它们有类似于单位分解 $E(\lambda)$ 等结果（见 [8]）．

4 **Banach 代数**（Banach algebras）与**表示论**（representation theory） 在泛函分析发展过程的早期，所研究的问题能借助于单独一个空间中元素的线性运算来描述并加以解决

数学中有力的方法之一是用较简单的（或较具体的）对象来代表抽象的数学对象．例如，谱定理能解释为用以自变量乘某一特定类可测函数的算子来表示自伴算子．如果用 Borel 函数相乘，就得到 Hilbert 空间上算子的交换赋范代数的表示．这种表示的更一般的例子给出交换 Banach 代数理论中一个主要定理．

设 A 是交换 Banach 代数，为简单起见设它有单位元，即它是一个 Banach 空间，其中元素 $x, y \in A$，有交换的和结合的乘法 $x \cdot y$，且设范数满足 $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ 此外又设 $\mathfrak{M}$ 是所有极大理想的集合 这时，在 $\mathfrak{M}$ 上能引入一个紧拓扑使得每个元素 $x \in A$ 表示一个复值连续函数 $x(m)$，$m \in \mathfrak{M}$，而且函数的和 $x(m)+y(m)$ 与积 $x(m) \cdot y(m)$ 分别对应于和 $x+y$ 与积 $x \cdot y$ (见[7]) 在非交换的情况表示理论也已作了研究，特别是对所谓带有对合的代数 (见 **Banach 代数** (Banach algebra))

对拓扑群相当丰富的表示理论已得到发展 (见**拓扑群的表示** (reprensentation of a topological group))

5 **非线性泛函分析** (non-linear functional analysis). 当空间概念正在发展和深化的同时，函数概念也正在发展和推广 结果必须考虑从一个空间到另一个空间中的映射 (不必是线性的) 非线性泛函分析中的中心问题之一是研究这种映射 如同线性的情况，一个空间到 (实或复) 数中的**映射** (mapping) 称为泛函 对非线性映射 (特别是非线性泛函) 有各种不同的方法去定义微分、方向导数等等概念，类似于经典数学分析中的相应概念 (见 [11], [13], [15] 和**映射的微分法** (differentiation of a mapping))

在非线性泛函分析中一个重要的问题是确定映射不动点的问题 (见 [11], [13], [15] 和**不动点** (fixed point)).

当研究包含参数的非线性映射的本征向量时，出现了一种在非线性分析中是关键性的现象—— 称为**分歧** (bifurcation，见 [15])

在研究不动点和分歧点时，广泛地应用拓扑方法 关于有穷维空间中映射不动点存在性的 Brouwer-Bohl 定理对无穷维空间的推广，映射度 (见**指标公式** (index formulas)) 等等

6 **泛函分析在数学物理和理论物理中的应用** 以下指出数学物理那些分支中要用到的泛函分析的某些部分

1) 算子谱理论 (spectral theory of operators) 可应用于量子物理学的全部理论 在量子 n 体理论、**量子场论** (quantum field theory) 和量子统计力学中 此外，谱论应用于经典力学的动力系统模型的研究中，用于流体动力学的线性化方程组的研究中，用于 Gibbs 场的研究中等等.

2) 散射理论 (scattering theory) 可应用于量子物理学 必须指出散射的现代数学理论首先在物理学中兴起 近年来，散射理论 (逆问题) 已经常用于求解数学物理中非线性模型方程.

3) Banach 代数 (Banach algebras) 可应用于量子场论，特别是所谓公理化场论，也用于研究量子场和统计力学的各种可积模型 von Neumann 代数也用于这些问题

4) 扰动理论 (perturbation theory)，主要是线性算子的扰动理论 (perturbation theory for linear operators)，可应用于数学物理的几乎所有领域 量子场论和统计力学，包括平衡的和非平衡的两者 (特别是研究所谓动力学方程 多质点系统的复合谱等等)

5) 函数空间中泛函积分和测度可用于**构造性量子场论** (constructive quantum field theory) 和量子统计力学.

6) 各种积分表示 (如Riesz 定理，Крейн-Мильман 定理，Choquet 定理等等)，可应用于公理化量子场论和统计力学

7) 向量空间 (vector spaces)，主要是 Hilbert 空间，可应用于量子理论和统计物理学.

8) **广义函数** (generalized function) 作为重要的分析工具在数学物理中到处用到.

参考文献

[1] Ахиезер, Н П, Глазман, И М, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд, Москва, 1966 (英译本 Ahiezer, N I and Glazman, I M, Theory of linear operators in Hilbert space, 1-2, Pitman, 1984)

[2] Банах, С, Курс функцiонального аналiзу, Киiв, 1948

[3] Березанский, Ю М, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К, 1965 (英译本 Berezanskiy, Yu M, Expansion in eigenfunctions of self-adjoint operators, Amer Math Soc, 1968)

[4] Bourbaki, N, Elements of mathematics Topological vector spaces, Springer, 1987 (译自法文)

[5] Вулих, Б З, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М, 1961 (英译本 Vulikh, B Z, Introduction to the theory of partially ordered spaces, Wolters-Noordhoff, 1967)

[6] Гельфанд, И М, Шилов, Г Е, Обобщенные функции и действия над ними, М, 1958 (中译本 И М 盖尔芳特, Г Е 希洛夫, 广义函数, I, II, III, 科学出版社, 1965-1985, 盖尔芳特等, 广义函数 IV, 科学出版社, 1965)

[7] Гельфанд, И М, Райков, Д А, Шилов, Г Е, Коммутативные нормированные кольца, М, 1960

[8] Dunford, N and Schwartz, J T, Linear operators, 1-3, Interscience, 1958-1971

[9] Yosida, K, Functional analysis, Springer, 1980 (中译本 吉田耕作, 泛函分析, 人民教育出版社, 1981)

[10] Канторович, Л В, Функциональный анализ и прикладная математика, 《Успехи матем наук》, **3** (1948), 6, 89-185

[11] Канторович, Л В, Акилов, Г П, Функциональный анализ в нормированных пространствах, М, 1959

[12] Кириллов, А А, Элементы теории представлений, 2 изд, М, 1978 (英译本 Kirillov, A A, Elements of

the theory of representations, Sprnger 1976)

[13] Колмогоров, А Н, Фомин, С В, Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд, М, 1981 (中译本 А Н 柯尔莫果洛夫, С В 佛明, 函数论与泛函分析初步, 上、下册, 高等教育出版社, 1992)

[14] Красносельский, М А, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М, 1956 (英译本 Krasnosel'skiĭ, M A, Topological methods in the theory of non-linear integral equations, Pergamon, 1964)

[15] Люстерник, Л А, Соболев, В И, Элементы функционального анализа, 2 изд, М, 1965 (中译本 Л А 刘斯铁尔尼克, В И 索皮列夫, 泛函分析概要, 科学出版社, 第二版, 1985)

[16] Наймарк, М А, Линейные дифференциальные операторы, 2 изд, М, 1968 (中译本 М А 纳依玛克, 线性微分算子, 科学出版社, 1964)

[17] Наймарк, М А, Нормированные кольца, 2 изд, М, 1968 (英译本 Naimark, M A Normed rings, Reidel, 1984)

[18] Reed, M and Simon, B, Methods of modern mathematical physics, 1-4, Acad Press, 1972-1978

[19] Riesz, F and Szokefalvi-Nagy, B Functional analysis, F Ungar, 1955 (译自法文 中译本 P F 黎茨, B 塞克佛维尔-纳吉, 泛函分析讲义, 科学出版社, 第一卷, 1980, 第二卷, 1981)

[20] Соболев, С Л Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб, 1962 (中译本 С Л 索伯列夫, 泛函分析在数学物理中的应用, 科学出版社, 1959)

[21] Hille, E and Phillips, R, Functional analysis and semigroups Amer Math Soc 1957 (中译本 E 希尔, R 菲列浦斯, 泛函分析与半群, 上海科学技术出版社, 1964)

[22] Шварц, А С Математические основы квантовой теории поля, М, 1975

[23] Enflo P, A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, *Acta Math*, **130** (1973), 309-317

Ю М Березанский, Б М Левитан 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rudin, W, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973 (中译本 W Rudin, 泛函分析, 湖北教育出版社, 1989)

[A2] Conway, J B, A course in functional analysis, Sprnger 1985

[A3] Schaefer, H H, Topological vector spaces, Macmillan, 1966

[A4] Banach, S S, Theorie des operations lineaires, Hafner, 1932

[A5] Kothe G Topological vector spaces, Ⅰ-Ⅱ, Sprnger 1979

[A6] Lindenstrauss J and Tzafriri, L, Classical Banach spaces Ⅰ-Ⅱ, Sprnger 1977-1979

[A7] Schaefer, H H, Banach lattices and positive operators, Sprnger, 1974

[A8] Horvath, J, Topological vector spaces and distributions Addison-Wesley, 1966

[A9] Grothendieck, A, Resume de la theorie metrique des produits tensoriels topologiques, *Bol Soc Mat São Paulo*, **8** (1956), 1-79

[A10] Pietsch, A, Operator ideals, North-Holland, 1980

[A11] Diestel, J and Uhl, J J, Jr, Vector measures, Amer Math Soc, 1977

[A12] Kadison, R V and Ringrose, J R Fundamentals of the theory of operator algebra Ⅰ-Ⅱ, Acad Press, 1983-1986

[A13] Kato, T, Perturbation theory for linear operators, Sprnger, 1976

[A14] Schwartz, J T, Non-linear functional analysis, Gordon & Breach, 1969

[A15] Choquet, G, Lectures on analysis, Ⅰ-Ⅲ, Benjamin, 1969

[A16] Rickart, C E, General theory of Banach algebra, v Nostrand, 1960

[A17] Luxemburg, W A J and Zaannen, A C, Riesz spaces, I, North-Holland, 1971

[A18] Schwartz, L, Theorie des distributions, Ⅰ-Ⅱ, Hermann, 1951

葛显良 译

函数演算 [functional calculus, функциональное исчисление]

从某个**函数代数** (algebra of functions) A 到一个拓扑向量空间 X 上的连续线性算子的代数 $L(X)$ 中的一个同态 函数演算是一般谱分析和 Banach 代数理论的基本工具之一, 它使人们能把函数解析方法应用于这些学科 通常, A 是空间 $\mathbf{C}^n$ 中的某个子集 K 上的拓扑 (特别地, 赋范) 函数代数, 它包含了变量 $z^1, \quad , z^n$ 的多项式 (常常是 A 的稠密子集), 这样一个函数演算 $\varphi \ A \to L(X)$ 就是交换算子 $T_i = \varphi(z^i)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 的多项式演算 $p(z^1, \quad , z^n) \to p(T_1, \quad , T_n)$ 的一个自然的延拓, 此时就说集合 $T = (T_1, \quad , T_n)$ 有一个 A 演算 (A-calculus) 并且记 $\varphi(T) = f(T) = f(T_1, \quad , T_n)$ 算子 T 的一个 A 演算是一种谱定理, 因为对应 $a \to \langle \varphi(a)x, x' \rangle$ 定义了一个与 T 可交换的弱算子值 A 分布, 这里 $x \in X$, $x' \in X^*$, $\langle , \rangle$ 是 X 和 X^* 之间的对偶

经典的 von Neumann-Murray-Dunford 函数演算 ($A = C(K)$, X 是一个自反空间) 导致一个算子 (投影) **谱测度** (spectral measure)

$$\varepsilon = \varepsilon_T \ f(T_1, \quad , T_n) = \int f d\varepsilon$$

Riesz-Dunford 函数演算 ($n = 1$, $A = \mathrm{Hol}(\sigma(T))$, 即在算子 T 的谱 $\sigma(T)$ 上的所有全纯函数) 导致公式

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\lambda) R(\lambda, T) d\lambda,$$

其中 $R(\lambda, T)=(\lambda I-T)^{-1}$ 是 T 的**预解式**（resolvent），γ 是把 $\sigma(T)$ 包围在其内的围道且 f 在其上是正则的．后一类型的多变量（算子）公式依赖于 $\mathrm{Hol}(\sigma(T))$ 上的线性泛函的概念和定义集合 $T=(T_1, \dots, T_n)$ 的联合谱 $\sigma(T)$ 的方法（函数演算的容量也依赖于 $\sigma(T)$ 的定义）.

如果 T 是一个**谱算子**(spectral operator)，S 和 N 分别是它的标量和拟幂零部分，并且如果 $f\in \mathrm{Hol}(\sigma(T))$，那么公式

$$f(T)=\sum_{n\geqslant 0} \frac{N^n}{n!} \int_{\sigma(T)} f^{(n)} d\varepsilon,$$

能把对 T 的 Riesz-Dunford 函数演算推广到一类更广的函数上去，其中 ε 是 T 的**单位分解**(resolution of the identity)．特别地，如果 $N^{m+1}=0$，那么 T 在 m 次连续可微函数类 $C^m(\sigma(T))$ 上有一个函数演算．如果 T 是一个标量型算子，那么可以把 $\sigma(T)$ 上的有界 Borel 函数代到这个公式中．特别地，Hilbert 空间上的正规算子有一个这样的函数演算．反过来也是对的．如果算子 T 有一个这样的函数演算（对自反空间中的算子只要假设在连续函数类上有一个函数演算），那么 T 是一个标量型的谱算子（在 Hilbert 空间中，这是一个与正规算子相似的线性算子）.

在 [5] 中对其预解式在谱的附近充分缓慢增长的算子构造了非解析 $C\{M_k\}$ 演算，这个演算是建立在 Carleman 类 $C(\{M_k\}, \sigma(T))$（见**拟解析类**(quasi-analytic class)）上的并且使用公式

$$f(T)=-\frac{1}{\pi} \iint_C \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}(\lambda) R(\lambda, T) d\lambda \overline{d\lambda},$$

其中 $\tilde{f}$ 是所谓函数 f 穿过谱 $\sigma(T)$ 的边界的 $\bar{\partial}$ 延拓，即一个在 $\mathbf{C}$ 中有紧支集的 C^1 函数，满足条件

$$f=\tilde{f}|_{\sigma(T)} \quad \left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}(\lambda)\right| \leqslant \text{常数} \cdot h_{\{M_k\}}(c\,\mathrm{dist}(\lambda, K))$$

这里

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}+i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\right],$$

$$h_{\{M_k\}}(r)=\inf_n r^{n-1} \frac{M_n}{n!},$$

并且算子 T 满足

$$\|R(\lambda, T)\| \leqslant\left[\frac{h_{\{M_k\}}(\mathrm{dist}(\lambda, K))}{|\log \mathrm{dist}(\lambda, K)|}\right]$$

另一方面，算子多项式 $p(T)$ 的界导致（比 $\mathrm{Hol}(\sigma(T))$）更广泛的演算．例如，如果 X 是一个 Hilbert 空间，那么 von Neumann-Heinz 不等式

$$\|p(T)\| \leqslant \max\{|p(\xi)| : |\xi| \leqslant \|T\|\}$$

导致 Szökefalvi-Nagy-Foias 函数演算（A 是在圆盘 $\{\xi\in \mathbf{C}, |\xi|<1\}$ 上全部有界解析函数的代数，T 是没有酉部分的一个压缩），它在压缩算子的函数模型理论中有许多应用．关于对称函数空间的 von Neumann-Heinz 不等式的一个类似提供了一个（对应于卷积空间（[8]））用乘子表述的函数演算．

应用．一个算子 T 具有的函数演算的类型在线性相似性 $T\to V^{-1}TV$ 下是不变的，并且能成功地用来对算子进行分类．特别地，有一个所谓 A 标量算子（A-scalar operators）的广泛的理论，它可以应用到许多算子类并且不限于经典谱理论的范围．作为函数演算的成功的使用，最好举所谓谱映射定理

$$\sigma(f(T))=f(\sigma(T)),\ f\in A$$

这样的定理已被证明对上面列举的所有函数演算都是正确的（只要对公式的右边作一个适当的解释即可）

如果代数 A 含有一个精细的单位分解（例如，如果 $A=C^\infty$），那么可以从 A 函数演算来构造一个局部谱分析，并且，特别地，可以证明算子 T 的非平凡不变子空间的存在（如果 $\sigma(T)$ 不止含有一个点），(Banach 空间中的）一个其谱位于光滑曲线 γ 上，并且满足 $\int_0^\infty \log^+\log^+ \delta(r)dr<\infty$ 的算子 T 就是一个例子，这里 $\delta(r)=\max\{\|R(\lambda,T)\| : \mathrm{dist}(\lambda, r)\geqslant r\}$．局部分析的一个推论就是关于幂等元的 Шилов 定理（[2]）

参考文献

[1] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, 1－3, Interscience, 1958－1971

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Spectral theories, Addison-Wesley, 1977（译自法文）

[3] Waelbroeck, L., Etude spectrale des algèbres complètes, *Acad. Roy. Belgique Cl. Sci.*, **31** (1960), 7

[4] Taylor, J. L., The analytic-functional calculus for several commuting operators, *Acta Math.*, **125** (1970), 1－2, 1－38

[5] Дынькин, Е. М.,《Записки науч. семин. ЛОМИ》, **30** (1972), 33－39

[6] Neumann, J. von, Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, *Math. Nachr.*, **4** (1950－1951), 258－281

[7] Szökefalvi-Nagy, B. and Foias, C., Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North-Holland, 1970（译自法文）

[8] Peller, V. V., Estimates of operator polynomials in symmetric spaces. Functional calculus for absolute contraction operators, *Math. Notes*, **25** (1979), 464－471 (*Mat. Zametki*, **25** (1979), 6, 899－912)

[9] Colojoara, I. and Foias, C., Theory of generalized spectral operators, Gordon & Breach, 1968

[10] Любич, Ю И, Мацаев, В И, 《Матем сб》, **56** (1962), 4, 433-468

[11] Mikusinski, J, Operational calculus, Pergamon, 1959 (译自波兰文)

[12] Маслов, В П, Операторные методы, М, 1973 (英译本 Maslov, V P, Operational methods, Mir, 1976)

Н К Никольский, В В Пеллер 撰

【补注】 关于多变量解析函数演算的系统论述见[A1]

参考文献

[A1] Vasilescu, F H, Analytic functional calculus and spectral decompositions, Reidel & Editura Academici, 1982

鲁世杰 译

函数导数 [**functional derivative**, **функциональная производная**], Volterra 导数 (Volterra derivative)

无穷维空间中导数的首要概念之一. 设 $I(y)$ 为一元连续函数 $y(x)$ 的某个泛函, x_0为区间 $[x_1, x_2]$ 的某一内点, $y_1(x)=y_0(x)+\delta y(x)$, 这里变分 $\delta y(x)$ 在 x_0 的一个小邻域 $[a, b]$ 中不等于零, 并设 $\sigma=\int_a^b \delta y(x)dx$ 若极限

$$\lim_{\substack{\sigma\to 0\\ a\ b\to x_0}} \frac{I(y_1)-I(y_0)}{\sigma}$$

存在, 便称此极限为 I 的函数导数 (functional derivative), 并记成 $(\delta I(y_0)/\delta y)|_{x=x_0}$ 例如, 对经典变分学中最简单泛函

$$I(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, \dot{y})dx,$$

函数导数有下列形式:

$$\left.\frac{\delta I(y_0)}{\delta y}\right|_{x=x_0} = \frac{\partial F(x_0, y_0(x_0), \dot{y}_0(x_0))}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F(x_0, y(x_0), \dot{y}(x_0))}{\partial \dot{y}},$$

即它是 Euler 方程的左边, 而 Euler 方程是使 $I(y)$ 极小的必要条件.

在理论问题中函数导数概念仅有历史意义, 而在实际中它被 **Gâteaux 导数** (Gâteaux derivative) 与 **Fréchet 导数** (Fréchet derivative) 概念所取代 但是, 函数导数已经成功地应用于经典变分学的数值方法之中 (见**变分学的数值方法** (variational calculus, numerical methods of))

И Б Вапнярский 撰

【补注】 I 在 $y=y_0$ 与 $x=x_0$ 处的函数导数的存在性显然表示 I 在 $y=y_0$ 处的 Fréchet 导数 dI 取 $\int u(x)z(x)dx$ 形式 (u 是某个连续函数), 它是容许无穷小变分 z 的空间上的连续线性形式 因此, 它可以连续扩张到 z 为 $x=x_0$ 处的 δ **函数** (δ-function) 在本例中只当 y_0 为二次连续可微时才发生这种情况

郑维行 译 沈永欢、王声望 校

函数行列式 [**functional determinant**, **функциональный определитель**]

以函数为元素的行列式. 一些特殊类型的行列式在数学分析中起着重要的作用. 这首先指的是 **Jacobi 行列式** (Jacobian) 和 **Wronski 行列式** (Wronskian) Jacobi 行列式的概念主要用于: 研究 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$的区域之间的可微映射, 进行多重积分的变量变换, 说明在怎样的条件下由方程组可以定义隐函数或给定的函数系是相关的, 等等. Wronski 行列式的概念则广泛地应用于线性常微分方程理论中.

Л Д Кудрявцев 撰 张鸿林 译

函数方程 [**functional equation**, **функциональное уравнение**]

一个方程 (线性的或非线性的), 其中未知元是某个具体的 (函数) 或抽象的 Banach 空间中的元素, 也就是说, 一个形如

$$P(x)=y \tag{1}$$

的方程, 其中 $P(x)$是某一个算子, 一般而言, 是非线性的, 它将 B 空间 X 中的元素变换为同类型空间 $\overline{Y}$ 中的元素. 如果函数方程中含有另一个数值 (或者, 一般地, 函数) 参数 λ, 那么代替 (1), 写成

$$P(x, \lambda)=y,$$

其中 $x\in X$, $y\in Y$, $\lambda\in\Lambda$, 而 Λ 是参数空间

具体的或抽象的、常及偏微分方程、积分方程、积分微分方程、函数微分方程, 以及数学分析中更复杂的方程均为类型 (1)的方程, 有限及无限的代数方程组、有限差分方程等等, 也都属于这一类.

在线性情形中, 考虑第一类函数方程 $Ax=y$及第二类函数方程 $x-\lambda Ax=y$, 其中 A 是由 X 到 $\overline{Y}$ 的线性算子, 而 λ 是参数. 一个第二类函数方程可以形式地写成一个第一类方程 $Tx=y$ $(T=I-\lambda A)$ 然而, 将单位算子 I 分出来考虑是有益的, 因为 A 较 T 可以有更好的性质, 它便于更充分地研究所考虑的方程.

也可以在其他空间中考虑函数方程, 例如在由某个半序集中的元素来赋范的空间中考虑

如果一个函数方程的解是一个算子空间中的元素, 那么这样的函数方程称为一个具体的或抽象的算子方程 (operator equation) 这里代数算子方程也可以是线性的或非线性的、微分的、积分的, 等等. 例如, 考虑将 B 空间 X 映入它自身的线性算子的赋范环 $[X]=[X\to X]$, 并在其中考虑无穷区间 $0\leqslant\lambda<\infty$ 上的常微分方程

$$\frac{dx}{d\lambda}=-Ax(=-xA), \ x(0)=x_0, \tag{2}$$

其中 A, $x_0\in[X]$, 且 $x(\lambda)$ 是一个取值于 Banach 空

间 $[X]$ 中的抽象函数 这个方程是最简单的抽象线性微分算子方程，例如，它是由应用参数变分直接法去构造形如 $P(A)=e^{-A\lambda}(0\leqslant\lambda<\infty)$ 的算子而得到的，特别地，是由构造具有单位范数的投影算子 $P(A)([P(A)]^2=P(A))$ 而得到的．例如，形如 $P(A)$, $P(AC)$ 及 $P(CA)$, $C\in[X]$ 的投影算子，是用来以参数变分直接法构造显式的及隐式的伪逆算子和线性函数方程的伪解，以及算子 A 的本征值（本征空间）．当讨论解的近似方法时，将各种问题化为方程 (2) 或其他方程是很方便的．形如

$$\frac{dx}{d\lambda}=A(\lambda)x+F(\lambda)(=xA(\lambda)+F(\lambda)),\ x(0)=x_0$$

的算子方程，其中 $A(\lambda)$ 与 $F(\lambda)$ 是取值于 $[X]$ 中的抽象函数，以及其他的线性与非线性算子方程，也是令人感兴趣的

在与微分方程及其他方程有关的某些问题中，人们需要研究形如 $Ax+xB=y$ 的一类线性代数算子方程．其中 x 是未知元，A, B, y 是给定的线性算子，它们可取零值

狭隘意义下的函数方程是指这样的方程，其中未知函数是利用函数的复合而与一元或多元已知函数联系起来 例如，设 $\varphi_i(x)(i=1, \ \ ,n)$ 是给定的函数，并设 $\Psi(x)=f(x, C, \ \ ,C_n)$，其中 C_i 是任意常数，从 $n+1$ 个方程

$$\Psi(\varphi_v(x))=f(\varphi_v(x), C_1, \ \ ,C_n),\ v=0, \ \ ,n,$$
$$\varphi_0(x)=x$$

中消去 C_i，导出了函数方程

$$F[x, \Psi(x), \Psi(\varphi_1(x)), \ \ ,\Psi(\varphi_n(x))]=0, \quad (3)$$

它有解 $\Psi(x)=f(x, C_1, \ \ ,C_n)$

构造函数方程是函数演算中的一个直接问题，它与在微分学中确定高阶导数相似

从形如

$$\Psi^{v+1}(x)=f(\Psi^v(x), C_1, \ \ ,C_n),\ v=0, \ \ ,n,$$
$$\Psi^0(x)=x,\ \Psi^1(x)=\Psi(x),\ \Psi^2(x)=\Psi(\Psi(x)),$$

的 $n+1$ 个方程中消去 C_i，导出了形如

$$F[x, \Psi(x), \Psi^2(x), \ \ \Psi^{n+1}(X)]=0 \quad (4)$$

的函数方程，它具有解 $\Psi(x)=f(x, C_1, \ \ ,C_n)$

有时通过阶及类来区分函数方程 一个函数方程的阶（order of a functional equation）是指方程中未知函数的阶，而一个函数方程的类（class of a functional equation）是指涉及未知函数的那些已知函数的个数这样，(3) 是一个阶为 1 类为 $n+1$ 的函数方程．方程 (4) 则是一个阶为 $n+1$，类为 1 的函数方程

关系式 (3) 与 (4) 都是关于 x 的恒等式，但称为方程是由于它含有未知函数 $\Psi(x)$ 在内的缘故

方程 (3) 与 (4) 都是具有一个未知变量的函数方程．可以考虑具多个独立变量的函数方程、分数阶的函数方程，等等，以及相容的函数方程组．此外，函数方程或函数方程组与具有最大个数变量的未知函数相比，可以含有更多基本的、本质上不同的变量．

函数方程组产生于，例如说，当决定任意函数时，这些任意函数出现在偏微分方程的积分中，并满足问题的条件 如果 n 个任意函数出现在积分中，那么令它们满足 n 个条件，便得到 n 个相容的函数方程．在某些情况下，将函数方程组写成更简短的如同向量或矩阵函数方程的形式是方便的．

函数方程也可以看成某个函数类的特征性质的一种刻画（例如，函数方程 $f(x)=f(-x)$（分别地，$f(-x)=-f(x)$），刻画了偶（分别地，奇）函数类，函数方程 $f(x+1)=f(x)$ 刻画了周期为 1 的函数类，等等）．

一些最简形式的函数方程，例如有 Cauchy 方程（Cauchy equations），

$$\left.\begin{array}{ll} f(x+y)=f(x)+f(y), & f(x+y)=f(x)f(y), \\ f(xy)=f(x)+f(y), & f(xy)=f(x)f(y), \end{array}\right\} \quad (5)$$

它们的连续解分别是

$$f(x)=Cx,\ e^{Cx}, C\log x,\ x^C(x>0)$$

（在不连续的函数类中可以有另外的解） 函数方程 (5)，连同连续性的附加要求，可以用来定义所指的函数．具有三个或更多个未知函数的广义 Cauchy 函数方程也已经考虑过 对复数域中的函数方程亦然．函数方程 $F(f(x), f(y), f(x+y))=0$ 及 $\varphi(f(x), f(y), f(xy))=0$，分别称为关于函数 $f(t)$ 的加法定理（addition theorem）及乘法定理（multiplication theorem） 例如，依赖于两个变量的未知函数的最简单函数方程是

$$\varphi(x, y)+\varphi(y, z)=\varphi(x, z) \text{ 及}$$
$$\varphi(x, y)\varphi(y, z)=\varphi(x, z),$$

它们的解分别是

$$\varphi(y, z)=\Psi(y)-\Psi(z) \text{ 及 } \varphi(x, y)=\frac{\Psi(y)}{\Psi(x)},$$

其中 Ψ 是一个任意函数

参考文献

[1] Канторович, Л В, Акилов, Г П, Функциональный анализ, 2, изд, М, 1977（中译本 Л В 康脱洛维奇，泛函分析，上、下册，高等教育出版社，1982）

[2] Riesz, F and Szokfalvi-Nagy, B, Functional analysis, F Ungar, 1955 (译自法文) (中译本 F 黎茨, B 塞克佛尔维-纳吉，泛函分析讲义，科学出版社，1963，1980)

[3] Давиденко, Д Ф, в кн Математическое программирование и смежные вопросы Вычислительные методы, М, 1976, 187 – 212

[4] Канторович, Л В, 《Успехи матем наук》, 11 (1956), 6, 99 – 116

[5] Давиденко, Д Ф, в кн Теория кубатурных формул и вычислительная математика, Новосиб, 1980, 59 – 65

[6] Далецкий, Ю Л, Крейн, М Г, Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М, 1970(英译本 Daletskiǐ, Yu L and Kreǐn, M G, Stability of solutions of differential equations in Banach space, Amer Math Soc 1974)

[7] Энциклопедия элементарной математики, кн 3, Функции и пределы, М-Л, 1952

[8] Ацель, Я, 《Успехи матем наук》, 11 (1956), 3, 3 – 68

[9] Фихтенгольц, Г М, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т 1, 7 изд, М, 1969 (中译本 Г М 菲赫金哥尔茨，微积分学教程，第一卷，高等教育出版社，1960)

Д Ф Давиденко 撰

【补注】 虽然形如 $Af=g$ 的方程可以看成为函数方程，其中 A 是一个线性或非线性算子，且 f, g 是某些函数（Banach）空间中的元素，但是按照函数方程所据以取名的数学领域来说，它们几乎不能被看成是典型的．更加典型得多的是上面提到的 Cauchy 方程（可能是最初等的例子），以及诸如 Poincaré 方程（Poincaré equation）$F(az)=aF(z)(1-F(z))$，在混沌理论中处于中心位置的方程（而且对衡量普遍性是可靠的） $G(x)=\lambda^{-1}G(G(\lambda x))$，Riemann ζ 函数（zeta-function）所满足的函数方程，以及杨（振宁）-Baxter 方程（Yang-Baxter equation），它要求一个 $n^2\times n^2$ 矩阵 $R(u)$，即一个依赖于 u 的线性态射 $\mathbf{C}^n\otimes\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n\otimes\mathbf{C}^n$，使得

$$(I\otimes R(u-v))(R(u)\otimes I)(I\otimes R(V))=$$
$$=(R(V)\otimes I)(I\otimes R(u))(R(u-v)\otimes I)$$

（如同 $\mathbf{C}^n\otimes\mathbf{C}^n\otimes\mathbf{C}^n$ 到它自身的态射）．

最初的函数方程可追溯到古代（见 [A1]）中的第一篇论文，而其他早期的例子（除 Cauchy 方程外）有 Jensen 函数方程（Jensen functional equation）$f((x+y)/2)=(f(x)+f(y))/2$ 与 d'Alembert 方程（d'Alembert equation）$g(x+y)+g(x-y)=2g(x)g(y)$.

Γ 函数（gamma-function）$\Gamma(z)$ 满足函数方程

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

以及 $\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)=(2^{2z}-1)\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$，其中第一个亦称为 Euler 函数方程（Euler functional equation）

关于函数方程理论的基本想法以及它在流形上的应用见 [A1] – [A6]，文献 [A2] 包含了到 1964 年为止很广泛而又很完全的文献目录．

另两个经典的函数方程是 Schröder 函数方程（Schröder functional equation）

$$f(h(x))=cf(x)$$

以及勉强有关的 Abel 函数方程（Abel functional equation）

$$f(h(x))=f(x)+1$$

再次考虑加法定理的函数方程（additional theorem functional equation）$F(f(x), f(y), f(x+y))=0$ 假设 $F(u, v, w)$ 是 u, v, w 的一个多项式 如果 $f(x)$ 是一个半纯解，那么 $f(x)$ 必定是有理函数，或是 $\exp(cx)$ 的有理函数，或是一个椭圆函数，这便是 Weierstrass 定理（Weierstrass theorem） 这个结果的一个推广是建立在 Belavin 及 Drinfel d [A7] 关于取值于单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的经典杨（振宁）-Baxter 方程

$$[X^{12}(u_1,u_2),X^{13}(u_1,u_3)]+[X^{12}(u_1,u_2),X^{23}(u_2,u_3)]+$$
$$+[X^{13}(u_1,u_3),X^{23}(u_2,u_3)]=0$$

的解之分类的基础上的，其中 $X(u, v)$ 是 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ 中的一个元素，且 $X^{12}(u, v)$, $X^{13}(u, v)$, $X^{23}(u, v)$ 分别是 $X(u, v)$ 在嵌入映射 $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\mapsto\bigcup_{\mathfrak{g}}\otimes U_{\mathfrak{g}}\otimes U_{\mathfrak{g}}$, $a\otimes b\mapsto a\otimes b\otimes I$, $a\otimes b\mapsto a\otimes I\otimes b$, $a\otimes b\mapsto I\otimes a\otimes b$ 之下的象，而 $U_{\mathfrak{g}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的泛包络代数．杨（振宁）-Baxter 方程在经典的以及量子的完全可积系统中是重要的．

函数微分方程（functional differential equations）以及延滞微分方程（delay differential equations)）是一个与 [A1]–[A6] 以及上面的函数方程相距较远的课题 它们包含了那些由 V Volterra 在掠夺猎物模型中研究过的积分微分方程（integro-differential equations），

$$\dot N_1(t)=[\varepsilon_1-\gamma_1 N_2(t)-\int_{-r}^{0}F_1(-\theta)N_2(t+\theta)d\theta]N_1(t),$$

$$\dot N_2(t)=[-\varepsilon_2+\gamma_2 N_2(t)+\int_{-r}^{0}F_2(-\theta)N_1(t+\theta)d\theta]N_2(t),$$

以及方程

$$\dot x(t)=-\int_{t-r}^{t}a(t-u)g((u))du,$$

后者出现在循环燃料反应器的研究中 具有偏差自变量的微分方程（见**具有分布自变量的常微分方程**（differential equations, ordinary, with distributed arguments））

也属于这个一般类中．一类重要的方程是推迟型一般函数微分方程（general functional differential equations of retarded type），

$$\dot{x}=f(t, x_t),$$

其中 f 是 $\mathbf{R}\times C\to\mathbf{R}^n$ 的一个函数，C 是一个适当的函数空间 $(-\infty, 0]\mapsto\mathbf{R}^n$，且 x_t 代表函数 $\theta\mapsto x(t+\theta)$，$-\infty<\theta\leqslant 0$ 缩写 RFDE（= 推迟函数微分方程）经常使用．更一般的是中性函数微分方程（NFDE）(neutral functional differential equation)，

$$\dot{x}=f(t, x_t, \dot{x}_t),$$

其中 $\dot{x}_t(\theta)=\dot{x}(t+\theta)$，$-\infty<\theta\leqslant 0$ 最简单的一类中性函数微分方程，对于固定的 $h>0$ 具有形式

$$\dot{x}(f)=f(t, x(t), x(t-h), \dot{x}(t-h)),$$

其中 f 是函数 $\mathbf{R}\times(\mathbf{R}^n)^4\to\mathbf{R}^n$, $x\in\mathbf{R}^n$

函数微分方程的一个自然分类是根据推迟的（retarded），中性的（neutral）以及超前的（advanced）等．对于具有偏差变量的微分方程（differential equations with deviating argument）

$$x^{(m_0)}(t)=f(t, x(t), x^{(1)}(t), \quad, x^{(m_0-1)}(t),$$
$$x(t-\tau_1(t)), \quad, x^{(m_1)}(t-\tau_1(t)); \quad,$$
$$x(t-\tau_l(t)), \quad, x^{(m_l)}(t-\tau_l(t))),$$

分类如下．令 $\mu=\max_{1\leqslant i\leqslant l} m_i$ 那么当 $m_0<\mu$, $m_0=\mu$ 或 $m_0>\mu$ 分别成立时，方程分别是超前的、中性的或推迟的．

关于函数微分方程的很多标准的文献是 [A8]－[A10] 文献 [A11] 处理在控制论背景下的中性函数微分方程，而 [A12] 处理微分流形上推迟函数微分方程．

参考文献

[A1] Aczel, J (ed), Functional equations history, applications and theory, Reidel, 1984

[A2] Aczél, J, Functional equations and their applications, Acad Press, 1966

[A3] Aczel, J, A short course on functional equations, Reidel, 1987

[A4] Dhombers, J, Some aspects of functional equations, Chulalongkorn Univ 1979

[A5] Kuczma, M, Functional equations in a single variable, PWN, 1968

[A6] Kuczma, M, An introduction to the theory of functional equations and inequalities, PWN & Univ Slaski, 1985

[A7] Belavin, A A and Drinfel'd, V G, On the solutions of the classical Yang-Baxter equations for simple Lie algebras, Funct Appl, **16** (1982), 159－180 (*Funkts Anal Prilozh*, **16** (1982), 3, 1－29)

[A8] Hale, J, Theory of functional differential equations, Springer, 1977

[A9] El'sgol'ts, L E and Norkin, S B, introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments, Acad Press, 1973

[A10] Kolmonovskii, V B and Nosov, V R, Stability of functional differential equations, Acad Press, 1986

[A11] Salamon, D, Control and observation of neutral systems, Pitman, 1984

[A12] Mohammed, S E A, Retarded functional differential equations A global point of view, Pitman, 1978

王声望 译 郑维行 校

函数方程的解法 [functional equation, methods of solution of a, функциональное уравнение, методы решения] 寻求具体的或抽象的函数方程的精确解或近似解的方法，也就是求解形如

$$P(x)=y \tag{1}$$

的方程，其中 $P(x)$ 是某一个，一般地说，为非线性的算子，它将 B 空间 X（或某个其他类型的空间）中的元素变换为同一类型空间 Y 中的元素（见**函数方程**（functional equation））只对很少类型的函数方程已经得到了解析表示形式的精确解，因此近似解法有特别的价值．

很多方法已经发展为寻求形如（1）的一般函数方程的解．例如，无穷幂级数法，逐次逼近法，**Галеркин 法**（Galerkin method）（矩量法），切双曲法，Чебышев 切双曲法，Newton-Конторович 法以及它的变形**最速下降法**（steepest descent, method of），等等，以及特殊类型的参数变易法（直接的、迭代的以及组合的，见**参数变易法**（parameter, method of variation of the））以及它的各种变形，其中包括对逆算子的逐次逼近法．一般的方法已经用来求解数学分析中各种具体的函数方程．此外，还有一些求解具体的函数方程的特殊方法，其中包括数值方法，如**网格法**（grid method）等等．参数变分法，Newton-Канторович 法以及所指出的某些其他方法也有理论上的意义，因为它们可以用来导出一个函数方程解的存在性、唯一性以及解的位置范围，而无需寻求解本身，它的重要性有时并不亚于求实际解本身 作为例子，下面考虑参数变分直接法．

在线性有界算子的 Banach 空间 $[X]=[X\to X]$ 中，设于无穷区间上给定了非线性算子常微分方程

$$\frac{dx}{d\lambda}=x(I-Ax)(=(I-xA)x), \quad x(0)=x_0, \tag{2}$$

其中 A, x_0, $I\in[X]$（A, x_0 是给定的，I 是单位算子），且 $x(\lambda)$ 为取值于 $[X]$（X 为 B 空间）中的一个抽象函数 对于可逆算子 A, 构造逆算子 A^{-1} 的问

题，形如 $I-Ax=0$ 的线性算子方程的解，等等，均归结为用参数变分直接法求解方程（2） 如果算子 Ax_0（分别地，x_0A）的谱位于右半面内，那么问题（2）有唯一的解 $x(\lambda)$，$x(0)=x_0$，$\lambda\in[0,\infty)$

解析地应用常微分方程的数值积分法于 Cauchy 问题（2），导致求解（2）的一系列参数变分直接法，因此也导致那些可化为（2）的问题的解法．例如，具有不规则步长 h_k 的 **Euler 法**（Euler method），便导致构造 A^{-1} 的下列方法

$$x_{k+1}=x_k+h_kx_k(I-Ax_k)\,(=x_k+h_k(I-x_kA)x_k),\quad(3)$$
$$k=0,1,$$

（3）中的步长 h_k 可用各种方法来选择．当 $I-Ax_0$（分别地，$I-x_0A$）的谱位于实轴上区间 $[-\rho_0,0]$ $(0<\rho_0<\infty)$，那么依下法选择 h_k 是很有效的

$$h_k=\frac{1}{1+\rho_k},\ \rho_{k+1}=\rho_kL_k,\ 4L_k=\frac{\rho_k}{1+\rho_k},\quad(4)$$
$$k=0,1,\cdot\ ,h_{k+1}=4h_k/(1+h_k)^2$$

其中，（3）中收敛速度的阶高于 2^k，且误差的范数按照 $\rho_{k+1}=\rho_k^2/4(1+\rho_k)$ 的规律递减 对区间 $[0,\overline{\rho_0}]$，$(0<\overline{\rho_0}<1)$ 的情形，化为所考虑的一步法（3）是有利的，其中

$$h=\frac{1}{1-\overline{\rho_0}},\ \rho_0=\frac{\overline{\rho_0}^2}{4(1-\overline{\rho_0})}.$$

关于（3），（4）的收敛性，有若干结果是对一些特殊的算子方程来陈述的，它们是以一般事实为基础并依赖于所考虑的基础空间

构造形如

$$P(Ax_0)\,(\text{或 }P(x_0A)),\ P(K)=e^{-K\lambda}\Big|_{\lambda=\infty},\quad K\in[X]$$

的投影问题也归结为问题（2）的解（当 $I-Ax_0$（分别地，$I-x_0A$）的谱位于 $[-\rho_0,1]$ 内时），并且关于构造算子 A 的伪逆算子 x^+（分别地，${}^+x$），使得

$$I-Ax^+=P(Ax_0),\ I-{}^+xA=P(x_0A),\ x^+={}^+x$$

的问题也是如此 关于投影 $P(Ax_0)$（分别地，$P(x_0A)$）的直接构造，方法（3），（4）可以重新写成形式

$$P_{k+1}=P_k+h_kP_k(P_k-I),\ k=0,1,\ ,$$
$$P_0=I-Ax_0\,(=I-x_0A)$$

依照 A 的谱的位置以及 A 的性质，我们可以取，例如，算子 I，A，A^* 等等，来代替 x_0

运用参数变分直接法，我们可以将以下要提到的问题归结为抽象线性函数常微分方程 $(0\leqslant\lambda\leqslant\infty)$

$$\frac{dy}{d\lambda}=x_0(b-Ay),\ y(0)=y_0,\quad(5)$$

其中 b，$y_0\in X$，x_0，$A\in[X]$，且 $y(\lambda)$ 是取值于 X 中的一个抽象函数，所提问题为直接地构造形如

$$b-Ay^+=P(Ax_0)(b-Ay_0)\quad(6)$$

的线性函数方程的伪解 y^+，或者函数方程 $b-Ay^+=0$ 的伪解，若 $P(Ax_0)(b-Ay_0)=0$．其他问题也归结为（5），其中包括常及偏微分方程、积分方程的问题，等等，公式

$$y(\lambda)=e^{-x_0A\lambda}y_0+r(\lambda)x_0b,\ r(\lambda)=\int_0^\lambda e^{-x_0A(\lambda-s)}ds,$$

给出了方程（5）满足 $y(0)=y_0$ 的唯一解

例如，应用具有向前步长 h_{k+1} 的 Euler 方法于问题（5），导致了下述构造（6）的伪解 y^+ 的方法

$$y_{k+1}=y_k+h_{k+1}x_0(b-Ay_k),\ k=0,1,\quad(7)$$

当 x_0A 是一个**自伴算子**（self-adjoint operator），其谱的非零部分位于 $[m,M]$ $(0<m\leqslant M)$ 内时，步长 h_{k+1}，例如说，是借助 **Чебышев 多项式**（Chebyshev polynomials）$T_N(t)$ 的根来选择的．

$$h_j=\frac{2}{[M+m-(M-m)t_j]},\ t_j=\cos\left[\frac{(2\kappa_j-1)\pi}{2N}\right],$$
$$j=1,\ ,N.\quad(8)$$

这里 $P_N=(\kappa_1,\ ,\kappa_N)$ 是 $1,\ ,N$ 的某个置换以使计算是稳定的，而 N 是所要求的多项式的次数．方法（7），（8）仅在第 N 步时给出了收敛的最优估计．当 $N=2^l$（或 $\approx 2^l$）时，（7）中步长的选择是很有效的，如果它们逐次地依赖于诸 Чебышев 多项式

$$T_2(t)-T_0(t),\ T_1(t),\ T_1(t),\cdot\ ,T_{2^{l-2}}(t),\ T_{2^{l-2}}(t),$$

而不是 $T_N(t)$ 的根，这实质地简化了调整步长 h_j 的次序问题，而且提高了计算的有效性，尤其对大的 N 是如此 在这种情形下，当利用了每个多项式全部有序根之后，误差下降得最快，而此事对于计算控制的简化是重要的 如果 $P(Ax_0)(b-Ay_0)=0$，那么 $P(x_0A)(y^+-y_0)=0$，进而，如果 $P(x_0A)$ 是一个正交投影算子，那么 y^+-y_0 是函数方程 $A(y^+-y_0)=b-Ay_0$ 的一个正规解 另一方面，（7）蕴含（对于 $k=0,1,\cdot$）

$$b-Ay_{k+1}=U_{k+1}(b-Ay_0),\ U_{k+1}=\prod_{i=1}^{k+1}(I-h_iAx_0)$$

如果 $P(Ax_0)$ 是一个投影算子，那么

$$\|U_k-P(Ax_0)\|\leqslant\frac{2q^k}{(1+q^{2k})}\to 0,$$

当 $k\to\infty$ $(q=(\sqrt{M}-\sqrt{m})/(\sqrt{M}+\sqrt{m}))$

此外，还有使用 Чебышев 多项式的递推关系，以及与之密切相关的关系（不明显地使用这些多项式

的根)的Euler型参数变分直接法，对于这些，误差于每一步均减小．这些是多步方法而且有着增长的收敛速度 运用具有向后步长 h_{k+1} 的 Euler 方法于问题(5)，便给出了下述有效的一类方法

$$y_{k+1}=y_k+h_{k+1}\ (I+h_{k+1}x_0A)^{-1}x_0(b-Ay_0),$$
$$k=0,1,\quad ,$$

由此

$$b-Ay_{k+1}=W_{k+1}(b-Ay_0),$$
$$W_{k+1}=\prod_{i=1}^{k+1}(I+h_iAx_0)^{-1},\ k=0,1,\quad .$$

进而，如果 $P(Ax_0)$ 是一个投影算子且对任何 i，$h_i>0$，使得

$$\|(I-P(Ax_0))(I+h_iAx_0)^{-1}\|\leqslant\rho_i<1,$$

那么

$$\|W_k-P(Ax_0)\|\leqslant\prod_{i=1}^{k}\rho_i\to 0,\text{ 当 }k\to\infty$$

关于解非线性函数方程以及算子方程有着类似的方法，以及具有 s 阶精度的 Runge-Kutta 型和其他类型的具有递增精度的方法．

一个函数方程或者这类方程组的狭义解，可以是一个特定的函数，也可以是依赖于任意参数或任意函数的一个函数类 在函数方程的理论中，几乎没有为人们熟知的一般方法来解这类方程．因此，一般说来，在每个特殊场合，有必要研究所得解的普适性的程度

求解函数方程一个多少有些一般性的方法，是将它们化为有限差分方程．例如，取一个形如

$$F(x,\varphi(x),\quad ,\varphi^n(x))=0 \tag{9}$$

的 n 阶一类函数方程，其中函数 F 是给定的，而 $\varphi(x)$ 是未知函数．又

$$\varphi^0(x)=x,\ \varphi^1(x)=\varphi(x),\ \varphi^2(x)=\varphi(\varphi(x)),\quad .$$

此外，还假定 $x=u_z$，$\varphi(x)=u_{z+1}$ 从 x 到 $\varphi(x)$ 的转换，是用引进一个新的变量 z，且在函数 u_z 中将 z 增加 1 来代替．经过这样的变换后，方程(9)具有形式

$$F(u_z,\quad ,u_{z+n})=0 \tag{10}$$

借助于 z 以及关于 z 有周期 1 的 n 个任意周期函数 C_i，n 阶有限差分方程(10)的解给出了 u_z 的一个表示．(9)的解的最一般形式是两个相容方程的方程组

$$\left.\begin{aligned}u_z&=x=f(z,C_1,\quad ,C_n),\\ u_{z+1}&=\varphi(x)=f(z+1,C_1,\quad ,C_n)\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

通过选择 C_i 的特殊值，可以从(11)中消去 z，因而得到(9)的一个特解 例如，对于 2 阶函数方程

$$\varphi[\varphi(x)]+a\varphi(x)+bx=0, \tag{12}$$

其一般解(11)有如下形式

$$\left.\begin{aligned}u_z&=x=C_1\lambda_1^z+C_2\lambda_2^z,\\ u_{z+1}&=\varphi(x)=C_1\lambda_1^{z+1}+C_2\lambda_2^{z+1},\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

其中 λ_1 及 λ_2 是二次方程 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 的根，且 C_1 及 C_2 是具有周期 1 的任意确定的周期函数．如果 C_1 及 C_2 取为任意常数且从(13)中消去 z，那么便得到(12)的全解

$$\frac{x\lambda_2-\varphi(x)}{\lambda_2-\lambda_1}=C_1\left[\frac{x\lambda_1-\varphi(x)}{C_2(\lambda_1-\lambda_2)}\right]^{\gamma},\quad \gamma=\frac{\log\lambda_1}{\log\lambda_2}$$

化为有限差分方程的方法，也适用于解函数演算中的直接问题．例如，设给定函数 $\varphi(x)=a+bx$，并设需要构造表示式 $\varphi^n(x)$(这里 $\varphi^i(x)=\varphi(\varphi^{i-1}(x))$) 假定 $\varphi^n(x)=u_n$，并将方程写成有限差分形式 $u_{n+1}=a+bu_n$，它的解是 $u_n=Cb^n+a/(1-b)$ 这样，对于 $n=0$，得到 $u_0=x=c+a/(1-b)$，即 $C=x-a/(1-b)$ 于是

$$\varphi^n(x)=\alpha_n+\beta_nx,\ \alpha_n=\frac{a(b^n-1)}{b-1},\ \beta_n=b^n$$

这里如果需要，我们可将函数方程写成 $\varphi^n(x)=\beta_{n-1}\varphi(x)+\alpha_{n-1}$，它对任何 n 有解 $\varphi(x)$，等等．通过同样的方法求解这个函数方程，可以构造其他的解 $\varphi(x)$ 特别地，对奇数 n，可以得到另一个实解 $\varphi(x)=-bx+a(1+b)/(1-b)$.

人们也运用代换来解函数方程 例如，假设有函数方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y, \tag{14}$$

逐次使用代换

$$x=0,\ y=t,\ x=\frac{\pi}{2}+t,\ y=\frac{\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{2},\ y=\frac{\pi}{2}+t,$$

(14)分别地蕴含

$$f(t)+f(-t)=2a\cos t,\ f(\pi+t)+f(t)=0$$

以及

$$f(\pi+t)+f(-t)=2b\cos\left[\frac{\pi}{2}+t\right]=-2b\sin t,$$

其中 $f(0)=a$，$f(\pi/2)=b$ 因此，从前两个方程的和中减去第三个方程，得到 $2f(t)=2a\cos t+2b\sin t$ 函数 $f(x)=a\cos x+b\sin x$ 是(14)的一般解．在关于函数 H 的某些假定下，这个方法也适用于型如 $H(f(x$

$+y), f(x-y), f(x), x, y)=0$ 的其他方程．许多其他的代换可应用于其他类型的方程．

代换法也可用来将某些函数方程化为相同类型的其他方程；特别地，可化为具有已知解的函数方程．例如，函数方程

$$f\left[\frac{x+y}{2}\right]=\frac{f(x)}{2}+\frac{f(y)}{2} \qquad (15)$$

可以化为 Cauchy 函数方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \qquad (16)$$

它有连续解 $f(x)=Cx$ 为了得到这个解，将 $x+y$ 代替（15）中的 x，将 0 代替 y

$$f\left[\frac{x+y}{2}\right]=\frac{f(x+y)}{2}+\frac{a}{2}, \quad a=f(0)$$

将它与（15）进行比较，我们得到形如 $f(x+y)=f(x)+f(y)-a$ 的函数方程，由此 $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$，其中 $\varphi(x)=f(x)-a$，因此 $\varphi(x)=Cx$．函数 $f(x)=Cx+a$ 是解．

取对数以及其他方法，也可用来将一个函数方程化为相同类型的另一个方程　例如，通过取对数解函数方程

$$f(x+y)=f(x)f(y) \qquad (17)$$

可以化为解函数方程（16）　满足（17）的连续函数 $f(x)$ 始终是严格正的，且函数 $\varphi(x)=\log f(x)$ 是连续的（作为连续函数的复合），且满足条件 $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$, $\varphi(x)=Cx$　于是解为 $f(x)=e^{Cx}=a^x$

在很多情形中，化为微分方程的方法也可用来解函数方程．例如，函数方程（14）可以化为型如 $f''(x)=-f(x)$ 的方程　还有一些其他的函数方程可化为这个方程．这个方法仅仅给出了在可微函数类中的解．例如，Cauchy 函数方程（16）在 $f(x)$ 可微条件下的解，可用下面的方法找到　关于 x 微分（16），可以得到 $f'(x+y)=f'(x)$，由于 y 是任意的，因此 $f'(x)=C$. 那么积分给出 $f(x)=Cx+C_1$，其中 C_1 是一个新常数．再次将得到的 $f(x)$ 的表示式代入（16），可肯定对 x 及 y 的一切值，有 $C_1=0$　函数 $f(x)=Cx$ 是解．

迭代法也应用于求解泛函方程的很多情形．

参考文献

[1] Канторович, Л　В，《Тр　Матем　ин-та　АН СССР》, **28** (1949), 104 － 144

[2] Красносельский, М　А　и　др，Приближенное решение операторных уравнений　М，1969

[3] Самарский, А　А，Введение в теорию разностных схем, М，1971

[4] Бахвалов, Н　С，Численные методы, 2 изд，М，1975（英译本　Bakhvalov, N　S，Numerical methods, analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977）

[5] Давиденко，Д　Ф，в кн，Приближенные методы решения операторных уравнений и их приложения, Иркутск，1982, 71 － 83

[6] Мертвецова, М　А，《Докл　АН СССР》, **88** (1953), 4, 611 － 614

[7] Нечепуренко, М　И，《Успехи　матем　наук》, **9** (1954), 2, 163 － 170

[8] Тамме　Э　Э，《Докл　АН СССР》, **103** (1955), 5, 769 － 772

[9] Мысовских, И　П，《Вестн　Ленингр　ун-та》, 1953, 11, 25 － 48

[10] Давиденко, Д　Ф，в кн　Совещание по программированию и матем методам решения физических задач, Дубна，1974, 542 － 548

[11] Бельтюков, Б　А，《Ж　вычисл　матем　и матем．физ》, **5** (1965) 5, 927 － 931

[12] Ваарманн，О，《Изв　АН Эст　ССР》, **20** (1971), 4, 386 － 393

[13] Давиденко Д　Ф，в кн　Теоретические и прикладные проблемы вычислительной математики, М，1981, 61 － 63

[14] Ливенцов, А　И，《Матем　сб》, **8** (1876), 1, 80 － 160

[15] Синцов, Д　М，《Изв　физ-матем　об-ва Казанск　ун-та》, сер　2, **13** (1903), 2, 46 － 72

Д　Ф　Давиденко　撰

【补注】　文献[A3]对 1747－1964 年间的工作有非常完全的文献目录．

参考文献

[A1] Hale, J　K，Functional differential equations, Springer, 1971

[A2] Aczél, J　(ed)，Functional equations　history, applications and theory, Reidel, 1984

[A3] Aczél, J，Functional equations and their applications, Acad　Press, 1966

王声望　译　郑维行　校

Марков 过程的泛函［functional of a Markov process; функционал от Марковского процесса］

一个以可测方式依赖于 Марков 过程轨道的随机变量或随机函数，其可测性条件随具体情况而定．在 Марков 过程的一般理论中，采用以下的泛函定义．假设给定一个具有时间推移算子 θ_t 的非停止齐次 **Марков 过程**（Markov process）$X=(x_t, \mathscr{F}_t, \mathrm{P}_x)$，其相空间为**可测空间**（measurable space）$(E, \mathscr{B})$，设 $\mathscr{N}$ 是基本事件空间中包含每个形如 $\{\omega \quad x_t\in B\}$ $(t\geqslant 0,$

$B\in\mathscr{B}$) 的事件的最小 σ 代数，$\mathscr{N}$ 是对于所有可能的测度 $\mathrm{P}_x(x\in E)$ 关于 $\mathscr{N}$ 的完全化的交．如果对于每个 $t\geqslant 0$, γ_t 关于 σ 代数 $\mathscr{N}_t\cap\mathscr{F}_t$ 是可测的，那么，称随机函数 $\gamma_t(t\geqslant 0)$ 为 Марков 过程 X 的泛函 (functional of the Markov process)．

人们特别关心的是 Марков 过程的乘性和加性泛函．它们分别满足条件 $\gamma_{t+s}=\gamma_t\theta_t\gamma_s$ 和 $\gamma_{t+s}=\gamma_t+\theta_t\gamma_s$, s, $t\geqslant 0$．这里假定 γ_t 在 $[0,\infty)$ 上是右连续的 (代替这些条件，有时只假定对所有固定的 s, $t\geqslant 0$, 这些条件关于 P_x 几乎处处成立)．在停止和非齐次过程的情形下，采用类似的方式来定义．Марков 过程 $X=(x_t,\zeta,\mathscr{F}_t,\mathrm{P})$ 的加性泛函的例子可以通过以下方式得到：设对于 $t<\zeta$, γ_t 等于 $f(x_t)-f(x_0)$, 或 $\int_0^t f(x_s)ds$, 或随机函数 $f(x_s)$ 在 $s\in[0,t]$ 中跳跃值的和，这里 $f(x)$ 是有界并且关于 $\mathscr{B}$ 可测的函数 (第二和第三个例子只在某些附加限制下有效)．从任意加性泛函 γ_t，可以得到乘性泛函 $\exp\gamma_t$ 在标准 Марков 过程的情况下，设 $t<\tau$ 时随机函数等于 1, $t\geqslant\tau$ 时随机函数等于 0，其中 τ 是 X 首次离开集合 $A\in\mathscr{B}$ 的时刻，即 $\tau=\inf\{t\in[0,\zeta]: x_t\notin A\}$，这就给出了乘性泛函的一个重要且有趣的例子．

在 $0\leqslant\gamma_t\leqslant 1$ 的条件下，与乘性泛函 γ_t 相联系，存在一个 Марков 过程的自然变换——变迁到一个子过程 (passage to a subprocess) 从过程 $X=(x_t,\zeta,\mathscr{F}_t,\mathrm{P}_x)$ 的转移函数 $\mathrm{P}(t,x,B)$ 出发，可以构造一个新的转移函数

$$\widetilde{\mathrm{P}}(t,x,B)=\int_{\{x_t\in B\}}\gamma_t\mathrm{P}_x(d\omega),\ B\in\mathscr{B},$$

这里，对某些点 $x\in E$ 可能发生 $\widetilde{\mathrm{P}}(0,x,E)<1$ 的情况．在 $(E,\mathscr{B})$ 上的这个新转移函数对应于某个 Марков 过程 $\widetilde{X}=(\widetilde{X}_t,\widetilde{\zeta},\widetilde{\mathscr{F}}_t,\mathrm{P}_x)$．这个过程和原过程 X 可以在具有相同概率测度 $\mathrm{P}_x(x\in E)$ 的同一个基本事件空间上实现，使得 $\widetilde{\zeta}\leqslant\zeta$，当 $0\leqslant t<\widetilde{\zeta}$ 时 $\widetilde{x}_t=x_t$，并且 σ 代数 $\widetilde{\mathscr{F}}_t$ 是 $\mathscr{F}_t$ 在集合 $\{\omega\ \widetilde{\zeta}>t\}$ 上的迹 (trace) 这个过程 $\widetilde{X}$ 称为 Марков 过程 X 的子过程 (subprocess of the Markov process)，它由"杀死"或缩短原过程的寿命得到．前述例子中对应于乘性泛函的子过程称为在集合 A 上 X 的部分，它的相空间自然不取整个空间 $(E,\mathscr{B})$，而取为 $(A,\mathscr{B}_A)$，其中 $\mathscr{B}_A=\{B\in\mathscr{B}: B\subset A\}$.

可加泛函 $\gamma_t\geqslant 0$ 导致 Марков 过程的另一种变换——随机时间变换 (random time change)，它归结为改变轨道不同部分的穿越时间．例如，设 $\gamma_t\geqslant 0$ 是标准 Марков 过程 X 的连续加性泛函，若 $t>0$，则有 $\gamma_t>0$，那么 $Y=(X_{\tau_t},\gamma_{\zeta-},\mathscr{F}_{\tau_t},\mathrm{P}_x)$ 是一个标准 Марков 过程，这里 $\tau_t=\sup\{s\ \gamma_s\leqslant t\}$, $t\in[0,\gamma_{\zeta-})$，这时，称 Y 为由 X 经随机时间变换 $t\to\tau_t$ 而得到的过程

各种类型的加性泛函已经被深入地研究了，尤其是对于标准过程

参考文献

[1] Липцер, Р Ш , Ширяев, А Н , Статистика случайных процесов, М , 1974 (中译本 Р Ш Липцер, 随机过程统计，宇航出版社，1987)

[2] Дынкин, Е Б , Основания теории Марковских процессов, М , 1959 (中译本 Е Б 邓肯，马尔科夫过程论基础，科学出版社，1962)

[3] Дынкин, Е Б , Марковские процессы, М , 1963 (英译本 Dynkin, E B , Markov processes, Springer, 1965)

[4] Revuz, D , Mesures associees aux fonctionelles additive de Markov Ⅰ, *Trans Amer Math Soc* , **148** (1970), 501 – 531

[5] Benveniste, A , Application de deux theoremes de G Mokobodzki à l'étude du noyau de Levy d'um proc-cessus de Hunt sans hypothèse (L), *Lecture notes in math*, Springer, **321** (1973), 1 – 24

М Г Шур 撰

【补注】 在 Ω 中的集代数 (algebra of sets) $\mathscr{S}$ 对于子集 $\Omega'\subset\Omega$ 的迹 (trace) 是集代数 $\Omega'\cap\mathscr{S}=\{A\cap\Omega'\ A\in\mathscr{S}\}$ 如果 $\mathscr{S}$ 是 σ 代数，那么它也是 σ 代数．

刘秀芳 译

函数关系 [functional relation, функциональное отношение]

集合 A 上的满足 $R^{-1}\circ R\subseteq\Delta$ 的二元关系 (binary relation) R，其中 Δ 为 A 的对角线．这意味着 $(a,b)\in R$，且 $(a,c)\in R$，蕴涵 $b=c$ 也就是说，对任意 $a\in A$ 至多存在一个 $b\in A$，使 $(a,b)\in R$ 从而 R 决定了 A 上的一个函数 (可能不是处处有定义的)．当它满足 $R^{-1}\circ R=\Delta$ 时，这个函数是处处有定义的且是一对一的．

О А Иванова 撰

【补注】 函数关系一般地定义为集合 A 和 B 之间的二元关系 $R\subset A\times B$，满足 $(a,b)\in R$，且 $(a,c)\in R$，蕴涵 $b=c$

张锦文、赵希顺 译

函数可分离性 [functional separability, функциональная отделимость]

拓扑空间 X 中两个集合 A 和 B 的一种性质，要求存在 X 上的一个连续实值函数 f，使得集合 $f(A)$ 和 $f(B)$ (关于实直线 $\mathbf{R}$ 的通常拓扑) 的闭包互不相交．例如，空间称为完全正则的，如果每个闭集都同每个与之不相交的单点集是函数可分离的．空间称为正规的，如果其中任何两个互不相交的闭集都是函数可分离的 如果一个空间中任何两个 (不同的) 单点集都是函数可分离的，则称为函数 Hausdorff 空间 (functionally Hausdorff space) 如果代替连续实值函数而考虑映入平面、区间或 Hilbert 方体的映射，上述

定义的内容不变

参考文献

[1] Архангельский, А В , Пономарев, В И , Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М , 1974 (英译本 Arkhangel'skiǐ, A V and Ponomarev, V I , Fundamentals of general topology problems and exercises, Reidel, 1984)

[2] Kelley, J L , General topology, Springer, 1975 (中译本 J L 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982)

A B Архангельский 撰 胡师度、白苏华 译

函数系统 [functional system, функциональная система]

具有某些运算的函数集合, 这些运算可作用在这个集合的函数上, 并且得到这个集合中的另一些函数. 函数系统是数学控制论和离散数学的基本对象之一. 它所反映的实际和抽象**控制系统** (control system) 的主要特征有 功能 (在函数系统中, 这由函数给出), 由给定的控制系统构造更复杂系统的规则, 利用组元的功能描述复杂系统的功能 (后两个特征反映在函数系统的运算中). 函数系统的例子有**多值逻辑** (many-valued logic), **自动机** (automaton) 代数, **可计算函数** (computable function) 代数, 等等 函数系统的一个特点是考虑从数学控制论、数理逻辑和代数的观点去研究函数系统时所产生的问题和方法. 因此, 从数学控制论的观点可以把函数系统看成是描述复杂控制系统的功能的模型, 从数理逻辑的观点, 则可以看成是逻辑的模型, 即命题及其逻辑运算的系统, 而从代数的观点, 又可以看成是泛代数

函数系统区别于一般类型泛代数的一个重要特征, 是其与控制系统的实际控制模型的紧密联系. 这种联系一方面决定了对函数系统要加上的一些本质的要求, 另一方面又提供了一类具有重要理论和实际意义的问题 函数系统的问题相当广泛, 且与多值逻辑中的问题有很大的类似性. 函数系统中最重要的问题包括完全性、用一些函数表示另一些函数的复杂性、恒等变换、综合和分析, 等等.

函数系统的研究是通过对函数系统的具体模型的研究来进行的, 其中首先研究的是二值和三值逻辑, 其次是 k 值逻辑 同时, 对自动机代数进行了大量研究, *例*如, 延滞函数的函数系统, **有限确定函数** (finitely-determined function) 和确定函数的函数系统, 可数值逻辑的函数系统, 可计算函数的函数系统, 非齐次函数的函数系统, 等等.

在收集函数系统模型并研究这些模型的性质的同时, 亦提出了函数系统的一些一般概念, 而且从解决上述问题的角度进行了分析 也可以把泛代数视为广义实际函数系统, 但这样就没有实际函数系统的主要优点了, 尤其是像集合和运算的构造性质等这样一些特点.

为了理解函数系统, 下面的方法具有相当的一般性. 这个方法的实质在于考虑形式为 $\langle\mathfrak{M},\Omega\rangle$ 的对, 其中 $\mathfrak{M}$ 是 k 值或可数值逻辑函数的集合, 或者是序列函数的集合, 或者也可以是这些函数的某些推广 (例如, 部分或非齐次函数等) 的集合, 而 Ω 是运算 (如自动机中) 的集合 这些运算必须与上述函数系统例子中的运算具有相同的性质. 这既是运算中有关函数的信息的局部性质, 以及通过最简单的, 即自动机方法反映出的在一定意义下运算的可计算特性, 同时也是函数本身产生方法的一种构造性质. 与实际函数系统相联系的函数系统概念分为真值函数系统 (truth-value functional system) 和序列函数系统 (sequential functional system) 的概念. 在第一种情况下, $\langle\mathfrak{M},\Omega\rangle$ 中的集合 $\mathfrak{M}$ 由多值逻辑函数所组成, 而在第二种情况下 $\mathfrak{M}$ 由序列函数, 即语句的函数所组成 所有实际函数系统, 或是真值函数系统, 或是序列函数系统.

如果把函数系统 $\langle\mathfrak{M},\Omega\rangle$ 视为部分泛代数, 则在函数系统的研究中与该函数系统相关的闭包算子 I_Ω 起着重要作用 这个算子和 Ω 中的算子称为自动机算子 (automaton operators). 现已发现自动机的分类与代数闭包算子是一致的. 特别地, 这表明以形式角度看, 所有实际函数系统或是真值函数系统或是序列函数系统.

参考文献

[1] Яблонский, С В, «Тр Матем ин-та АН СССР», 51 (1958), 5-142

[2] Яблонский, С В, «Научный совет АН СССР «Кибернетика» Информационные материалы», 1970, 5(42), 5-15

[3] Яблонский, С В, «Труды международного контресса математиков», Хельсинки, 1978, 963-971

[4] Post, E L, Two-valued iterative system of mathematical logic, Princeton Univ Press, 1941

[5] Кудрявцев, В Б, функциональные системы, М, 1982

В Б Кудрявцев 撰

【补注】 系统理论作为应用数学的一个分支, 也涉及泛函系统. 例如见 [A1]; [A2] 对自动机理论和形式语言理论进行了清晰的数学介绍

参考文献

[A1] Willems, J C, From time series to linear system-Part I Finite dimensional linear time invariant systems, *Automatica*, **22** (1986), 5, 561-580

[A2] Eilenberg, S, Automata, languages and machines, 1-2, Acad Press, 1974

夏小华 译 冯德兴 校

复变函数论 [functions of a complex variable, theory of, функции комплексного переменного теория]

广义地, 关于定义于复平面 $\mathbf{C}=\mathbf{C}^1$ 中点 z 的某个集合上的函数 (单复变量函数) 或复 Euclid 空间 $\mathbf{C}^n (n>1)$

的点 $z=(z_1, \quad ,z_n)$ 的某个集合上的函数（多复变量函数）的理论，狭义地，关于单复变量或多复变量**解析函数**（analytic function）的理论

约在19世纪中叶，复变函数论以解析函数论的形式成为一个独立的分支 A L Cauchy, K Weierstrass 和 B Riemann 在这个领域做了奠基性工作，他们是从几种不同的观点发展复变函数论的

按照 Weierstrass 的定义，一个函数 $w=f(z)$ 称为在区域 $D\subset \mathbf{C}$ 中是解析的（analytic）或全纯的（holomorphic），如果它在每个点 $z_0\in D$ 的一个邻域内可展开为幂级数

$$w=f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k, \tag{1}$$

在多复变量情形下，$D\subset \mathbf{C}^n$, $n>1$，此时级数 (1) 解释为多重幂级数．为定义一个解析函数，甚至只须在单个点 z_0 的某邻域内给定收敛级数 (1)，因为它在另一点 z_1 的值和相应的级数可由沿复平面 $\mathbf{C}$（或 $\mathbf{C}^n$, $n>1$）中连接 z_0, z_1 的不同路径的**解析延拓**（analytic continuation）确定

在解析延拓过程中可能会遇到**奇点**（singular point），对于这种点不可能沿任何路径进行解析延拓 这些奇点决定了解析函数在下述意义下的一般性态 如果两条连接相同固定点 z_0 与 z_1 的路径 L_1 与 L_2 并不同伦，即不可能使 L_2 连续变形到 L_1 而不通过任何奇点，则沿 L_1 与 L_2 解析延拓得到的函数值 $f(z_1)$ 可能并不相同 于是，从起始元素 (1) 出发沿各种可能的路径解析延拓所得到的**完全解析函数**（complete analytic function）在其在 $\mathbf{C}$ 中（或 $\mathbf{C}^n$ 中，$n>1$）的自然定义域内会成为多值的 函数 $w=z^{1/2}$, $w=\ln z$ 就是这种例子．通过不沿某些路径进行解析延拓，或通过在复平面上构造所谓割线（cut），或通过区分解析函数的单值分支（见**解析函数的分支**（branch of an analytic function）），可以避免多值性 然而把多值函数转化为单值函数的最完美的方法在于不把它看作复平面上的点的函数，而看作 **Riemann 曲面**（Riemann surface）上点的函数，这种曲面由覆叠复平面且以某种方法互相联结的一些叶构成．在多变量情形下，代替 Riemann 曲面的是 **Riemann 区域**（Riemannian domain），它是 $\mathbf{C}^n$ $(n>1)$ 的多叶覆叠

Cauchy 从单演性（monogeneity）概念出发构成他的解析函数论．他称函数 $w=f(z)$ $(z\in D\subset \mathbf{C})$ 为单演的，如果它在 D 内处处具有单连导数（monodromic derivative，这里“单连”是指除极点外单值且连续）．多多少少拓宽这个概念，称函数 $w=f(z)$ 在一个子集 $E\subset D$ 上单演，通常意味着在所有点 $z_0\in E$ 处存在关于 E 的导数（derivative with respect to E）

$$f_{E}'(z_0)=\lim_{z\to z_0,\ z\in E}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \tag{2}$$

的（单值）函数 当 $E=D$ 时，Cauchy 意义下的单演性与解析性相同 Cauchy 开发了关于解析函数积分的理论，证明了关于**残数**（residue）的重要定理和 **Cauchy 积分定理**（Cauchy integral theorem），并引进了 **Cauchy 积分**（Cauchy integral）概念

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \tag{3}$$

此积分把解析函数 $f(z)$ 的值用它在任一围绕 z 且其上及内部均不含 $f(z)$ 的奇点的闭围道 Γ 上的值表示出来．Cauchy 积分是解析函数最简单的积分表示式，对于多变量函数也能得到 Cauchy 积分概念

如果引进复变量 $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$，就能把两个变量 x,y 的任一函数 $w=f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$ 描述为 z 和 $\bar{z}$ 的函数 在这些函数中，确定哪些函数为解析的 **Cauchy-Riemann 条件**（Cauchy-Riemann conditions），要求函数 $w=u(x,y)+iv(x,y)$ 关于两个变量 (x,y) 为可微，且方程

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=0 \tag{4}$$

必须在 D 内处处成立，详细而言，(4) 即为 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$

条件 (4) 表明解析函数的实部 $u(x,y)$ 和虚部 $v(x,y)$ 必是**共轭调和函数**（conjugate harmonic functions） 在多复变量解析函数情形下，(4) 必须对所有变量 $\bar{z}_\nu$ $(\nu=1, \quad ,n)$ 成立．

对于 Riemann 来说，最重要的是由条件 (4) 所挑出的解析函数 $w=f(z)$，在某些条件下实现了 D 到复变量 w 的平面内某个区域上的**共形映射**（conformal mapping）．解析函数与共形映射的联结开辟了求解许多数学物理问题的道路

嗣后复变函数论的发展首先是而且现在仍然在于加深和拓宽解析函数论（例如，见**解析函数论的边值问题**（boundary value problems of analytic function theory），**解析函数的边界性质**（boundary properties of analytic functions），**解析函数的唯一性**（uniqueness properties of analytic functions），**解析函数的积分表示**（integral representation of an analytic function），**亚纯函数**（meromorphic function），**多叶函数**（multivalent function），**单叶函数**（univalent function），**整函数**（entire function）） 与解析函数有关的函数逼近与插值问题具有重要意义 在这些方面发现多复变量解析函数论中问题的特殊性质和困难在于，只有使用代数、拓扑和分析的最现代方法，问题才能得到解决．

全纯函数的边界性质，特别是当 (3) 中 $f(\zeta)$ 在围道 Γ 上的值完全任意给定时得到的 Cauchy 型积分（见

Cauchy 积分 (Cauchy integral)) 的边界性质，还有它以及其他积分表示的多维推广，具有巨大的理论和实际意义

在应用中很重要的**广义解析函数** (generalized analytic function)，其最简单的形式可由作为 (4) 的推广的方程

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + A(z)w + B(z)\bar{w} = F(z)$$

的解得到，对其主要性质 (单变量情形) 已进行了相当细致的研究．

拟共形映射 (quasi-conformal mapping) 的研究对解析函数论 (特别是 Riemann 曲面论) 本身及其应用都有巨大意义．

取值于各种向量空间中的**抽象解析函数** (abstract analytic function) 论也已得到发展

参考文献

[1] Привалов, И И , Введение в теорию функций комплексного переменного, 12 изд , М , 1977 (中译本 И И 普里瓦洛夫，复变函数引论，高等教育出版社，1956)

[2] Маркушевич, А И , Теория аналитических функций, 2 изд , т 1-2, М , 1967-1968 (中译本 А И 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957)

[3] Лаврентьев, М А , Шабат, Б В , Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд , М , 1973 (中译本 М А 拉甫伦捷夫，Б В 沙巴特，复变函数论方法，高等教育出版社，上册 1956，下册 1957)．

[4] Владимиров, В С , Методы теории функций многих комплексных переменных, М , 1964

[5] Шабат, Б В , Введение в комплексный анализ, 2 изд , т 1-2, М , 1976

[6] Векуа, И Н , Обобщенные аналитические функции, М , 1959 (中译本 依·涅·维库阿，广义解析函数，人民教育出版社，上下册 1960)

[7] Hurwitz, A , Courant, R , Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, Springer, 1964

[8] Gunning, R C , Rossi, H , Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965

[9] Hormander, L , An introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, 1973．

Е Д Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ahlfors, L V , Complex analysis, McGraw-Hill, 1979 (中译本 L V 阿尔福斯，复分析，第二版，上海科学技术出版社，1984)

[A2] Caratheodory, C , Theory of functions of a complex variable, 1-2, Chelsea, 1964 (译自德文)

[A3] Garnett, J B , Bounded analytic functions, Acad Press, 1981

[A4] Rudin, W , Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1987 (中译本 W 卢丁，实分析和复分析，人民教育出版社，1981)

[A5] Saks, S , Zygmund, A , Analytic functions, PWN, 1965 (译自波兰文)

[A6] Conway, J B , Functions of a complex variable, Springer, 1973 (中译本 J B 康威，单复变函数，上海科学技术出版社，1985)

[A7] Hille, E , Analytic function theory, 1-2, Chelsea, reprint, 1974

[A8] Krantz, S G , Function theory of several variables, Wiley (Interscience), 1982

[A9] Range, R M , Holomorphic functions and integral representations in several complex variables, Springer, 1986．

[A10] Boas, R P , Invitation to complex analysis, Random House, 1987

[A11] Burckell, R B , An introduction to classical complex analysis, 1, Acad Press, 1979．

[A12] Henrici, P , Applied and computational complex analysis, 1-3, Wiley, 1974-1986

[A13] Heins, M , Complex function theory, Acad Press, 1968

[A14] Narasimhan, R , Complex analysis in one variable, Birkhäuser, 1985

沈永欢 译

实变函数论 [functions of a real variable, theory of, функций действительного переменного теория]

数学分析的一个领域，它研究函数的表示与逼近问题以及它们的局部与整体性质 现代实变函数论着重于广泛应用集合论方法，当然，遵循着经典方法的路线．

因此，实变函数论的研究对象是函数．关于此概念 Н. Н Лузин ([3]) 写道 "函数概念不是突然形成的，可是，自从 200 年前发生了关于振动弦的著名论述以后，它便经历了深刻的变化，甚至不顾那时的强烈争论．从那时始直至今日，此概念一直在深化与发展着．因此没有一种简单的形式定义能概括此概念的全部内容 " 据此将此理论的源泉归根于关于振动弦论述的时代是十分自然的 (L Euler, D. Bernoulli, J d'Alembert, J L Lagrange 与其他人)，虽然此理论的形成是 19 世纪才发生的事 (J Fourier, A. L Cauchy, Н. И Лобачевский, P. Dirichlet, B Riemann, П. Л Чебышев, C Jordan 等人)

在经典分析中主要研究具一定阶光滑性的函数．但在 19 世纪下半叶，一些问题被明确提出来，期望有解答并涉及更一般的函数类，而且，即使对光滑函数也要涉及更深入的研究．在这些问题中必须提到的有集合的测度，曲线长度与曲面的面积，原函数与积分，积分与微分的关系，级数的逐项积分与微分，由

极限过程得到的函数的性质，等等 这些问题的解对数学发展有着基本的重要性．分析学的经典方法对这类问题已无法给出充分满意的解答 因此，19世纪末对数学分析基础的新评论的一种急需，便随之而起，它一直到19世纪末至20世纪初才在**集合论**（set theory）基础上被解决，同时也就完成了现代实变函数论基础的建立

通常把实变函数的现代理论分为三个部分 1)描述性理论，2)度量理论与3)逼近理论

前两部分特别密切，它们的基础由E Borel, R Baire, H Lebesgue等人所奠定

1)在函数的描述性理论中，研究由极限过程得到的某些函数类的性质 此项研究（基于**描述集合论**(descriptive set theory) 并与之有关）表明，**函数**(function) 概念是极其复杂的 在此方向上，发现了函数的**Baire类**（Baire classes)，该类原来与**Borel集**(Broel set) 的分类法最为密切相关

集合与函数的描述理论的基本结果为苏联学者在20世纪20与30年代得到（Н Н Лузин, М Я Суслин, П С Александров, А Н Колмогоров, Л В. Келдыш, П С Новиков等人）．

2) 在**函数的度量理论**（metric theory of functions）中，研究以集合的**测度**（measure）概念为基础的函数的性质 集合的测度的现代概念（**Lebesgue测度**（Lebesgue measure)）为H Lebesgue于1902年引进 同时，在此概念的基础上，他又创立了积分理论（**Lebesgue积分**（Lebesgue integral)）这两个极其重要的概念——测度与积分，构成了函数的度量理论的基础，由此研究函数的性质，导数，积分，函数项级数，等等

苏联在这方面的第一批主要结果由Д Ф Егоров与Н Н Лузин于20世纪20年代获得（见**Егоров定理**(Egorov theorem)，**Лузин C-性质**（Luzin C-property)）．函数的度量理论学派在苏联的奠基人与领袖是Лузин

对函数的度量理论应指出下列内容 级数与序列的**求和**（summation）理论以及**殆周期函数**（almost-periodic function）理论．后者在P Bohl, H Bohr, Н Н Боголюбов, H Weyl, В В Степанов等人的工作中被创立

函数的度量理论以及其中引起的概念与方法的研究，对现代数学的许多领域产生了特别重大的影响 事实上，在许多数学分支的大量分析研究中，如果没有Lebesgue测度与Lebesgue积分（或它们的类似概念与推广），人们是很难处理的

3)一个实变元**函数逼近**（approximation of functions）的基础在П Л Чебышев的经典论文中（19世纪中叶）被建立 他引进了极其重要的概念**最佳逼近**（best approximation) $E_n(f)$，并证明了关于函数用多项式的最佳逼近的一条基本定理（**Чебышев定理**(Chebyshev theorem)） 19世纪逼近论的进一步发展主要在俄国，体现在Е.И. Золотарев, А. Н. Коркин与А А, В А Марков兄弟的工作中 关于连续函数用多项式逼近的可能性的**Weierstrass定理**（Weierstrass theorem) 在**逼近论**（approximation theory）中起重大作用．

20世纪初发现了函数的可微性质对$E_n(f)$趋于零（当$n \to \infty$）的速度有影响（Lebesgue, Borel, Ch J de la Vallée-Poussin）

最重要的问题，即关于揭示函数的结构性质与函数用多项式逼近的速度之间的联系，是被С. Н. Бернштейн与D. Jackson解决的（见**Бернштейн定理**（Bernstein theorem)，**Jackson定理**（Jackson theorem)）．

从本世纪30年代开始，苏联在一元实变函数逼近论方面的研究牵涉到相当广阔的领域．沿着Бернштейн的研究道路，首先值得指出的应是А Н Колмогоров与С М Никольский以及他们的学生们的广博成就（见**嵌入定理**（imbedding theorems)）．

参考文献

[1] Baire, R, Leçons sur les fonctions discontinues, professées au collège de France, Gauthier-Villars, 1905
[2] Лузин, Н Н, Лекции об аналитических множествах и их приложениях, М, 1953
[3] Лузин, Н Н, Собр соч, т 3, М, 1959, 319–341
[4] Ляпунов, А А и Новиков, П С, Дескриптивная теория множеств, в кн Математика в СССР за тридцать лет, М -Л, 1948
[5] Lebesgue, H, Leçons sur l'integration et la récherche des fonctions primitives, Gauthier, Villars, 1928
[6] Kamke, E, Das Lebesgue-Stieltjes Integral, Teubner, 1960
[7] Колмогоров, А Н и Фомин, С В, Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд, М, 1976（中译本 А Н 柯尔莫果洛夫，С В 佛明，函数论与泛函分析初步，高等教育出版社，1992)
[8] Ульянов, П Л, Метрическая теория функций, в кн История отечественной математики, т 3, К, 1968
[9] Hardy, G H, Divergent series, Clarendon, 1949
[10] Bohr, H, Almost periodic functions, Chelsea, reprint, 1947（译自德文）
[11] Левитан, Б М, Почти-периодические функции, М, 1953（中译本 Б М 列维登，概周期函数，高等教育出版社，1956)
[12] Чебышев, П Л, Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций (1859), Полн собр соч, т 2, М -Л, 1947, 151–235
[13] Лозинский, С М и Натансон, И П, Метрическая и

конструктивная теория функций вещественной переменной, в кн Математика в СССР за сорок лет, т 1, М, 1959
[14] Никольский, С М, Теория прибиижения функций многочленами, в кн История отечественной математики, т 3, К, 1968
[15] Никольский, С М, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд, М, 1977

П Л Ульянов 撰

【补注】 正文中将实变函数论分为三个主要部分是俄国学者的分法. 关于第一部分, 参看**描述集合论** (descriptive set theory), [A2], [A3], [A4] 至于第二部分, "**函数的度量理论**" (metric theory of functions) 一词在西方文献中是不用的, 而相应的概念则散布于**泛函分析** (functional analysis) 的各个分支中 关于第三部分可参看逼近论的有关文章 (亦见[A5]) [A1] 与 [A6] 是一般文献.

参考文献

[A1] Hewitt, E and Stromberg, K, Real and abstract analysis, Springer, 1965
[A2] Royden, H L, Real analysis, Macmillan, 1968
[A3] Rooy, A C M van and Schikhof, W H, A second course on real functions, Cambridge Univ Press, 1982
[A4] Saks, S, Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文)
[A5] Lorentz, G G, Approximation of functions, Holt, Rinehart and Winston, 1966 (中译本 G G 洛伦茨, 函数逼近论, 上海科学技术出版社, 1981)
[A6] Choquet, G, Outils topologiques et metriques de l'analyse mathematique, Centre de Documentation Univ Paris, 1969, Rédige par C Mayer

郑维行 译

函子 [functor, функтор]

从一个范畴到另一个范畴并保持范畴结构一致的映射. 更准确地说, 从范畴 $\mathfrak{K}$ 到范畴 $\mathfrak{C}$ 的一个共变函子 (covariant functor), 或者简称从 $\mathfrak{K}$ 到 $\mathfrak{C}$ 的一个函子, 是一对映射 ($\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}\to\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$, $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}\to\mathrm{Mor}\,\mathfrak{C}$), 通常用同一个字母来表示, 例如用 $F(F\ \mathfrak{K}\to\mathfrak{C})$, 满足以下的条件

1) 对每一个 $A\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ 有 $F(1_A)=1_{F(A)}$,

2) 对所有的态射 $\alpha\in H_{\mathfrak{K}}(A,B)$, $\beta\in H_{\mathfrak{K}}(B,C)$, 有 $F(\alpha\beta)=F(\alpha)\cdot F(\beta)$

从 $\mathfrak{K}$ 的对偶范畴 $\mathfrak{K}^*$ 到范畴 $\mathfrak{C}$ 的函子称为从 $\mathfrak{K}$ 到 $\mathfrak{C}$ 的一个反变函子 (contravariant functor) 因此, 对于反变函子 $F\ \mathfrak{K}\to\mathfrak{C}$, 条件 1) 仍如上面一样需被满足, 而条件 2) 应改成 2^*) 对所有的态射 $\alpha\in H_{\mathfrak{K}}(A,B)$, $\beta\in H_{\mathfrak{K}}(B,C)$, 有 $F(\alpha\beta)=F(\beta)\cdot F(\alpha)$.

从范畴 $\mathfrak{K}_1$, , $\mathfrak{K}_n$ 到 $\mathfrak{C}$ 的一个对于变量 ι_1, , ι_K 共变而对其余的变量反变的 n 元函子 (n-place functor) 是一个从 Descartes 积

$$\prod_{i=1}^{n}\widetilde{\mathfrak{K}}_i$$

到 $\mathfrak{K}$ 的一个函子, 这里当 $i=\iota_1$, ·, ι_K 时 $\widetilde{\mathfrak{K}}_i=\mathfrak{K}_i$, 而对其余的 i, $\widetilde{\mathfrak{K}}_i=K_i^*$ 对于两个变量都共变的函子称为二元函子 (bifunctor), 亦称双函子.

函子的例子 1) 范畴 $\mathfrak{K}$ 到它自己的恒等映射是一个共变函子, 称为范畴的单位函子 (identity functor), 并表以 $\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}}$ 或 $1_{\mathfrak{K}}$

2) 设 $\mathfrak{K}$ 是一任意局部小的范畴, 设 $\mathfrak{S}$ 是集合的范畴, 并取 A 为 $\mathfrak{K}$ 的一个固定的对象. 如果对每一个 $X\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$, 取集合 $H^A(X)=H_{\mathfrak{K}}(A,X)$ 与之对应, 并对每一个态射 $\alpha\ X\to Y$, 取映射 $H^A(\alpha)\ H^A(X)\to H^A(Y)$, 这里对每一个 $\gamma\in H^A(X)$, $\gamma H^A(\alpha)=\gamma\alpha$, 则得一个从 $\mathfrak{K}$ 到 $\mathfrak{S}$ 的函子 这个函子称为从 $\mathfrak{K}$ 到 $\mathfrak{S}$ 的共变可表示函子 (covariant representable functor), A 为此函子的表示对象 (representing object). 同样地, 若对每一个对象 X 取集合 $H_A(X)=H_{\mathfrak{K}}(X,A)$, 并对一个态射 $\alpha\ Y\to X$ 取映射 $H_A(A)\ H_A(X)\to H_A(Y)$, 这里 $\gamma H_A(\alpha)=\alpha\gamma$, 则得到从 $\mathfrak{K}$ 到 $\mathfrak{S}$ 有表示对象 A 的反变可表示函子 (contravariant representable functor). 这些函子相应表以 H^A 与 H_A 如果 $\mathfrak{K}$ 是一个域 K 上的向量空间的范畴, 则 H_K 将把一个空间 E 变成它的由线性泛函所组成的对偶空间 E^* 在拓扑 Abel 群的范畴中, 函子 H_Q 将使每一个群对应其特征标群, 这里的 Q 是实数对整数的商群

3) 在一个任意的范畴中, 若对每一对对象 X 与 Y, 取集合 $H(X,Y)$ 与之对应, 并对每一对态射 α $X_1\to X$, 与 $\beta\ Y_1\to Y$, 取映射 $H(\alpha,\beta)\ H(X,Y_1)\to H(X_1,Y)$, 这里对于任何 $\gamma\in H(X,Y_1)$, 定义 $\gamma H(\alpha,\beta)=\alpha\gamma\beta$, 我们就得到一个到范畴 $\mathfrak{S}$ 的两元函子, 它对第一个变量是反变的, 对第二个变量是共变的.

在一个具有有限积的范畴中, 对任何自然数 n, 积可以看成为一个 n 元函子, 它对任何变量都是共变的. 作为一个规律, 一种构造, 如果它对于一个范畴中的任何一个对象都可定义, 或者对于有固定长度的对象序列都可定义, 且不依赖于这些对象的个体性质, 它就很可能是函子的. 这种构造的例子是在泛代数的某簇内构造自由代数, 它们将唯一地对应于集合的范畴的每一个对象, 其他的例子是构造拓扑空间的基本群, 构造各种维数的同调与上同调群, 等等

任何函子 $F\ \mathfrak{K}\to\mathfrak{C}$ 都定义一个由集合 $H_{\mathfrak{K}}(A,B)$ 到 $H_{\mathfrak{C}}(F(A),F(B))$ 内的一个映射, 它将态射 α $A\to B$, 对应态射 $F(\alpha)\ F(A)\to F(B)$ 函子 F 称为忠实的 (faithful), 如果这些映射都是单映射, F 称为全的 (full), 如果这些映射都是满映射. 对于每个**小范畴** (small category) $\mathfrak{D}$, 指定 $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{D}\ni D$ 对应 $H_{\mathfrak{D}}$, 这

可以扩张成为从 $\mathfrak{D}$ 到范畴 $F(\mathfrak{D}^*, \mathfrak{S})$ 的一个全的忠实函子 J，这里 $F(\mathfrak{D}^*, \mathfrak{S})$ 表示具有集合范畴 $\mathfrak{S}$ 上的概形 $\mathfrak{D}$ 的**图式**（diagram）的范畴

参考文献

[1] Bucur, I and Deleanu, A, Introduction to the theory of categories and functions, Wiley, 1968

[2] Cartan, H and Eilenberg, S, Homological algebra, Princeton Univ Press, 1956

[3] MacLane, S, Categories for the working mathematician, Springer, 1971

[4] Schubert, H, Categories, Springer, 1972

[5] Цаленко, М Ш, Шульгейфер, Е Г, Основы теории категорий, М, 1974

М Ш Цаленко 撰

【补注】 一个给定函子 F $\mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ 的一个子函子（subfunctor）是一个函子 S 连同一个函子的态射（函子的变换）α $S \to F$，使得对于每一个 $X \in \mathfrak{C}$，$\alpha(X)$ $S(X) \to F(X)$ 是 $\mathfrak{D}$ 中的一个单射（因而表示 $F(X)$ 的一个子对象） 对偶地，F 的一个商函子 （quotient functor）是一个函子 Q 以及一个函子变换 $F \to Q$，它对每一个 $X \in \mathfrak{C}$ 产生一个满射 $F(X) \to Q(X)$ 由此得，在从 $\mathfrak{C} \to D$ 的函子的范畴 Func$(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ 中，$F \to Q$ 是一个满射

在英文译文的某些部分（包含在这部百科全书的前面的一些条目中）名词“忠实函子”与“满函子”相应被（误）译成“单叶函子”（univalent functor）与“完全函子”（complete functor）

在本条目末尾所提到的满与忠实函子 $\mathfrak{D} \to F(\mathfrak{D}^*, G)$ 常被称为米田嵌入 （Yoneda embedding）

参考文献

[A1] Mitchell, B, Theory of categories, Acad Press, 1965

[A2] Adamek, J, Theory of mathematical structures, Reidel, 1983

周伯埙 译

函子态射 [functorial morphism, функторный морфизм]

一种与在公共标量环上的（左）模的同态相类似的概念（这里，函子的定义域起着所述环的作用，而函子本身则起着模的作用）. 假定 F_1 与 F_2 是从一个范畴 $\mathfrak{K}$ 到一个范畴 $\mathfrak{C}$ 的一元共变函子 一个函子态射 φ $F_1 \to F_2$ 是对 $\mathfrak{K}$ 的每一对象 A 指定一个态射 φ_A $F_1(A) \to F_2(A)$ 与之对应，使得对 $\mathfrak{K}$ 中的每一个态射 α $A \to B$，下列的图式是可交换的

$$\begin{array}{ccc} F_1(A) & \xrightarrow{F_1(\alpha)} & F_1(B) \\ \downarrow{\varphi_A} & & \downarrow{\varphi_B} \\ F_2(A) & \xrightarrow[F_2(\alpha)]{} & F_2(B) \end{array}$$

如果 $F_1 = F_2$，那么，令 $\varphi_A = 1_{F_1(A)}$，得到函子 F_1 的所谓恒等态射 （identity morphism） 如果 φ $F_1 \to F_2$ 与 ψ $F_2 \to F_3$ 是两个函子态射，那么，令 $(\varphi\psi)_A = \varphi_A\psi_A$，就得到函子态射 $\varphi\psi$ $F_1 \to F_3$，称为 φ 与 ψ 的积．函子态射的合成是可结合的 所以，对于一个小范畴 $\mathfrak{K}$，所有从 $\mathfrak{K}$ 到 $\mathfrak{C}$ 的函子与它们的函子态射形成一个所谓函子范畴 （functor category）Funct$(\mathfrak{K}, \mathfrak{C})$，或者称为一个具有概形 $\mathfrak{K}$ 的图式范畴 （category of diagrams）

设 φ $F_1 \to F_2$ $\mathfrak{K} \to \mathfrak{C}$ 为一个函子态射，并设 G $\mathfrak{M} \to \mathfrak{K}$ 与 H $\mathfrak{C} \to \mathfrak{N}$ 为两个函子．公式

$$\forall\ B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{M}\ \ (G * \varphi)_B = \varphi_{G(B)},$$
$$\forall\ A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{N}\ \ (\varphi * H)_A = H(\varphi_A)$$

分别定义了函子态射 $G * \varphi$ $GF_1 \to GF_2$ 与 $\varphi * H$ $F_1H \to F_2H$ 于是对于任何函子态射 φ $F_1 \to F_2$ $\mathfrak{K} \to \mathfrak{C}$ 与 ψ $H_1 \to H_2$ $\mathfrak{C} \to \mathfrak{N}$，下列的关系式成立

$$(\varphi * H_1)(F_2 * \psi) = (F_1 * \psi)(\varphi * H_2)$$

函子态射也称为函子的自然变换 （natural transformation of functors） 多元函子的函子态射可以类似于一元函子的函子态射来定义

М Ш Цаленко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Mitchell, B, Theory of categories, Acad Press, 1965

周伯埙 译

基本类 [fundamental class, фундаментальный класс]

1）$(n-1)$ 连通拓扑空间 （connected topological space）X（即一拓扑空间 X 当 $i \leqslant n-1$ 时满足 $\pi_i(X) = 0$）的基本类即群 $H^n(X, \pi_n(X))$ 中的元素 r_n，它在从万有系数公式（universal coefficient formula）.

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X); \pi) \to H^n(X, \pi) \to$$
$$\to \mathrm{Hom}(H_n(X), \ \pi) \to 0$$

导来的同构 $H^n(X, \pi) \approx \mathrm{Hom}\ (H_n(X), \ \pi)$ 之下，对应于 Hurewicz 同态 h $\pi_n(X) \to H_n(X)$（由 Hurewicz 定理知此时为同构（见**同伦群**（homotopy group）））的逆 h^{-1} 若 X 为 **CW 复形** (CW-complex)（胞腔空间），则基本类 r_n 即为构作 **Serre 纤维化**（Serre fibration）$\Omega X \to EX \to X$ 的截面时所遇到的第一**阻碍**（obstruction），它属于 $H^nA(X, \pi_{n-1}(\Omega X)) = H^n(X, \pi_n(X))$，同时也是构作恒等映射 id $X \to X$ 到常值映射的同伦时的第一阻碍．若 X 的 $(n-1)$ 维骨架由一点组成（事实上，这个假设并不限制普遍性，因为任何 $(n-1)$ 连通 CW 复形同伦等价于一个 CW 复形不含有小于 n 的正维数胞腔），则每个 n 维胞腔的闭包是一个 n 维球面，从而它的特征映射决定了群 $\pi_n(X)$ 的某个元素．既然这些胞腔构成群 $C_n(X)$ 的一组基，这样就确定了群 $C^n(X, \pi_n(X))$ 里的一个**上链**（cochain） 这个上链是**上闭链**（cocycle），它的上同调类

也即基本类.

2) 无边(或具有边界 ∂M) 连通可定向 n 维流形的基本类是自由循环群 $H_n(M)$ (或 $H_n(M, \partial M)$) 的一个生成元 $[M]$ 若 M 可以三角剖分，则在任意一个三角剖分之下将所有 n 维单形相容 (coherent) 定向后相加得到一个闭链，它的同调类就是基本类. 对于每个 q，由公式

$$x(y \cap c) = (x \cup y)(c), \dim x + \dim y = \dim c$$

的 $\cap$ 乘积给出的同态

$$D_M \quad H^q(M) \to H_{n-q}(M), D_M \quad x \to x \cap [M]$$

是一个同构，称为 **Poincaré 对偶性** (Poincaré duality) (若 M 有边界 ∂M，则 $D_M \quad H^q(M) \to H_{n-q}(M, \partial M)$) 也可以考虑未定向(但连通)流形 M(或带边)的基本类，这时，所指的是 $H_n(M, \mathbf{Z}_2)$ (或 $H_n(M, \partial M, \mathbf{Z}_2)$) 的唯一非零元素，同样也有 Poincaré 对偶.

参考文献

[1] Фукс, Д Б, Фоменко, А Т и Гутенмахер, В Л, Гомотопическая топология, 2 изд, М, 1969
[2] Mosher, R E and Tangora, M C, Cohomology operations and applications in homotopy theory, Harper & Row, 1968
[3] Husemoller, D, Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966
[4] Spanier, E H, Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966
[5] Dold, A, Lectures on algebraic topology, Springer, 1980

С Н Мальгин, М М Постников 撰 孙以丰 译

基本上闭链 [**fundamental cocycle, фундаментальный коцикл**], $(n-1)$ 骨架 X_{n-1} 为一点 x_0 的胞腔空间 X 的

$C^n(X, \pi_n(X))$ 中的上闭链，它在胞腔 e_i^n 上取的值是闭包 $\bar{e}_i^n$ 所决定的 $\pi_n(X, x_0)$ 中元素. 基本上闭链的上同调类称为 X 的**基本类** (fundamental class).

А В Хохлов 撰 孙以丰 译

基本闭链 [**fundamental cycle, фундаментальный цикл**], n 维流形的

给出该流形的**基本类** (fundamental class) 的闭链

参考文献

[1] Dold, A, Lectures on algebraic topology, Springer, 1980
[2] Spanier, E H, Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966 (中译本 E H 斯潘尼尔，代数拓扑学，上海科学技术出版社，1987)
[3] Milnor, J W and Stasheff, J D, Characteristic classes, Princeton Univ Press, 1974

А В Хохлов 撰 薛春华 译 徐森林 校

基本域 [**fundamental domain, фундаментальная область**], 拓扑空间 X 的变换的离散群 Γ 的

含有来自 Γ 的所有**轨道** (orbit) 的元素的子集 $D \subset X$，而来自一般位置的轨道恰有一个元素. 存在基本域的确切定义的各种说法 有时基本域是属于一个给定的 σ 代数(例如 Borel σ 代数)的任一子集而且恰好包含来自每个轨道的一个表示. 进一步，如果 X 是一个拓扑流形，则基本域通常就是一子集 $D \subset X$，它是一个开子集的闭包，并且是这样的子集 $\gamma D, \gamma \in \Gamma$，它们两两没有公共内点并且形成了 X 的局部有限的覆盖. 例如，由整向量作为平面 $\mathbf{R}^2$ 的平行移动的群的基本域可以取正方形

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

作为一种规则，基本域的选择是不唯一的.

Э Б Винберг 撰

【补注】 **Weyl 群** (Weyl group) W 的腔是 W 在它的反射表示里的基本域的例子. 徐森林 译 薛春华 校

曲面的基本形式 [**fundamental forms of a surface; квадратичные формы поверхности**]

曲面的二次微分形式的总称，这些二次形式是用曲面的坐标给出的，且在坐标变换下满足通常的变换规律. 曲面的基本形式表征了曲面在一给定点的邻域中的基本的内蕴性质及它在空间所处的方式，通常有所谓第一、第二及第三基本形式.

第一基本形式 (first fundamental form) 表征了曲面在一给定点的邻域中的**内蕴几何学** (interior geometry) 这意味着在曲面上能藉助于第一基本形式进行测量. 假设曲面用方程

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$$

给出，这里 u 和 v 是曲面上的坐标，且

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$$

是半径向量 $\mathbf{r}(u, v)$ 沿着从点 M 到一无限邻近点 M' 的方向的微分(见图 1)

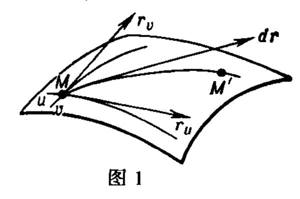


图 1

弧 MM' 的增长的线性主部的平方能用 $d\mathbf{r}$ 的平方来表出

$$\text{I} = ds^2 = d\mathbf{r}^2 = E(u, v)du^2 + $$
$$+2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2,$$

这里

$$E(u, v) = \mathbf{r}_u^2,\ F(u, v) = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v),\ G(u, v) = \mathbf{r}_v^2$$

形式Ⅰ是曲面的第一基本形式 亦见曲面的**第一基本形式**(first fundamental form)

第二基本形式(second fundamental form)表征了曲面在一正则点的邻域中的局部结构 于是,选

$$\mathbf{n} = \frac{\varepsilon[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|}$$

为曲面在 M 处的单位法向量,如果向量组 $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n}\}$ 有右手定向,则 $\varepsilon = +1$,反之则 $\varepsilon = -1$ 曲面上点 M' 到点 M 处切平面的偏差的线性主部的两倍 2δ 可用

$$\text{II} = 2\delta = (-d\mathbf{r}, d\mathbf{n})$$
$$= L(u, v)du^2 + 2M(u, v)dudv + N(u, v)dv^2$$

给出,这里

$$L = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}),\ M = (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}),\ N = (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n})$$

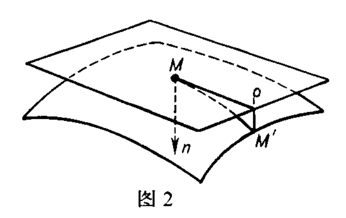


图 2

形式Ⅱ称为曲面的第二基本形式 亦见**第二基本形式**(second fundamental form)

第一和第二基本形式定义了两个重要的常用的标量,它们在曲面的坐标变换下是不变的 换言之,第二基本形式关于第一基本形式比率的行列式为曲面在一点处的 **Gauss 曲率**(Gaussian curvature)

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

而此比率的迹

$$H = \frac{1}{2}\ \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$$

定义了曲面在一点处的**平均曲率**(mean curvature)

指定第一(正定)和第二基本形式后就确定了曲面(至多差一个运动)(**Bonnet 定理**(Bonnet theorem))

曲面的第三基本形式(third fundamental form)是曲面在 M 点处的单位法向量 $\mathbf{n}$ 的微分的平方(见图 3)

$$\text{III} = d\mathbf{n}^2 = \mathbf{n}_u^2 du^2 + 2\mathbf{n}_u \mathbf{n}_v dudv + \mathbf{n}_v^2 dv^2$$

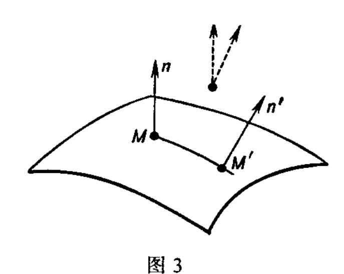


图 3

曲面的第三基本形式等于当沿着曲面从 M 到 M' 时向量 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{n}'$ 之间角度增长的线性主部的平方,这是曲面的**球面映射**(spherical map)的第一基本形式

这三个基本形式可用线性依赖式

$$\text{I} \cdot K - \text{II} \cdot 2H + \text{III} = 0$$

相联系

除了在上面所列出的基本形式以外,有时也会遇到其他的基本形式(例如,见[3])

参考文献

[1] Каган, В Ф, Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч 1, М - Л, 1947

[2] Рашевский, П К, Курс дифференциальной геометрии, 4 изд, М, 1956

[3] Шуликовский, В И, Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М, 1963

А Б Иванов 撰

【补注】 亦见**二次曲面形式**(quadratic surface forms);$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ 表示向量 $\mathbf{r}_u$ 和 $\mathbf{r}_v$ 的**向量积**(vector product).

参考文献

[A1] Klingenberg, W, A course in differential geometry, Springer, 1978

[A2] Spivak, M, A comprehensive introduction to differential geometry, Publish or Perish, 1979

[A3] Blaschke, W and Leichtweiss, K, Elementare Differentialgeometrie, Springer, 1975

[A4] Hicks, N J, Notes on differential geometry, V Nostrand, 1965

沈纯理 译

基本群[fundamental group, фундаментальная группа], Poincaré 群(Poincaré group)

第一个绝对**同伦群**(homotopy group) $\pi_1(X, x_0)$ 设 I 为区间 $[0, 1]$,$\partial I = \{0, 1\}$ 是它的边界 带基点拓扑空间 (X, x_0) 基本群的元素是 X 的闭路同伦类,即空间对 $(I, \partial I)$ 映入 (X, x_0) 的连续映射 rel$\{0, 1\}$ 的同伦类 道路 $s_1 s_2$

$$s_1 s_2(t) = \begin{cases} s_1(2t), & t \leqslant 1/2, \\ s_2(2t-1), & t \geqslant 1/2, \end{cases}$$

称为道路 s_1 与 s_2 的乘积 乘积的同伦类只依赖于因子的同伦类，所得到的乘法运算一般来说是不可交换的．单位元素是映入 x_0 的常值映射的同伦类，含有道路 $\varphi(t)$ 的同伦类 $\overline{\varphi}$，其逆是道路 $\psi(t)=\varphi(1-t)$ 的同伦类．对于连续映射 $f\ (X, x_0)\to(Y, y_0)$ 有相应的同态

$$f_{\#}(\overline{\varphi})=\overline{f\circ\varphi}\quad \pi_1(X, x_0)\to\pi_1(Y, y_0),$$

即 π_1 是从带基点拓扑空间的范畴到（非交换）群范畴的一个函子 对于联结点 x_1 到 x_2 的道路 φ，可以定义同构

$$\hat{\varphi}\quad \pi_1(X, x_2)\to\pi_1(X, x_1),$$

$$\hat{\varphi}(u)t=\begin{cases}\varphi(3t), & t\leqslant 1/3,\\ u(3t-1), & 1/3\leqslant t\leqslant 2/3,\\ \varphi(3-3t), & 2/3\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

它只依赖于 φ 的同伦类．群 $\pi_1(X, x_0)$ 如同一个自同构群而作用于 $\pi_n(X, x_0)$，且在 $n=1$ 的情形下，$\hat{\varphi}$ 的作用如同内自同构 $\overline{u}\to\overline{\varphi u\varphi^{-1}}=\hat{\varphi}(\overline{u})$ Hurewicz 同态 $h\ \ \pi_1(X, x_0)\to H_1(X)$ 为满同态，核为 $[\pi_1, \pi_1]$（Poincaré 定理（Poincaré theorem））

具有平凡基本群的道路连通空间称为单连通的．乘积空间 $\Pi_\alpha X_\alpha$ 的基本群同构于各因子的基本群的直乘积· $\pi_1(\Pi_\alpha X_\alpha)=\Pi_\alpha\pi_1(X_\alpha)$ 设 (X, x_0) 为道路连通拓扑空间，设 $\{U_\lambda\ \ \lambda\in\Lambda\}$ 为 X 的开覆盖，其成员的交截仍为这个覆盖的成员，并且 $x_0\in\bigcap_\lambda U_\lambda$，则 $\pi_1(X, x_0)$ 为图表 $\{G_\lambda, \varphi_{\lambda\mu\#}\}$ 的正向极限，其中 $G_\lambda=\pi_1(U_\lambda, x_0)$，$\varphi_{\lambda\mu\#}$ 为含入映射 $\varphi_{\lambda\mu}\ \ U_\lambda\to U_\mu$ 诱导的同态（Seifert-van Kampen 定理（Seifert-van Kampen theorem）） 例如，若覆盖由 U_0，U_1 与 U_2 组成，且 $U_0=U_1\cap U_2$ 为单连通，则 $\pi_1(X, x_0)$ 为 $\pi_1(U_1, x_0)$ 与 $\pi_1(U_2, x_0)$ 的自由乘积．在 CW 复形的情形下，这个结论对于 X 的闭 CW 子空间也成立．

若 CW 复形 X 的 0 维骨架由一个点构成，则每个 1 维胞腔 $e_\lambda^1\in X$ 给出 $\pi_1(X, x_0)$ 的一个生成员，每个 2 维胞腔 $e_\lambda^2\in X$ 给出相应于 e_λ^2 的粘贴映射的一个关系．

设 X 有一个覆盖 $\{U_\lambda\ \ \lambda\in\Lambda\}$ 使得含入同态 $\pi_1(U_\lambda, z)\to\pi_1(X, z)$ 对每点 z 为零，则有一个**覆叠**（covering）$p\ \ \widetilde{X}\to X$ 满足 $\pi_1(\widetilde{X}, x)=0$ 这时，$\widetilde{X}$ 的与 p 可交换的自同胚（覆叠变换）全体所构成的群同构于 $\pi_1(X, x_0)$，并且 $\pi_1(X, x_0)$ 的阶等于纤维 $p^{-1}x_0$ 所含点的数目．道路连通空间的映射 $f\ \ (Y, y_0)\to(X, x_0)$ 若满足 $f_{\#}(\pi_1(Y, y_0))=0$，则存在提升映射 $\widetilde{f}\ \ Y\to\widetilde{X}$，$p\circ\widetilde{f}=f$ 覆叠 $p\ \ \widetilde{X}\to X$ 称为万有（universal）覆叠．

参考文献

[1] Massey, W, Algebraic topology an introduction, Springer, 1977

[2] Рохлин, В А и Фукс, Д Б, Начальный курс топологии, М, 1977

[3] Spanier, E H, Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966

[4] Stallings, J R, Group theory and three-dimensional manifolds, Yale Univ Press, 1972

A B Хохлов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gray, B, Homology theory, Acad Press, 1975

孙以丰 译

基本广群 [fundamental groupoid, фундаментальный группоид]

由一个拓扑空间 X 所定义的一个广群（一个范畴，其中所有态射都是同构），其对象是 X 的点，而由对象 x_0 到 x_1 的态射是始于 x_0 终于 x_1 的道路的同伦类 rel$\{0, 1\}$，态射的复合是道路类的乘积．一个对象 x_0 的自同构群与**基本群**（fundamental group）$\pi_1(X, x_0)$ 一样

A B Хохлов 撰

【补注】 关于基本广群的应用的一个有用的综述可以在[A1]中找到

参考文献

[A1] Brown, R, From groups to groupoids a brief survey, *Bull London Math Soc*, **19** (1987), 113-134

郝钢新 译

基本矩阵 [fundamental matrix, matrizant; матрицант]

在点 t_0 规范化的线性常微分方程组

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbf{R}^n\qquad(*)$$

的解的转移矩阵 $X(t)$．如果矩阵值函数 $A(t)$ 在某区间 $J\subset\mathbf{R}$ $(t\in J)$ 上是局部可积的，则基本矩阵是矩阵初值问题

$$\dot{X}=A(t)X,\quad X(t_0)=I$$

（I 表示单位阵）的唯一连续解

由方程组（$*$）的列解 x_1， ，x_m 构成的每个矩阵 $M(t)$ 可表为 $M(t)=X(t)M(t_0)$，其中 m 是自然数 特别地，（$*$）的每个解可写成形式 $x(t)=X(t)x_0$．

展开式

$$X(t)=I+\int_{t_0}^{t}A(s)ds+\int_{t_0}^{t}A(s)\int_{t_0}^{s}A(r)drds+$$

对每个 $t\in J$ 绝对收敛并在 J 中的每个紧区间上一致收敛且 **Liouville-Остроградский 公式**（Liouville-Ostrogradski formula）

$$\det X(t)=\exp\int_{t_0}^{t}\mathrm{Sp}\,A(s)ds$$

成立 如果矩阵 $A(t)$ 满足 Lappo-Данилевский 条件 (Lappo-Danilevskiĭ condition)

$$A(t)\cdot\int_{t_0}^{t}A(s)ds=\int_{t_0}^{t}A(s)ds\cdot A(t),$$

那么

$$X(t)=\exp\int_{t_0}^{t}A(s)ds$$

特别地，如果 $A(t)\equiv A$ 是常数矩阵，那么

$$X(t)=e^{A(t-t_0)}$$

如果 $X_A(t)$ 是带有矩阵 $A(t)$ 的方程组（*）的基本矩阵，那么

$$X_{A+B}(t)=X_A(t)X_D(t),$$

其中

$$D(t)=[X_A(t)]^{-1}B(t)X_A(t)$$

基本矩阵使得有可能将非齐次方程组

$$\dot{x}=A(t)x+b(t)$$

(其中函数 $b(t)$ 在 J 上局部可积）的每个解写成 Cauchy 公式的形式

$$x(t)=X(t)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}C(t,s)b(s)ds,\quad t\in J,$$

其中

$$C(t,s)=X(t)[X(s)]^{-1}$$

称为（*）的 Cauchy 矩阵（Cauchy matrix）. Cauchy矩阵 $C(t,s)$ 在 $J\times J$ 上关于它的自变量是共同连续的并且对任意 $t,s,r\in J$ 有性质

1) $C(t,s)=C(t,t_0)[C(s,t_0)]^{-1}$,

2) $C(t,s)=C(t,r)C(r,s)$,

3) $C(s,t)=[C(t,s)]^{-1}$,

4) $C(t,t)=I$,

5) $|C(t,s)|\leqslant\exp\int_s^t|A(r)|dr$, $s\leqslant t$，其中 $|\cdot|$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的范数，

6) 如果 $H(t,s)$ 是伴随方程组

$$\dot{x}=-A^*(t)x$$

的 Cauchy 矩阵，那么

$$H(t,s)=[C^*(t,s)]^{-1}.$$

参考文献

[1] Bourbaki, N, Elements of mathematics Functions of a real variable, Addison-Wesley, 1976

[2] Гантмахер, Ф Р, Теория матриц, 2 изд, М, 1966 (英译本 Gantmakher, F R, The theory of matrices, Chelsea, reprint, 1977)

[3] Демидович, Б П, Лекции по математической теории устойчивости, М, 1967.

[4] Якубович, В А, Старжинский, В М, Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М, 1972 (英译本 Yakubovich, V A and Starzhinskiĭ, V M, Linear differential equations with periodic coefficients, Wiley, 1975)

Ю В Комленко 撰

【补注】 术语“矩阵元”通常已不再使用，改以“转移矩阵”(transition matrix) 来称呼基本矩阵已逐渐普遍化了 亦见**基本解组** (fundamental system of solutions).

Cauchy 公式通常称为常量变差公式 (variation of constants formula)，而 Cauchy 矩阵也称为转移矩阵 (亦见 **Cauchy 矩阵** (Cauchy matrix)).

参考文献

[A1] Brockett, R W, Finite dimensional linear systems, Wiley, 1970

[A2] Hale, J K, Ordinary differential equations, Wiley, 1980.

周芝英 译 叶彦谦 校

基本序列 [**fundamental sequence**, **фундаментальная последовательность**], Cauchy 序列 (Cauchy sequence), 度量空间 X 中点的

序列 $x_n\in X$ ($n=1,2,$)，使得对任何 $\varepsilon>0$ 存在数 n_0，对所有的数 n，$m>n_0$ 有 $\rho(x_m,x_n)<\varepsilon$

Cauchy 序列在一致空间中的推广则是广义 Cauchy 序列（见**广义序列**(generalized sequence)） 设 X 是一致空间，一致结构为 $\mathfrak{U}=\{U\}$ 广义序列 $\{x_\alpha\ \alpha\in A\}$，$x_\alpha\in X$，$A$ 是有向集，称为广义 Cauchy 序列，如果对每个元素 $U\in\mathfrak{U}$，存在指标 $\alpha_0\in A$，使得对所有在 α_0 之后的 α，$\beta\in A$ 有 $(x_\alpha,x_\beta)\in U$

参考文献

[1] Александров, П С, Введение в теорию множеств и общую топологию, М, 1977

[2] Колмогоров, А Н, Фомин, С В, Элементы теорий функций и функционального анализа, 5 изд, М, 1981 (中译本 А Н 柯莫果洛夫, С В 佛明，函数论与泛函分析初步 (1954 年版，第一卷)，高等教育出版社，1957)

[3] Kelley, J L, General topology, Springer, 1975 (中译本 J L 凯莱，一般拓扑学，科学出版社，1982)

Л Д Кудрявцев 撰

【补注】 由于广义序列也称为网，所以也可以说在一致空间中的 Cauchy 网 (Cauchy nets) (亦见**网（拓扑空间中集合的）**(net (of sets in a topological space)))

胡师度、白苏华 译

基本解 [**fundamental solution**, **фундаментальное решение**], 线性偏微分方程的

具有 C^∞ 系数的偏微分方程 $Lu(x)=0$ $(x\in\mathbf{R}^n)$ 的形如函数 $I(x,y)$ 的解，对于固定的 $y\in\mathbf{R}^n$，它满足方程

$$LI(x,y)=\delta(x-y),\ x\neq y,$$

此方程在广义函数论的意义下来理解，其中 δ 是 **delta 函数** (delta-function) 每一个常系数偏微分方程以及任意的椭圆型方程都有基本解．例如，对于诸常系数 a_{ij} 构成一正定矩阵 a 的椭圆型方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=0,$$

由函数

$$I(x,y)=\begin{cases}\left[\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x_i-y_i)(x_j-y_j)\right]^{(2-n)/2}, & n>2,\\ \log\left[\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x_i-y_i)(x_j-y_j)\right], & n=2\end{cases}$$

给出了它的一个基本解，其中 A_{ij} 是 a_{ij} 在矩阵 a 中的代数余子式．

基本解被广泛地应用于椭圆型方程边值问题的研究中．

参考文献

[1] Владимиров, В С, Обобщенные функции в математической физике, 2 изд, М, 1979

[2] Bers, L, John, F and Schechter, M, Partial differential equations, Interscience, 1964

[3] John, F, Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, Interscience, 1955

А П Солдатов 撰

【补注】 基本解亦被用于双曲型和抛物型方程 **Cauchy 问题** (Cauchy problem) 的研究 基本解亦用另一英文名称 "elementary solution"

亦见 **Green 函数** (Green function).

参考文献

[A1] Friedman, A, Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, 1964 (中译本 A 弗里德曼，抛物型偏微分方程，科学出版社，1984)

[A2] Ладыженская, О А, Уральцева, Н Н Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, 2 изд, М, 1973 (中译本 О А 拉迪任斯卡娅，Н Н 乌拉利采娃，线性和拟线性椭圆型方程，科学出版社，1987)

[A3] Ладыженская, О А, Солонников, В А, Уральцева, Н Н, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М, 1967, 1967 (英译本 Ladyzhenskaya, O A, Solonnikov, V A and Ural'tseva, N N, Linear and quasilinear parabolic equations, Amer Math Soc, 1968)

[A4] Schwartz, L, Théorie des distributions, 1-2, Hermann, 1950-1951

[A5] Gel'fand, I M and Shilov, G E, Generalized functions, Acad Press, 1964 (译自俄文).

陆柱家 译

基本解组 [**fundamental system of solutions**, **фундаментальная система решений**]，线性齐次常微分方程组的该方程组实（复）值解向量空间中的一组基（方程组亦可以只由一个方程组成.）这个定义能更详细地表达如下．

线性齐次常微分方程组的实（复）值解 $\{x_1(t),\ ,x_n(t)\}$（在某集合 E 上给出）的一个集合称为这个方程组在 E 上的一个基本解组，如果下面两个条件都满足 1) 如果实（复）数 $C_1,\cdot,C_n$ 使得函数

$$C_1x_1(t)+\ \ +C_nx_n(t)$$

在 E 上恒等于零，那么所有的数 $C_1,\ ,C_n$ 都等于零，2) 对所讨论的方程组的每一个实（复）值解 $x(t)$，存在（不依赖于 t 的）实（复）数 $C_1,\ ,C_n$ 使得

$$x(t)=C_1x_1(t)+\ \ +C_nx_n(t)$$

对所有 $t\in E$ 成立．

如果 $(c_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 是一个任意非奇异 $(n\times n)$ 维矩阵，并且 $\{x_1(t),\ ,x_n(t)\}$ 是一个基本解组，那么 $\{\sum_{j=1}^{n}c_{1j}x_j(t),\ ,\sum_{j=1}^{n}c_{nj}x_j(t)\}$ 也是一个基本解组，每一个基本解组都能通过这样的变换从某一个给定的基本解组得到．

如果微分方程组形式为

$$\dot{x}=A(t)x, \tag{1}$$

其中 $x\in\mathbf{R}^n$（或 $x\in\mathbf{C}^n$），如果

$$A(\cdot)\quad(\alpha,\beta)\rightarrow\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$$

$$(\text{相应地}\ (\alpha,\beta)\rightarrow\mathrm{Hom}(\mathbf{C}^n,\mathbf{C}^n))$$

并且如果映射 $A(\cdot)$ 在包含于 (α,β) 中的每条线段上是可求和的（(α,β) 是 $\mathbf{R}$ 中一个有界或无界区间），那么这个方程组的解向量空间与 $\mathbf{R}^n$（相应地，$\mathbf{C}^n$）同构．因此，方程组 (1) 有无限个基本解组，并且每个这样的基本解组由 n 个解组成．例如，对于方程组

$$\dot{u}=u,\quad \dot{v}=-v,$$

一个任意基本解组有形式

$$\left\{\begin{bmatrix}e^t u_1\\ e^{-t}v_1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}e^t u_2\\ e^{-t}v_2\end{bmatrix}\right\},$$

其中

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

是任意的线性无关的列向量．

(1) 的每一个基本解组形如

$$\{X(t,\tau)x_1, \quad ,X(t,\tau)x_n\},$$

其中 $X(t,\tau)$ 是 (1) 的 **Cauchy 算子** (Cauchy operator), τ 是 (α,β) 中任意一个固定的数，$x_1, \quad ,x_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ (相应地，$\mathbf{C}^n$) 中任意一组固定的基

如果微分方程组由单个方程

$$x^{(k)}+a_1(t)x^{(k-1)}+ \quad +a_k(t)x=0 \tag{2}$$

组成，其中函数

$$a_1(t), \quad ,a_k(t)\cdot(\alpha,\beta) \to \mathbf{R}\,(\text{或 } (\alpha,\beta) \to \mathbf{C})$$

在包含于 (α,β) 中的任何线段上是可求和的 ((α,β) 是 $\mathbf{R}$ 中的一个有界或无界区间)，那么这个方程的解向量空间与 $\mathbf{R}^k$ (相应地，$\mathbf{C}^k$) 同构．因此，方程 (2) 有无限多个基本解组，其中的每一个由 k 个解组成．例如，方程

$$\ddot{x}+\omega^2x=0, \quad \omega\neq 0$$

有基本解组 $\{\cos\omega t, \sin\omega t\}$，该方程的实通解由公式

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$$

给出，其中 C_1 和 C_2 是任意实常数．

如果微分方程组形式为

$$x^{(k)}=A_1(t)x^{(k-1)}+ \quad +A_k(t)x, \tag{3}$$

其中 $x\in\mathbf{R}^n$ (或 $x\in\mathbf{C}^n$)，又如果对所有的 $i=1, \quad ,k-1$，映射

$$A_i(\cdot) \quad (\alpha,\beta) \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$$

$$(\text{或} \quad (\alpha,\beta) \to \mathrm{Hom}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^n))$$

在包含于 (α,β) 中的每一条线段上是可求和的 (其中 (α,β) 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界或无界区间)，那么该方程组的解空间与 $\mathbf{R}^{kn}$ (相应地，$\mathbf{C}^{kn}$) 同构，存在 (3) 的基本解组，其中的每一组由 kn 个解组成．

对于那些关于首项导数未解出的线性齐次微分方程组，即使系统的系数是常数，出现在基本解组中的解的数目 (也就是解向量空间的维数) 也并不总是像上面的情形那样容易计算出来．(在 [1] 的第 11 节中，对首项导数未解出来的常系数线性微分方程组有这种计算的分析.)

参考文献

[1] Понтрягин, Л С, Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд, М, 1974 (中译本 Л С 庞特里雅金，常微分方程，上海科学技术出版社，1962).

В М Миллионщиков 撰

【补注】 在上面考虑的情形中，Cauchy 算子也称为**转移矩阵** (transition matrix)．亦见**基本矩阵** (fundamental matrix)．

参考文献

[A1] Ince, E L, Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956

周芝英 译 叶彦谦 校

G

G 纤维化 [G-**fibration**, G-**расслоение**]，具有结构群的纤维丛(fibre bundle with a structure group)

两个拓扑空间直乘积概念的一种推广.

设 G 为拓扑群，X 为一个有效右 G 空间，即具有 G 的右作用的拓扑空间，使得 $xg=x$ 对一切 $x\in X$，$g\in G$ 成立时必有 $g=1$. 令 $X^{*}\subset X\times X$ 为满足 $x'=xg$，对某个 $g\in G$ 的所有元素对 (x, x') 所构成的子空间，令 $B=X/G$ 为轨道空间，$p: X\to B$ 为将每点映为它所在轨道的映射. 若 $X^{*}\to G\cdot(x, xg)\mapsto g$ 为连续，则 $\xi=(X, p, B)$ 称为以 G 为结构群的主纤维丛(principal fibre bundle)

设 F 为左 G 空间，则拓扑空间 $X\times F$ 有 G 的右作用定义如 $(x, f)g=(xg, g^{-1}f)$, $f\in F$ 迭合映射 $X\times F\xrightarrow{\mathrm{pr}_X}X\xrightarrow{p}B$ 诱导了映射 $X_F=(X\times F)/G\xrightarrow{p_F}B$ (这里 X_F 是 $X\times F$ 在 G 作用之下的轨道空间). 四联组 (X_F, p_F, B, F) 称为相配于主纤维丛 ξ 的具有结构群的纤维丛，四联组 (X_F, p_F, F, ξ) 称为具有纤维 F，底空间 B，结构群 G 的纤维丛. 于是，具有已给结构群的主纤维丛是任何具有(该)结构群的纤维丛结构中的一部分，它唯一地确定以任何左 G 空间 F 为纤维的纤维丛.

设 $\xi=(X, p, B)$, $\xi'=(X', p', B')$ 为两个具有结构群 G 的主纤维丛，则态射 $\xi\to\xi'$ 是一个 G 空间映射 $h: X\to X'$. h 诱导了映射 $f\ B\to B'$. 具结构群的主纤维丛称为平凡的(trivial)，假如它同构于如下类型的纤维丛:

$$(B\times G, \mathrm{pr}_B, B), (b, g)g'=(b, gg'),$$

$$b\in B, g, g'\in G$$

设 (X, p, B) 为主纤维丛，设 $f\ B'\to B$ 为连续映射，将某任意拓扑空间 B' 映入 B 令 $X'\subset B'\times X$ 是满足 $f(b)=p(x)$ 的元素对 (b, x) 全体所构成的子空间. 投影 $\mathrm{pr}_B\ B'\times X\to B'$ 诱导了映射 $p'\ X'\to B'$ 空间 X' 具有自然的右 G 空间结构，三联组 (X', p, B) 是一个主纤维丛，它是由 f 诱导的，称为诱导纤维丛(induced fibre bundle) 若 $f\ B'\to B$ 为子空间的含入映射，则 (X', p', B') 称为 (X, p, B) 在子空间 B' 上的限制(restriction).

具有构造群的主纤维丛称为局部平凡的(locally trivial)，假如它在底空间每点的某邻域上的限制是平凡丛. 在许多情形下，局部平凡的要求是不必要的(例如，若 G 为紧致 Lie 群，X 为光滑 G 流形). 因此，具有结构群的"纤维丛"一词常理解为局部平凡的纤维丛(或纤维化).

设 (X_F, p_F, F, ξ), (X_F, p_F, F, ξ') 为具有相同构造群 G 及相同 G 空间作为纤维的一对纤维丛. 给定一个主纤维丛态射 $h: \xi\to\xi'$，映射 $h\times\mathrm{id}\ .X\times F\to X'\times F$ 诱导了连续映射 φ: $X_F\to X_F$，则 $(h, \varphi): (X_F, p_F, F, \xi)\to(X_F, p'_F, F, \xi')$ 称为具有结构群的纤维丛的态射.

局部平凡纤维丛 $\eta=(X_F, p_F, F, \xi)$ 可以用下面的方式刻画，给出了具有结构群的纤维丛的另一种(也是通用的)定义. 设 $U=\{u_\alpha\}$ 为底空间 B 的一个开覆盖使得对一切 α，η 在 u_α 上的限制为平凡的. 平凡化的选定以及它们在交集 $u_\alpha\cap u_\beta$ 上的相等引出了连续函数(称为传递函数(transfer functions)) $g_{\alpha\beta}$: $u_\alpha\cap u_\beta\to G$. 在三个邻域的交集 $u_\alpha\cap u_\beta\cap u_\gamma$ 上有 $g_{\alpha\beta}\circ g_{\beta\gamma}\circ g_{\gamma\alpha}=1\in G$，而若平凡化在每个邻域上另作选择时，新的函数为 $g'_{\alpha\beta}=h_\alpha g_{\alpha\beta}h_\beta^{-1}$. 这样，函数 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 构成一个 1 维 Александров - Čech 上闭链，系数为 G 值函

数芽所构成的层（系数为不可交换的），并且一个局部平凡纤维丛决定这个上闭链，除开差一个上边缘

参考文献

[1] Husemoller, D, Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966

[2] Steenrod, N E, The topology of fibre bundles, Princeton Univ Press, 1951

А Ф Харшиладзе 撰 孙以丰 译

G结构 [**G-structure**, **G-структура**]，流形上的

流形上余-标架主丛的具有结构群 G 的主子丛 更精确地，设 π_k $M_k \to M$ 是过 n 维流形 M 上所有 k 阶余-标架的主 $GL^k(n)$ 丛，设 G 为 k 阶一般线性群 $GL^k(n)$ 的子群．k 余-标架流形 M_k 的子流形 P 定义了一个 k 阶的 G 结构 $\pi=\pi_{k|P}$ $P\to M$，如果 π 定义了一个主 G 丛，即 π 的纤维是 G 的轨道．例如，π_k 的一个截面 $x\mapsto u_x^k$（余标架场）定义了一个 G 结构 $P=\{gu_x^k \quad x\in M,\ g\in G\}$，它称为由此余-标架场所生成的 G 结构．任何 G 结构局部地是由一个余-标架场所生成的．过空间 $V=\mathbf{R}^n$ 上由余-标架场 $x\mapsto j_x^k(id)$ 所生成的 G 结构称为标准平坦 G 结构，这里，id $V\to V$ 是恒等映射

设 π $P\to M$ 为一个 G 结构．流形 P 到点 $eG\in GL^k(n)/G$ 的映射能延拓成一个 $GL^k(n)$ 等变的映射 S $M_k\to GL^k(n)/G$，它能被视为 M 上型为 $GL^k(n)/G$ 的结构．如果齐性空间 $GL^k(n)/G$ 能作为轨道被嵌入到容许 $GL^k(n)$ 的一个线性作用的向量空间 W 中，则结构 S 能被视为一个型 W 的线性结构，S 称为 G 结构 π 的 Bernard 张量（Bernard tensor），且经常将它们视为恒同．反之，令 S $M_k\to W$ 为型 W 的一个线性几何结构（例如，一个张量场），这里 $S(M_k)$ 属于 $GL^k(n)$ 的单个轨道 $GL^k(n)w_0$ 于是 $P=S^{-1}(w_0)$ 是一个 G 结构，这里 G 是点 w_0 在 $GL^k(n)$ 中的稳定化子，且 S 为其 Bernard 张量．例如，Riemann 度量定义了一个 $O(n)$ 结构，殆－辛结构定义了一个 $Sp(n/2,\mathbf{R})$ 结构，殆－复结构定义了一个 $GL(n/2,\mathbf{C})$ 结构，及一个无挠联络定义了一个二阶 $GL(n)$ 结构（此处 $GL(n)$ 被考虑为群 $GL^2(n)$ 的一个子群）．仿射子（自同态场）定义了一个 G 结构的充要条件是在所有点处它有一个相同的 Jordan 标准型 A，这里 G 是 $GL(n)$ 中矩阵 A 的中心化子．

流形 M_k 的元素能被视为 M_{k-1} 上的 1 阶余-标架，这样就有可能把自然丛 π^k $M_k\to M_{k-1}$ 考虑成一个 1 阶 N^k 结构，这里 N^k 是自然同态 $GL^k(n)\to GL^{k-1}(n)$ 的核．每一个 k 阶 G 结构 π $P\to M$ 有一个 1 阶 G 结构的相关序列

$$P\to P_{-1}\to P_{-2}\to \quad \to P_{-k}=M,$$

这里 $P_{-i}=\pi^k(P_{-i+1})\subset M_{k-i}$ 因而，高阶 G 结构的研究就化为 1 阶 G 结构的研究．余-标架 $u_x^1\in M_1$ 能被视为同构 u_x^1 $T_xM\to V$

对向量 $X\in T_{u_x^1}M_1$ 指定其值为 $\theta_{u_x^1}(X)=u_x^1(\pi_1)_*X$ 的 1 形式 θ $TM_1\to V$ 称为位移形式（displacement form） 在 M_1 的局部坐标 (x^i,u_i^a) 下，形式 θ 表为 $\theta=u_i^a dx^i\otimes e_a$，这里 e_a 为 V 中的标准基．

θ 在 G 结构 $P\subset M_1$ 上的限制 θ_P 称为 G 结构的位移形式 它具有下列性质 1）强水平性 $\theta_P(X)=0\Leftrightarrow\pi_*X=0$，及 2）$G$ 等变性 对任意 $g\in G$，有 $\theta_P\circ g=g\circ\theta_P$

利用形式 θ_P 就可能表征同构于 G 结构的一个具有底空间 M 的主丛 换言之，主 G 丛 π $P\to M$ 同构于一个 G 结构的充要条件是存在着群 G 在一个 n 维向量空间 $V(n=\dim M)$ 中的一个一一线性表示 α，以及 P 上的一个取值于 V 中的强水平的 G 等变 1 形式 θ 去掉表示 α 为一一的要求后就给出了 M 上的一个（1 阶）广义 G 结构的概念，即一个具有线性表示 α $G\to GL(V)$ $(\dim V=\dim M)$ 的主 G 丛 $P\to M$，以及 P 上的一个取值在 V 中的强水平 G 等变 1 形式 θ

广义 G 结构的一个例子是过 Lie 群 P 的齐性空间 $G\backslash P$ 上的典范丛 π $P\to G\backslash P$ 这里 α 是群 G 的**迷向表示**（isotropy representation），而 θ 是用 P 的 **Maurer-Cartan 形式**（Maurer-Cartan form）来定义的．

设 π $P\to M$ 是一个 1 阶 G 结构 π 的局部截面的 1 节丛 π' $P'\to P$ 能被视为 P 上的一个 G' 结构，这里 $G'=\mathrm{Hom}(V,\mathfrak{g})$ 是一可交换群，$\mathfrak{g}$ 是 G 的 Lie 代数，G' 在空间 $V\oplus g$ 中由公式

$$A(v,X)=(v,X+A(v)),\ A\in G',\ v=V,\ X\in\mathfrak{g}$$

给出线性表示，且按照公式

$$H\mapsto AH=\{l_pA(\theta(h))+h \quad A\in G',\ p=\pi'(H),\ h\in H\}$$

作用在流形 P' 上，此处 l_p 是群 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 到垂直子空间 $T_p^1P=T_p(\pi^{-1}(\pi(p)))$ 上的典范同构．这里元素 $H\in P'$ 被视为 T_pP 中的水平（即与垂直部分互补的）子空间．它定义了一个余-标架 $\theta_H.T_pP\stackrel{\approx}{\to}\mathfrak{g}+V$，在垂直子空间上用映射 l_p 来定义，而在水平子空间上用映射 $\theta_H=\theta|_H$ 来定义．用公式 $H\mapsto C_H'$，$C_H(u,v)=d\theta(\theta_H^{-1}u,\theta_H^{-1},v)$ 定义的向量函数 C' $P'\to W=\mathrm{Hom}(V\wedge V,V)$ 称为 G 结构 π 的挠率函数（torsion function） 从 $\pi\circ\pi'$ $P'\to M$ 的截面 $s.x\mapsto H_{p(x)}$ 定义了在 π 上的一个联络，而函数 C' 在 $s(M)$ 上的限制乃是定义了此联络的挠率张量相对于余－标架场 $p(x)$ 的坐标的函数．

相对于上面提及的G'在P上的作用及由公式

$$A \quad w \mapsto Aw = w + \delta A$$

定义的G'在w上的作用而言，映射C'. $P' \to W$是G'等变的，这里δ. $G' \to W$，$(\delta A)(u, v) = A(u)v - A(v)u$ 由映射C'所诱导的映射C $P \to G' \backslash W$称为G结构π的结构函数(structure function)，C为零等价于在π上无挠率联络的存在性.

选取一个与$\delta G'$相补的子空间$D \subset W$就定义了具有结构群$G^{(1)} = G' \cap \mathrm{Ker}\,\delta \cong \mathfrak{g} \otimes V^* \cap V \otimes S^2 V^* \subset V \otimes V^{*2}$的余－标架丛$\pi'$ $P' \to P$的一个子丛$P^{(1)} = C^{-1}(D)$，即定义了在P上的一个$G^{(1)}$结构$\pi^{(1)} = \pi'|_{P(1)}$ $P^{(1)} \to P$ 称其为G结构π的第一次拓展(first prolongation) 第i次拓展(i-th prolongation) $\pi^{(i)}$ $P^{(i)} \to P^{(i-1)}$可用归纳法定义为在$P^{(i-1)}$上的$G^{(i)}$结构，这里群$G^{(i)}$同构于向量群$\mathfrak{g} \otimes S^i V^* \cap V \otimes S^{i+1} V^* \subset V \otimes V^{*(i+1)}$. 第$i$次拓展的结构函数$C^{(i)}$称为$G$结构$\pi$的$i$阶结构函数

G 结构理论的中心问题是局部等价问题(equivalence problem)，即要找出两个具有相同结构群G的G结构π $P \to M$及$\bar{\pi}$ $\bar{P} \to \bar{M}$是局部等价，即存在流形M和$\bar{M}$的局部微分同胚φ $M \supset U \to \bar{U} \subset \bar{M}$使得它诱导了邻域$U$和$\bar{U}$上的$G$结构的同构的充要条件的问题 这个问题的一个特殊情形是可积性问题(integrability problem)，即要找出给定G结构与标准平坦G结构的局部等价性的充要条件的问题 局部等价性问题能被重述为找G结构的局部不变量的完全系的问题.

对于$O(n)$结构，它恒同于 Riemann 度量，可积性问题是由 B. Riemann 解决的 可积性的充要条件是度量的曲率张量为零. 局部等价性问题是由 E Christoffel 和 R Lipschitz 解决的 Riemann 度量的局部不变量的完全系是由其曲率张量及其逐次协变导数所构成的(见[1])

解决等价性问题的一个途径是基于拓展及结构函数的概念. 每一个具有结构群$G \subset \mathrm{GL}(n)$的1阶G结构π $P \to M$是与一列拓展

$$\to P^{(i)} \to P^{(i-1)} \to \quad \to P \xrightarrow{\pi} M$$

及一列结构函数$C^{(i)}$相联系的 对$O(n)$结构而言，在$P^{(0)} = P$上的结构函数$C^{(0)} = C$等于0，而剩下的结构函数$C^{(i)}(i > 0)$的本质部分恒同于相应度量的曲率张量及其逐次协变导数. 为使π是可积的充要条件是结构函数$C^{(0)}$， ，$C^{(k)}$为常数，且它们的数值与标准平坦G结构的结构函数的相应的值一样(见[6]，[8]，[9]) 数k仅依赖于群G 对一大类线性群，特别对于不属于 Berger 所列出的具有无挠仿射联络的空间的和乐群的格表([3])中的所有不可约群$G \subset \mathrm{GL}(n)$，有$k = 0$，且使G结构为可积的充要条件是结构函数$C^{(0)}$为零，或者存在一个保持G结构的无挠线性联络

一个G结构π被称为是有限型(等于k)的G结构，如果$G^{(k-1)} \neq \{e\}$，$G^{(k)} = \{e\}$ 在此情形下，$\pi^{(k)}$ $P^{(k)} \to P^{(k-1)}$是一个余－标架场(绝对平行性)，G结构π的自同构群同构于此平行性的自同构群，且它是一个 Lie 群. 这些结构的局部等价性问题化为绝对平行性的等价性问题，且已藉助于结构函数的一个有限序列而得到了解决(见[2]) 对于无限型的G结构，局部等价性问题在一般情形下尚未解决(1984)

两个G结构π $P \to M$及π' $P' \to M'$称为在点$x \in M$，$x' \in M'$处是形式等价的，如果存在着纤维$\pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(x')$的一个同构，使得它能被延拓成拓展$P^{(i)} \to M$及$P'^{(i)} \to M'(i \geq 0)$的相应纤维的一个同构 有例子表明 如果两个$C^\infty$类的$G$结构对所有偶对$(x, x') \in M \times M'$是形式等价的，则一般地说，并不能得出它们是局部等价的([6]) 在解析的情形下，存在着真子集(它们是可数个解析集的和集)$S(M) \subset M$，$S(M') \subset M'$使得对任何$x \in M \backslash S(M)$，$x' \in M' \backslash S(M')$，两个结构$P$和$P'$在点$x$，$x'$处的形式等价性蕴含它们是局部等价的([7])

参考文献

[1] Kobayashi, S and Nomizu, K, Foundations of differential geometry, 1, Wiley, 1963

[2] Sternberg, S, Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964

[3] Berger, M, Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes, *Bull Soc Math France*, **83** (1955), 279 − 330

[4] Chern, S S, The geometry of G-structure, *Bull Amer Math Soc*, **72** (1966), 167 − 219

[5] Kobayashi, S, Transformation groups in differential geometry, Springer, 1972

[6] Molino, P, Theorie des G-structures le problème d'équivalence, Springer, 1977

[7] Morimoto, T, Sur le problème d'equivalence des structures géométriques, *C R Acad Sci Paris*, **292** (1981), 1, 63 − 66 English summary

[8] Singer, I M and Sternberg, S, The infinite groups of Lie and Cartan I. The transitive group, *J d'Anal Math*, **15** (1965), 1 − 114

[9] Pollack, A S, The integrability problem for pseudo-group structures, *J Diff Geom*, **9** (1974), 3, 335 − 390

Д В Алексеевский 撰 沈纯理 译

增益函数 [gain function, выигрыша функция]

一个定义在对策的局势集上的函数(见**对策论**(games, theory of))，它的取值为局中人或局中人组

处于所给局势时的效用的数值描述

Н Н Воробьев 撰

【补注】 增益函数称为支付函数 (pay-off function) 更好些

胡宣达 译

Галеркин 法 [Galerkin method, Галеркина метод], 矩量法 (method of moments)

求算子方程近似解的方法，所求近似解是给定线性无关组中元素的线性组合

令 F 是一个非线性算子，其定义域在 Banach 空间 X 中，而值域在 Banach 空间 $\overline{Y}$ 中．为了用 Галеркин 法解方程

$$F(x)=h,$$

选择 X 中的一个线性无关组 (坐标系 (coordinate system)) $\{\varphi_i\}_1^\infty$ 和在 Y 的对偶空间 Y^* 中的线性无关的泛函系 $\{\psi_j\}_1^\infty$ (投影系 (projection system)) 求方程 (1) 的如下形式近似解 x

$$x_n=\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i, \tag{2}$$

并由下组方程求出数值系数 $c_1, \quad ,c_n$

$$<F(\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i),\ \psi_j>=<h,\psi_j>,\ j=1, \quad ,n \tag{3}$$

当问题以这种一般方式提出时，(3) 不一定有解 如果对每个 $n=1,2,$ (3) 都有唯一解，当 $n\to\infty$ 时，近似解 (2) 不一定收敛，甚至不一定弱收敛，到方程 (1) 的精确解．然而，Галеркин 法不仅是找近似解的有力的工具，而且也是证明线性和非线性方程解的存在性定理的有力工具，在涉及偏微分方程的问题中尤其如此

在很多情况下，从方程组 (3) 确定 (2) 的系数等价于求某个泛函的极小值，于是 Галеркин 法变成变分 (能量) 方法．最重要的这类方法是 **Ritz 方法** (Ritz method) 在某些情形下，利用拓扑方法研究 (3) 可能是有益的．

如果 X 和 Y 是 Hilbert 空间，Галеркин 法有时被称为 Петров-Галеркин 法 (Petrov-Galerkin method)．此外，如果取坐标系和投影系相同 ($X=Y=H$ 及 $\psi_i=\varphi_i$)，人们通常称它是 Бубнов-Галеркин 法 (Bubnov-Galerkin method) 如果 $X=Y=H$ 是 Hilbert 空间以及 $\psi_i=F(\varphi_i)$，这一特殊情形称为**最小二乘法** (least squares, method of)．

在线性情况下，当 $F(x)\equiv Ax$，A 为线性的一般是无界的算子，其定义域 $D(A)\subseteq X$ 而值域 $R(A)\subseteq Y$，同时坐标系选在 $D(A)$ 中，则方程 (1) 有如下式

$$Ax=h \tag{4}$$

此时，(3) 是含有 n 个未知数 n 个线性方程的方程组．

$$\sum_{i=1}^{n} c_i<A\varphi_i,\ \psi_j>=<h,\ \psi_j>, j=1, \quad ,n. \tag{5}$$

在最小二乘法的条件下，如果在 $R(A)$ 上存在有界逆算子 A^{-1}，以及 $h\in R(A)$ 且 $\{A\varphi_i\}_1^\infty$ 在 H 中是完全的，那么当 $n\to\infty$ 时 (2) 的近似解收敛到方程 (4) 的精确解 在 Петров-Галеркин 法的条件下，如果算子 A 是对称正定的，$h\in R(A)$ 且 $\{\varphi_i\}_1^\infty$ 在 Hilbert 空间 H_A 中是完全的 (这里 H_A 是 $D(A)$ 在内积

$$[x,y]=(Ax,y),\quad x,y\in D(A)$$

给出的度量意义下的完全化空间)，则 (2) 的近似解在 H_A 和 H 中都收敛到 (4) 的精确解．

如果 A 是 H 上正定自伴算子并且 $\{\varphi_i\}_1^\infty$ 是其完全正交的特征函数系，那么 Бубнов-Галеркин 法及最小二乘法都和 **Fourier 法** (Fourier method) 一致．

Галеркин 法也用于特征值和特征元素近似解的问题中．

继 Б Г Галеркин 研究之后 ([1])，Галеркин 法已找到了广泛的应用，以前它曾由 И Г. Бубнов 用在求解弹性理论的某些特定问题中 存在一种近似方法的一般途径，它包括**投影法** (projection methods)、**有限差分法** (difference methods) 和其他作为广义化的 Галеркин 法的近似方法

参考文献

[1] Галеркин, Б Г, 《Вестник инженеров》, **1** (1915), 19, 897－908

[2] Михлин, С Г, Вариационные методы в математической физике, М, 1957

[3]Ваймберг, М М, Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений, М, 1972 (英译本 Vainberg, M M, Variational methods and methods of nonlinear operators in the theory of nonlinear equations, Wiley, 1973)

В А Треногин 撰

【补注】 当代广泛使用的“有限元”法也是 Галеркин 法的特殊情形 ([A2])

参考文献

[A1] Marchuk, G I, Methods of numerical mathematics, Springer, 1982 (译自俄文)

[A2] Mitchel, A R and Wait, R, The finite element method in partial differential equations, Wiley, 1977

[A3] Stoer, J and Bulirsch, R, Einführung in die numerische Mathematik, II, Springer, 1973

[A4] Fletcher, C A J, Computational Galerkin methods, Springer, 1984

蔡大用 译

Galileo坐标系 [Galilean coordinate system, Галилеева система координат]

伪Euclid空间（pseudo-Euclidean space）中的一种坐标系，在此坐标下线素具有形式

$$ds^2 = \sum e_i dx_i^2,$$

这里 $e_i = \pm 1$. Galileo坐标系类似于Euclid空间中的Descartes坐标系．这个名称起源于Galileo参考系的应用（见惯性系（inertial system））

Д Д Соколов 撰 沈纯理 译

Galileo相对性原理 [Galilean relativity principle; Галилея принцип относительности]

经典力学的一个基本原理，它表明当从一个惯性系换到另一个惯性系时，力学运动的规律是不变的 惯性坐标系的存在性是被假设的．该原理是作为从中世纪前到文艺复兴时代经典力学发展的成果而被叙述的．其最终的形式应归功于Galileo(1936)．从数学上看，该原理可用Galileo变换（Galilean transformation）来描述，这涉及到绝对时间和绝对空间存在性的假设，而且可用实验证实它们与物质无关并且彼此无关．如所考虑的速度与光速相比是很小时，这样的实验验证给出了肯定的结果．但是，当速度接近于光速时，结果就变成否定了．这个事实以及Galileo相对性原理对电磁现象的推广乃是狭义相对论创立时的主要的推动力．狭义相对论中也假设了惯性坐标系的存在性，但由Lorentz变换（Lorentz transformation）群确定惯性系之间的联系，且在Lorentz变换下，力学的相对论方程（经典力学方程的推广）及电动力学方程是不变的．Galileo相对性原理的随后发展形成了广义相对论的一部分．

参考文献

[1] Фок, В А, Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд, М., 1961(英译本．Fock, V. A. [V. A. Fok], The theory of space, time and gravitation, Macmillan, 1964)

А. З. Петров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Arnol'd, V I, Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978(译自俄文)．

沈纯理 译

Galileo空间 [Galilean space; Галилеево пространство]

按照Galileo-Newton的经典力学的一种时空，在此时空中分别发生在点 M_1, M_2 及时刻 t_1, t_2 的两个事件之间的距离取为时间间隔 $|t_1 - t_2|$，而如果这些事件发生在相同时刻，则两事件间的距离取为点 M_1 和 M_2 之间的距离．对 n 维Galileo空间而言，距离定义如下:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x^1 - y^1|, \quad 若 x^1 \neq y^1,$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=2}^{n} (x^i - y^i)^2}, \quad 若 x^1 = y^1$$

Galileo空间是零指标为1的半伪Euclid空间（semi-pseudo-Euclidean space）；它可被看成是迷向锥退化成平面的伪Euclid空间的极限情形．此极限转移相应于狭义相对论至经典力学的极限转移．

参考文献

[1] Розенфельд, Б А, Неевклидовы пространства, М, 1969

[2] Penrose, R and Wheeler, J A, Structure of space-time, in C M. DeWitt (ed). Batelle Rencontres 1967 Lectures in Math Physics, Benjamin, 1968

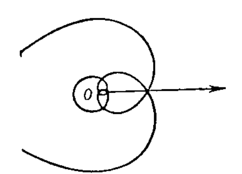
Д Д Соколов 撰 沈纯理 译

Galileo螺线 [Galilean spiral; Галилея спираль]

一条平面曲线，在极坐标中它的方程是

$$\rho = a\varphi^2 - l, \; l \geqslant 0$$

Galilei螺线关于极轴是对称的（见图），并在极点上有一个二重点，在这一点上曲线的两条切线同极轴构



成的角等于 $\pm\sqrt{l/a}$ Galileo螺线在极轴上有无穷多个二重点，对应于这些点，$\rho = ak^2\pi^2 - l$，其中 $k = 1, 2, \cdots$ Galileo螺线属于所谓代数螺线（spirals）．因为Galileo(1683)在研究自由落体时涉及这条曲线，所以用他的名字命名．

参考文献

[1] Савелов, А А, Плоские кривые, М, 1960

Д Д Соколов 撰 张鸿林 译

Galileo变换 [Galilean transformation, Галилея преобразование]

经典力学中的一种变换，它定义从一个惯性坐标系向另一个以恒定速度相对于前者作直线运动的惯性坐标系的转变 这里的坐标系要理解为具有三个空间坐标和一个时间坐标的四维坐标系．令 (x, y, z, t) 为一个给定惯性坐标系，则以均匀速度相对于前者作线性运动的任何其他惯性坐标系的坐标 (x', y', z', t') 与坐标 (x, y, z, t) 由Galileo变换（Galilean transformation）相联系（直到相差坐标原点的位移和坐标轴的转动）

$$x'=x-v_x t,\ y'=y-v_y t,\ z'=z-v_z t,\ t'=t,$$

其中v_x，v_y，v_z是坐标系（x'，y'，z'，t'）相对于坐标系（x，y，z，t）运动速度的分量

经典力学基本定律相对于Galileo变换是不变的，但是，例如，光波（电磁现象）波前传播方程相对于Galileo变换不是不变的 这就是为什么H A Lorentz推广Galileo变换的原因（见**Lorentz变换**（Lorentz transformation）） 这些变换形成狭义相对论的基础 对于$v<<c$，Lorentz 变换变成Galileo变换

Galileo变换形成一个群，它是非齐次（一般）Galileo变换（non-homogeneous (general) Galilean transformations）的群的子群．非齐次Galileo变换的群，通称Galileo群，它是由（原）Galileo变换的群外加坐标原点和时间零点的位移而组成　　A 3 Петров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Arnol'd, V I, Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978（译自俄文）　徐锡申 译

Galois上同调 [Galois cohomology, Галуа когомологии]

Galois群（Galois group）的上同调 设M为Abel群，$G(K/k)$为扩张K/k的Galois群，$G(K/k)$作用在M上 Galois上同调群为上同调群

$$H^n(K/k, M)=H^n(G(K/k), M),\ n\geqslant 0,$$

它由复形(C^n, d)定义，这里C^n由所有映射$G(K/k)^n\to M$组成，d是上边缘算子（见**群的上同调**（cohomology of groups）） 当K/k是无限次扩张时，还要求**Galois拓扑群**（Galois topological group）连续地作用在离散群M上，取连续映射构造C^n中的上链

通常，对非Abel群M只定义零维（H^0）和一维（H^1）上同调，即$H^0(K/k, M)=M^{G(K/k)}$是M中$G(K/k)$的不动点集，$H^1(K/k, M)$是一维上闭链集合的商集，即对所有$g_1, g_2\in G(K/k)$适合关系

$$z(g_1g_2)=z(g_1)^{g_2}z(g_2)$$

的连续映射z $G(K/k)\to M$，引入等价关系 ～ 当且仅当对某个$m\in M$及所有$g\in G(K/k)$有$z_1(g)=m^{-1}z_2(g)m^g$时，$z_1\sim z_2$ 在非Abel情况下，$H^1(K/k, M)$是带有一个对应于平凡上闭链$G(K/k)\to(e)$的特殊点的集合，这里e是M的单位，它通常没有群结构 尽管如此，对这样的上同调也同样可建立标准的上同调公式（见**非Abel上同调**（non-Abelian cohomology））

若$K=k_s$为域k的可分闭包，则习惯上以G_k表示群$G(k_s/k)$，以$H^n(k, M)$代表$H^n(k_s/k, M)$

在D Hilbert，E. Artin，R Brauer，H Hasse和C Chevalley关于类域论、有限维单代数和二次型的工作中已隐含了Galois上同调群 20世纪50年代，由于类域论的研究，同调代数思想和方法的发展导至E Artin，A Weil，G Hochschild和J Tate引进了取值在Abel群的有限扩张的Galois上同调群．Tate和J-P Serre建立了Abel Galois上同调群的一般理论（[1]，[3]，[6]）

Tate利用Galois上同调引进了域k的Galois群G_k的上同调维数的概念（表为$\mathrm{cd}\, G_k$），它是通过上同调p维数（cohomological p-dimension）$\mathrm{cd}_p G_k$来定义的 $\mathrm{cd}_p G_k$是最小的正整数n，使对任一G_k扭模A和任一整数$q>n$，$H^q(G_k, A)$中的p准素分量都为零 上同调维数（cohomological dimension）$\mathrm{cd}\, G_k$定义为

$$\sup_p \mathrm{cd}_p G_k$$

当k为代数闭域时，$\mathrm{cd}\, G_k=0$，若域k的任一扩张K/k的**Brauer群**（Brauer group）$B(K)$是平凡的，则$\mathrm{cd}\, G_k\leqslant 1$，若$k$为$p$-adic域，以有限域为常数域的单变量代数函数域，以及全复域，则$\mathrm{cd}\, G_k=2$（[1]） 当域k的Galois群的上同调维数$\leqslant 1$，且其Brauer群$B(k)=0$时，称域k为维数$\leqslant 1$的域，表示为$\dim k\leqslant 1$ 这类域包括所有有限域，p进域的极大非分歧扩张，以代数闭域为常数域的单变量有理函数域 当Galois群$G(K/k)$为**投射p群**（pro-p-group）时，即为有限p群的投射极限时，$H^1(G(K/k), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$在$\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$上的维数等于$G(K/k)$的拓扑生成元最小个数，$H^2(G(K/k), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$的维数等于这些生成元之间的定义关系的个数． 若$\mathrm{cd}\, G(K/k)=1$，则$G(K/k)$是自由投射$p$群

非Abel Galois上同调出现于20世纪50年代后期，但系统的研究直到20世纪60年代才开始，主要是由于非代数闭域上代数群分类的需要而引起的 群概形的主齐次空间的分类是刺激非Abel Galois上同调发展的主要问题之一 Galois上同调群在代数簇的分类问题上已被证实是特别有效的．

这些问题导致计算代数群的Galois上同调群的问题．代数群结构的一般性定理，将Galois上同调群的研究归结为分别研究有限群，幂幺群，环面、半单群和Abel簇的Galois上同调群

当连通幂幺群U定义在一个完全域k上时，U的Galois上同调群是平凡的，即对任一幂幺群U有$H^1(k, U)=0$，且当U为Abel群时，对所有$n\geqslant 1$有$H^n(k, U)=0$ 特别地，对任意域的加法群G_a总有$H^1(k, G_a)=0$ 对非完全域k，一般而言$H^1(k, G_a)\neq 0$

Hilbert“定理90”是关于Galois上同调群最重要的事实之一，该定理的一种描述是$H^1(k, G_m)=0$（G_m是k_s的乘法群） 进一步，对任一k分裂代数环面T有$H^1(k, T)=0$ 在一般情况下，定义在k上的任一环面T的$H^1(k, T)$的计算可归结为计算$H^1(K/k, T)$，其中K为T的Galois分裂域 至今（1989）仅对某些特殊的

域完成这个计算 k 为代数数域的情况在实际应用中特别重要，这时建立了对偶定理，它有很多应用

设 K/k 为有限 **Galois 扩张**（Galoıs extensıon），$C(K)$ 为乘法 K 群 G_m 的 adèle 群（见**阿代尔**（adèle））. 设 $\hat{T}=\mathrm{Hom}_k(T,G_m)$ 为环面的特征标群，对偶定理可陈述为 当 $r=0,1,2$ 时，上积

$$H^{2-r}(K/k,\hat{T})\times H^r(K/k,\mathrm{Hom}(\hat{T},C(K)))\to \to H^2(K/k,C(K))$$

确定一个非退化配对. 利用这个定理可以找到由与 Galoıs 上同调群有关的不变量表达的环面 T 的**玉河数**（Tamagawa number）的公式 也存在 Galoıs 上同调群的其他重要对偶定理（[1]）.

已经证明（[11]），维数 $\leqslant 1$ 的域 k 上的群 $H^1(k,G)$ 是平凡的 这区分出来很自然的一类域，其给定次数的扩张只有有限个（所谓（F）型域（type-(F) fields））例如，这包括 p-adıc 数域 现已证明（[1]），对（F）型域 k 上的代数群 G，上同调群 $H^1(k,G)$ 是有限集合.

半单代数群的 Galoıs 上同调理论距算术和分析的应用尚很远. Kneser - Bruhat - Tıts 定理（Kneser - Bruhat-Tıts theorem）表明，对其剩余类域的上同调维数 $\leqslant 1$ 的局部域 k 上的单连通半单代数群 G 有 $H^1(k,G)=0$ 这个定理首先对 p-adıc 数域证明（[12]），然后才对一般的情况证明. 已经证明（[13]），以有限域为常数域的单变量代数函数域的 $H^1(k,G)$ 为平凡的. 在所有这些情况下，上同调维数 $\mathrm{cd}\,G_k\leqslant 2$，这符合 Serre 的一个一般性猜想 对 $\mathrm{cd}\,G_k\leqslant 2$ 的域 k 上的单连通半单群 G，有 $H^1(k,G)=0$

设 k 为整体域，V 为 k 的所有不等价的赋值的集合 设 k_v 为 k 的完全化. 对任意定义在 k 上的代数群 G，嵌入 $k\to k_v$ 导出一个自然的映射

$$\iota\quad H^1(k,G)\to\prod_{v\in V}H^1(k_v,G_v),$$

它的核表为 Ш(G) 在 Abel 簇的情况下，称为 Tate - Шафаревич 群（Tate - Shafarevıch group）. 群 Ш(G) 衡量用局部化的 Galoıs 上同调群描述整体域上的 Galoıs 上同调群的程度. 线性代数群的 Ш(G) 群的主要结果归于 A Borel，他证明了 Ш(G) 是有限的 对于 Abel 簇的情况，猜想 Ш(G) 也是有限的 Ш$(G)=0$ 的情况（即映射 ι 是单射）是一个特殊情况，这时称 **Hasse 原理**（Hasse prıncıple）适用于 G 这个术语可用下述事实来解释 对正交群，ι 的单射性等价于二次型经典的 Минковский - Hasse 定理，对射影群，它等价于关于单代数分裂的 Brauer - Hasse - Noether 定理 根据 Serre 的猜想，对单连通的或伴随半单群有 Ш$(G)=0$ 对大部分整体数域上的单连通半单群，这个猜想已被证明（除了具有 E_8 型单分量的群）（[13]），对整体函数域上的任一单一连通代数群也已证明

参考文献

[1] Serre, J - P , Cohomologıe Galoısıenne, Sprınger, 1964

[2] Serre, J - P , Groupes algebrıque et corps des classes, Hermann, 1959

[3] Cassels, J W S and Frohlıch, A (eds), Algebraıc number theory, Acad Press, 1986

[4] Koch, H , Galoıssche Theorıe der p-Erweıterungen, Deutsch Verlag Wıssenschaft , 1970

[5] Artın, E and Tate, J , Class field theory, Benjamın, 1967

[6] Serre, J - P , Local fields, Sprınger, 1979（译自法文）

[7] Borel, A and Serre, J - P , Théorèmes de finıtude en cohomologıe Galoısıenne, *Comment Math Helv* , **39** (1964), 111-164

[8] Theorıe des topos et cohomologıe etale des schemas, ın A. Grothendıeck, J - L Verdıer and M Artın (eds), *Sem Geom Alg* 4, Vol 1-3, Sprınger, 1972

[9] Bruhat, F and Tıts, J , Groupes reductıfs sur un corps local I Donnees radıcıelles valuees, Publ Math. IHES, no 41 (1972), 5-252

[10] Borel, A , Some finıteness propertıes of adèle groups over number fields, Publ Math IHES, no 16 (1963), 5-30

[11] Steınberg, R , Regular elements of semısımple algebraıc groups, Publ Math IHES, no 25 (1965), 49-80

[12A] Kneser, M , Galoıs - Kohomologıe halbeınfacher algebraıscher Gruppen über p-adısche Körpern I, *Math Z* , **88** (1965), 40-47

[12B] Kneser, M , Galoıs - Kohomologıe halbeınfacher algebraıscher Gruppen uber p-adısche Körpern II, *Math Z* , **89** (1965), 250-272

[13A] Harder, G , Uber dıe Galoıskohomologıe halbeınfacher Matrızengruppen I *Math Z* , **90** (1965), 404-428

[13B] Harder, G , Uber dıe Galoıskohomologıe halbeınfacher Matrızengruppen II, *Math Z* , **92** (1966), 396-415

Е А Нисневич, В П Платонов 撰

【补注】 设 G 为有限群（或投射有限群），A 是 G 群，即带有 G 作用 $(g,a)\mapsto g(a)$ 的群，使得 $g(ab)=g(a)g(b)$ 设 E 为 G 集合，即有 G 在 E 上的作用. 若存在一个右作用 $E\times A\to E,(x,a)\mapsto x\cdot a$，使得 $g(x\cdot a)=g(x)g(a)$，则称 A 为 G 同变地右作用于 E 上. 如果 A 的作用使 E 成为 A 上的仿射空间（affine space），即对所有 $x,y\in E$，存在唯一的 $a\in A$，使 $x=y\cdot a$（这正是向量空间 V 及其对应的仿射空间的情况）；则右 A 集合 E 是 A 上的主齐性空间（prıncıpal homogeneous space） A 上的主齐性空间的同构类与 $H^1(G,A)$ 之间存在一个自然的一一对应 若 E 是 A 上的主齐性空间，取 $x\in E$，对 $g\in G$ 由 $g(x)=x\cdot a_g$ 定义 a_g，这定义了一个相应的 1 上闭链

设 K/F 是（交换域的）次数为 m 的循环 Galoıs 扩张，

Gal $(K/F)=\{\sigma,\sigma^2,\ \ ,\sigma^m=1\}$, b 为 K 的元素 构造 K 上的 m 维代数 $A=K+yK+\ \ +y^{m-1}K$，这里 y 是一个符号，满足乘法规则 $y^m=b$，以及对 K 中任一元素 α 有 $\alpha y=y\sigma(\alpha)$ 这定义了一个 F 上的结合非交换代数，称为循环代数 (cyclic algebra)．当 $b\neq0$ 时，它是以 F 为中心的中心单代数．Brauer-Hasse-Noether 定理 (Brauer-Hasse-Noether theorem) ([A8]) 可陈述为 若 D 为其中心 F 上的有限维可除代数，且 F 是代数数域，则 D 是循环代数 如以 p 进域 $\mathbf{Q}_p$ 的有限扩张代替 F，上述结论也成立 ([A7])

关于二次型的 Минковский - Hasse 定理，见**二次型** (quadratic form)．

非代数闭域上的**有理簇** (rational variety) 的双有理分类也应用 Galois 群的上同调 $H^1(k,\mathrm{Pic}\,V)$ 是一个重要的双有理不变量，其中 Pic V 是定义在 k 上的簇 V 的 **Picard 群** (Picard group) 在代数群的情况下，Galois 上同调是研究有理簇的算术性质的重要工具 利用 Galois 上同调研究有理簇的双有理算术特征是在 20 世纪 60 年代由 Ю И Манин 首先提出的 (见 [A1])，然后由 J L Colliot-Thélene 和 J J Sansuc (见 [A2])，B. E Воскресенский ([A3]) 等人继续研究

近来 (1988)，В И Чернусов ([A4]) 证明了数域上一个 E_8 型单群 G 有 Ш$(G)=0$．由此可见，数域上单连通半单代数群上 **Hasse 原理** (Hasse principle) 成立．在一般情况下，Kneser - Bruhat - Tits 定理的证明例如见 [A5]

参考文献

[A1] Manin, Yu I, Cubic forms, North - Holland, 1974 (译自俄文)

[A2] Colliot - Thelene, J -L and Sansuc, J J, La descente sur les varietes rationnelles Ⅱ, *Duke Math J*, **54** (1987), 375 – 492

[A3] Voskresenskii, V E, Algebraic tori, Moscow, 1977 (俄文)

[A4] Chernusov, V I, On the Hasse principle for groups of type E_8, (To appear) (俄文)

[A5] Bruhat, F and Tits, J, Groupes réductifs sur un corps local Ⅲ Complements et applications à la cohomologie Galoisiènne, *J Fac Sci Univ Tokyo*, **34** (1987), 671 – 698

[A6] Harder, G, Chevalley groups over function fields and automorphic forms, *Ann of Math*, **100** (1974), 249 – 306

[A7] Albert, A, Structure of algebras, Amer Math Soc, 1939 p 143

[A8] Brauer, R, Hasse, H and Noether, E, Beweis eines Haupsatzes in der Theorie der Algobren, *J Reine Angew Math*, **107** (1931), 399 – 404

裴定一 译 赵春来 校

Galois 对应 [**Galois correspondence, Галуа соответствие**]，在两个偏序集 M 和 M' 之间的

一对满足下列条件的映射 $\varphi\ \ M\to M'$ 和 $\psi.\ M'\to M$

如果 $a\leqslant b$，那么 $a\varphi\geqslant b\varphi$，

如果 $a'\leqslant b'$，那么 $a'\psi\geqslant b'\psi$，

$a\varphi\psi\geqslant a$ 且 $a'\psi\varphi\geqslant a'$

这里 a，$b\in M$，a'，$b'\in M'$

Galois 对应的概念与偏序集中的闭包概念紧密地相联系着， 这意思是，如果在 M 和 M' 间建立了 Galois 对应，那么等式 $\overline{a}=a\varphi\psi\ (a\in M)$ 和 $\overline{a}'=a'\psi\varphi\ (a'\in M')$ 分别在 M 和 M' 内定义了闭包运算，见**闭包关系** (closure relation) Galois 对应的概念来源于 **Galois 理论** (Galois theory)，这理论阐述了一个扩张 $P\subseteq K$ 的所有中间子域和这个扩张的 Galois 群的子群所成的系统之间的 Galois 对应

参考文献

[1] Cohn, P M, Universal algebra, Reidel, 1981．

[2] Курош, А Г, Лекций по общей алгебре, М, 1962 (英译本 Kurosh, A G, Lectures on general algebra, Chelsea, 1963)

О А Иванова 撰 蓝以中 译

Galois 微分群 [**Galois differential group, Галуа дифференциальная группа**]

微分域 (differential field) P 上的，与求导运算 (见**环中的导子** (derivation in a ring)) 可交换的且将 P 的某个固定微分子域的元素保持不变的自同构所组成的群

Л А Скорняков 撰

【补注】 正如 Galois 理论论述的是关于 (解) 代数方程那样，微分 Galois 理论 (differential Galois theory) 或微分域的 Galois 理论 (Galois theory of differential fields) 是关于 (解) 代数微分方程的．关于微分 Galois 理论的说明见**微分域的扩张** (extension of a differential field) 及其参考文献．

冯绪宁 译 裴定一 校

Galois 扩张 [**Galois extension, Галуа расширение**]，域的

正规并且可分的域的代数扩张 (见**域的扩张** (extension of a field)) 这种扩张的自同构群的研究构成了 **Galois 理论** (Galois theory) 的一部分．

裴定一 译 赵春来 校

Galois 域 [**Galois field, Галуа поле**]，有限域 (finite field)

具有有限个元素的域 首先由 E Galois ([1]) 研究

任一 Galois 域的元素个数是一素数 p 的幂 p^n，这个素数是该域的特征 对任一素数 p 及任一自然数 n，

存在一个含 p^n 个元素的域（在同构意义下唯一），表为 $GF(p^n)$ 或 $\mathbf{F}_{p^n}$ 当且仅当 m 能被 n 整除时，域 $GF(p^m)$ 包含 $GF(p^n)$ 为一子域 特别地，任一域 $GF(p^n)$ 包含域 $GF(p)$，称为特征 p 的素域（prime field） 域 $GF(p)$ 与整数环模 p 的剩余类域 $\mathbf{Z}/(p)$ 同构 在 $GF(p)$ 的任一固定的**代数闭包**（algebraic closure）Ω 中，对应任一 n，存在唯一的子域 $GF(p^n)$，对应 $n \leftrightarrow GF(p^n)$ 是自然数关于除法的格与 $GF(p)$（在 Ω 中）的有限代数扩张关于包含关系的格之间的同构．任一 Galois 域在它固定的代数闭包中的有限代数扩张的格都是这样的格．

代数扩张 $GF(p^n)/GF(p)$ 是单的（simple），即存在一个本原元 $\alpha \in GF(p^n)$ 使 $GF(p^n)=GF(p)(\alpha)$ 这样的 α 可以是 $GF(p)[X]$ 中任一 n 次不可约多项式的任一根，扩张 $GF(p^n)/GF(p)$ 的本原元的个数为

$$\sum_{d|n} \mu(d) p^{n/d},$$

其中 μ 是 **Möbius 函数**（Möbius function） 域 $GF(p^n)$ 的加法群具有 $GF(p)$ 上 n 维向量空间的结构，可取 $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ 作为一个基 $GF(p^n)$ 的非零元组成乘法群 $GF(p^n)^*$，其阶为 p^n-1，即 $GF(p^n)^*$ 的任一元是多项式 $X^{p^n-1}-1$ 的根 群 $GF(p^n)^*$ 是循环群，它的生成元是 p^n-1 次本原单位根，个数为 $\varphi(p^n-1)$，其中 φ 为 **Euler 函数**（Euler function） 任一 p^n-1 次本原单位根都是扩张 $GF(p^n)/GF(p)$ 的本原元，但反之不成立．更确切地说，在 $GF(p)$ 上

$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) p^{n/d}$$

个 n 次首 1 不可约多项式中，有 $\varphi(p^n-1)/n$ 个多项式的根是 $GF(p^n)^*$ 的生成元

在 Ω 中，$GF(p^n)$ 的元素就是多项式 $X^{p^n}-X$ 的根的集合，即 $GF(p^n)$ 是 Ω 中一个子域，它在自同构 τ $x \to x^{p^n}$ 下不变，τ 称为 Frobenius 自同构（Frobenius automorphism）．若 $GF(p^m) \supset GF(p^n)$，扩张 $GF(p^m)/GF(p^n)$ 是正规的（见**域的扩张**（extension of a field）），它的 **Galois 群**（Galois group）$Gal(GF(p^m)/GF(p^n))$ 是 m/n 阶循环群，自同构 τ 可取作 $Gal(GF(p^m)/GF(p^n))$ 的生成元

参考文献

[1] Galois, E, Écrits et memoires d'E, Galois, Gauthier-Villars, 1962

[2] Waerden, B L, van der, Algebra, 1-2, Springer, 1967-1971（译自德文 中译本 B L 范德瓦尔登，代数学，I-II，科学出版社，1978）

[3] Чеботарев, Н Г, Основы теории Галуа, М-Л, 1934, Ч 1, 154-162

[4] Bourbaki, N, Algebra, Springer, 1989, Chapt 1-3（译自法文）

А И Скопин 撰 裴定一 译 赵春来 校

Galois 群 [Galois group, Галуа группа]

一个域 k 的 **Galois 扩张**（Galois extension）L 的自同构群，即保持子域 k 的元素不动的域 L 的所有自同构组成的群 此群记作 $G(L/k)$ 或 $Gal(L/k)$ 不变元素组成的域 $L^{G(L/k)}$ 与域 k 相同 如果 L 是 k 上的多项式 f 的分裂域，则 Galois 群 $G(L/k)$ 也称为多项式 f 的 Galois 群（Galois group of the polynomial） 这种群在代数方程的 Galois 理论中是重要的 代数数域的扩张的 Galois 群的计算是代数数论的基本任务之一 寻求具有交换的 Galois 群的 Galois 扩张（Abel 扩张（Abelian extension））是类域论的部分内容 代数函数域的 Galois 群是代数几何的一个研究对象

设 L 是一个域，G 是 L 的自同构群的一个有限子群，则 L 是不变域 $k=L^G$ 的一个 Galois 扩张，并且此扩张的 Galois 群同构于 G，进一步地，扩张次数 $[L:k]$ 等于 G 的阶．

关于 Galois 群的主要结果是下面的定理，此定理有时被称作 Galois 扩张的主定理（main theorem on Galois extensions）或 Galois 对应定理（theorem on Galois correspondence） 如果 L 是 k 的一个有限次 Galois 扩张，则在 Galois 群 $G(L/k)$ 的所有子群 H 和 L 的包含 k 的所有子域 F 之间有一一对应，并且互相对应的 H 和 F 有如下关系 F 是 H 的不变域，H 是 L/F 的Galois 群（见 **Galois 对应**（Galois correspondence）） 在许多数学理论中都有与此定理类似的结果 该定理还可以推广到无限次扩张上去（见 **Galois 拓扑群**（Galois topological group）） 对于任意的交换环和概形的扩张（见**基本群**（fundamental group））以及在体的扩张的情形，都有 Galois 群的概念的推广．

参考文献

[1] Bourbaki, N, Algebra, Springer, 1989, Chapt 1-3（译自法文）

[2] Lang, S, Algebra, Addison-Wesley, 1984

[3] Постников, М М, Теория Галуа, М, 1963

[4] Jacobson, N, The theory of rings, Amer Math Soc, 1943

И В Долгачев 撰

【补注】 Galois 群可以被赋予 Krull 拓扑，使之成为拓扑群 当且仅当此群是有限群时，该拓扑是离散的．关于无限 Galois 群的情形下的 Galois 对应，见 **Galois 拓扑群**（Galois topological group）．

赵春来 译 冯绪宁 校

Galois 理论 [Galois theory, Галуа теория]

从最广泛的意义来说，这是在其自同构群基础上处理数学对象的一种理论 例如，域、环、拓扑空间等等都可以有 Galois 理论 狭义来说，Galois 理论是域的 Galois 理论，这个理论起源于寻找高次代数方程的根的问题 熟知的二次方程解的公式起源于古希腊时

代 解三次方程（见**Cardano公式**（Cardano formula））和四次方程（见**Ferrari法**（Ferrari method））的方法都是在16世纪发现的 此后，为了公式求解5次或更高次方程的无效努力持续了三个世纪之久 最后，1824年N H Abel证明了5次以上的一般方程不存在根式解 接下来的问题就是找出为了使一个方程存在根式解（即可将方程约简为一个由形如$x^n-a=0$的二项方程组成的链）方程的系数所需满足的必要和充分条件，这个问题由E Galois 解决 在他临死的前夜（1832），他将结果写在一封信中，出版于1846年 现在用现代语言扼要地叙述Galois理论

设k是一个任意域，k的一个扩张（extension）是任一包含k作为子域的域K 任一扩张都可看作是k上的一个线性空间 如果这空间有有限维数n，则称扩张是有限的（finite），维数n称为扩张的次数（degree of the extension） k的扩张中的一个元素α，如果它是一个系数属于k的非零多项式$f=0$的根，则称α在k上是代数的（algebraic）（这个多项式总可以取为不可约的） 包含k上代数元α的k的最小扩张通常被记为$k(\alpha)$ k的一个有限扩张K称为可分的（separable），如果$K=k(\alpha)$，且以α为根的不可约多项式f无重根．若k是特征为零的（例如，k是一数域），则任一有限扩张都是可分的（本原元定理（theorem on the primitive element））．$k[X]$中一不可约多项式f的分裂域（splitting field）是包含此多项式的所有根的k的最小扩张 这种扩张的次数一定被f的次数整除，而且如果f的所有根都可表为其中某一根的多项式时，扩张次数等于f的次数．k的扩张K称为正规的（normal），是指它是$k[X]$中某个多项式的分裂域 若K是正规且可分扩张，则称之为Galois扩张（Galois extension） Galois扩张K的保持k中元素不变的所有自同构作成的群称为该扩张的Galois群（Galois group），记为$\mathrm{Gal}(K/k)$，它的阶（元素个数）等于K在k上的次数．$\mathrm{Gal}(K/k)$的每一子群H对应K中的一个子域P，它由K中那些在H的元素作用下保持不变的元素组成 反之，每个K的包含k的子域P，对应于$\mathrm{Gal}(K/k)$的一个子群H，它由所有使P的元素保持不变的自同构组成，这时K是P的Galois扩张，且$\mathrm{Gal}(K/P)=H$ Galois理论的主定理（main theorem in Galois theory）指出，这个对应是互为逆的，因此，它是Galois群的所有子群及K的包含k的所有子域之间有一个一一对应．于是刻画K的所有子域就转化为刻画有限群$\mathrm{Gal}(K/k)$的所有子群，这样就简单多了 重要的是要注意下述事实，即具有某些"好"性质的子群对应的子域也具有某些"好"性质，反之亦然 于是，子群H是$\mathrm{Gal}(K/k)=G$的正规子群，当且仅当它对应的P是k的Galois扩张，而且$\mathrm{Gal}(P/k)\cong G/H$ 对每一K的子域升链

$$k=K_0\subset K_1\subset \quad \subset K_r=K, \tag{1}$$

都对应G的一个子群降链

$$G=H_0\supset H_1\supset \quad \supset H_r=\{e\}, \tag{2}$$

其中$H_i=\mathrm{Gal}(K/k_i)$ (2)是一个正规列（normal series）（即为每个子群H_{i+1}是H_i的正规子群，$0\leqslant i<r$），当且仅当（1）中每个域K_{i+1}是K_i的Galois扩张，此时还有$H_i/H_{i+1}\cong \mathrm{Gal}(K_{i+1}/K_i)$

这些结果可如下地应用于代数方程解的问题 设f是域k上无重根的不可约多项式，K是它的分裂域（即为k的Galois扩张），这个扩张的Galois群称作方程$f=0$的Galois群（Galois group of the equation）．解方程$f=0$归结为解一个方程链$f_1=0$， ，$f_r=0$的充分必要条件是 K包在一域$\bar{K}$中，$\bar{K}$是下面域的升链中最后一项

$$k=K_0\subseteq K_1\subseteq \quad \subseteq K_r=\bar{K},$$

其中K_i是f_i在K_{i-1}上的分裂域，$i=1$， ，r 后一条件又等价于 群$G=\mathrm{Gal}(K/k)$是$\bar{G}=\mathrm{Gal}(\bar{K}/k)$的商群，$\bar{G}$有一正规列，它的因子$H_i/H_{i-1}$同构于方程$f_i=0$在$K_{i-1}$上的Galois群

设域k包有所有n次单位根，则对任一$a\in k$，多项式x^n-a的分裂域是$k(\alpha)$，α是根式$a^{1/n}$的任一值 这时，$\mathrm{Gal}(k(\alpha)/k)$是阶数除得尽$n$的循环群．反之，如果$\mathrm{Gal}(K/k)$是$n$阶循环群，则有$K=k(\alpha)$，这里$\alpha$是某个二项方程$x^n-a=0$的根 于是，当$k$包有所有必要次的单位根时，方程$f=0$根式可解，当且仅当它的Galois群是可解的（即有一个正规列，其因子H_i/H_{i+1}是循环的）．这个根式可解的条件对于k不包含所有必要次的单位根的情形也是正确的，因为若以k'记在k上添加那些单位根得到的域的话，$\mathrm{Gal}(k'/k)$总是可解的

在实际应用可解性条件时，一个非常重要的事实是不必解方程就可以计算出一个方程的Galois群．计算的想法可叙述如下 一个多项式f的分裂域中每个自同构必诱导出f的根的置换，而同构也就由这个置换完全确定了 因此，大体上，方程的Galois群可作为它的根的置换群的子群（也就是说，由那些保持根之间所有代数关系的那些置换组成）来处理 多项式根之间的关系又导出系数之间的某些关系（按照Viète公式） 通过分析这些关系，就可能确定多项式根之间的关系，并由此计算方程的Galois群 在一般的情形下，一个代数方程的Galois群由根的全部置换组成，也就是n次对称群，因为当$n\geqslant 5$时，对称群是不可解的，所以一般来说5次或更高次方程不存在根式解（Abel定理（Abel theorem））

Galois理论的思想还可以特别对用直尺和圆规可

解的作图问题给出完全的刻画 用解析几何方法可以证明 这种作图问题归结为有理数域上某些代数方程．一个问题用直尺和圆规可解，当且仅当相应的方程是二次根式可解的，亦即当且仅当方程的 Galois 群有一个正规列，其中因子皆为2阶群．当且仅当 Galois 群的阶是2的幂次时，这种情况才会出现．于是，用直尺和圆规可以解决的作图问题就化为对某个 s 解一个方程，它的分裂域在有理数域上的次数为 2^s 如果方程的次数不是 2^s 形，这种作图就是不可能的，立方倍积问题（它对应的方程是 $x^3-2=0$）和三等分角问题（它也对应一个三次方程）就是如此 若 p 是一素数，构造正 p 边形问题引出方程 $X^{p-1}+\ \ +X+1=0$，它的分裂域由任一根生成，因此次数为 $p-1$，即方程的次数．这样，直尺和圆规作图当且仅当 $p=2^n+1$ 才是可能的（例如，$p=5$，$p=17$ 就可作出，而 $p=7$ 或 $p=13$ 就不可作出）

在几乎整整一个世纪中，Galois 的思想对代数发展起了决定性的影响 Galois 理论扩充并推广到很多方向 W Krull 发展了无限扩张的 Galois 理论（见 **Galois 拓扑群**（Galois topological group）），已经证明（Kronecker-Weber 定理（Kronecker-Weber theorem））一个具有可交换的 Galois 群的有理系数的方程的根必是单位根的有理系数的线性组合，对于给定的代数数域上的 Abel 扩张的分类也已作出（类域论），还证明了对任一给定的可解群，存在一个代数数域，它在有理数域上 Galois 群等于给定群（见 **Galois 理论的反问题**（Galois theory, inverse problem of））然而古典的 Galois 理论也仍有很多未解决的问题，例如我们还不知道是否任一有限群都可作为有理数域上一方程的 Galois 群出现．

参考文献

[1] Galois, E, Écrits et mémoires d'E Galois, Gauthier-Villars, 1962

[2] Чеботарев, Н Г, Основы теории Галуа, ч 1-2, М-Л, 1934-1937

[3] Чеботарев, Н Г, Теория Галуа, М-Л, 1936

[4] Постников, М М, Основы теории Галуа, М, 1960（英译本 Postnikov, M M, Fundamentals of Galois theory, Noordhoff, 1962）

[5] Постников, М М, Теория Галуа, М, 1963

[6] Waerden, B L van der, Algebra, 1-2, Springer, 1967-1971（译自德文 中译本 B L 范德瓦尔登，代数学，I-II，科学出版社，1978）

[7] Lang, S, Algebra, Addison-Wesley, 1974

[8] Bourbaki, N, Elements of mathematics Algebra modules, Rings, Forms, 2, Addison-Wesley, 1975, Chapt 4, 5, 6（译自法文）

[9] Koch, H, Galoische Theorie der p-Erweiterungen, Deutsch Verlag Wissenschaft, 1970

[10] Artin, E, Galois theory, Notre Dame Univ., Indiana, 1948

М М Потсников 撰 冯绪宁 译 裴定一 校

Galois 理论的反问题 [Galois theory, inverse problem of, Галуа теория, обратная задача]

构造已知域 k 上具有给定的 **Galois 群**（Galois group）（见 **Galois 理论**（Galois theory））的有限正规扩张，并找出保证 k 上这样的扩张存在（或不存在）的条件的问题

若 k 为有理数域，这问题就是构造一个具有给定 Galois 群的正规代数数域，它可化为寻找 k 上具有给定 Galois 群的代数方程 对于对称群和交错群，这样的方程是存在的 I Schur 构造了交错群的方程，特别地，证明了当 $n\equiv 0\pmod 4$ 时方程

$$\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\quad +\frac{x}{1}+1=0$$

（指数函数展开式的部分和）以交错群为 Galois 群，在其他情况下以对称群为 Galois 群．

И Р Шафаревич（[2]）利用代数数域的算术性质，证明了一个代数数域以任意可解群 G 为 Galois 群的扩张的存在性 并可以选择一个解 K，使 K 在 k 上的判别式与任一给定整数互素，所以这个问题的解的个数是无限的

利用域的无限扩张的 Galois 群（见 **Galois 拓扑群**（Galois topological group）），有可能解决下列一类特殊域的 Galois 理论的反问题 有限域、局部域和单变量代数函数域．

参考文献

[1] Чеботарев, Н Г, Основы теории Галуа, ч 1, М-Л, 1934

[2] Шафаревич, И Р,《Изв АН СССР Сер матем》, **18**（1954）, 2, 261-296, 3, 525-578

С П Демушкин 撰

【补注】 近年来基域 $K=Q$ 上的 Galois 理论反问题得到很大进展，见 [A1]-[A3] 该方法首先是以复数域上的单变量有理函数域 $\mathbf{C}(X)$ 作为基域实现这个群，域 $\mathbf{C}(X)$ 易于操作 在群的一定条件下利用"下降"方法以 $\mathbf{Q}(X)$ 代替 $\mathbf{C}(X)$，最后利用 Hilbert 不可约性定理（见 **Hilbert 定理**（Hilbert theorem））用 $\mathbf{Q}$ 代替 $\mathbf{Q}(X)$ 用这个方法，很多有限单群作为 $\mathbf{Q}$ 以及 $\mathbf{Q}$ 的分圆扩张的 Galois 群而实现了

参考文献

[A1] Belyi, G V, On extensions of the maximal cyclotomic field having a given classical Galois group, *J Reine Angew Math*, **341**（1983）, 147-156

[A2] Matzat, B H, Konstruktive Galoistheorie, Lecture notes in math, 1284, Springer, 1987

[A3] J P Serre, Groupes de Galois sur Q, *Sem Bourbaki* Exp 689 (1987)

裴定一 译 赵春来 校

环的 Galois 理论 [Galois theory of rings, Галуа теория колец]

Galois 域理论的结果(见 **Galois 理论**(Galois theory)及 **Galois 群**(Galois group))在含有单位元的结合环上的推广 设 A 是含有单位元的结合环,H 是 A 的所有自同构的群的某个子群 N 为 H 的一个子群,记

$$J(N)=\{a\in A \ h(a)=a,\ \forall h\in N\},$$

并记 $B=J(H)$. 那么集合 $J(N)$ 是 A 的一个子环 令 B_1 是 A 的一个子环 称 A 的一个自同构 h 是使 B_1 保持元素不变,如果 $h(b)=b$ 对所有 $b\in B_1$ 成立 记所有这种自同构的集合为 $G(B_1)$ 令

$$H(B_1)=G(B_1)\cap H,\ B_1\supseteq B$$

环上 Galois 理论的主要课题是下列对应

$$1)\,N\to J(N),\ 2)\ B_1\to G(B_1),\ 3)\ B_1\to H(B_1)$$

与域上 Galois 理论不同(即使群 H 为有限时),等式 $G(B_1)=H(B_1)$ 不总是成立 同时对应 1), 2) 及 1), 3) 不一定互逆,于是要挑选出各种子环类与子群类,对它们而言,类似 **Galois 对应**(Galois correspondence)的定理成立,这个问题对如下二种情形已有肯定结果.第一种情形要求环 A 与一个域的性质"相近似"(如 A 是一个除环,或者是除环上一个向量空间的线性变换完全环),第二种情形要求环 A 在子环 B 上的结构与 A 作为域时的相应对的结构"相近似"(如作为 B 模是投射的)

设 c 是环 A 的一个可逆元,T_c $A\to A$ 为由 $T_c(x)=cxc^{-1}(x\in A)$ 所定义的自同构 令 $R(H)$ 是满足 $T_c\in H$ 的所有可逆元 c 生成的子代数 如果对所有可逆元 $x\in R(H)$ 有 $T_x\in H$,那么称 H 为 N 群 令 A 是除环,B 是 A 的子除环且 $B=J(G(B))$,如果 A 是 B 上有限维左向量空间,那么 Galois 对应 $H\to J(H)$ 及 $D\to G(D)$ 是互逆的,这里 H 属于群 $G(B)$ 的所有 N 子群的集合,D 属于 A 的所有包含 B 的子除环的集合

对于完全线性变换环 A 也有类似结果(但选出子群类与子环类之间的对应系的条件在确切陈述上显得有些复杂)

进一步,令 A 是不含非平凡幂等元的交换环,且 $A\supset B$ 如果 $B=J(G(B))$ 且 A 是有限生成 B 模,那么称 A 是环 B 的有限正规扩张 环 A 可视作为 $A\otimes_B A$ 模,只要假设

$$\left[\sum_{i=1}^{n} a_i\otimes b_i\right]a=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i a$$

对所有 a_i, b_i, $a\in A$ 成立 当 A 为投射 $A\otimes_B A$ 模时,则称 A 为可分 B 代数 如果 A 是环 B 的有限正规可分扩张,那么 A 是有限生成投射 B 模,群 $G(B)$ 是有限的($[G(B)\ 1]=\mathrm{rank}_B A$)并且映射 $H\to J(H)$, $B_1\to G(B_1)$ 定义了 $G(B)$ 的所有子群集合与代数 A 的所有可分子代数的集合之间的互逆关系

类似于域的可分闭包,任一环 B 均有可分闭包.该闭包的所有保持 B 中元素不变的自同构的群在一般情况下是一个射有限群 对应 1) 和 2) 在此有关群的所有闭子群集合上与环 B 的可分闭包的所有可分 B 子代数集合上为互逆对应

对含有非平凡幂等元的环 B 也有类似结果 然而,这要涉及到改变许多基本概念.例如,Galois 群 $G(B)$ 的作用要被**基本广群**(fundamental groupoid)所取代.

参考文献

[1] Jacobson, N , Structure of rings, Amer Math Soc 1956
[2] Chase, S U and Swedler, M E , Hopf algebras and Galois theory, Springer, 1969
[3] Meyer, F de and Ingraham, E , Separable algebras over commutative rings, Springer, 1971
[4] Magid, A R , The separable Galois theory of commutative rings, M Dekker, 1974

К И Бейдар, А В Михалев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Chase, S U , Harrison, D K and Rosenberg, A , Galois theory and Galois cohomology of commutative rings, Amer Math Soc , 1965

许永华、朱胜林 译 牛凤文 校

Galois 拓扑群 [Galois topological group, Галуа топологическая группа]

赋予 Krull 拓扑(Krull topology)的 Galois 群.这个拓扑的滤子基(即单位元的开邻域的基)由指数有限的正规子群构成 设 L/K 是有限 Galois 扩张,它的 Galois 群 $G(L/K)$ 的拓扑是离散的.若域 L 是 K 的有限扩张 K_i 的并,则(拓扑)Galois 群 $G(L/K)$ 是有限群 $G(K_i/K)$ 的投射极限,每个 $G(K_i/K)$ 有离散拓扑,$G(L/K)$ 是**投射有限群**(profinite group),是一个全不连通的紧拓扑群 若 K' 是 $G(L/K)$ 的不变域,则子群 $G(L/K')$ 在 $G(L/K)$ 中处处稠密 有限 Galois 扩张的基本定理可以推广到无限扩张 Galois 扩张 L/K 的拓扑 Galois 群的闭子群与 L 中包含 K 的子域一一对应

И В Долгачев 撰

【补注】 $G(L/K)$的开子群对应 L 中在 K上次数有限的子域 若 H是 $G(L/K)$的任一子群，则L/L^H是**Galois扩张**（Galois extension），且 $G(L/L^H)$是 H 的闭包．

裴定一 译 赵春来 校

Galton-Watson 过程 [Galton-Watson process，Гальтона-Ватсона процесс]

具有一种类型的粒子的离散时间**分支过程**（branching process）以 F Galton 和 G Watson 的名字命名，他们在 1873 年首先研究了一个家族的退化问题．

Б А Севастьянов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Arthreya, K B and Ney, P E, Branching Processes, Springer, 1972

[A2] Harris, Th E, The theory of branching processes, Springer, 1963

刘秀芳 译

涉及时刻选择的对策 [game involving the choice of the moment of time，игра с выбором момента времени]，定时对策（game of timing）

一种**非合作对策**（non-cooperative game），在此对策中每个局中人策略的选择，代表施行一项特别行动的时间之选择（从某个固定的区间），局中人的支付函数是局势集上的连续函数（除了那些局中人所选择的时刻中存在一致性的局势外），并且在连续域上关于相应局中人的策略是单调增加的 研究得最多的定时对策类是每个局中人选择一个时刻的**二人零和对策**（two-person zero-sum game），即这样的**单位正方形上的对策**（game on the unit square），此对策在正方形的对角线上具有不连续的支付函数，并且它关于第一个变量递增而关于第二个变量递减 在这种对策中存在一个对策值和两个局中人的最优策略 在一定的附加假设下，这种对策的解可归结为积分方程的解 另一类定时对策是**决斗**（duel），即这样的二人零和对策，在此对策中局中人的行动是要消灭他们的对手，所以在决斗中有四种可能的不同结局 对于决斗存在着寻求局中人的最优（或 ε 最优）策略的解析方法 决斗理论有军事的以及经济的应用（市场竞争、广告战等等）．

参考文献

[1] Karlin, S, Mathematical methods and theory in games, programming and economics, Addison-Wesley, 1959

Е Б Яновская 撰 胡宣达 译

机会对策 [game of chance，азартная игра]

由单个局中人施行的多阶段对策 一个机会对策 G定义为系统

$$G=\langle F,\ f_0\in F,\ \{\Gamma(f)\}_{f\in F},\ u(f)\rangle,$$

其中 F 为财产（资本）集，f_0 为局中人的初始资本，$\Gamma(f)$ 为定义在 F 的一切子集上的有限可加测度的集合，$u(f)$ 为局中人的效用函数（见**效用理论**（utility theory）），定义在他的资本集上．局中人选择 $\sigma_0\in\Gamma(f_0)$，并且他的资本 f_1 根据测度 σ_0 有一个分布 然后局中人选择 $\sigma_1(f_1)\in\Gamma(f_1)$，并相应得到 f_2，等等．序列 $\sigma=\{\sigma_0, \sigma_1, \}$为局中人的一个策略(见**策略（对策论中的）**（strategy (in game theory)）)，如果局中人在时刻 t 终止对策，那么他的获利定义为函数 $u(f_t)$ 关于 σ 的数学期望 局中人的目的是使他的效用函数极大 机会对策的最简单例子是抽彩（lottery） 一个具有初始资本 f 的局中人，可以要 k 张价格为 c 的彩票，$k=1, \ , [f/c]$ 对每个 k，对应所有资本集合上的一个概率测度，并且抽取以后，局中人的资本变为 f_1 如果 $f_1<c$，则对策结束，如果 $f_1\geqslant c$，那么局中人可以退出对策，或者可以再买张数在 1 和 $[f_1/c]$ 之间的彩票，等等 他的效用函数，例如，可以是资本的数学期望或者是获利不小于一定数额的概率

机会对策理论是**受控随机过程**（controlled stochastic process）一般理论的一部分 机会对策可以由几个人参加，但因局中人的获利不依赖于他对手的策略，所以从理论的观点而言，它是单个局中人的对策

参考文献

[1] Dubins, L E and Savage, L J, How to gamble if you must inequalities for stochastic processes, McGraw-Hill, 1965

Е Б Яновская 撰 胡宣达 译

生存对策 [game of survival，игра на выживание]

一种最终支付仅取 0 与 1 值的二人**动态对策**（dynamic game） 于是，终止集 X^T 分裂为两个子集 X^{T^+} 与 X^{T^-}，此时如果对策到达状态 $x\in X^{T^+}$，那么局中人 Ⅰ 赢，而到达状态 $x\in X^{T^-}$ 时，则局中人 Ⅱ 赢．如果对策是不可终止的，那么局中人 Ⅰ 赢、局中人 Ⅱ 输，某个数 $h_\infty\in[0,1]$ 如果 $h_\infty=0$，那么有一个关于局中人 Ⅱ 的生存对策，而若 $h_\infty=1$，则有一个关于局中人 Ⅰ 的生存对策

在历史上，生存对策概念要追溯到古典的“赌徒的破产”问题 此问题的一个直接推广是这样的一个对策，在此对策的每个阶段都在施行同一个矩阵子对策，而状态的改变表现为参与者财富的改变（见 [1]） 如果他的对手破产（即对手的财富变为负的），则局中人 Ⅰ 赢，但如果他自已破产，则他输．这种对策有一个不依赖于 h_∞ 的值，并且如果多重子对策矩阵中的所有元素都是非零的，那么两个局中人都有平稳 ε 最优策略（也见**策略（对策论中的）**（strategy (in game theory))） 在此情形下，对策几乎一定在有限多步中完

成 生存对策（具有多种成分财富）的另一种变形，就是所谓“穷举对策”（见[2]） 微分生存对策（differential games of survival）可视为在讨论连续时间情形下对策的推广．

参考文献

[1] Milnor, J and Shapley, L S, On games of survival, in contributions to the theory of games, Vol, 3, Princeton Univ Press, 1957, 15－45

[2] Blackwell, D, On multi-component attrition games, *Naval Res Logist Quart*, **1** (1954), 210－216

[3] Романовский, И В, 《Теория вероят и ее примен》, **6** (1961), 4, 426－429 　　В К Доманский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Luce, R D and Raiffa, H, Games and decisions, Wiley, 1957 　　胡宣达 译

图上对策 [**game on a graph**, **игра на графе**]

位置对策（positional game）推广到位置图是任意图，但不是树的情形 图上的对策的一个特殊情形是 Nim 对策（game of Nim），它是一种全息的**两人零和对策**（two-person zero-sum game），其中对于每个最后位置．已知最后行动者获胜抑或失败 最简单形式的 Nim 对策是这样构成的 有若干堆火柴，参加者轮流每次至少取出一根火柴，而且每次只能取自同一堆 取得最后一根火柴者获胜 Nim 对策的解由描述每个参加者的获胜位置（winning positions）的集合构成，所谓获胜位置是指一个参加者对于他的对手所采取的任何战略都能够获胜的位置 获胜位置集合恰好就是 Grundy 函数（Grundy function）的零点集（结合到图 Γ 的每个顶点 k 的一个函数 g，函数值为

$$g(k)=\min\{n \quad n\neq gl(i),\ i\in\Gamma(k)\}$$

这个函数有内稳定和外稳定的性质，而且关于这方面，它类似于合作对策的 von Neumann-Morgenstern 解的概念（见**合作对策**（cooperative game））

参考文献

[1] Berge, C, Theorie générale des jeux à n personnes, Gauthier-Villars, 1957

[2] Kummer, B, Spiel auf Graphen, Birkhauser, 1980

А Н Ляпунов 撰

【补注】 圈图上的对策和游击队员图上的对策（即当双方参加者的行动并非都是合规则的）近来颇受到注意

参考文献

[A1] Berge, C, Graphs and hypergraphs, North-Holland, 1977（译自法文）

[A2] Conway, J H, On numbers and games, Acad Press, 1976

[A3] Berlekamp, E R, Conway, J H and Guy, R K, Winning ways for your mathematical plays, 1－2, Acad Press, 1982 　　锺 集 译 李 乔 校

单位正方形上的对策 [**game on the unit square**, **игра на единичном квадрате**]

一种二人零和对策（two-person zero-sum game），在此对策中局中人Ⅰ和Ⅱ的纯策略集为区间 $[0,1]$，每个局中人的纯策略集都是连续统的任何二人零和对策，作适当的规范化，均可归结为一个单位正方形上的对策．单位正方形上的对策是由定义在单位正方形上的支付数 $K(x,y)$ 给出的 局中人的混合策略是单位区间上的分布函数 如果支付函数关于两个变量是有界可测的，那么当局中人Ⅰ和Ⅱ分别使用了混合策略 F 和 G 时，由定义局中人Ⅰ的所得为

$$K(F,G)=\int_0^1\int_0^1 K(x,y)\,dF(x)dG(y)$$

如果 $K(x,y)$ 关于两个变量连续，则

$$\max_F \min_G K(F,G)=\min_G \max_F K(F,G)=v,$$

亦即对于此对策**极小化极大原理**（minimax principle）成立，并且存在一个对策值（记为 v）和关于两个局中人的最优策略 关于对策值的存在定理（极小化极大定理）已经在对支付函数的较弱假设下得到了证明．例如，由一般极小化极大定理推得，具有有界且关于 x 上半连续或关于 y 下半连续的支付函数的单位正方形上的对策，存在一个对策值 对于某些特殊的不连续支付函数类中的对策值的存在定理已被证明（例如，对于定时对策，见**涉及时刻选择的对策**（game involving the choice of the moment of time））．然而，不是所有单位正方形上的对策都有值 例如，对于由

$$K(x,y)=\begin{cases}-1, & x<y\neq1 \ 且\ x=1,\ y\neq1,\\ 0, & x=y,\\ 1, & y<x\neq1,\ 且\ y=1,\ x\neq1,\end{cases}$$

定义的函数 $K(x,y)$，下面等式成立

$$\sup_F \inf_G K(F,G)=-1,\ \inf_G \sup_F K(F,G)=1$$

有唯一解的对策的集合结构，已经对于具有连续支付函数的单位正方形上的对策确定（见**对策论中的解**（solution in game theory）） 事实上，关于两个变量连续的函数的集合，其相应的单位正方形上的对策有唯一解，对于这种对策，两个局中人的最优策略都是连续的，并且它们的支集（见**测度支集**（support of a measure））都是闭的无处稠密的完满 Lebesgue 零测集，其包含一个处处稠密的 G_δ 型子集

解单位正方形上的对策没有一般的方法 尽管如此，对于某些单位正方形上的对策类，或者有可能去寻求一个解析解（例如，对于定时对策，具有仅依赖于两局中人策略的差的支付函数的对策和有最优均等策略的对策），或者有可能去证明对于这种对策具有有限支集的最优策略的存在性（例如，对于**凸对策**（convex game），**退化对策**（degenerate game），或**钟形对策**（bell-shaped game）），并由此得到将寻求单位正方形上对策的解的问题化简为某个**矩阵对策**（matrix game）解的可能性．近似方法可应用于解具有连续支付函数的对策．

参考文献

[1] Karlin, S, Mathematical methods and theory in games, Programming and economics, Addison-Wesley, 1959

Е Б Яновская 撰

【补注】

参考文献

[A1] Luce, R D and Raiffa, H, Games and decisions, Wiley, 1957

胡宣达 译

对策局势 [**game situation, игровая ситуация**]，局势（situation），n 重策略（n-tuple of strategies），非合作对策理论中的

所有行动联盟（见**对策论**（games, theory of）），考虑到各个行动联盟策略之间的联系，对其策略作出选择的结果．所有局势构成的集合可理解为 Descartes 乘积 $\prod_{K\in\mathfrak{K}_a}X_K$ 的子集，这里 X_K 为行动联盟 K 的策略全体构成的集合，$\mathfrak{K}_a$ 为所有行动联盟构成的集合．

А С Михайлова 撰

【补注】 对策局势的概念在西方文献中几乎不用．

胡宣达 译

具有分层结构的对策 [**game with a hierarchy structure, игра с иерархической структурой**]

局中人之间具有固定的步法和信息交换序列的竞争局势模型．在具有分层结构的对策论中，研究的目标是为一选定的局中人寻求最保险的结果和最优策略的问题．假设局中人Ⅰ与Ⅱ分别倾向于使在两个紧集 X_1, X_2 的乘积上连续的支付函数 $f_1(x_1,x_2)$ 和 $f_2(x_1,x_2)$，$x_1\in X_1, x_2\in X_2$（见**增益函数**（gain function））增加．下面不同类型的对策可以根据信息的特征与步法的顺序来阐述．

对策 Γ_1(game Γ_1) 局中人Ⅰ选择 $x_1\in X_1$，并向局中人Ⅱ通知他的选择 设

$$P(x_1)=\{x_2\ \ f_2(x_1,x_2)=\max_{y\in X_2}f_2(x_1,y)\}$$

为局中人Ⅱ的最优选择集．于是，对于局中人Ⅰ的最保险结果为

$$G_1=\sup_{x_1\in X_1}\min_{x_2\in P(x_1)}f_1(x_1,x_2)$$

对策 Γ_2(game Γ_2) 局中人Ⅰ指望有并且确实将有关于局中人Ⅱ选择的信息，他向局中人Ⅱ通知他的策略，即函数 $\widetilde{x}_1=x_1(x_2)$，这里 $\widetilde{x}_1\in\widetilde{X}_1$ —— 从 X_2 到 X_1 的所有映射的集合．对于局中人Ⅰ的最保险结果为

$$G_2=\sup_{\widetilde{x}_1\in\widetilde{X}_1}\inf_{x_2\in P_2(\widetilde{x}_1)}f_1(\widetilde{x}_1,x_2),$$

这里局中人Ⅱ的最优选择集为

$$P_2(\widetilde{x}_1)=\{x_2\ \ f_2(\widetilde{x}_1,x_2)=\sup_{y\in X_2}f_2(x_1(y),\ y)-\delta(\widetilde{x}_1)\},$$

其中 $\delta(\widetilde{x}_1)\geqslant0$，并且当且仅当 $\max_{y\in X_2}f_2(x_1(y),y)$ 达到时，$\delta(\widetilde{x}_1)=0$

对策 Γ_3(game Γ_3) 局中人Ⅰ指望有并且确实将有关于局中人Ⅱ的形如 $\widetilde{x}_2=x_2(x_1)$ 的选择信息，这里 $\widetilde{x}_2\in\widetilde{X}_2$ —— 所有从 X_1 到 X_2 的映射集，他向局中人Ⅱ通知他的策略 $\widetilde{\widetilde{x}}_1=x_1(\widetilde{x}_2)$，这里 $\widetilde{\widetilde{x}}_1\in\widetilde{\widetilde{X}}_1$ —— 从 $\widetilde{X}_2$ 到 X_1 的映射集．于是局中人Ⅰ的最保险结果为

$$G_3=\sup_{\widetilde{\widetilde{x}}_1\in\widetilde{\widetilde{X}}_1}\inf_{\widetilde{x}_2\in P_3(\widetilde{\widetilde{x}}_1)}f_1(\widetilde{\widetilde{x}}_1,\widetilde{x}_2),$$

这里

$$P_3(\widetilde{\widetilde{x}}_1)=\{\widetilde{x}_2\ \ f_2(\widetilde{\widetilde{x}}_1,\widetilde{x}_2)=\sup_{y\in\widetilde{X}_2}f_2(x_1(y),\ y)-\delta(\widetilde{\widetilde{x}}_1)\},$$

$\delta(\widetilde{\widetilde{x}}_1)\geqslant0$，这里 $\delta(\widetilde{\widetilde{x}}_1)=0$，当且仅当 $\max_{y\in\widetilde{X}_2}f_2(x_1(y),y)$ 达到时

这些对策结果之间的一个关系，$G_1\leqslant G_3\leqslant G_2$，给局中人Ⅰ确定了关于局中人Ⅱ的行动信息的知识．利用上述局中人构造策略的方案，我们可以阐述具有任意步数的递归对策．下面的结论成立 在对策 $\Gamma_{2m}(m>1)$ 中，局中人Ⅰ最保险的结果为 G_2，在对策 Γ_{2m+1}，$m>1$ 中，最保险的结果为 G_3 决定 G_1 的问题是涉及一类具有有关限制的极小极大型问题．

利用罚函数，必要的最优性条件和以具有局中人Ⅱ的唯一响应的对策来逼近原来的对策来解 Γ_1 的方法已被建立 对于特殊的对策类，即利益接近的对策、双矩阵对策、双线性对策等等，完整的解法都已知道 决定 G_1 的问题是不适定的，因涉及函数 $f_2(x_1,x_2)$ 的一致度量的改变和集 X_1 与 X_2 的 Hausdorff 度量的改变 对策 Γ_1 的解的正则化已有一般方法 涉及Ⅱ的支付函数问题的正则化，是在确定 $\max_{x_1\in X_2}f_2(x_1,\ x_2)$ 时以引进一个人为的不准确度为代价而实现的．数量 G_2 的确定归结为一组**数学规划**（mathematical programming）问题的解．

假设对于任意 $\varepsilon>0$，定义下面的函数、集合和

数

$$f_2(x_1^H(x_2), x_2) = \min_{x_1 \in X_1} f_2(x_1, x_2)$$

$$L_2 = \max_{x_2 \in X_2} f_2(x_1^H(x_2), x_2) = \max_{x_2 \in X_2} \min_{x_1 \in X_1} f_2(x_1, x_2),$$

$$E_2 = \{x_2 \in X_2 \quad f_2(x_1^H(x_2), x_2) = L_2\},$$

$$K = \begin{cases} \sup_{(x_1, x_2) \in D} f_1(x_1, x_2), & 若 D \neq \phi, \\ -\infty & 若 D = \phi, \end{cases}$$

$$f_1(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) \geqslant K - \varepsilon, \quad (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) \in D \neq \phi,$$

$$M = \inf_{x_2 \in E_2} \sup_{x_1 \in X_1} f_1(x_1, x_2),$$

$$D = \{(x_1, x_2) \quad f_2(x_1, x_2) > L_2\},$$

$$f_1(x_1^{a\varepsilon}(x_2), x_2) \geqslant \sup_{x_1 \in X_1} f_1(x_1, x_2) - \varepsilon$$

在所述的条件下，$G_2 = \max(K, M)$，并且策略

$$\tilde{x}_1^\varepsilon = \begin{cases} x_1^\varepsilon, & 若 x_2 = x_2^\varepsilon, K > M, \\ x_1^{a\varepsilon}(x_2), & 若 x_2 \in E_2, K \leqslant M, \\ x_1^H(x_2), & 其他 \end{cases}$$

对于充分小的 ε，保证局中人Ⅰ得到 $\max(K, M) - \varepsilon$ 由定义可见，一个最优策略是由若干阶段构成的，最后一步起**惩罚策略** (strategy by punishment) 的作用．

如果 $L_2 < f_2(x_1, x_2)$ 且如果 $f_2(x_1, x_2)$ 在 $X_1 \times X_2$ 上，没有取值 L_2 的局部极大，那么 $K \geqslant M$ 且最优策略有简单形式

$$\tilde{x}_1^\varepsilon = \begin{cases} x_1^\varepsilon, & 若 x_2 = x_2^\varepsilon, \\ x_1^H(x_2), & 若 x_2 \neq x_2^\varepsilon \end{cases}$$

以类似的方式可找到 Γ_3 的一个解，它也归结为一系列数学规划问题的解

当局中人Ⅰ的旁支付，作为局中人Ⅱ的选择的函数被引进具有分层结构的对策时，那么对于局中人Ⅰ的最保险结果的表示大为简化　在对策 Γ_2 中，设

$$w_1 = f_1(x_1, x_2) - z, \quad w_2 = f_2(x_1, x_2) + z,$$

$x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$，$0 \leqslant z \leqslant z^0$，且局中人Ⅰ选择策略 $x_1(x_2)$，$z(x_2)$，则 G_2 的确定归结为解一个数学规划问题

$$G_2 = \max_{x_1 \ x_2} \min [f_1(x_1, x_2) \quad f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2) - L_2],$$

$$f_2(x_1, x_2) \geqslant L_2 - z^0$$

一般地，在具有分层结构的对策中，任意小旁支付 $z(x_2)$ 的应用，允许局中人Ⅰ指望他的对手的慷慨，以达到最大可能的保险结果

所阐述的对策可以推广到以动态方式逐步接受与使用信息的情形．在局中人的状态是以微分或差分方程来描述的情形中，会出现广泛的一类与局中人关于状态和动向的信息形式多样性有关的问题，此类问题既可作为决策过程，也可作为物理过程．对策 Γ_1 和 Γ_2 的推广被考虑为禁止局势的情形，即出现关于局中人选择的联合限制的情形

以上所作的论述都是涉及局中人Ⅰ有关于支付函数和他的选择集的完全信息的情形．如果局中人Ⅰ知道，对于已知的连续函数 $f_2^-(x_1, x_2)$ 与 $f_2^+(x_1, x_2)$，局中人Ⅱ的连续支付函数满足不等式

$$f_2^-(x_1, x_2) \leqslant f_2(x_1, x_2) \leqslant f_2^+(x_1, x_2),$$

那么 Γ_2 中的最保险结果是通过对一个单变量函数取极大值的条件来确定的

局中人Ⅰ有关于局中人Ⅱ的利益的不完全信息情形的一个更一般变型如下　局中人Ⅰ知道函数 $f_2(x_1, x_2, \alpha)$，$\alpha \in A$，并且知道对于某个未知值 $\alpha = \alpha_0$，真实的支付函数满足 $f_2(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2, \alpha_0)$　具有这种信息的 Γ_2，对于有限集 A 的解就归结为对几个变量的函数求极大值，对于无限的 A，问题就更复杂了．Γ_1 阐述中的不确定因素的出现，并不导致问题的本质复杂化，因为此情形可归结为无不确定性情形的问题．在 Γ_2 的不确定情形中，有许多问题已被考虑，其中局中人的策略概念被推广为假设局中人Ⅰ向局中人Ⅱ通报他的有效性准则，即某个 $\hat{\alpha} \in A$，使得 x_1 的最终选择可以通过获得有关 x_2 的信息和局中人Ⅱ的有效性准则来完成　如果局中人Ⅱ在此情形中是谨慎的（即他坚持最保险结果的原则），并且局中人Ⅰ向他通报参数化策略 $x_{1\alpha}(x_2, \hat{\alpha})$ $(\alpha \in A)$，那么可以证明，局中人Ⅰ的最保险结果是 $G_2 = \inf_{\alpha \in A} G_{2\alpha}$，这里 $G_{2\alpha}$ 是在对策 Γ_2 中，对于给定的 $\alpha \in A$，局中人Ⅰ的最保险结果．如果局中人Ⅰ知道集 $X_2(\alpha)$，$\alpha \in A$ 的参数族，其中一个是真实参数，那么类似的结果成立，无需假设局中人Ⅱ是谨慎的．

与刚才所讨论问题的相近问题是，当表征环境不确定性的参数 α 在局中人的支付函数中出现时，寻求局中人Ⅰ在 Γ_2 中的最保险结果，这里局中人Ⅱ被告知他的具体 α 值的选择，并且局中人Ⅰ是不被告知的．

在 Γ_2 不确定地重复的情形中，通报给局中人Ⅰ的有关局中人Ⅱ的利益及其可能性的内容可能增加，这是因为此信息包含在局中人Ⅱ对局中人Ⅰ的行动反应中．现已构造了相应的程序，使局中人Ⅰ从某局开始能得到一个任意接近于对他来说是由完全信息保证的结果．这种结果也在具有不确定性的对策 Γ_1 中得到．如果局中人Ⅰ得到关于不确定因素 α 的信息的时刻是不固定的，那么局中人Ⅰ在剩下的重复中，在关于参与者的支付函数的较弱假设下，可以得到一个任意接近于对他来说是由完全信息保证的结果．此外，在对策 Γ_1 中的局中人Ⅰ，简单地通过观察他自己的支付函

数值，可得到一个类似的结果

以上所考察的对策的论述，自然可照搬到多人的情形．多人间的交互影响在行动和信息传递的优先权的意义上，都有一个分层结构．在这些对策的分析中，规定局中人在同一层上的交互影响的规则是必要的 于是，当考虑三人对策时，这里局中人的支付函数有形式

$$w_1=f_1(x_1,x_2,x_3),\quad w_2=f_2(x_1,x_2,x_3),\quad w_3=f_3(x_1,x_2,x_3),$$

$x_1\in X_1$, $x_2\in X_2$, $x_3\in X_3$，那么为了描述被选定的有行动优选权的局中人Ⅰ的最保险结果，必须使他的关于局中人Ⅱ和Ⅲ的行为的信息具体化 如果Ⅱ和Ⅲ形成一个Ⅰ已知的坚固的**联盟**（coalition），即他们列出联盟准则并共同决定他们的选择，那么对于Ⅰ来说，这一情形等价于前述的二人对策 在局中人Ⅱ和Ⅲ或处于一个局中人Ⅰ已知的联盟中，或当他们可以得到一个比由联盟给出的更好结果时单独行动的情形下，清晰的结果也已得到，在此情形中，局中人Ⅱ和局中人Ⅲ都没有关于其他人步法的独立信息，并且这些步法的顺序是由局中人Ⅰ给定的 已对一个有“扇形”结构的对策作了详尽的分析 一个卓越的局中人Π_0（他控制中央）和n个在此分层系（产品生产者）中的下一层次上的其他局中人，分别倾向于使支付函数$f_0(x_0,x)$与$f_i(x_0^i,x_i)$ $(i=1,\ \ ,n)$增加，这里$x_0=\{x_0^1,\ \ ,x_0^n\}$是Π_0的选择，$x_0\in X_0$, $x_0^i\in X_0^i$, $x=\{x_1,\ \ ,x_n\}$是此分层系低层次上的局中人的选择集 此外，这些局中人行动独立，并且具有指标i的局中人涉及选择$x_i\in X_i$ 假设所有集合都是紧的，并且函数都是连续的．局中人Π_0指望关于选择$x_i\in X_i$的信息（也将拥有它），并且将定义在X_i上取值于X_0^i中的相应的策略函数$\widetilde{x}_0^i=x_0^i(x_i)$通知每个局中人$i$ 对于具有分层结构的n人对策，卓越的局中人在其策略类的各种延拓下的最保险结果的表示已经得到，它是以向低层次的局中人传递有关他们同伙行动的信息，以及引进他们同伙的行动和讹诈成分为代价的 如同二人对策，卓越的局中人的旁支付的可能性，大大地简化了他的保险结果的确定

利用具有分层结构对策，已得到现行经济子系统集中控制的各种机制的自然解释．对策Γ_1描述用价格来集中控制的过程，Γ_2模拟为刺激生产的惩罚与鼓励政策，而Γ_3模拟资源分配作为一个利用这些资源的生产方式的函数的过程

参考文献

[1] Гермейер, Ю Б , Игры с непротивоположными интересами, М , 1972

И А Ватель, Ф И Ерешко 撰

【补注】 对策Γ_1通常被认为是一个Stackelberg对策（stackelberg game） 在所给的阐述中，局中人Ⅰ是向局中人Ⅱ传达他的决策的领导者（leader），局中人Ⅱ是制订他以后决策的追随者（follower）．见[A1]，第Ⅳ章 在经济学文献中，对策Γ_2据称有一个激励结构（incentive structure）．局中人Ⅰ仍为领导者，对局中人Ⅱ不宣布他的行动但宣布他的策略 于是局中人Ⅱ的决策也决定了局中人Ⅰ的行动（即决策），局中人Ⅱ的决策代入局中人Ⅰ的策略，它导致局中人Ⅰ的决策[A2]

参考文献

[A1] Basar, T and Olsder, G J, Dynamic noncooperative game theory, Acad Press, 1982

[A2] Luk, P B, Ho, Y C and Olsder, G J, A control-theoretical view on incentives, Automatica, **18** (1982), 167－179

胡宣达 译 钟琍绵 校

对策论［**games, theory of , игр теория**］

在冲突条件下作最优决策的数学模型理论 **对策的形式定义** 冲突（conflict）是一种现象，在此现象中，谁是参加者，结局是什么，是怎么回事，还有，谁在结局中得利，用的是何种手段，都是需要知道的．于是，对于冲突的形式描述必须指明 1) 参与冲突的群体（称为行动联盟（coalitions of action））为元素的集合$\mathfrak{K}_a$, 2) 每个行动联盟的策略（strategies） 集$\mathfrak{x}_K$的族，3) 局势（situations） 集合$\mathfrak{x}\subset\prod_{K\in\mathfrak{K}_a}\mathfrak{x}_K$, 4) 参与者利益集合$\mathfrak{K}_i$（称为利益联盟（coalitions of interests）），以及5) $\mathfrak{x}\times\mathfrak{x}$上的二元关系$\succ_K(K\in\mathfrak{K}_i)$族，此二元关系表示局势之间利益联盟的偏好．系统

$$\langle\mathfrak{K}_a,\{\mathfrak{x}_K\}_{K\in\mathfrak{K}_a},\mathfrak{x},\ \mathfrak{K}_i\{\succ_K\}_{K\in\mathfrak{K}_i}\rangle$$

称为一个对策（game）．

对策论的内容在于建立每个对策元素和它的“最优”结局之间的联系．首先．整个最优性概念的精确化，最优结局的存在性证明以及它们的实际确定 对策论的发展，导致研究表示为不同对策计算的不同对策之间的联系问题，以及考虑对策的类、空间和范畴

对策的分类 不存在利益联盟或者仅有一个这种联盟的对策，纯粹是描述性数学理论或传统的最优化理论的研究对象 确切地说，对策至少有两个利益联盟．

通常在对策论中，行动联盟和利益联盟均为原子的（离散的），并且都只是某个集I（其元素称为局中人(players)）的子集．从前，对策中局中人集假设为有限的，然而近来（1970年起），已开始研究具有无限并且甚至是非原子的局中人集的对策．

对于具有单个行动联盟的对策，全部局势的集合可取为此唯一行动联盟的策略集，并且无需进一步提到策略 所以这种对策称为非策略对策（non-strategic

games）所有其他对策，也就是那些具有两个或更多行动联盟的对策均称为策略对策（strategic games）

一大类非策略对策可如下得到　设 I 为局中人集，集 $\mathfrak{K}_i=2^I$　对于每个局中人 $i\in I$，伴随一条一维 Euclid 线 E^i，取为他的效用的度量尺度，并且对于每个利益联盟 $K\in\mathfrak{K}_i$，伴随乘积 $E^K=\prod_{i\in K}E^i$　最后，对每个 $K\in\mathfrak{K}_i$，引进集合 $v(K)\subset E^K$　连同集 $H\subset E^I$（其元素称为分配（imputations）），由定义可知，对于分配 $x,y\in E^I$，$x\succ_K y$（"关于联盟 K 分配 x 优于分配 y"），当且仅当对于所有 $i\in K$，$x,y\in(v(K)\times E^{I\setminus K})\cap H$，且 $x_i>y_i$ 这种对策称为无旁支付对策（games without side payments）．它们描述了这样的局势，每个利益联盟 K 对它的成员可有力地保证 $v(K)$ 中任一向量的分量作为支付（亦见**增益函数**（gain function）），并且效用的常规考虑决定了 H 之外分配的任一选择的不合理性．通常集合 $v(K)$ 制约于某些自然条件　1）$v(K)$ 为一个非空的闭凸集，2）如果 $x_k\in v(K)$，并且 $x_k\geqslant y_k$（向量不等式理解为每个分量的同样不等式），那么 $y_k\in v(K)$（"有能力多得者也有能力少得"），3）如果 $K\cap L=\phi$，则 $v(K\cup L)\supset v(K)\times v(L)$（联盟 K 和 L 合并至少可以得利如同它们分离时那样多），4）H 是由所有那些向量 $x\in E^I$ 构成，对于这些向量存在一个向量 $y\in v(I)$，使得 $y\geqslant x$（于是 $v(I)$ 是由所有使得 I 可给予它的成员不小于 x 的支付向量 x 构成，H 是由所有使得 I 可给予它的成员恰为 x 的向量构成）．特别地，如果

$$V(K)=\{x\ \sum_{i\in K}x_i\leqslant v(K)\},$$

这里 $v(K)$ 为某个实数，并且如果

$$H=\{x\cdot\sum_{i\in I}x_i=v(I),\ x_i\geqslant v(i)\ (i\in I)\},$$

那么就得到一个经典的**合作对策**（cooperative game）．在此情形中，$V(K)$ 的定义意味着联盟 K 有把握达到总支付 $v(K)$，并且在它的成员之间可任意分配 $v(K)$ 的可能性．H 的定义意味着对策中分配的总和为 $v(I)$（小于此和的分配是不利的；多于此和的分配干脆是不可能的！），并且每个局中人 i 将只同意占有不小于量 $v(i)$ 的部分 x_i，这里 $v(i)$ 是他确信能独立地获得的．

主要的策略对策类是**非合作对策**（non-cooperative game）．在此类对策中，局中人集 I 与行动联盟集 $\mathfrak{K}_a$ 重合，并且也与利益联盟集 $\mathfrak{K}_i$ 重合．每个局中人 $i\in I$ 有一个由他处置的策略集 $\mathfrak{X}_i$，全部局势（n 重组）的集合可取为 Descartes 积 $\mathfrak{X}=\prod_{i\in I}\mathfrak{X}_i$，并且通过支付函数（pay-off function）$H_i\ \ \mathfrak{X}\to E^i$ 来描述选择关系 $\succ_i$，这里，当且仅当 $H_i(x')>H_i(x'')$ 时，$x'\succ_i x''$　这样，一个非合作对策可描述为一个三元组

$$\Gamma=\langle I,\{\mathfrak{X}_i\}_{i\in I},\{H_i\}_{i\in I}\rangle.$$

如果所有策略集 $\mathfrak{X}_i$ 均为有限，那么此非合作对策称为有限的（finite）　具有两个局中人（$I=\{\text{I},\text{II}\}$）的有限非合作对策称为**双矩阵对策**（bimatrix game）．

如果 $I=\{\text{I},\text{II}\}$，并且对于所有 $x\in\mathfrak{X}$，$H_{\text{I}}(x)=-H_{\text{II}}(x)$，那么 Γ 称为**二人零和对策**（two-person zero-sum game）．每个二人零和对策可由三元组 $\langle\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\mathfrak{H}\rangle$ 给定，这里 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{H}$ 分别为局中人 I 与 II 的策略集，H 为局中人 I 的支付函数．有限二人零和对策称为**矩阵对策**（matrix game）

如果在二人零和对策中 $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}=[0,1]$，那么在这种对策中的每个局势可以正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 中的一个点来描述，这种对策称为**单位正方形上的对策**（game on the unit square）

设 I 为局中人集，$x_i(i\in I)$ 为他们的策略集，X 为一个其元素称为位置（positions）的集合，T 为一个其元素有时刻意义的集合，令 $f\ \ \mathfrak{X}\to 2^{T\times X}$，即 f 按对策的每个局势确定一个给定在 T 上取值于 X 的函数，局势的每个 f 象称为一局（play），局的全体构成的集，记为 $\mathfrak{P}$　最后，设 $h_i\ \ \mathfrak{P}\to E^i$　系统

$$\Gamma=\langle I,\{\mathfrak{X}_i\}_{i\in I},\ T,X,\ f,\mathfrak{P},\ \{h_i\}_{i\in I}\rangle$$

称为**一般位置对策**（general positional game）　在这种对策中，每个局中人最终的支付是完全由出现的局势，即由所有局中人策略的选择确定的　因此，这种对策为非合作对策

假设在一般位置对策 Γ 中，元素 X 为有限维 Euclid 空间，T 为实数集，并且假设 $\varphi\ \ \mathfrak{X}\times X\times T\to X$ 给定，假设局势 $x\in\mathfrak{X}$ 是使得微分方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\varphi(x,\mathbf{x},t),\ \mathbf{x}\in X,\ t\in T$$

（看作向量方程），对于给定的初始条件有唯一解．那么每个局势确定了一局，在这种局势中的局称为轨道（trajectory）　按这种方式定义的对策称为**微分对策**（differential games）

一般位置对策类包括**位置对策**（positional game）和**动态对策**（dynamic game），动态对策又包括**随机对策**（stochastic game），**递归对策**（recursive game）和**生存对策**（game of survival）．

对策论的主要结果．对策论的基本问题是与最优性原理相联系的，因此它必须充分反映最优性的丰富涵义，其次，对于足够广泛和自然产生的对策类，它务必是可实现的　关于最优性原理的这两种要求，在一定程度上是相互矛盾的，因此对于很多有意义的、自然的对策类，对策论尚没有建立起它相应的最优性原理　同时，现在已知的对策类是由不同的最优性原理同样成功地提供的　因此，最优性原理的构造和分析是对策论的本质部分．每个最优性原理是作为一个局

势最优集（不必唯一）而实现的．这种集合（可为空集）称为解（solution），亦见**对策论中的解**（solution in game theory）

每个解的逻辑基础必然具有通常极值的特征，它是按几个函数同时极值化来描述的 因此，除了使赢得趋于最大值（按算术意义）外，对策的解可表现出一定的稳定性与对称性以至相互的各种组合的特征

于是，非控制性（non-dominatedness）（见**控制**（domination））可考虑为非策略对策中最优性的特征之一，即仅对任一局势 y 和任一利益联盟 K，$y \succ_K x$ 均不成立的那些局势 x，同意作为最优（在此意义下是最优的局势集称为对策的核心（core），见**对策论中的核心**（core in the theory of games）） 另一种最优性原理是由内部和外部稳定性的一定组合构成的，这意味着局势集 R 称为一个解，是指对于 $x,y \in R$ 且 $K \in \mathfrak{K}_i$，不可能发生 $x \succ_K y$，并且对于每个 $x \notin R$，存在 $z \in R$ 和 $K \in \mathfrak{K}_i$，使得 $z \succ_K x$（这种 R 称为对策的 von Neumann-Morgenstern 解（von Neumann-Morgenstern solution of game）我们可以建立某些联盟针对另一些联盟威胁以及回以反威胁的概念，并且我们可对每个威胁能以一个反威胁来反击的每个局势宣布为稳定的．在这种意义下的稳定局势集称为此对策的核（kernel），见**对策论中的核心**（core in the theory of games）．将最优性理解为由某个公理体系给定的一种与众不同的"满意程度"也是有益的 这种公理模式已对合作对策作了阐述，它被归结为一个称为 **Shapley 向量**（Shapley vector）的唯一分配（局势）

在策略对策中，主要的最优性原理是均衡概念 这里的一个局势被称为最优的，如果局中人偏离此局势，那么他的赢得就不会增加 对于不同的对策类阐述的同一个最优性原理，仍然可以有不同的非正式的表示．因此，刚才所述的均衡原理对于二人零和对策就变为**极小化极大原理**（minimax, principle）．

使得我们能够去寻求对策解的公式和算法也可涉及多个（具有应用范围限制的）最优性原理．例如，在具有对角支付矩阵的**矩阵对策**（matrix game）中，最优性原理可以是由具有反比于相应矩阵对角线元素的概率策略的局中人的一种选择 对于某些对策类，最优性原理的可实现性是由此类中所有对策相应的（非空）最优解集的存在性组成的 它们在原来所给局势中的不存在性可由拓广策略集（从而由它们构成的局势集）来克服．对于非合作对策，混合（随机化）策略被富有成效的采用

对策论中解的存在性定理的大多数证明，都有非构造性特征（它们中许多是基于不动点定理），并且不包含求解算法 因此，在对策论中求解的特殊解析方法与数值方法都是重要的 此外，寻求对策的实用解问题往往是非常复杂的，并且已证明仅对很小一类对策求解才有可能

对策计算的发展可分为几个方向 在另一个有某种意义下较简单结构的对策的解的基础上，寻求和描述（至少部分地）一个对策的解的可能性已被研究．这种归结的初等例子是自然舍弃非合作对策中所支配的策略，它们的对称化以及以有限对策来逼近无限对策 由 J von Neumann 提出的非合作对策的合作模型的构造，也可视为一个归结过程．相反结果也已知道，它表明某类对策的解对于一个受更多限制的对策类的解的原则上的不可归结性．例如，我们可引用非合作三人对策的例子，使得它利用对数据的有理运算来计算解是不可能的，然而双矩阵对策的解总可通过使用有理运算来产生

固定某类对策中的某些元素（例如，在所有非合作对策类中的局中人集和它们的策略集），并以其他元素来识别此对策（在所给例子中，以局中人的支付函数来识别），这样就导致用泛函分析和拓扑学来考察对策空间．引进概率测度于此对策空间就导致随机对策

对策论与其他数学领域的联系．对策论与数学的其他领域联系密切 作为具有几个二元关系的一般集合论，它接近于代数 各种各样的数学工具被用于对策论，并且大量传统的数学问题都有对策理论上的推广．策略对策中的最优行为通常总是被随机化的，这就意味着概率论的概念自然地出现和应用于对策论中 有一段时期甚至将对策论看作概率论的一部分

运筹学（operations research）的数学模型（最优决策模型），根据作决策时掌握信息的程度，自然划分为三个层次 确定性的、随机的和非确定性的．在非确定性条件下作决策可解释为作决策的一方对"自然界"的冲突，因此如同一个对策．本质上，所有**多准则问题**（multi-criterion problem）均属于对策论

所以对策论按它的方法论基础和实用的目标可看成是运筹学的一部分

对策论是**控制论**（cybernetics）的数学工具部分之一 在动态对策中，策略均表示为局中人的"信息状态"的函数，所以在对策过程中，局中人可获取或损失信息．这就建立了对策论与**信息论**（information theory）之间的联系

对策论的应用．除了数学内部的各种联系之外，对策论有许多数学之外的应用．它们主要涉及那些直接与冲突有关的知识领域和实际活动形式 军事、市场经济（特别地，对策论可应用于厂商的市场争夺问题，寡头垄断现象，广告公司的计划制订，竞争市场、叫卖市场中的定价等）法律等．对策论也可用于研究计划经济条件下的各种现象（例如，生产控制的集权与分权问题，部门冲突的克服，多指标最优计划的制

订，在不确定性的（例如，由技术进步引起的）条件下制订计划等）.

历史梗概 对策论作为一门数学学科的诞生，可追溯到日期为 1654 年 7月 29 日 B Pascal 给 P Fermat 的一封信，该信也可认为是概率的数学理论的开始．嗣后，1712 年 Waldegrave（发现了 "Le Here" 对策的最优混合策略），1732 年 D Bernoulli（分析了 "St Petersburg 对策"），1814 年 P Laplace（考虑过最优性原理）以及 1888 年 J Bertrand（以一种对策理论的手段来处理一种纸牌的赌博）等人所阐明的可认为是对策理论的个别观念 若干实质上是对策论的结论已在其他数学分支 最佳逼近理论（П Л Чебышев），凸多胞形几何学（H Minkowski）以及线性不等式理论（E Stiemke）中以等价形式考虑过 1911 年 E Zermelo 对下棋描述了一种对策理论的方法，1912 年 E Borel 开始了矩阵对策的系统研究，证明了在某种情形下最优混合策略的存在性．1928 年 von Neumann 的论文 "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele" 问世，它包含了当代对策论的一些基本观念．这些观念后由 von Neumann 和 O Morgenstern（[1]）详尽展开 从此以后，对策论已进入当代数学的许多分支．

参考文献

[1] Neumann, J von and Morgenstern, O, Theory of games and economic behavior, Princeton Univ Press, 1947（中译本 约翰·冯·诺依曼，奥斯卡·摩根斯特恩，竞赛论与经济行为，科学出版社，1963)

[2] Luce, R D and Raiffa, H, Games and decisions, Wiley, 1957

[3] Karlin, S, Mathematical methods and theory in games, programming and economics, Addison-Wesley, 1959

[4] Parthasarathy, T and Raghavan, T E S, Some topics in two-person games, Amer Elsevier, 1971

[5] Vorob'ev, N N, Entwicklung der Spieltheorie, Deutsch Verlag Wissenschaft, 1975

[6] Теория игр, Аннотированный указатель публикаций по 1968 г, Ленинград, 1976

[7] Воробьев, Н Н, Теория игр, Лекции для экономистов-кибернетиков, Л, 1974（英译本 Vorob'ev, N N, Game theory, Springer, 1977)

[8] Aubin, J P, Mathematical methods of game and economic theory, North-Holland, 1979（译自法文）

[9] Теория игр Аннотированный указатель публикаций 1969－1974, Ленинград, 1980

[10] Rosenmuller, J, The theory of games and markets, North-Holland, 1981

[11] Owen, G, Game theory, Acad Press, 1982

[12] Shubik, M, Game theory in the social sciences, M I T, 1982

[13] Shubik, M, A game-theoretic approach to political economy, M I T, 1984

[14] Воробьев, Н Н, Элементы теории игр, Ленинград, 1984

Н Н Воробьев 撰

【补注】 在西方，行动联盟和利益联盟通常是不加区分，也不引进局势的概念．

基于不动点定理的证明不总认为是非构造性的．计算双矩阵对策平衡点的 Lemke-Howson 算法（Lemke-Howson algorithm）[A7] 已导致各种各样的计算程序，亦见 [A8]

最初，对策论中大多数研究集中于所谓正规形式（normal form）或策略形式（strategic form）．在这种形式中，每个局中人的所有可能的决策序列以相互对抗的形态出现．对于二人对策这就导致一个矩阵结构．在这种陈述中，动态的形态就完全被抑制了．

相反于正规形式处理的是 "以扩展形式" 处理的对策，见 [A1]．在此陈述中的一般观念是，按路或树的结构来演化一个对策，在每条叉路或分支处必须着手如何作出决策 一个位置对策通常在西方文献中被认为是一个反馈对策（feedback game）．

几乎在最优控制理论建立的同时，R Isaacs [A1] 创立了零和微分对策理论．Isaacs 的工作有巨大的影响，在苏联 [A3] 涉及类似的研究 嗣后，信息（"何时谁知道什么"）的作用摆到了一个更中心的位置 [A2] 在 [A4] 中，一篇具有直至 1981 年的现有对策论文献的评论长文已发表．

参考文献

[A1] Isaacs, R, Differential games, Wiley, 1965

[A2] Basar, T and Olsder, G J, Dynamic noncooperative game theory, Acad Press, 1982

[A3] Krasovskiĭ, N and Subbotin, A I, Game theoretical control problems, Springer, 1988（译自俄文）

[A4] Shubik, M (ed), The mathematics of conflict, North-Holland, 1983

[A5] Driessen, T, Cooperative games, solutions and applications, Kluwer, 1988

[A6] Damme, E van, Stability and perfection of Nash equilibria, Springer, 1987

[A7] Lemke, C E and Howson, J T, jr, Equilibrium points of bimatrix games, *SIAM, J Appl Math*, **12** (1964), 413－423

[A8] Scarf, H E, The computation of economic equilibria, Yale Univ Press, 1973

[A9] Szép, J and Forgó, F, Introduction to the theory of games Reidel, 1985

胡宣达 译 钟琡绵 校

Γ相关 [gamma-correlation, гамма-корреляция]

相依的非负随机变量 X_1 和 X_2 的二维分布，其密度为

$$p(x_1, x_2) = p_1(x_1)\,p_2(x_2)\sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k L_k^{\alpha_1}(x_1) L_k^{\alpha_2}(x_2),$$

此处

$$0\leqslant x_v<\infty,\ \alpha_v\geqslant\gamma>-1,\ p_v(x_v)=x_v^{\alpha_v}\frac{e^{-x}}{\Gamma(\alpha_v+1)}\ ,$$

$L_k^{\alpha_v}(x_v)$是正半轴上以 $p_v(x_v)$ 为权的正交标准化 **Leguerre 多项式** (Laguerre polynomials),

$$a_k=\frac{\Gamma(\gamma+k+1)}{\Gamma(\gamma+1)}\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_1+k+1)\Gamma(\alpha_2+k+1)}}\ ;$$

$$c_k=\int_0^1\lambda^k dF(\lambda),\ k=0,1,\quad ,$$

而 $F(\lambda)$是区间$[0,1]$上的任意分布函数．X_1 和 X_2 的相关系数是 $c_1(\gamma+1)/\sqrt{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}$ 如果 $\alpha_1=\alpha_2=\gamma$，则得到对称Γ相关，这时，$a_k=1$, $k=0,1,$ ，相应的特征函数是

$$\varphi(t_1,t_2)=\int_0^1\frac{dF(\lambda)}{[1-it_1-it_2-t_1t_2(1-\lambda)]^{1+\gamma}}$$

如果 $F(\lambda)$使$\mathrm{P}\{\lambda=R\}=1$，则 $c_k=R^k$，$\varphi(t_1,t_2)=[1-it_1-it_2-t_1t_2(1-R)]^{-1-\gamma}$，且 R 是 X_1 与 X_2 的**相关系数** (correlation coefficient) ($0\leqslant R\leqslant 1$). 对最后这种情况，密度级数可用下式表达（见 [2]）

$$p(x_1,x_2)=\frac{(x_1x_2)^{\gamma}e^{-x_1-x_2}}{\Gamma^2(\gamma+1)}\sum_{k=0}^{\infty}R^kL_k^{\gamma}(x_1)L_k^{\gamma}(x_2)$$

$$=\frac{e^{-(x_1+x_2)/(1-R)}}{(1-R)\Gamma(\gamma+1)}\left[\frac{x_1x_2}{R}\right]^{\gamma/2}I_{\gamma}\left[\frac{2\sqrt{x_1x_2R}}{1-R}\right],$$

此处 I_γ 是虚变量的 Bessel 函数（[2]）.

参考文献

[1] Сарманов, И О , в кн Тр гидрологического ин-та, 1969, 37－61

[2] Myller-Lebedeff, W , Die theorie der integralgleichungen in anwendung auf einige reihenentwicklungen, *Math Ann* , **64** (1907), 388－416

O B Сарманов 撰

【补注】 该二维分布只是一维 Γ **分布** (gamma-distribution) 许多可能的多维推广中的一种 关于该分布的综述和详细介绍见 [A1] 第 40 章．

参考文献

[A1] Johnson, N L and Kotz, S , Distributions in statistics, 2 Continuous multivariate distributions, Wiley, 1972

陶 波 译 李国英 校

Γ分布 [gamma-distribution, гамма-распределение]

正半轴 $0<x<\infty$ 上的连续概率分布，其密度为

$$g_\alpha(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x},$$

此处 α 为取正值的参数，$\Gamma(\alpha)$是 Euler 的 Γ 函数

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy$$

对应的分布函数当 $x\leqslant 0$ 时为 0，当 $x>0$ 时由下式给出

$$G_\alpha(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x y^{\alpha-1}e^{-y}dy$$

右边的积分称为不完全 Γ 函数 (incomplete gamma-function)．$\alpha>1$时，密度 $g_\alpha(x)$ 是单峰的，在 $x=\alpha-1$ 处达到极大 $(\alpha-1)^{\alpha-1}e^{-(\alpha-1)}/\Gamma(\alpha)$ 如果 $0<\alpha<1$，当 x 增加时，密度 $g_\alpha(x)$ 单调下降 当 $x\downarrow 0$ 时，$g_\alpha(x)$ 无限上升．Γ分布的特征函数是

$$\varphi(t)=(1-it)^{-\alpha}$$

Γ分布的矩由下式给出

$$m_k=\int_0^\infty x^kg_\alpha(x)dx=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}\ ,k>-\alpha$$

特别地，数学期望和方差都等于 α Γ分布族关于卷积运算封闭

$$g_{\alpha_1}*g_{\alpha_2}=g_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

在应用中，Γ分布起着重要的（尽管不总是直接的）作用．在 $\alpha=1$ 的特殊情形下，我们得到指数密度 (exponential density)．在排队论中，α 为整数的 Γ 分布称为 **Erlang 分布** (Erlang distribution) 由于 Γ 分布与正态分布有密切联系，它在数理统计中经常出现 例如，独立标准正态分布随机变量的平方和 $\chi^2=X_1^2+\cdot+X_n^2$ 有密度 $g_{n/2}(x/2)/2$，此即自由度为 n 的 χ^2 分布 ('chi-squared' distribution)．因此，在讨论正态随机变量二次型的数理统计问题中，有许多重要分布（例如 **Student 分布** (Student distribution)，**Fisher F 分布** (Fisher F-distribution) 和 **Fisher z 分布** (Fisher z-distribution)) 均与 Γ 分布有关 如果 X_1 和 X_2 独立，密度分别为 g_{α_1} 和 g_{α_2}，则随机变量 $X_1/(X_1+X_2)$ 的密度是

$$\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1},\ 0<x<1,$$

它是 B 分布密度 (density of the beta-distribution)．Γ 分布随机变量 X 的线性函数的密度构成一个特殊的分布类——所谓"Ⅲ 型" Pearson 分布族．Γ分布的密度是正交 **Laguerre 多项式** (Laguerre polynomials) 系的权函数．Γ分布的值可用不完全 Γ 函数表 [1], [2] 计算.

参考文献

[1] Пагурова, В И , Таблицы неполной гамма-функции, М , 1963

[2] Pearson, K (ed), Tables of the incomplete gamma function, Cambridge Univ Press, 1957

A B Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Johnson, N L and Kotz, S , Distributions in statistics, 1 Continuous univariate distributions, Wiley, 1970

[A2] Comrie, L J , Chambers's six-figure mathematical tables, 11, Chambers, 1949

【译注】

更一般地，Γ分布的密度是

$$g_{\alpha\beta}(x)=\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta},\ x>0$$

其中 α, β 为取正值的参数． 陶 波 译 李国英 校

Γ函数 [gamma-function, Γ-function, гамма-функция]

超越函数 $\Gamma(z)$，它把阶乘 $z!$ 的值扩展到任何复数 $z\neq 0,-1,\quad$ 的情况．这个函数是 L Euler 于 1729 年致 Ch Goldbach 的一封信中用无穷乘积

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{z}}{z(z+1)\quad(z+n)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{z}}{z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\quad\left(1+\frac{z}{n}\right)},$$

引入的，L Euler 由此得到积分表示（第二类 **Euler 积分**（Euler integrals））

$$\Gamma(z)=\int_{0}^{\infty}x^{z-1}e^{-x}dx,$$

当 $\mathrm{Re}\,z>0$ 时，此式成立．函数 x^{z-1} 的多值性可由公式 $x^{z-1}=e^{(z-1)\ln x}$ 来消除，其中 $\ln x$ 是实的 Γ函数这个名称和符号 $\Gamma(z)$ 是 A M Legendre 在 1814 年提出的．

如果 $\mathrm{Re}\,z<0$ 且 $-k-1<\mathrm{Re}\,z<-k$, $k=0,1,\quad$，则 Γ函数可以由 Cauchy-Saalschütz 积分（Cauchy-Saalschütz integral）

$$\Gamma(z)=\int_{0}^{\infty}x^{z-1}\left(e^{-x}-\sum_{m=0}^{k}(-1)^{m}\frac{x^{m}}{m!}\right)dx$$

来表示．

在除去点 $z=0,-1,\quad$ 的整个平面上，Γ函数满足 Hankel 积分表示（Hankel integral representation）

$$\Gamma(z)=\frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\int_{C}s^{z-1}e^{-s}ds,$$

其中 $s^{z-1}=e^{(z-1)\ln s}$，而 $\ln s$ 是对数的分支，满足 $0<\arg\ln s\leqslant 2\pi$，积分周线 C 如图 1 所示

图 1

从 Hankel 表示可以看出，$\Gamma(z)$ 是**亚纯函数**（meromorphic function） 在点 $z_n=-n\ (n=0,1,\quad)$ 上，它具有残数为 $(-1)^n/n!$ 的单极点．

Γ函数的基本关系式和性质

1）Euler 函数方程（Euler functional equation）

$$z\Gamma(z)=\Gamma(z+1),$$

或

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z(z+1)\quad(z+n)}\Gamma(z+n+1);$$

$\Gamma(1)=1$，当 $n>0$ 为整数时，$\Gamma(n+1)=n!$；规定 $0!=\Gamma(1)=1$

2）Euler 完全化公式（Euler completion formula）

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

特别是，$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$，如果 $n>0$ 为整数，则有

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\quad\cdot(2n-1)}{2^{n}}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left|\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|^{2}=\frac{\pi}{\operatorname{ch}y\pi},$$

其中 y 为实变量

3）Gauss 乘法公式（Gauss multiplication formula）

$$\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{m}\right)=(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}m^{\frac{1}{2}-mz}\Gamma(mz),$$

$$m=2,3,4,$$

当 $m=2$ 时，这就是 Legendre 加倍公式（Legendre duplication formula）

4）如果 $\mathrm{Re}\,z\geqslant\delta>0$ 或 $|\mathrm{Im}\,z|\geqslant\delta>0$，则 $\ln\Gamma(z)$ 可以渐近展开为 Stirling 级数（Stirling series）

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln 2\pi+$$

$$+\sum_{n=1}^{m}\frac{B_{2n}}{2n(2n-1)z^{2n-1}}+O(z^{-2m-1}),$$

$$m=1,2,\quad,$$

其中 B_{2n} 为 **Bernoulli 数**（Bernoulli numbers） 由此可得等式

$$\Gamma(z)=\sqrt{2\pi}\,z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}\left[1+\frac{z^{-1}}{12}+\frac{z^{-2}}{288}-\right.$$

$$\left.-\frac{139z^{-3}}{51840}-\frac{571z^{-4}}{2488320}+O(z^{-5})\right].$$

特别是，

$$\Gamma(1+x)=\sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{\theta}{12x}},\ 0<\theta<1$$

更准确的是 Sonin 公式（Sonin formula）([6])．

$$\Gamma(1+x)=\sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{1}{12(x+\theta)}},\ 0<\theta<\frac{1}{2}$$

5）在实域中，当 $x>0$ 时 $\Gamma(x)>0$，在区间 $-k-1<x<-k(k=0,1,\ \ )$ 上 $\Gamma(x)$ 取符号 $(-1)^{k+1}$（图2） 对于一切实数 x，不等式

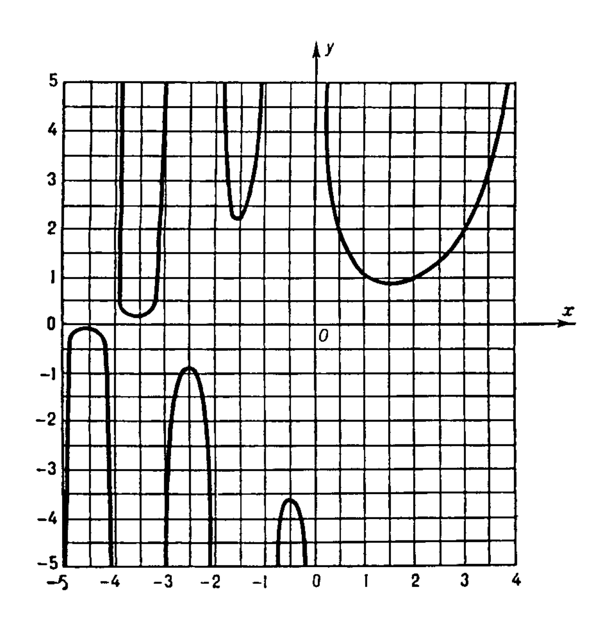


图2 函数 $y=\Gamma(x)$ 的图形

$$\Gamma\Gamma''>\Gamma^{2}\geqslant 0$$

成立，即不论是 $|\Gamma(x)|$ 的还是 $\ln|\Gamma(x)|$ 的一切分支都是凸函数 对数凸性这个性质在函数方程

$$\Gamma(1+x)=x\Gamma(x)$$

的一切解中确定 Γ 函数，最多只差一个常数因子.

对于正的 x 值，Γ 函数在 $x=1.4616321$ 处具有唯一的极小值，它等于 0.885603 函数 $|\Gamma(x)|$ 的局部极小值构成的序列，当 $x\to-\infty$ 时，趋向于零.

6）在复域中，如果 $\operatorname{Re}z>0$，则当 $|\operatorname{Im}z|\to\infty$ 时 Γ 函数迅速减小，

$$\lim_{|\operatorname{Im}z|\to\infty}|\Gamma(z)|\,|\operatorname{Im}z|^{\frac{1}{2}-\operatorname{Re}z}e^{\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im}z|}=\sqrt{2\pi}$$

7）函数 $1/\Gamma(z)$（图3）是一阶极大型整函数，当 $r\to\infty$ 时，渐近地有

$$\ln M(r)\sim r\ln r,$$

其中

$$M(r)=\max_{|z|=r}\frac{1}{|\Gamma(z)|}$$

这个函数可以表示为 Weierstrass 无穷积（Weierstrass infinite product）

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right],$$

它在复平面的任何紧集上绝对一致收敛（C 是 **Euler 常数**（Euler constant））

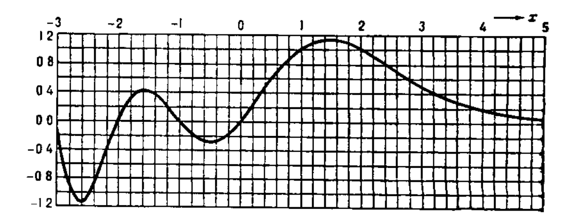


图3 函数 $1/\Gamma(x)$ 的图形

Hankel 积分表示成立

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^*}e^{s}s^{-z}ds,$$

其中积分周线 C^* 如图4所示

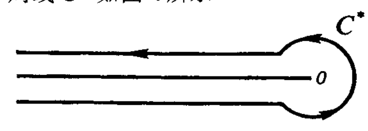


图4

Г. Ф Вороной（[7]）得到了关于 Γ 函数的幂的积分表示

在应用中，所谓多 Γ 函数（poly gamma-functions）—— $\ln\Gamma(z)$ 的 k 阶导数——具有重要意义. 函数（Gauss ψ 函数（Gauss ψ-function））

$$\psi(z)=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=$$

$$=-C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z-1}{(n+1)(z+n)}=-C+\int_{0}^{1}\frac{1-(1-t)^{z-1}}{t}dt$$

是亚纯函数，它在点 $z=0,-1,\ \ $ 上具有单极点，并且满足函数方程

$$\psi(z+1)-\psi(z)=\frac{1}{z}$$

当 $|z|<1$ 时，由 $\psi(z)$ 的表示式得到公式

$$\ln\Gamma(1+z)=-Cz+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k}S_{k}}{k}z^{k},$$

其中

$$S_{k}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-k};$$

这个公式可以用来计算点 $z=1$ 的邻域内的 $\Gamma(z)$ 的值.

关于其他多 Γ 函数，见[2] **不完全 Γ 函数**（incomplete gamma-function）由下列等式来定义

$$I(x, y)=\int_0^y e^{-t}t^{x-1}dt$$

函数$\Gamma(z)$和$\psi(z)$是不满足任何有理系数线性微分方程的超越方程(Holder定理(Holder theorem))

Γ函数在数学分析中之所以特别重要，是由于它能用来表示大量的定积分、无穷乘积、级数的和(例如，见**B函数**(beta-function)) 此外，它还广泛地应用于特殊函数(**超几何函数**(hypergeometric function)(Γ函数为其极限情况)、**柱函数**(cylinder function)等)理论、解析函数论等方面.

参考文献

[1] Whittaker, E T and Watson, G N, A course of moderm analysis, Cambridge Univ Press, 1952

[2] Bateman, H and Erdélyi, A, Higher transcendental functions The Gamma function The hypergeometric function Legendre functions, 1, McGraw-Hill, 1953 (中译本 A 爱尔台里，高级超越函数，上海科学技术出版社，1957－1958)

[3] Bourbaki, N, Elements of mathematics Functions of a real variable, Addison-Wesley, 1976(译自法文)

[4] Математический анализ Функции, пределы, ряды, цепные дроби (Справочная математическая библиотека), М, 1965

[5] Nielsen, N, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Chelsea, reprint, 1965

[6] Сонин, Н Я, Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах, М, 1956

[7] Вороной, Г Ф, Собр соч, т 2, К, 1952, 53－62

[8] Jahnke, E and Emde, F, Tables of functions, with formulae and curves, Dover, reprint, 1945(译自德文).

[9] Angot, A, Compléments de mathématiques A l'usage des ingénieurs de l'electrotechnique et des télécommunications, C N E T, 1957

Л П Купцов 撰

【补注】 *q*仿似Γ函数(analogue of the gamma-function)由下式给出.

$$\Gamma_q(z)=(1-q)^{1-z}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-q^{k+1}}{1-q^{k+z}},$$

$$z\neq 0, -1, -2, \quad , 0<q<1,$$

见[A2] 它的由来，可以追溯到E Heine (1847)和D Jackson(1904) 关于Γ函数，亦见[A1]

参考文献

[A1] Artin, E, The gamma function, Holt, Rinehart & Winston, 1964

[A2] Askey, R, The *q*-Gamma and *q*-Beta functions, *Appl Anal*, **8** (1978), 125－141

张鸿林 译

Gårding 不等式 [**Gårding inequality**, **Гординга неравенство**]

形如

$$\|u\|_m^2\leqslant c_1 \operatorname{Re}B[u, u]=c_2\|u\|_0^2$$

的不等式，其中$u\in C_0^\infty(G)$为一具有紧支集(在G中)的复值函数 $G\subset \mathbf{R}^n$为一有界域，且

$$B[u, u]=\sum_{|s|\ |t|\leqslant m}\int_G a_{st}D^s u\overline{D^t u}\,dx$$

为一于$\overline{G}$中具有复连续系数a_{st}的二次积分式 Gårding 不等式对于任何函数$u\in C_0^\infty(G)$成立的一个充分条件，是存在着正常数c_0，使得

$$\operatorname{Re}\sum_{|s|\ |t|\leqslant m}a_{st}\xi^s\xi^t\geqslant c_0|\xi|^{2m}$$

对于任何$x\in G$及所有实向量$\xi=(\xi^1, \cdot, \xi^n)$成立 Gårding 不等式由 L Gårding([1])提出并证明.

参考文献

[1] Gårding, L, Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, *Math Scand*, **1** (1953), 55－72

[2] Yosida, K, Functional analysis, Springer, 1980 (中译本 吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1981)

А А Дезин 撰

【补注】 这个不等式精确的形式已由 L. Hörmander 给出. 见[A1]第18 1, 18.6节以及该处所引文献.

参考文献

[A1] Hormander, L, The analysis of linear partial differential operators, 3, Springer, 1985

王声望 译 郑维行 校

气体动力学方程 [**gas dynamics, equations of**; **газовой динамики уравнения**]

描述气体状态的气体质量、动量和能量守恒基本定律的数学表达式 气体是大量处于连续浑沌运动的粒子(分子，原子，离子)的集合 单个粒子间的相互作用及其运动的计算是十分困难的，为此，在描述气体状态时采用了一种统计的或连续的方法. 在应用这种方法时，气体粒子系综的状态由粒子的分布函数来表征，它定义于一个七维相空间x^i, u^i, $t(i=1, 2, 3)$来一个四维空间x^i, $t(i=1, 2, 3)$ 在前一情况下，研究一标量分布函数

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)=f(x^1, x^2, x^3, u^1, u^2, u^3, t),$$

其中量x^i, u^i, t是连续变化自变量x^i和t在有界或无界区间内变化，而$-\infty<u^i<+\infty$. 函数$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$本身满足 Boltzmann 积分-微分方程(见**Boltzmann 方程**(Boltzmann equation)，**动理学方程**(kinetic equation))或满足与物理前提有关的其他方程(见**Боголюбов 方程系列**(Bogolyubov chain of equations),

Власов 动理学方程（Vlasov kinetic equation)) 在后一情况下，描述气体状态的分布函数是一矢量函数

$$\mathbf{w}=\{\rho,\ \rho u^1,\ \rho u^2,\ \rho u^3,\ \rho E\},$$

依赖于四个自变量 x^1, x^2, x^3, t，它们全都在区间 $(-\infty, \infty)$ 连续、独立变化．在这一情况下，一个"粒子"，严格地讲，应理解为一气体物质元，它占据无限小体积和具有一定速度 $\mathbf{u}=\{u^1, u^2, u^3\}$，速度是自变量 x^1, x^2, x^3, t 的函数．这里 $\rho=\rho(x^1, x^2, x^3, t)$是气体密度，亦即单位体积的气体质量，$E=\varepsilon+\mathbf{u}^2/2$ 是气体单位质量的总能量，ε 是气体单位质量的内能

在局域热力学平衡的假设下，Boltzmann 方程给出气体动力学积分形式的守恒定律　在惯性正交坐标系中，

$$\oint_{l_m} w^{\iota}d\mathbf{x}+\oint_{l_m}\frac{\partial\sum^{\iota\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\,dtd\mathbf{x}=\oint_{L_{m+1}}F^{\iota}dtd\mathbf{x},\quad (1)$$

这里 L_{m+1} 是曲面 $l_m(m\geqslant 1)$ 包围的空间体积　关系(1)对具有边界 l_m 的任意体积 L_{m+1} 在 $(m+1)$ 维相空间 $\{\mathbf{x}, t\}=\{x^1,\ \ , x^m, t\}$ 都成立．量 w^{ι}，$\sum^{\iota\alpha}$，F^{ι} 在三维情况下有下列形式．

$$\mathbf{w}=\begin{bmatrix}w^0\\w^1\\w^2\\w^3\\w^4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho\\\rho u^1\\\rho u^2\\\rho u^3\\\rho E\end{bmatrix},\qquad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}0\\F^1\\F^2\\F^3\\F^{\alpha}u^{\alpha}\end{bmatrix},\qquad (2)$$

$$\sum^{\iota\alpha}=\sum^{1}{}^{\iota\alpha}+\sum^{2}{}^{\iota\alpha}+\sum^{3}{}^{\iota\alpha},$$

$$\sum^{r}{}^{\iota\alpha}=\left\|\overset{r}{\eta}_{kj}\right\|,\quad r=1, 2, 3,$$

$$\overset{1}{\eta}_{kj}=w^k u^j,$$

$$\overset{2}{\eta}_{kj}=p\delta^{kj}+pu^j\delta^{4k},$$

$$\overset{3}{\eta}_{0j}=0,\ \overset{3}{\eta}_{1j}=-\sigma^{1j},\ \overset{3}{\eta}_{2j}=-\sigma^{2j},\ \overset{3}{\eta}_{3j}=-\sigma^{3j},$$

$$\overset{3}{\eta}_{4j}=-\kappa\frac{\partial T}{x^j}-\sigma^j_{\alpha}u^{\alpha},$$

$$\sigma^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\lambda d^{\gamma}_{\gamma}\delta^{\alpha\beta}+\mu d^{\alpha\beta},$$

$$d^{\alpha\beta}=d^{\alpha}_{\beta}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial u^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right],$$

$$k=0,\ \ ,4,\ \alpha,\beta,\gamma,\iota,j=1, 2, 3$$

这里 p 是气体压力，T 是气体温度，$\delta^{\alpha\beta}$ 是 Kronecker 符号，λ 是压缩粘性系数，μ 是运动粘性系数，κ 是导热系数　公式的标记是张量分析中采用的．

对光滑流动，散度形式的微分方程组为

$$\frac{\partial w^{\iota}}{\partial t}+\frac{\partial\sum^{\iota\alpha}}{\partial x^{\alpha}}=F^{\iota}\qquad (3)$$

加上状态方程之后，这组方程封闭．热力学平衡时，状态方程的形式假定为

$$p=p(\rho, T),\ \varepsilon=\varepsilon(\rho, T),\ \kappa=\kappa(\rho, T),\qquad (4)$$
$$\lambda=\lambda(\rho, T),\ \ \mu=\mu(\rho, T)$$

如果系统是非平衡的，则这些量可与流动函数的梯度有关

表示式(2)有一定的物理意义 $\sum^{1}{}^{\iota\alpha}$ 对应质量、动量和能量的对流通量，$\sum^{2}{}^{\iota\alpha}$ 对应应力张量球形非耗散部分，亦即压力，$\sum^{3}{}^{\iota\alpha}$ 对应应力耗散部分（粘性、热扩散）　此表示式用在分裂方法中获得求解气体动力学问题的有效积分格式．

气体流动可在各种坐标系中描述．除和物理空间固定联结的坐标系—— Galileo（或 Euler）坐标系外，各种运动的，不一定是 Descates 或 Galileo 的坐标系，也被应用　与气体粒子相联结的 Lagrange 坐标系被广泛地使用　在这一系统中，每一物质元有一固定的坐标　在 Euler 方法中，在每一时刻 t，气体状态的参量被定义为某一不动坐标系的点坐标 x^1, x^2, x^3 (Euler 坐标) 的函数，而矢量 $\mathbf{u}=\mathbf{u}(x^1, x^2, x^3, t)$ 表示 t 时刻位于点 x^1, x^2, x^3 的气体粒子的速度．在 Lagrange 方法中，速度 $\mathbf{u}$ 和热力学量值对每一粒子定为时间 t 的函数．假如用参数 q^1, q^2, q^3 来指定气体粒子，则气体流动参数将作为时间 t 和 q^1, q^2, q^3 (Lagrange 坐标) 的函数而得到．Euler 或 Lagrange 坐标系间的联系具有形式

$$x^{\iota}=q^{\iota}+\int_0^t u^{\iota}(q^1, q^2, q^3, \tau)d\tau,\ \iota=1, 2, 3$$

这里 $x^{\iota}=x^{\iota}(q^1, q^2, q^3, t)$ 是在 $t=0$ 时刻位于点 $x^{\iota}=q^{\iota}$ 的粒子的 Euler 坐标　假如只有一个空间变量，且假如气体动力学变量是连续可微函数，则粘性导热气体的方程有如下的形式

在 Euler 坐标下．

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[p+\rho u^2-\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right]=0,$$

$$\frac{\partial\rho E}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u[E+\frac{p}{\rho}]-\mu u\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right],$$

在 Lagrange 坐标下

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial q}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial q}\left[p-\mu\rho\frac{\partial u}{\partial q}\right]=0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial q}\left[u\left[p-\mu\rho\frac{\partial u}{\partial q}\right]\right]=\rho\frac{\partial}{\partial q}\left[\kappa\frac{\partial T}{\partial q}\right]$$

这里 $v=1/\rho, \partial x(q,t)/\partial t=u(q,t)$

在任意运动坐标系情况下，通常最好是根据张量定律同时变换速度分量 假如

$$x^{i}=x^{i}(y^{1},y^{2},y^{3},t) \quad (5)$$

是空间坐标的变换，而时间坐标保持不变，则映射(5)可与气体流动本身相联系，这时它将决定一依赖此流动的局域坐标系的场．包括改变时间坐标的更通用的变换也是可能的

(3)中小参数 $\lambda,\mu,\kappa,\omega$ ($\omega=1/c^2$ 是压缩性系数）的分析在气体动力学方程理论和应用中起重要作用 假如 $\lambda=\mu=\kappa=0$，则（3)为理想气体动力学方程，假如 $\lambda=$ 常数，$\mu=$ 常数，$\kappa=\omega=0$，方程（3)为不可压液体的 **Navier-Stokes 方程**（Navier-Stokes equations） 这些方程不是 Cauchy-Ковалевская 型的．假如 $\lambda=$ 常数，$\mu=$ 常数，$\kappa=0$，$\omega=$ 常数，则得到 Cauchy-Ковалевская 型的抛物方程组，但不是强抛物性的 在湍流理论和非 Newton 液体中，系数 λ,μ 可能依赖于气体动力学量的梯度

主定关系（2)以及特别是状态方程（4),表征了气体动力学方程组（3)的类型及其一系列实质特性．这样，如果

$$\left[\frac{\partial p}{\partial\rho}\right]_S\geqslant 0, \quad (6)$$

则对理想可压缩气体（$\lambda=\mu=\kappa=0$）方程组(3)是双曲型的，这里熵 S 是由关系（热力学第二定律）

$$TdS=pd\frac{1}{\rho}+d\varepsilon$$

定义 条件（6)是局域的，它依赖于解，并有时可能不被满足．例如，在 van der Waals 状态方程的情况下，条件（6)被破坏，方程成为椭圆型的，解是不稳定的

守恒定律（1)使有可能组成气体动力学方程的广义解，它不一定是连续的，且不满足气体动力学微分方程（3） 气体动力学方程的广义解的完整理论尚未建立起来，但一些最简单的广义解已经全面研究过，它们包括，例如，激波、中心稀疏波、接触流动等．存在一个假说，亦即，理想可压缩气体方程的广义解是粘性气体在 $\lambda\to 0$ 和 $\mu\to 0$ 时相应解的极限．这一论断对一维激波和方程类型为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

的某些特殊情况已被严格证明 定常的气体动力学方程具有特殊意义，它主要与无限空间中定常绕流或定常管道流有关 这时，方程组（3)的解与 t 无关，方程组具有如下形式

$$\frac{\partial\sum^{i\alpha}}{\partial x^{\alpha}}=F^{i} \quad (7)$$

对定常方程组（7)提出某一边值问题，它可能十分复杂，而方程（7)本身既可能是椭圆型的，又可能是混合型的 例如，对理想可压缩气体流动问题，在流动是位势的假设下，在二维情况下，可得方程．

$$\left[\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right]^2-c^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^1)^2}+2\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\partial x^2}+$$

$$+\left[\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\right]^2-c^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^2)^2}=0 \quad (8)$$

这里 $u^1=\partial\varphi/\partial x^1$, $u^2=\partial\varphi/\partial x^2$, φ 是速度势，c^2 是声速平方，它可由 Bernoulli 积分获得

$$\frac{1}{2}\left[(u^1)^2+(u^2)^2\right]+\int c^2(\rho)d\ln\rho=\text{常数}.$$

对方程（8)可以提出绕给定周线 l 的流动问题

$$u^1(\infty)=U_0^1,\quad u^2(\infty)=U_0^2,\quad u_n=\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$$

这里 u_n 是速度矢量沿周线 l 法线的法向分量 在 $(u^1)^2+(u^2)^2-c^2>0$ 时，方程（8)是双曲型的，在 $(u^1)^2+(u^2)^2-c^2<0$ 时，则它是椭圆型的．由椭圆型至双曲型的过渡是可能的（跨声速流动） 可以表明，在跨声速流动情况下边值问题是不适定的（见**不适定问题**(ill-posed problems)），因为周线的极微小变化会使边值问题成为连续函数类中不可解的．

气体动力学不稳定性和湍流是饶有趣味的问题，通常在非自洽方程(Orr-Sommerfeld 方程，Reynolds 方程）理论的范围内对它们加以阐述．就实际应用意义来说，描述复杂介质（多相介质，非 Newton 液体，磁流体力学）运动的气体动力学方程，现已变得十分重要．大多数数学物理方程是气体动力学问题线性化的结果 气体动力学问题的数值解可见**气体动力学的数值方法**(gas dynamics, numerical methods of)

参考文献

[1] Serrin, J, Mathematical principles of classical fluid mechanics, in S Flügge (ed), Handbuch der Physik, Vol

8/1, Springer, 1959, 125－263

[2] Седов, Л И, Механика сплошной среды, т 1－2, М, 1970 (英译本 Sedov L I, A course in continuum mechanics, 1－4, Wolters-Noordhoff, 1971－1972)

[3] Ландау, Л Д, Лифшиц, Е М, Механика сплошных сред, 2 изд, М, 1954 (英译本 Landau, L D and Lifshits, E M, Mechanics, Pergamon, 1965)

[4] Кочин, Н Е, Кибель, И А, Розе, Н В, Теоретическая гидромеханика, ч 1－2, М, 1963 (英译本 Kochin, N E, Kibel', I A and Roze, N V, Theoretical hydrodynamics, Interscience, 1964)

[5] Брановер, Г Г, Цинобер, А М, Магнитная гидродинамика несжимаемых сред, М, 1970

[6] Рождественский, Б Л, Яненко, Н Н, Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, М, 1968 (英译本 Rozhdestvenskiĭ, B L and Yanenko, N N, Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics, Amer Math, Soc, 1983) Ю И Шокин, Н Н Яненко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Courant, R and Friedrichs, K O, Supersonic flow and shock waves, Interscience, 1984 (中译本 R 柯朗, K O 弗里德里克斯, 超声速流与冲击波, 科学出版社, 1986)

[A2] Liepmann, H W and Roshko, A, Elements of gas dynamics, Wiley, 1957

[A3] Sears, W R (ed), General theory of high speed aerodynamics, Princeton Univ Press, 1954

[A4] Cercignani, C, The Boltzmann equation and its applications, Springer, 1988 唐福林 译 沈青 校

气体动力学的数值方法 [**gas dynamics, numerical methods of, газовой динамики численные методы**]

用计算算法求解气体动力学问题的方法．为考察求解气体动力学问题的数值方法理论的基本方面，首先将**气体动力学方程**（gas dynamics, equations of）写成惯性正交坐标系中的守恒定律的形式

$$\frac{\partial w^i}{\partial t}+\frac{\partial \sum^{i\alpha}}{\partial x^\alpha}=F^i,$$

其中

$$\mathbf{w}=\begin{bmatrix} w^0\\ w^1\\ w^2\\ w^3\\ w^4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u^1\\ \rho u^2\\ \rho\\ \rho E\end{bmatrix},\qquad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}0\\ F^1\\ F^2\\ F^3\\ F^\alpha u^\alpha\end{bmatrix},$$

$$\sum^{i\alpha}=\sum^{1}{}^{i\alpha}+\sum^{2}{}^{i\alpha}+\sum^{3}{}^{i\alpha},$$

$$\overset{1}{\sum}{}^{i\alpha}=\begin{bmatrix}\rho u^1 & \rho u^2 & \rho u^3\\ \rho u^1u^1 & \rho u^1u^2 & \rho u^1u^3\\ \rho u^2u^1 & \rho u^2u^2 & \rho u^2u^3\\ \rho u^3u^1 & \rho u^3u^2 & \rho u^3u^3\\ \rho Eu^1 & \rho Eu^2 & \rho Eu^3\end{bmatrix},$$

$$\overset{2}{\sum}{}^{i\alpha}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ p & 0 & 0\\ 0 & p & 0\\ 0 & 0 & p\\ pu^1 & pu^2 & pu^3\end{bmatrix},$$

$$\overset{3}{\sum}{}^{i\alpha}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -\sigma^{11} & -\sigma^{12} & -\sigma^{13}\\ -\sigma^{21} & -\sigma^{22} & -\sigma^{23}\\ -\sigma^{31} & -\sigma^{32} & -\sigma^{33}\\ -\kappa\frac{\partial T}{\partial x^1}-\sigma^1_\alpha u^\alpha & -\kappa\frac{\partial T}{\partial x^2}-\sigma^2_\alpha u^\alpha & -\kappa\frac{\partial T}{\partial x^3}-\sigma^3_\alpha u^\alpha\end{bmatrix},$$

$$\sigma^{\beta k}=\frac{1}{2}\lambda d^\gamma_\gamma\delta^{\beta k}+\mu d^{\beta k},$$

$$d^{\beta k}=d^\beta_k=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u^\beta}{\partial x^k}+\frac{\partial u^k}{\partial x^\beta}\right],$$

$$j=0,\quad ,m+1,\quad \alpha,\beta,\gamma,k=1,\quad ,m.$$

这里，在一维情况下，$m=1$，在二维情况下，$m=2$，在三维情况下，$m=3$，ρ 为气体密度，p 为气体压力，$\mathbf{u}=\{u^1,u^2,u^3\}$ 为气体速度，T 为气体温度，$E=\varepsilon+\mathbf{u}^2/2$ 为气体单位质量的总能量；ε 为比内能；λ 为压缩粘性系数，μ 为剪切粘性系数，κ 为热传导系数，$\delta^{\beta k}$ 为 Kronecker 符号．

气体动力学中区分两类基本问题

a) 有界或无界区域的 **Cauchy 问题**（Cauchy problem）(气体动力学的非定常问题)，

b) 有界或无界区域的气体动力学的定常边界问题

这两类问题还可以依气体流动的物理性质细分为一些类别．按此原则可以区分

α) 理想气体流动（$\lambda=\mu=\kappa=0$）;

β) 粘性不可压缩气体流动（$\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$, $\kappa=\omega=0$，其中 ω 为可压缩系数，$\omega=1/c^2$，而 c 为声速），由 **Navier-Stokes 方程**（Navier-Stokes equations）描述

γ) 粘性可压缩热传导气体流动（$\lambda\neq 0, \mu\neq 0, \kappa\neq 0, \omega\neq 0$）

从历史上讲，求解气体动力学问题的方法的发展

与这些问题分类无关 现在，有大量的有限差分方法可用以得到不同级的近似 提出了可以应用于所有气体动力学问题的构造数值方法的一般原则，但尚未最终以数学的严格性加以证明 这些原则是

1）将理想气体的方程的广义解表达为相应的具有物理的（$\sum^{3} {}^{i\alpha} \neq 0$）或人工耗散项的解在这些项趋于零时的极限．人工耗散项可以直接引入气体动力学方程，或者可以由有限差分格式构造本身隐式地决定(近似粘性)．

2）积分守恒定律和微分方程本身的几何的、解析的和按物理过程的分裂（分解）（弱逼近方法，见**分步法**（fractional steps, method of））

3）将定常解表达为非定常问题解的极限（**调节法**(adjustment method)）．这时，作为辅助的非定常问题，既利用双曲型方程，也利用抛物型微分方程

4）用 Cauchy-Ковалевская 类型方程在相应小参数趋于零时逼近非 Cauchy-Ковалевская 类型方程（**Navier-Stokes 方程**（Navier-Stokes equations），渗透方程）．

5）构造正规的和非正规类型的运动差分网格．

6）在有限差分格式中按内正规点和边界点划分近似问题．

7）将复杂的线性或非线性代数方程表达为递推关系式（近似或准确分解方法）

8）将边值问题延拓至边界外以及将其纳入简单区域边值问题的方法（虚拟区方法）

所有这些表达与方法，最终使得可以将气体动力学复杂问题的解的算法归结为标准结构的简单问题求解的算法（算法模数分析）．这种方法暂时尚无严格根据，但实际上已被证明是有效的，并得到越来越广泛的应用

求解气体动力学问题的数值方法可以划分为两个主要类型 显式显示奇异性的方法（激波，接触边界，中心稀疏波）以及所谓连续计算方法，在该方法中奇异性不直接显示

在第一类方法中，气体动力学方程的广义解表达为在覆盖相空间 $\{x^1, x^2, x^3, t\}$ 的某些区域中被确定的经典解的集合，这些解通过共同边界（间断线）相衔接，并满足衔接条件（动力学相容条件）．在每一区域中可以应用适合于经典解的有限差分格式，而衔接条件应通过一通常为非线性的代数方程组解出．经典解的间断表达的最广泛应用的方法之一是特征线法．这一方法只能用于解可用双曲方程描述的气体动力学问题，方法的基础是双曲方程组具有——譬如说在两个自变量和两个未知函数的情况下——特征线族，它们组成在计算过程中构造的特征网格．特征线法在气体动力学中出现较久，并成功应用于计算有少数奇点的一维非定常流动，以及方程的双曲性区域中的二维定常流动 在计算中还应用特征线法的改型，其中计算按由固定线划分成的层进行 在两个自变量（一维非定常问题或二维定常问题，超声速绕流）的情况下，特征线法可以避免内插，因而避免抹光和人工粘性的影响 它能够按同族特征线相交的结果，准确定出流场中激波的位置 如果未知函数和自变量数目较大，则方法的缺点变得明显 产生逼近粘性，当存在许多奇点时算法变得逻辑上很复杂 方法的另一严重缺点是与 Courant 稳定性准则相关的网格步长大小的限制（亦见 **Courant-Friedrichs-Lewy 条件**（Courant-Friedrichs-Lewy condition））以及守恒定律不严格满足 因此，用特征线法计算间断点不多的问题是合适的．已经证明，在流动足够光滑的情况下，用特征线法所得的解收敛于原始微分方程问题的解．随着能够求解复杂逻辑问题的电子计算机的发展，特征线法将变得更有效．

求解气体动力学上述问题的另一种方法是可用于各种类型方程的**积分关系法**（integral-relation method）．积分关系法是建立在守恒定律基础上并最终导致求解常微分方程

构造气体动力学问题有限差分格式的基础，是在给定的运动的或固定的网格上逼近守恒定律，其结果给出一组显式的（显式有限差分格式）或隐式的（隐式有限差分格式）复杂的非线性关系式（见**双曲偏微分方程，数值方法**（hyperbolic partial differential equation, numerical methods））

譬如，对于 Lagrange 坐标系中的一维气体动力学方程，可以构造如下形式的一般有限差分格式

$$\frac{\mathbf{w}_j^{n+1}-\mathbf{w}_j^n}{\tau}+\frac{\sum_{j+1/2}^{*}+\sum_{j-1/2}^{*}}{h}=0 \qquad (*)$$

其中 $\mathbf{w}_j^n=\mathbf{w}(x_j, t_n)=\mathbf{w}(jh, n\tau)$ 为了使方程（*）封闭，量 $\sum_{j+1/2}^{*}, \sum_{j-1/2}^{*}$ 应与量 $\mathbf{w}_j^n$，$\mathbf{w}_j^{n+1}$ 相联系．可以通过不同方法做到这点，如果 $\sum_{j+1/2}^{*}$，$\sum_{j-1/2}^{*}$ 通过 $\mathbf{w}_j^n$ 表达，则得到显式差分格式，如果 $\sum_{j+1/2}^{*}, \sum_{j-1/2}^{*}$ 通过 $\mathbf{w}_j^n$，$\mathbf{w}_j^{n+1}$ 表达，则得到隐式差分格式，如果采用一个整步长，则得到非线性关系式，如果利用两个或更多的分数步长，则得到线性关系式（预期算子-修正算子方法）．

如果利用分裂方法 —— 解析的(预期算子-修正算子方法)，几何的或物理过程的分解，则这样得到的方程的解可以大大地简化 几何方法用来将多维问题简化为较少维数的问题（分步法或分裂法） 分裂法给出经济的绝对逼近格式，其中在一点上计算未知函数所需的运算次数不随点数增加（见**差分格式**(difference scheme)） 分裂法的一个变型是“网格中

粒子"法，其中分裂不与算子的维数降低相联系

上述一般方法产生连续计算的有限差分格式，对于理想气体（$\sum^{3}{}'^{\alpha}=0$）和耗散过程（$\sum^{3}{}'^{\alpha}\neq 0$）都是如此．通过引入逼近粘性，连续计算的有限差分格式使宽度为 $O(h)$ 的过渡区域中的奇异性光滑化，并将激波转变为激波过渡区，接触间断转变为接触带．有限差分格式的逼近粘性将气体动力学方程的耗散性质和差分格式本身的耗散性质集于一身．逼近粘性的结构由格式的微分近似所决定，后者与原始方程组相差量级为 $O(\tau^{\gamma})$ 的项，其中 γ 为格式的逼近的阶．在很多情况下，有限差分格式及其微分近似在多大程度上保存原始微分方程组的群性质是很重要的．有限差分格式保存群性质在实际计算中有很大意义，尤其在气体动力学问题中，这里，例如，一阶微分近似相对 Galileo 变换的非不变性导致不良的计算后果（不稳定性，非单调剖面等等）

已知的连续计算差分格式一般在光滑解上有不高于三阶的局部精度和一阶的整体精度（因为差分格式在奇异点附近精度不高）气体动力学的有限差分格式不仅应该满足逼近和稳定性的独立要求，还应该满足其他一些实际上不可缺少的要求——发散性，经济性，完全守恒等等．关于分裂的思想使得可以为多维问题构造经济的有限差分格式 差分格式的发散性或守恒性，意味着对有限差分方程满足基本守恒定律（质量、动量和总能量的守恒）的有限差分类比．完全守恒的性质要求满足的守恒定律的有限差分类比，不仅是质量、动量和总能量的守恒，而且还有不同形式的能量（如动能、势能和磁能）的守恒．

考察一下形如（*）的几个具体的差分格式．在式（*）中设

$$\sum\nolimits^{*}_{j+1/2}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{f}^{n}_{j+1}+\mathbf{f}^{n}_{j}\right)-\frac{h}{2\tau}\left(\mathbf{w}^{n}_{j+1}-\mathbf{w}^{n}_{j}\right),$$

则得到一阶近似的显式差分格式

$$\frac{\mathbf{w}^{n+1}_{j}-\mathbf{w}^{n}_{j}}{\tau}+\frac{\mathbf{f}^{n}_{j+1}-\mathbf{f}^{n}_{j-1}}{2h}=\frac{h^{2}}{2\tau}\,\frac{\mathbf{w}^{n}_{j+1}-2\mathbf{w}^{n}_{j}+\mathbf{w}^{n}_{j-1}}{h^{2}}$$

这里

$$\mathbf{w}=\begin{bmatrix}u\\ v\\ E\end{bmatrix},\qquad \mathbf{f}=\begin{bmatrix}p\\ -u\\ up\end{bmatrix},$$

$\mathbf{f}^{n}_{j}=\mathbf{f}(\mathbf{w}^{n}_{j})$ 所列的格式是 $\tau/h=$ 常数时的有条件的逼近格式（$\tau/h^{2}=$ 常数时它逼近方程组 $(\partial\mathbf{w}/\partial t)+(\partial\mathbf{f}/\partial x)=(h^{2}/2\tau)(\partial^{2}\mathbf{w}/\partial x^{2})$），它是发散的和有条件稳定的．稳定性条件具有形式 $c\tau/h\leqslant 1$，其中 c 为声速．

在式（*）中，令

$$\sum^{\cdot}_{j+1/2}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{f}^{n}_{j+1}+\mathbf{f}^{n}_{j}\right)-\frac{\tau}{2h}A^{2}_{j+1/2}\left(\mathbf{w}^{n}_{j+1}-\mathbf{w}^{n}_{j}\right),$$

其中

$$A^{2}_{j+1/2}=A^{2}\left[\frac{\mathbf{w}^{n}_{j+1}+\mathbf{w}^{n}_{j}}{2}\right],\quad A=\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{w}},$$

我们得到二阶近似的绝对逼近显式差分格式.

$$\frac{\mathbf{w}^{n+1}_{j}-\mathbf{w}^{n}_{j}}{\tau}+\frac{\mathbf{f}^{n}_{j+1}-\mathbf{f}^{n}_{j-1}}{2h}=$$

$$=\frac{\tau}{2h^{2}}\left[A^{2}_{j+1/2}\left(\mathbf{w}^{n}_{j+1}-\mathbf{w}^{n}_{j}\right)-A^{2}_{j-1/2}\left(\mathbf{w}^{n}_{j}-\mathbf{w}^{n}_{j-1}\right)\right]$$

这一格式是发散的和在 $c\tau/h\leqslant 1$ 时稳定．

差分格式

$$\frac{u^{n+1}_{j}-u^{n}_{j}}{\tau}+\alpha\,\frac{p^{n+1}_{j+1/2}-p^{n+1}_{j-1/2}}{h}+$$

$$+(1-\alpha)\,\frac{p^{n}_{j+1/2}-p^{n}_{j-1/2}}{h}=0,$$

$$\frac{v^{n+1}_{j+1/2}-v^{n}_{j+1/2}}{\tau}+\alpha\,\frac{u^{n+1}_{j+1}-u^{n+1}_{j}}{h}+$$

$$+(1-\alpha)\,\frac{u^{n}_{j+1}-u^{n}_{j}}{h}=0,$$

$$\frac{\varepsilon^{n+1}_{j+1/2}-\varepsilon^{n}_{j+1/2}}{\tau}+\left[\alpha p^{n+1}_{j+1/2}+(1-\alpha)p^{n}_{j+1/2}\right]\times$$

$$\times\left[\alpha\frac{u^{n+1}_{j+1}-u^{n+1}_{j}}{h}+(1-\alpha)\,\frac{u^{n}_{j+1}-u^{n}_{j}}{h}\right]=0$$

在 $\alpha=0$ 时为显式的，如果 $\alpha\neq 0$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，则为隐式的；在 $\alpha=1/2$ 时为二阶近似，在 $\alpha\neq 1/2$ 时为一阶近似，在 $\alpha=1/2$ 时格式为全守恒的．

差分格式

$$\frac{u^{n+1/2}_{j}-u^{n-1/2}_{j}}{\tau}+\frac{\bar{p}^{n}_{j+1/2}-\bar{p}^{n}_{j-1/2}}{h}=0,$$

$$\frac{v^{n+1}_{j+1/2}-v^{n}_{j+1/2}}{\tau}-\frac{u^{n+1/2}_{j+1}-u^{n-1/2}_{j}}{h}=0,$$

$$\frac{\varepsilon^{n+1}_{j+1/2}-\varepsilon^{n}_{j+1/2}}{\tau}+\frac{\bar{p}^{n+1}_{j+1/2}+\bar{p}^{n}_{j+1/2}}{2}\,\frac{v^{n+1}_{j+1/2}-v^{n}_{j+1/2}}{\tau}=0$$

给出二阶近似，是隐式的，绝对逼近和非发散的 这里

$$\bar{p}^{n}_{j+1/2}=p^{n}_{j+1/2}+\omega^{n}_{j+1/2},\quad \varepsilon^{n}_{j+1/2}=\varepsilon\left(p^{n}_{j+1/2},v^{n}_{j+1/2}\right),$$

$$\omega^{n}_{j+1/2}=\frac{-\mu_{0}h^{2}}{v^{n}_{j+1/2}}\,\frac{\left|u^{n-1/2}_{j+1}-u^{n-1/2}_{j}\right|}{h}\,\frac{u^{n-1/2}_{j+1}-u^{n-1/2}_{j}}{h}$$

$\mu_0 =$ 常数.

连续计算有限差分格式的成功，是由于虽然格式的逼近粘性决定了与物理激波过渡不同的差分激波过渡，但守恒逼近仍保持了激波的速度，并再现了动力学相容性条件.

但是，当目的是准确给出激波过渡结构（辐射气体动力学问题)、接触带的结构或边界层的结构时，连续计算差分格式的这些好的性质就失去其意义了. 在接触间断的情况下，连续计算差分格式给出满意的逼近变为不可能，这不仅由于接触带的过分变宽，还由于出现 Helmholtz 和 Taylor 不稳定性. 在这种情况下，“网格中粒子”法却应用得很成功，因为它能够反映出由于不稳定性引起的边界的剧烈畸变

在粘性气体绕流问题中，当 Reynolds 数足够大时，如果差分网格不够细，则逼近粘性的效应会超过物理粘性的效应. 为了降低逼近粘性的效应，必须在绕流物体附近大大减小网格的尺寸. 实际上这时不再用一个方法处理流动，而是将积分问题分为两部分理想气体绕流物体问题，在这里要决定的量具体说是物体边界 l 上的流速 $\mathbf{u}_l$，以及计算物体附近粘性流动的问题，这里流场参量的梯度大（所谓边界层)，边值条件给在无穷远处，给出速度之值 $\mathbf{u}_\infty = \mathbf{u}_l$ 在**边界层理论**(boundary-layer theory)范围内问题提法不如对 Navier-Stokes 方程求积分那样严格，但是，在大 Reynolds 数的工程计算中却被非常频繁地运用.

气体动力学中的一类特别重要的问题是流体动力学稳定性和湍流问题. 在这种情况下，应求解粘性流体的变分流体力学方程（Orr-Sommerfeld 方程）的本征值问题，并构造出描述非线性不稳定性和湍流的复杂的数值模型. 这些问题属于计算数学的最困难的一类问题，并要求发展新的模型和更快速的计算机.

参考文献

[1] Richtmyer, R D and Morton, K , Difference methods for initial-value problems, Wiley (Interscience), 1967

[2] Годунов, С К , Рябенький, В С , Разностные схемы, М , 1973 (英译本 Godunov, S K , Ryaben'kiĭ, V S , Theory of difference schemes, North-Holland, 1964)

[3] Рождественский, Б Л , Яненко, Н Н , Системы квазилинейных уравнений , М 1968 (英译本 Rozh-estvenskiĭ, B L , Yanenko, N N , Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics, Amer Math Soc , 1983)

[4] Самарский, А А , Введение в теорию разностных схем, М , 1971

[5] Жуков, А И , 《Тр Матем ин-та АН СССР》, **58** (1960)

[6] Harlow, F , Numerical methods in hydrodynamics, Moscow, 1967, 316 – 342

[7] Дородницын, А А , в кн Труды 3 всесоюзного матем съезда, М , **3** (1958), 447 – 453

[8] Белоцерковский, О М , в сб численные методы решения задач механики сплошной среды, М , 1969, 101 – 213

[9] Яненко, Н Н , Анучина, Н Н , Петренко, В Е , Шокин, Ю И , в сб , Численные методы механики сплошной среды, Новосибирск, **1** (1970), 40 – 62

[10] Яненко, Н Н , Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, 1967 (英译本 Yanenko, N N , The method of fractional steps, the solution of problems of mathematical physics in several variables, Springer (1971))

[11] Самарский, А А , Попов, Ю П , Разностные схемы газовой динамики, М , 1975

[12] Годунов, С К , Забродин, А В , Прокопов, Г П , 《Ж вычисл матем и матем физ》, **1** (1961), 6, 1020 – 1059

Ю И Шокин, Н Н Яненко 撰

【补注】讨论气体动力学方程通过有限差分格式，有限元和有限体积法离散化的补充文献和最新专著见 [A1], [A2] 和 [A4] 所有这些离散化方法导致通常为非线性的大方程组 作为求解这些方程的方法，除了上面所述的分裂方法外，还可以应用强有力的多网格方法（见**差分格式理论**(difference schemes, theory of)条的补注) 这一方法对于气体动力学的应用见 [A3] 及这一专著中提到的文献.

最后，条文中所用的“散度差分格式”一词是描述满足某种守恒条件的差分格式.

参考文献

[A1] Baker, A J , Finite element computational fluid mechanics, Hemisphere & McGraw-Hill (1983)

[A2] Holt, M , Numerical methods in fluid mechanics, Springer (1984)

[A3] McCormick, S F , Multigrid methods, SIAM, 1987

[A4] Peyret, R , Taylor, T D Computational methods for fluid flow, Springer, 1983

[A5] Temam, R , Numerical analysis, North-Holland, 1973

【译注】关于流体力学（包括气体动力学）数值方法的一些最新专著收录在 Springer series in computational physics 中 其中 [B1] 叙述了流体力学中的谱方法或加权余项法，可在较粗的网格上得到高精度的结果 Fletcher 的两卷集流体力学计算方法 [B2, B3] 是最新的基础广泛而实用的专著，除有限差分法外还讨论了有限元法、有限体积法和谱方法，以及网格产生的问题 所介绍的都是最近的又是证明为实用的方法 书中包括使方法在计算机上最终实现的程序.

关于粘性气体绕流问题，除文中提到的将流场划

分为理想气体绕流和边界层的方法外，还发展了用简化 N-S 方程和完全 N-S 方程求解整个流场的方法（参见[B3]）

当气体足够稀薄时（$K_n = \lambda / l$ 不为小量，λ 为平均自由程，l 为流场特征尺度），要计及气体由离解分子构成的特点，一般要求解 **Boltzmann 方程**（Boltzmann equation），而直接模拟蒙特卡洛（DSMC）方法是有力的数值方法（[B4]）

关于气体力学数值方法的中文文献可见[B5, B6].

参考文献

[B1] Canuto, C, et al, Spectral methods in fluid mechanics, Springer-Verlag, 2nd printing, 1990

[B2] Fletcher, C A J, Computational techniques in fluid mechanics 1, General methods, Springer-Verlag, 1987

[B3] Fletcher, C A J, Computational techniques in fluid mechanics 2, Specific techniques for different flow categories, Springer-Verlag, 2nd ed, 1991

[B4a] Bird, G A, Molecular gas dynamics, Clarendon Press, 1976

[B4b] Bird, G A, Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows, Clarendo Press, 1994

[B5] P J 罗奇, 计算流体动力学, 科学出版社, 1983

[B6] S V 帕坦卡, 传热与流体流动的数值计算, 科学出版社, 1989

沈 青 译

气体流动理论 [**gas flow theory**, **газовых струй теория**], 气体射流理论（gas jet theory）

气体动力学的分支，它研究这样假设下的气体的流动，即一部分气体绕流在其传播途中所遇的障碍，并从它上面流走，同时在其后面形成一滞止区．气体流动理论问题是在气体是正压的，其运动是平面平行、有势及定常的假设下求得解的．如果这些条件满足，由流体力学方程可产生如下基本公式，

$$d(x + iy) = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2\alpha\tau}}\left[d\varphi + i\frac{\rho_0}{\rho}d\psi\right] \tag{1}$$

其中 φ 和 ψ 分别为速度势和流函数，ρ 是任一点的气体密度，ρ_0 是速度为零处的气体密度．对绝热运动，常数 α 是气体速度为零处的声速平方除以 $\gamma-1$，而 γ 是绝热指数．在求解气体流动理论中的问题时，未知函数最好不以变量 x, y（流动平面的坐标）来表示，而表示成 Чаплыгин 变量 $\tau = |\mathbf{v}|^2/2\alpha$ 和速度矢量 $\mathbf{v}$ 与 x 轴形成的倾斜角 θ 的函数　如果这样选取独立变量，则方程（1）导至下列两个偏微分方程的方程组

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = -\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},$$
$$\beta = \frac{1}{\gamma-1},$$

对其还需加上 Bernoulli 积分

$$\rho = \rho_0(1-\tau)^{\beta}$$

消去函数 $\varphi(\theta, \tau)$ 可导至下列流函数方程

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right\} + \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = = 0 \tag{2}$$

对亚声速流动，这是一个椭圆型偏微分方程，对超声速流动，则是双曲型偏微分方程　方程（2）可对若干类由直线段组成的障碍求得解，变量 θ 沿每一直线段为一相应的常数值　沿在线段端点脱离物面、并形成运动气体和滞止区域中的静止气体间的边界的流线，变量 τ 有常数值．在 θ = 常数和 τ = 常数的边界的点上，流函数 $\psi(\theta, \tau)$ = 常数．在变量 θ, τ 平面，由平行坐标轴的直线段包围成一区域，沿每一直线段流函数有常数值．这些线段的分布及线段上 $\psi(\theta,\tau)$ 的常数值依赖于气体流动平面上障碍的类型和位置．对某一类型问题，$\psi(\theta, \tau)$ 可应用分离变量法由方程（2）得到．例如，如果一流量为 Q，宽度一定的气流迎面绕流一个垂直于来流远处速度的直线平板，则 $\psi(\theta, \tau)$ 由级数确定

$$\frac{\pi\psi}{2Q} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{\tau}{\tau_0}\right]^n\frac{y_n(\tau)}{y_n(\tau_0)}\sin 2n\theta\sin^2\mu n \tag{3}$$

其中，τ_0 是变量 τ 在边界流线上的值，μ 是在平板后远距离处流速与 x 轴的交角．角 μ 可由长度得到，而流动对平板的压力作用由公式（1）确定．

函数 $y_n(\tau)$ 通过对（2）进行分离变量而求得，是**超几何方程**（hypergeometric equation）

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2y_n}{d\tau^2} + [(2n+1) + (\beta-2n-1)\tau]\frac{dy_n}{d\tau} + + \beta n(2n+1)y_n = 0$$

的积分，并在 $\tau = 0$ 为正则的．

从一无穷宽容器的孔流出的气体的 $\psi(\theta, \tau)$ 由下列级数确定，

$$\frac{\pi\psi}{\theta} = -\theta - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{\tau}{\tau_0}\right]^n\frac{y_n(\tau)}{y_n(\tau_0)}\sin 2n\theta \tag{4}$$

对亚声速流动，即 $\tau < 1/(2\beta+1)$，(3) 和（4）型的级数的收敛性已由 C．A Чаплыгин（[1]）建立．

假如流动只包含一非零的特征速度，则对函数 $\psi(\theta, \tau)$ 可构造诸如（3）和（4）的级数　另一方面，假如有两个或更多的这种速度——例如，在气体由侧壁为两条半无限长直线的容器的孔流出的问题中——则解表示为包含以 θ 和 τ 为参数的，结构复杂的定积分．

为研究型如（3），（4）的级数及能给出气体流动理论问题精确解的定积分，С А Чаплыгин 提出了一个求解气体流动理论问题的近似方法 此方法将气体流动问题化为不可压液体的平面平行位势运动问题．

参考文献

[1] Чаплыгин, С А , Собр соч , т 2, М -Л , 1948, 19－137（英译本 Chaplygin, S A , On gas jets, NACA Techn Mem , **1063**(1944)

[2] Pai, S I , Fluid Dynamics of Jets, D Van Nostrand Co , Inc , Princeton, N J , 1954

Л Н Сретенский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kuo, Y H（郭永怀）and Sears, W R , Plane subsonic and transonic potential flows, W R in Sears (ed), General theory of high speed aerodynamics, Princeton Univ Press, 1954, 490 － 582

[A2] Ferri, A , Supersonic flows with shock waves, in W R Sears (ed), General theory of high speed aerodynamics, Princeton Univ Press, 1954, 670 － 748

[A3] Courant, R and Friedrichs, K O , Supersonic flow and shock waves, Interscience, 1948（中译本 R 柯朗, K O 弗里德里克斯，超声速流与冲击波，科学出版社，1986）

[A4] Hill, R and Pack, D C , An investigation, by the method of characteristics, of the lateral expansion of the gases behind a detonating slab of explosive, Proc R Soc *A*, **191**(1947), 524

[A5] Bers, L , Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics, Wiley, 1958

唐福林 译

Gâteaux 导数 [Gâteaux derivative，Гато производная]，弱导数（weak derivative）

泛函或映射的一种导数，它与 **Fréchet 导数**（Fréchet derivative）（强导数（strong derivative）一起在无穷维分析学中是最常用的．设 X，Y 均为拓扑线性空间，映射 $f\cdot X\to Y$ 在一点 x_0 的 Gâteaux 导数（Gâteaux derivative）是指连续线性映射 $f_G(x_0)$ $X\to Y$，满足条件

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f_G(x_0)h+\varepsilon(h),$$

且当 $t\to 0$ 时 $\varepsilon(th)/t\to 0$（依 Y 的拓扑）（亦见 **Gâteaux 变分**（Gâteaux variation））若映射 f 在点 x_0 有 Gâteaux 导数，便称 f 为 Gâteaux 可微的（Gâteaux differentiable） 关于复合函数微分法定理通常对 Gâteaux 导数不成立．亦见**映射的微分法**（differentiation of a mapping）

参考文献

[1] Gâteaux, R , Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques, *C R Acad Sci Paris Sér I Math* , **157**(1913), 325 － 327

[2] Колмогоров, А Н и Фомин, С В , Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд , М , 1976（中译本 А Н 柯莫果洛夫，С В 佛明，函数论与泛函分析初步，高等教育出版社，1957，北京师范大学出版社，1963）

[3] Люстерник, Л А и Соболев, В И Элементы функционального анализа, 2 изд , М , 1965（中译本 Л А 刘斯铁尔尼克, В И 索伯列夫，泛函分析概要（第二版），科学出版社，1985）

[4] Авербух, В И и Смолянов, О Г , 《Успехи Матем Наук》, **22**(1967), 6, 201 － 260

В М Тихомиров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M S , Nonlinearity and functional analysis, Acad Press, 1977

郑维行 译 沈永欢、王声望 校

Gâteaux 微分 [Gâteaux differential，Гато дифференциал]

设 X，Y 均为拓扑线性空间，映射 f $X\to Y$ 在一点 $x_0\in X$ 的 Gâteaux 微分是指函数

$$h\to Df(x_0,h),$$

其中

$$Df(x_0,h)=\frac{d}{dt}f(x_0+th)|_{t=0}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(x_0+th)-f(x_0)],$$

假定此极限对一切 $h\in X$ 存在，收敛性理解为依 Y 的拓扑 这样定义的 Gâteaux 微分是齐次的，但不是可加的 高阶 Gâteaux 微分可类似定义．映射 $h\to Df(x_0,h)$ 有时称为 **Gâteaux 变分**（Gâteaux variation）或弱微分（weak differential） 亦见**映射的微分法**（differentiation of a mapping），**变分**（variation）

线性与连续性通常作为补充约定．$Df(x,h)=f_G(x_0)h$，$f_G(x_0)\in L(X,Y)$．此时 $f_G(x_0)$ 称为 Gâteaux **导数**（Gâteaux derivative）

如果映射 $(x,h)\to Df(x,h)$ 在某个区域中关于 x 一致连续且关于 h 连续，则 f 的 **Fréchet 导数**（Fréchet derivative）f' 在此域中存在且 $f'(x)h=Df(x,h)$

参考文献

[1] Люстерник, Л А , Соболев, В И , Элементы функционального анализа, 2 изд , М , 1965（中译本 Л А 刘斯铁尔尼克，В И 索伯列夫，泛函分析概要（第二版），科学出版社，1985）

[2] Колмогоров А Н , Фомин, С В , Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд , М , 1976（中译本 А Н 柯莫果洛夫，С В 佛明，函数论与泛函分析初步，高等教育出版社，1957，北

京师范大学出版社，1963） B M Тихомиров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M S, Nonlinearity and functional analysis, Acad Press, 1977 郑维行 译 沈永欢、王声望 校

Gâteaux 梯度 [**Gâteaux gradient**, **Гато градиент**]，Hilbert 空间 H 的泛函 f 在一点 x_0 上的

H 中与 f 在 x_0 的 **Gâteaux 导数**（Gâteaux derivative）$f_G'(x_0)$ 相等的向量．换句话说，Gâteaux 梯度由公式

$$f(x_0+h)=f(x_0)+(f_G(x_0),h)+\varepsilon(h)$$

定义，其中 $\varepsilon(th)/t\to 0$，当 $t\to 0$ 在 n 维 Euclid 空间中 Gâteaux 梯度 $f_G'(x_0)$ 为具有坐标

$$\left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1},\quad ,\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n}\right)$$

的向量，并简称为**梯度**（gradient） Gâteaux 梯度概念可以推广到下列情形 X 为 Riemann 流形（有限维）或无穷维 Hilbert 流形，而 f 为 X 上光滑实函数．f 在其 Gâteaux 梯度方向上的增长大于过此点任何其他方向的增长

B M Тихомиров 撰 郑维行 译 沈永欢、王声望 校

Gâteaux 变分 [**Gâteaux variation**, **Гато вариация**]

设 f 为线性空间 X 到拓扑线性空间 Y 的映射，f 的 Gâteaux 变分是指依 Y 的拓扑的极限

$$\delta f(x_0,h)=\frac{d}{dt}f(x_0+th)|_{t=0}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[f(x_0+th)-f(x_0)\right],\qquad (*)$$

假定它对一切 $h\in X$ 存在．这就是 R Gâteaux 于 1913－1914年所引进的一阶变分（first variation） 关于经典变分学中的泛函的相应定义是由 J L. Lagrange 给出的（见**泛函的变分**（variation of a functional））

表示式 $\delta f(x_0,h)$ 不必是 h 的线性泛函，但它总是 h 的一次齐次函数．映射 $h\to\delta f(x_0,h)$ 也称为 **Gâteaux 微分**（Gâteaux differential）或弱微分（weak differential） 从 P Lévy 的工作（[2]，还有 [3]）开始，通常规定 $\delta f(x_0,h)$ 关于 h 具有线性与连续性

$$\delta f(x_0,h)=f_G(x_0)h,\ f_G(x_0)\in L(X,Y),$$

其中 $f_G(x_0)$ 称为 **Gâteaux 导数**（Gâteaux derivative） 二阶变分等等的定义类似于（*）．亦见**变分**（variation），**二阶变分**（second variation），**映射的微分法**（differentiation of a mapping）

参考文献

[1A] Gâteaux, R, Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques, *C R Acad Sci Paris Sér I*, Math, **157** (1913), 325－327
[1B] Gâteaux, R, Fonctions d'une infinites des variables independantes, *Bull Soc Math France*, **47** (1919), 70－96
[2] Lévy, P, Leçons d'analyse fonctionnelle, Gauthier-Villars, 1922
[3] Lévy, P, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle, Gauthier-Villars, 1951 B M Тихомиров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M S, Nonlinearity and functional analysis, Acad Press, 1977

郑维行 译 沈永欢、王声望 校

规范变换 [**gauge transformation**, gradient transform, **градиентное преобразование**]

经典场论和量子场论中的一种变换，它改变场的不可观察性质（例如势）而不改变物理上有意义的可测的量（例如场强） “规范变换”（或“梯度变换”）的名称出现在电磁场的经典理论中．在这个理论中，四维电磁向量势 $A_n(x)$ $(n=0,1,2,3)$ 是以非单值方式引进的，因为所谓第二类规范变换（gauge transformations of the second kind）

$$A_n(x)\to A_n(x)=A_n(x)+\frac{\partial f}{\partial x^n},\qquad (1)$$

带有具有一阶和二阶偏导数的任意函数 $f(x)$，并不影响反对称电磁场张量的分量

$$F_{kl}=\frac{\partial A_l}{\partial x^k}-\frac{\partial A_k}{\partial x^l},\ k,l=0,1,2,3$$

这些分量等于物理上可观察的电场和磁场强度向量的分量 $E_\alpha=F_{\alpha 0}$，$\alpha=1,2,3$ 和 $H_1=F_{23}$，$H_2=F_{31}$，$H_3=F_{12}$ 在第二类规范变换下，场方程

$$\sum_k g^{kk}\left\{\frac{\partial^2 A_n}{\partial x^k\partial x^k}-\frac{\partial^2 A_k}{\partial x^k\partial x^n}\right\}=0,$$

$$g^{11}=g^{22}=g^{33}=-g^{00}=-1,$$

保持不变；这是所谓场论的规范不变性（gauge invariance of field theory） 如果适当选择函数 $f(x)$，可使 A_n 满足某个补充条件（所谓规范条件（gauge condition）），据此可以简化场方程的形式．因而，Lorentz 条件，它对向量势 A_n $(n=0,1,2,3)$ 是线性的，表述其四维散度变为零

$$\sum_k g^{kk}\frac{\partial A_k(x)}{\partial x^k}=0,\qquad (2)$$

导致关于 $A_n(x)$ 的 d Alembert 方程（见 **d Alembert 算子**（d'Alembert operator））

$$-\sum_k g^{kk}\frac{\partial^2 A_n}{\partial x^k\partial x^k}=\Box A_n(x)=0\qquad (3)$$

Lorentz条件并不能完全确定 A_n，因为理论上还有所谓第二类特殊化规范变换（specialized gauge transformation）（1）的不变性，具有函数 $f_0(x)$ 满足 d'Alembert 方程 $\Box f_0(x)=0$. 然而，如果按某种方式选择 $f_0(x)$（对所谓 Lorentz 坐标系），条件 $A_0=0$ 将能满足要求 Lorentz 条件（2）于是简化为对于三维向量势的条件 $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$，即，电磁场为横向场. 如果场是复值场，关于场的波函数及其导数，理论还应该对第一类规范变换（gauge transformations of the first kind）

$$\Phi(x)\to\Phi'(x)=e^{i\alpha}\Phi(x),$$
$$\Phi^*(x)\to\Phi^{*}(x)=e^{-i\alpha}\Phi^*(x) \qquad (4)$$

是不变的，因为所有可观察动力学量（由于实值性（Hermite 性）条件）必须完全由关于 Φ^* 和 Φ 的双线性形式来表达. 由于力学的一般原理，场论关于第一类规范变换的不变性条件意味着一定的可观察物理量必须守恒——例如，电荷守恒，它们通过场函数来表达，或者换句话说，必须存在这些电荷守恒的定律. 相应 Lagrange 量和场方程应该对规范变换为不变式. 例如，在与电磁场 $A_n(x)$ 相互作用着的复场 $\psi(x)$ 的情况，自由场的 Lagrange 量和相互作用的 Lagrange 量，以及场方程，对下列类型规范变换

$$\left.\begin{aligned}&\psi(x)\to e^{if(x)}\psi(x),\ \psi^*(x)\to e^{-if(x)}\psi^*(x),\\&A_n(x)\to A_n(x)+\frac{\partial f(x)}{\partial x^n},\end{aligned}\right\}(5)$$

即，相对于规范变换（1）和（4），应该是不变的，（4）中相位乘子可能依赖于四维时空坐标，而且应与形成（1）的一部分的任意标量函数一致. 在这种情况下，在场 $A_n(x)$ 和 $\psi(x)$ 的系统中，电荷守恒定律是满足的. 规范变换（5）在下述意义上形成变换的 **Abel 群**（Abelian group）. 规范函数 $f(x)=g(x)+h(x)$ 描述一个规范变换，它表示以任何次序完成的具有函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的两个规范变换. 在构造相互作用场的理论时，它们比上面给出的例子更加复杂得多，满足相应的某一个荷守恒律的必要条件是 Lagrange 量和场方程对规范变换的不变性，其中规范函数 $f(x)$ 是算子.

参考文献

[1] Боголюбов, Н. Н., Ширков, Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., 1957（英译本 Bogolyubov, N. N. and Shirkov, D. V., Introduction to the theory of quantized fields, Interscience, 1959）

В. Д. Кукин 撰

【补注】 规范场理论目前是数学和理论物理学中的一个主要研究领域. 抽象地（数学上）说，出发对象是流形 M（= 时空）上具有结构群 G 的**主纤维丛**（principal fibre bundle）P. 于是规范势是这个纤维丛上的一个**联络**（connection），亦见**杨（振宁）-Mills 场**（Yang-Mills field），联络的相伴曲率代表场强张量. 术语规范场（gauge field）用于联络（形式）和其相伴曲率场两者. 一个规范变换（gauge transformation）是 P 的丛自同构（使流形 M 逐点固定）. 这种自同构形成规范变换群. P 的结构群 G 称为规范群（gauge group），例如在电磁学中是 $U(1)$ 群. 关于这个领域的数学和物理学术语的很有用的术语汇编和字典见 [A3].

拓扑学与规范场论之间有很深刻的联系. 这些领域之间相互作用的一个主要结果是 S. Donaldson 和 M. Freedman 对 $\mathbf{R}^4$ 上奇特结构的发现（例如见 [A4]）.

很少应用的术语"梯度变换"来自电磁学中电磁势 A_i 是由电磁场张量 F_{ij} 确定到相差一个梯度向量（场）这样的事实.

参考文献

[A1] Moriyasu, K., An elementary primer for gauge theory, World Scientific, 1983.

[A2] O'Raifertaigh, L., Group structure of gauge theories, Cambridge Univ. Press, 1986.

[A3] Mayer, M. E., Geometric aspects of gauge theory, in L. P. Horowitz, Y. Ne'eman (eds.). Proc. VII-Colloq. Group Theoretical Methods in Physics, Israel Physical Society & A. Hilger, 1980, 80－99.

[A4] Blaine Lawson, jr., M., The theory of gauge fields in four dimensions, Amer. Math. Soc., 1985.

[A5] Atiyah, M. F., Geometry of Yang-Mills fields, Accad. Naz. del Lincei, 1979.

徐锡申 译

Gauss-Bonnet 定理 [Gauss-Bonnet theorem, Гаусса-Бонне теорема]

二维闭或带边的紧致 Riemann 流形 V^2，其全曲率 ω，光滑边界 ∂V^2 的旋度 τ，与 Euler 示性数 χ 有如下关系

$$\omega+\tau=2\pi\chi,$$

其中

$$\omega=\int_{V^2}KdS,$$

这里 K 为 Gauss 曲率，dS 为面积元素，而

$$\tau=\int_{\partial V^2}k_g dl,$$

k_g 为边界的测地曲率，dl 为边界的线素. Gauss-Bonnet 定理对逐段光滑边界的流形也成立，这时

$$\tau=\int k_g dl+\sum_i(\pi-\alpha_i),$$

其中 $\pi-\alpha_i$ 是边界在顶点的旋转角. 特别地，对 E^3 中的正则曲面定理成立. Gauss-Bonnet 定理为 C. F. Gauss（[1]）发现，其特殊形式（对于同胚于圆盘的曲面）由 O. Bonnet（[2]）建立.

对无边界非紧致完全流形 V^2，有类似于 Gauss-

Bonnet 定理的 Cohn-Vossen 不等式(Cohn-Vossen inequality)([3])

$$\int_{V^2} K dS \leqslant 2\pi\chi$$

Gauss-Bonnet 定理以及上述不等式对凸曲面和有界曲率的二维流形也成立

Gauss-Bonnet 定理可以推广到闭或带边的偶数维的紧致 Riemann 流形 V^{2p} 的情形

$$\int_{V^{2p}} \Omega dS + \int_{\partial V^{2p}} \varphi dl = \frac{(2\pi)^p}{(2p-1)!!}\chi,$$

其中 dS, dl 为 V^{2p}, ∂V^{2p} 的体积元素,Ω 是 V^{2p} 的曲率张量分量的某个多项式,φ 是曲率张量分量及 ∂V^{2p} 的第二基本形式系数的某个多项式([4]) Gauss-Bonnet 定理也已推广到 Riemann 多面体上([5]) 这个定理的另外推广是示性类借助 Riemann 度量的积分表示([4],[6],[7]).

参考文献

[1] Gauss, C F, Werke, Vol 8, K Gesellschaft Wissensch, Gottingen, 1900

[2] Bonnet, O, *J Ecole Polytechnique*, **19**(1848), 1-146

[3] Кон-Фоссен, С Э, Некоторые вопросы дифференциальной Геометрии в целом, М, 1959

[4] Шарафутдинов, В А,《Сиб матем ж》, **14**(1973), 6, 1321-1335

[5] Allendorfer, C B and Weil, A, The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra, *Trans Amer Math Soc*, **53** (1943), 101-129

[6] Eells, J, A generalization of the Gauss-Bonnet theorem, *Trans Amer Math Soc*, **92**(1959), 142-153

[7] Понтрягин, Л С,《Изв АН СССР Сер матем》, **13** (1949), 193-200

Ю Д Бураго 撰

【补注】

参考文献

[A1] Spivak, M, A comprehensive introduction to differential geometry, Vol 5, publish or perish, 1975

张爱和 译 邓应生 校

【译注】 原始的 Gauss-Bonnet 公式

$$2\pi\chi = \omega + \int k_g dl + \sum_i (\pi - \alpha_i)$$

在 1943 年被 C B Allendoefer 和 A Weil 推广到 n 维(n 既可为偶数也可为奇数)、边界为多面体但内部光滑的 Riemann 流形 M 的情形,成立下列高维的 Gauss-Bonnet 公式

$$\chi(M) = \int_M \widetilde{E}(R) + \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{\lambda}\int_{A_{M_\lambda^r}} \psi(r,\lambda),$$

其中 $\chi(M)$ 是 M 的 Euler 数,$\widetilde{E}(R)$ 是由曲率 R 的分量构成的某代数式(当 n 为偶数时,它是曲率的法甫式,而且 n 为奇数时,它为零),$A_{M_\lambda^r}$ 的定义比较复杂,可见 [B2] 陈省身(Chern, S S)在 1944 年给出上述高维 Gauss-Bonnet 公式的一个内在证明,即不预先将 M 等距嵌入到 Euclid 空间中去的证明.陈省身的证明构想新颖,计算神妙,直接影响超度概念和示性类的曲率表示法的产生,不少人赞之为"开辟了微分几何的新纪元" 在证明中,陈省身在 M 的单位切球丛上构造了一个 $(n-1)$ 次微分形式 π_{ch},从而 Gauss-Bonnet 公式可以重新写为([2])

$$\chi(M) = \int_M \widetilde{E}(R) + \int_A \pi_{ch},$$

其中 A 是 M 在边界处的对偶角链.

参考文献

[B1] Chern, S S, A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds, *Ann of Math*, **45**(1944), 747-752

[B2] 虞言林,关于高斯-波涅公式的内在证明,数学学报,**20**(1977),49-60

虞言林 撰

Gauss 准则 [Gauss criterion, Gauss test; Гаусса признак]

正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

收敛性的判别准则.如果比值 a_{n+1}/a_n 可表为如下形式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\gamma_n}{n^\beta}, \qquad (*)$$

其中 α, β 是常数,$\beta>1$,且 $\{\gamma_n\}$ 是一有界序列 若 $\alpha>1$,那么级数 $\sum a_n$ 收敛,如果 $\alpha\leqslant 1$,那么级数 $\sum a_n$ 发散.为使等式 (*) 成立,必要(但不充分)条件是存在着有限的极限

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}},$$

或

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} n\left[1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right]$$

Gauss 准则是历史上(1812)最先的判定数项级数收敛性的一般判别法之一 C F Gauss 曾用它判定**超几何级数**(hypergeometric series)的收敛性.Gauss 准则是**对数收敛性准则**(logarithmic convergence criterion)的最简单的特殊情形

Л П Купцов 撰

【补注】 这个判别准则通常陈述为 $\beta=2$ 的较简单情形,见[A1], p 297

参考文献

[A1] Knopp, K, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, 1964

郭思旭 译 邓应生 校

Gauss 分解 [Gauss decomposition, Гаусса разложение],

拓扑群 G 的

G 的一个处处稠密的子集 G_0 的形如 $G_0=NHN^*$ 的表示，其中 H 为 G 的 Abel 子群，N 和 N^* 为 G 的幂零子群，它们被 H 正规化．若 G 是由所有 m 阶非奇异实方阵构成的群 $GL(m, \mathbf{R})$，H 是由所有对角方阵构成的子群，$N(N^*)$ 是主对角元素为 1 的下（上）三角方阵构成的子群，G_0 为 G 中所有主子式不等于零的矩阵构成的子群，则分解 $G_0=NHN^*$ 称为一般线性群的 Gauss 分解　它直接相关于解线性方程组的 **Gauss 法** (Gauss method)　若线性方程组 $g_0x=b$ 的系数矩阵 g_0 非退化，且 $g_0=nhn^*, n\in N, h\in H, n^*\in N^*$，则此方程可以应用 Gauss 法，即从左边乘以下三角方阵 $n^{-1}, n\in N$ 而变成三角形式 $hn^*x=n^{-1}b$　为了给出 Gauss 分解的严格定义，必须引进下面术语　设 G 为**拓扑群** (topological group)，H 为它的子群，设 N 和 N^* 为 G 的幂零子群，被 H 正规化　G 的子群 H 称为 G 的三角斜截 (triangular truncation)，如果 1) $N\in D(R)$，$N^*\subset D(R^*)$，其中 $D(X)$ 是群 X 的换位子群，R 和 R^* 为群 G 的连通可解子群，2) 集 $G_0=NHN^*$ 在 G 中处处稠密，且分解 NHN^* 是唯一的．分解 $G_0=NHN^*$ 称为 G 的三角分解 (triangular decomposition)　如果 H 是 **Abel 群** (Abelian group)，则这个分解称为完全三角分解 (completely-triangular decomposition) 或 Gauss 分解 (Gauss decomposition)　这时子群 $B=NH=HN$, $B^*=N^*H=HN^*$ 可解　设 π 为群 G 在有限维线性空间 V 上的不可约 (连续) 表示，V_0 为由 V 中在 N^* 作用下不变的向量全体构成的子空间，则 V_0 在 H 下不变，这时在 V_0 上 H 的表示 α 是不可约的．表示 α 在等价意义下唯一确定 π　仍记 B 在 V_0 上之表示为 α，它限制在 H 上为已给的 α，在 N 上为平凡表示　记 $e(\alpha)$ 为由此 α 诱导的 G 之表示，其表示空间为 $C(G, V_0)$．则 π 包含在（作为不变部分）$e(\alpha)$ 中，且空间 $\mathrm{Hom}_G(\pi, e(\alpha))$ 是一维的．如果 H 为 Abel 子群，则 V_0 为一维的，α 为群 H 的特征标　下面的 Lie 群三角分解的例子是已知的　1) 设 G 为约化连通复 **Lie 群** (Lie group)，其 **Cartan 子代数** (Cartan subalgebra) 为 H_0，又设 H 为 G 中包含 H_0 的约化连通子群　于是子群 H 是 G 的三角斜截　2) 设 G 为约化连通线性 Lie 群，于是 G 包含一个三角斜截 $H=MA$，其中 A 为 G 中（由 G 的 Lie 代数的非紧根生成）单连通 Abel 子群，且 M 是 A 在极大紧子群 $K\subset G$ 中中心化子　3) 特别，任何约化连通复 Lie 群有 Gauss 分解 $G_0=NHN^*$，其中 H 为 G 的 Cartan 子群，$N(N^*)$ 为 G 中解析子群，其 Lie 代数由所有根向量 e_α, $\alpha<0(\alpha>0)$ 生成，这里 α 是关于 H 之根，即 HN 和 HN^* 是反向 Borel 子群（参见 **Borel 子群** (Borel subgroup)）．在例 1), 2), 3) 中，子群 N 和 N^* 是单连通的，G_0 在 G 中关于 Zariski 拓扑为开的，这时映射 $N\times H\times N^*$，$(n, h, n^*)\to nhn^*$ 是代数簇的同构（特别，也是同胚），这蕴含了代数族 G 是有理的

参考文献

[1] Желобенко, Д П, Компактные группы Ли и их представления, М, 1968 (英译本 Zhelobenko, D P, Compact Lie groups and their representations, Amer Math Soc, 1973)

Д П Желобенко 撰　许以超 译　石生明 校

Gauss 插值公式 [Gauss interpolation formula; Гаусса интерполяционная формула]

使用最靠近插值点 x 的**结点** (node) 做为插值结点的一种公式．如果 $x=x_0+th$，则公式

$$G_{2n+1}(x_0+th)=f_0+f^1_{1/2}t+f^2_0\frac{t(t-1)}{2}+\quad+\quad(1)$$

$$+f^{2n}_0\frac{t(t^2-1)\quad[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!}$$

是以 $x_0, x_0+h, x_0-h, \quad, x_0+nh, x_0-nh$ 为结点写出的，并被称之为 Gauss 向前插值公式 (Gauss forward interpolation formula)．而公式

$$G_{2n+1}(x_0+th)=f_0+f^1_{-1/2}t+f^2_0\frac{t(t-1)}{2}+\quad+\quad(2)$$

$$+f^{2n}_0\frac{t(t^2-1)\quad[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!}$$

是以 $x_0, x_0-h, x_0+h, \quad, x_0-nh, x_0+nh$ 为结点写出的并被称之为 Gauss 向后插值公式 (Gauss backward interpolation formula)（[1], [2]）公式 (1) 和 (2) 用到的有限差分定义如下

$$f^1_{i+1/2}=f_{i+1}-f_i,\quad f^m_i=f^{m-1}_{i+1/2}-f^{m-1}_{i-1/2}$$

Gauss 插值公式的优点在于插值结点的这种选法在所有可能的选择中确保余项为最小　而结点按其与插值点的距离排序的方法减少插值中的数值误差

参考文献

[1] Березин, И С, Жидков, Н П, Методы вычислений, т 1, 3 изд, М 1966 (英译本 Berezin, I S and Zhidkov, N P, Computing methods, 1, Pergamon, 1973)

[2] Бахвалов, Н С, Численные методы, М, 1973 (英译本 Bakhvalov, N S, Numerical methods analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977)．

М К Самарин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Davis, P J, Interpolation and approximation, Dover, reprint, 1975

[A2] Hildebrand, F B, Introduction to numerical analysis, McGraw-Hill, 1974

[A3] Steffensen, J F, Interpolation, Chelsea, reprint, 1950

蔡大用 译

Gauss-Laplace 分布 [Gauss-Laplace distribution, Гаусса-Лапласа распределение]

正态分布(normal distribution)的一个名称．如同 Gauss 律 (Gauss law)，Gauss 分布 (Gaussian distribution) Laplace 第二律 (second Laplace law)，Laplace-Gauss 分布 (Laplace-Gauss distribution) 等其他名称一样，它把这个分布的发现及首次应用于概率论中各种问题同 C F Gauss 和 P Laplace 的名字联系起来．Gauss (1809) 和 Laplace (1812) 在研究**误差理论**(errors, theory of) 和**最小二乘法**(least squares, method of) 时引入了正态分布．例如，Gauss 在解决天文学和理论大地测量学问题的过程中建立了(观测)误差理论，其中随机误差的概率密度由下式给出

$$\varphi(\Delta)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\ e^{-h^2\Delta^2},\ h>0$$

(见 **Gauss 律** (Gauss law))．另外，Laplace 得到了积分(Laplace 函数)

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau e^{-t^2}dt,$$

它是在成功概率为 p 的 n 次 Bernoulli 试验中，成功次数在 $np-\tau\sqrt{2np(1-p)}$ 和 $np+\tau\sqrt{2np(1-p)}$ 之间的概率的近似值(对大 n)(即所谓 Laplace 极限公式(Laplace limit formula))．在更早的时候(1733)，A de Moivre 就已发现**二项分布**(binomial distribution)($p=1/2$) 的极限形式是正态分布

参考文献

[1] Gauss, C F, Theoria motus corporum coellestium, in werke, Vol 7, 1809 English translation C H Davis (ed), Dover, 1963

[2] Laplace, P S, Theorie analytique des probabilités, Paris, 1812

[3] Todhunter, I, A history of the mathematical theory of probability, Chelsea, reprint, 1949

А В Прохоров 撰 陶 波 译 李国英 校

Gauss 律 [Gauss law, Гаусса закон]

正态分布 (normal distribution) 的一种常用名称，这与该分布在 Gauss 的**误差理论** (errors, theory of) 中的作用有关．密度

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\ e^{-h^2x^2},\ h>0 \qquad (*)$$

(最初被称为"Gauss 律") 于 1809 年首次出现在 C. F Gauss 的《天体运行理论》(Theoria motus corporum coelestium) 一书中，他在第 2 册第 3 部分第 177 节中提出了下述原则 "如果某个量的确是依赖于在相同条件下得到的具有相同精度的大量直接观测值，则它的值最可能是所有观测值的算术平均"([1])．这一论述可解释如下 设 z 是被观测量的真值，观测结果 x 的概率密度是 $\varphi(x-z)$ 则对任何 n 和任何 $x_1,\ \ ,x_n$，当

$$z=\frac{x_1+\ \ +x_n}{n}$$

时，联合密度 $\varphi(x_1-z)\ \ \varphi(x_n-z)$ 作为 z 的函数达到其最大值．由此不难证明 $\varphi'(x)/x\varphi(x)$ 不依赖于 x，且 $\varphi(x)$ 具有 $(*)$ 的形式 应当指出，这一原则有时也受到批评

参考文献

[1] Gauss, C F, Theoria motus corporum coelestium, in werke, Vol 7, K Gesellschaft wissenschaft Gottingen, 1809(英译本 C H Davis (ed), Dover, 1963)

[2] Poincare, H, Calcul des probabilites, Gauthier-Villars, 1912

Ю В Прохоров 撰 陶 波 译 李国英 校

Gauss-Манин 联络 [Gauss-Manin connection, Гаусса-Манина связность]

【补注】 Gauss-Манин 联络是对上同调类关于参数求导的一种方式 考虑域 K 上的光滑射影曲线 X，它的第一 **de Rham 上同调** (de Rham cohomology) 群 $H^1_{dR}(X/K)$ 可等同于 X 上第二类微分关于恰当微分 (见**微分** (differential)) 的商空间 K 的每一导子 θ (见**环中的导子** (derivation in a ring)) 均可典范地提升为一满足 $\nabla_\theta(g\omega)=g\nabla_\theta(\omega)+\theta(g)\omega$ 的映射 $\nabla_\theta\ \ H^1_{dR}(X/K)\to H^1_{dR}(X/K)$，这里 $g\in K$，$\omega\in H^1_{dR}(X/K)$ ([A1],[A2]) 这给出一个可积 (即 $\nabla_{[\theta\ \theta]}=[\nabla_\theta,\nabla_\theta\ ]$) 的**联络** (connection)

$$\nabla\ \ H^1_{dR}(X/K)\to\Omega^1_K\otimes H^1_{dR}(X/K)$$

如果 K 是单变量函数域，则可得到具有**正则奇点** (regular singular point) 的 Picard-Fuchs 方程 $\nabla\omega=0$

高维时的推广由 A Grothendieck 给出 ([A3]) 对 $\mathbf{C}$ 概形间的真光滑态射 $f\ \ X\to S$，f 的纤维的 de Rham 上同调由相对 de Rham 上同调层 $H^n_{dR}(X/S)=R^nf_*(\Omega_{X/S})$ 来刻画，这是一个局部自由的 $\mathcal{O}_S$ 模．从现在起设 S 是 $\mathbf{C}$ 上有限型的，X^h, S^h 表示底解析空间，则

$$H^n_{dR}(X^h/S^h)\cong\mathcal{O}_{S^h}\otimes_{\mathbf{C}}R^nf_*\mathbf{C}_{X^h},$$

而 Gauss-Манин 联络的解析形式 (analytic version of the Gauss-Manin connection) 就定义为 $\nabla(g\omega)=dg\otimes\omega$，这里 g 和 ω 分别是 $\mathcal{O}_{S^h}$ 和 $R^nf_*\mathbf{C}_{X^h}$ 的局部截面

代数构造已由 N. M Katz 和 T Oda 给出([A4]) 设

$$\varphi^j\Omega^p_{X/C}=(f^*\Omega^j_{S/C}\otimes\Omega^{p-j}_{X/C}\to\Omega^p_{X/C})$$

的象，则复形 $\Omega_{X/C}$ 被子复形 φ^j 所滤过．于是有

$(\varphi^j/\varphi^{j+1})^n \cong f^*\Omega^j_{S/C} \otimes \Omega^{n-j}_{X/S}$ 及 $R^nf_*(\varphi^j/\varphi^{j+1}) \cong \Omega^j_{S/C}\otimes H^{n-j}_{dR}(X/S)$ 这时相应于正合列

$$0 \to \varphi^1/\varphi^2 \to \varphi^0/\varphi^2 \to \varphi^0/\varphi^1 \to 0$$

的长正合超上同调序列中的连接同态 ∇ $R^nf_*(\varphi^0/\varphi^1) \to R^{n+1}f_*(\varphi^1/\varphi^2)$ 就是 Gauss-Манин 联络的代数形式 (algebraic version of the Gauss-Manin connection)

Gauss-Манин 联络是正则奇异的([A5]-[A8]).它在无穷远周围的单值变换为拟幂幺的([A6],[A9],[A10]),而且其 Jordan 块的大小的界也已清楚([A7],[A11]).这一单值定理的几何证明是由 A Landman([A12])、C H Clemens([A13])和 D T Lê([A14])给出的

Gauss-Манин 联络的另一重要特性是 Griffiths 横截性 光滑真态射 f $X\to S$ 的相对 de Rham 上同调层可有如下滤过 设 $F^p\Omega_{X/S}$ 为 $\Omega_{X/S}$ 的子复形

$$[0\to \quad \to 0\to \Omega^p_{X/S}\to\Omega^{p+1}_{X/S}\to \quad],$$

则 $\mathrm{Gr}^p_F\Omega_{X/S}\cong\Omega^p_{X/S}[-p]$ 谱序列 $E_1^{pq}=R^qf_*\Omega^p_{X/S}\Rightarrow H^{p+q}_{dR}(X/S)$ 在 E_1 处退化([A15]) 且 E_1^{pq} 在 S 上是局部自由的 因此 $R^nf_*(F^p\Omega_{X/S})$ 单射地映入 $H^n_{dR}(X/S)$ 的子层 $F^pH^n_{dR}(X/S)$ Griffiths 横截性 (Griffiths transversality) 就是

$$\nabla(F^pH^n_{dR}(X/S))\subseteq\Omega^1_S\otimes F^{p-1}H^n_{dR}(X/S)$$

这一性质

几何数据 $(H^n_{dR}(X/S),\nabla,F)$ 给出了 **Hodge 结构** (Hodge structure)的(极化)变更的概念.A Borel 将单值定理推广到这种抽象的情形([A16],(6 1))

对于具有孤立奇点的函数芽([A10])和给出孤立完全交奇点的映射芽([A17])都定义了相应的 Gauss-Манин 联络 这些联络的单值性就是关于消没上同调的经典 Picard-Lefschetz 单值定理

在 **D 模** (*D*-module) 理论中,Gauss-Манин 联络理论表示成真态射的直接象函子的性质 与**消没闭链** (vanishing cycle)函子的形式理论([A18])联系起来后即给出 Gauss-Манин 系统的概念([A19]).这在奇点的渐近 Hodge 理论中起着重要的作用([A20]-[A22]).

参考文献

[A1] Manin, Yu, Algebraic curves over fields with differentiation, *Transl Amer Math Soc*, **37** (1964), 59-78 (*Izv Akad Nauk SSSR Ser Mat*, **22** (1958), 737-756)

[A2] Katz, N M, On the differential equations satisfied by period matrices, *Publ Math IHES*, **35** (1968), 71-106

[A3] Grothendieck, A, On the de Rham cohomology of algebraic varieties *Publ Math IHES*, **29** (1966), 351-359

[A4] Katz, N M and Oda, T, On the differentiation of de Rham cohomology classes with respect to parameters, *J Math Kyoto Univ*, **8** (1968), 199-213

[A5] Nilsson, N, Some growth and ramification properties of certain integrals on algebraic manifolds, *Arkiv for Mat*, **5** (1963-1965), 527-540

[A6] Deligne, P, Equations différentielles à points singuliers reguliers, Lecture notes in math, 163, Springer, 1970

[A7] Katz, N M, The regularity theorem in algebraic geometry, in Actes Congres International Mathématiciens Nice, 1970, Vol 1, Gauthier-Villars, 1971, 437-443

[A8] Griffiths, P A, Periods of integrals on algebraic manifold, Ⅰ,Ⅱ, *Amer J Math*, **90** (1968), 568-626, 805-865

[A9] Grothendieck, A, Letter to J-P Serre, 5 10 1964

[A10] Brieskorn, E, Die Monodromie von isolierten Singularitaten von Hyperflachen, *Manuscr Math*, **2** (1970), 103-161

[A11] Katz, N M, Nilpotent connections and the monodromy theorem Applications of a result of Turnttin, *Publ Math IHES*, **39** (1971), 175-232

[A12] Landman, A, On the Picard-Lefschetz formula for algebraic manifolds acquiring general singularities, Berkeley, 1967, Thesis

[A13] Clemens, C H, Picard-Lefschetz theorem for families of nonsingular algebraic varieties acquiring ordinary singularities, *Trans Amer Math Soc*, **136** (1969), 93-108

[A14] Lê, D T, The geometry of the monodromy theorem, in K G Ramanathan (ed) C P Ramanujam, a tribute, Tata IFR Studies in Math, Vol 8, Springer, 1978

[A15] Deligne, P, Théorème de Lefschetz et Critères de degenerescence de suites spectrales, *Publ Math IHES*, **35** (1968), 107-126

[A16] Schmid, W, Variation of Hodge structure the singularities of the period mapping, *Invent Math*, **22** (1973), 211-319

[A17] Greuel, G-M, Der Gauss-Manin Zusammenhang isolierter Singularitaten von vollstandigen Durchschnitten, *Math Ann*, **214** (1975), 235-266

[A18] Deligne, P, Le formalisme des cycles évanescents, in A Grothendieck, P Deligne and N M Katz (eds) Groupes de monodromie en geométrie algebrique, SGA Ⅶ², 1967/1969, EXP ⅩⅢ, Lecture notes in Math, Vol 340, Springer, 1973

[A19] Pham, F, Singularities des systèmes différentiels de Gauss-Manin, Birkhauser, 1979

[A20] Scherk, J and Steenbrink, J H M, On the mixed Hodge structure on the cohomology of the Milnor fibre, *Math Ann*, **271** (1985), 641-655

[A21] Varchenko, A N, Asymptotic Hodge structure in the vanishing cohomology, *Math USSR Izv*, **18** (1982),

469–512 (*Izv Akad Nauk SSSR*, **45** (1981), 3, 540–591, 688)

[A22] Saito, M, Gauss-Manin system and mixed Hodge structure, *Proc Japan Acad Ser A*, **58** (1982), 29–32

刘先仿 译

Gauss 法 [Gauss method, Гаусса метод]

通过逐个消去未知数求解线性方程组的一种方法，它由 C F Gauss 首先引进（[1]） 给定方程组

$$f_j(x)-a_j=a_{j1}x_1+\quad+a_{jn}x_n-a_j=0, \qquad (S^0)$$

$$j=1, 2, \quad, m,$$

其中 a_{ji} 和 a_j 为任意数域 P 中的元素 不失一般性，可以假设 $a_{11}\neq 0$ Gauss 法按如下步骤运算 从第二个方程减去逐项乘以 a_{21}/a_{11} 后的第一个方程，然后从第三个方程减去逐项乘以 a_{31}/a_{11} 后的第一个方程， 再后从第 m 个方程减去逐项乘以 a_{m1}/a_{11} 后的第一个方程 令 S^1 是这样得到的减去后的方程组 如果 S^1 的一个系数非零(可能在改变方程和未知数次序之后)，就把 S^1 当做 S^0，如此等等地做下去 如果方程组 S^0 的秩（即其系数矩阵的秩）r 小于 m，那么在第 r 步将会产生一个方程组 S^r，其中所有未知数的系数均为零，如果 $r=m$，该方程组称之为空的 (empty) 当且仅当 S^r 是相容的(即没有非零自由项) 或者它是空的方程组时 S^0 才是相容的．

得到（相容）方程组 S^0 的一个解的过程如下 取 S^{r-1}的某个解 $(x_r^0, \quad, x_n^0)$ 把 $x_r^0, \quad, x_n^0$ 的值赋予在 S^{r-2} 中 x_{r-1} 系数不为零的那些方程中的未知数 $x_r, \quad, x_n$ (例如它的第一个方程)，于是求得 $x_{r-1}=x_{r-1}^0$ 并得到 S^{r-2} 的解 $(x_{r-1}^0, x_r^0, \quad, x_n^0)$．换言之，把 S^{r-2} 中未知数 $x_r, \quad, x_n$ 代之以取定的值就可以计算出 x_{r-1}^0 的值．把 $x_{r-1}^0, \quad, x_n^0$ 代入 S^{r-3} 就求出值 $x_{r-2}=x_{r-2}^0$，从而得到解 $(x_{r-2}^0, \quad, x_n^0)$，依此类推 这样求得的值 $x_1^0, \quad, x_{r-1}^0$ 和取定的值 $x_r^0, \quad, x_n^0$ 合起来构成 S^0 的解 $(x_1^0, \quad, x_n^0)$ ([2])

这个方法可以按下面方式推广([4]) 令 U 是向量空间 P^n 的某个子空间而 $P^m(U)$ 是方程

$$p_1 f_1(x)+\quad+p_m f_m(x)=0 \qquad (*)$$

的全部解 $(p_1, \quad, p_m)$ 的集合，其中 x 跑遍 U 对于 $P^m(U)$的非零生成元构成的任意有限向量组

$$p^i=(p_1^i, \quad, p_m^i), \quad i=1, \quad, l,$$

可能构造一个方程组

$$\sum_{j=1}^m p_j^i f_j(x)-\sum_{j=1}^m p_j^i a_j=0, \quad i=1, \quad, l$$

(这里 x 是未知数)，此式通称为 S^0 的 U 卷积 (U-convolution)．如果 $P^m(U)$ 不包含非零元素，人们就说方程组 S^0 有空 U 卷积 (empty U-convolution) 如果方程组 S^0 是相容的，那么任何 U 的 U 卷积是相容的或是空的．已经发现，只要对某一个 U，U 卷积是相容的或空的，就足以使得方程组 S^0 是相容的．再则，令 $U_1, \quad, U_n$ 是由向量 $e_1=(1,0, \quad,0), \quad, e_m=(0,0,\cdot,1)$ 在空间 P^n 中生成的子空间，对于 $U=U_i$，方程 (*) 化为方程

$$a_{1i}p_1+\quad+a_{mi}p_m=0．$$

例如，令 $i=1$．如果有 $a_{11}\neq 0$，那么向量 $(a_{21}/a_{11}, -1, 0, \quad, 0), \quad, (a_{m1}/a_{11}, 0, 0, \quad, -1)$ 可以取为空间 $P^m(U_1)$ 的非零生成元，并且方程组 S^0 的 U_1 卷积将和 Gauss 法中消去未知数 x_1 的过程一致．

对于 $U=U_i+U_k$，方程组 S^0 的 U 卷积是同时消去两个未知数 x_i 和 x_k 的过程 例如，令 $i=1$ 和 $k=2$ 再假设

$$\Delta_{12}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0,$$

那么矩阵

$$\begin{Vmatrix} -\Delta_{23} & \Delta_{13} & -\Delta_{12} & 0 & & 0 \\ -\Delta_{24} & \Delta_{14} & 0 & -\Delta_{12} & & 0 \\ & & & & & \\ -\Delta_{2m} & \Delta_{1m} & 0 & 0 & & -\Delta_{12} \end{Vmatrix}$$

的行可以用来得到方程组 S^0 的 (U_1+U_2) 卷积，其中

$$\Delta rs=\begin{vmatrix} a_{r1} & a_{s1} \\ a_{r2} & a_{s2}\end{vmatrix}$$

利用成对地（乃至更一般成组地）消去未知数，方程组 S^0 可以用广义 Gauss 法解出．

参考文献

[1] Gauss, C F, Beitrage zur Theorie der algebraischen Gleichungen, in Werke, Vol 3, K Gesellschaft Wissenschaft Gottingen, Göttingen, 1876, 71–102

[2] Курош, А Г, Курс высшей алгебры, 10 изд, М, 1971 (英译本 Kurosh, A G, Higher algebra, Mir, 1972)

[3] Фаддеев, Д К, Фаддеева, В Н, Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд, М -Л, 1963 (英译本 Faddeev, D K and Faddeeva, V N, Computational methods of linear algebra, Freeman, 1963)

[4] Черников, С Н, Линейные неравенства, М, 1968

С Н Черников 撰

【补注】 这个方法有几种变形，大部分基于实现上的考虑（如 Crout 和 Doolittle 方法）或者效率上的需要(如对称方程组的 Cholesk i 方法)

在西方文献中 LU 分解 (LU-decomposition)，向前消元 (forward elimination) 和回代 (back substitu-

tion) 等概念常和 Gauss 法（也称为 Gauss 消元法 (Gauss elimination method)）联系在一起 考虑方程组 $Ax=a$ 的系数矩阵 A 为方阵（$m=n$）这一特殊情形 LU 分解把 A 分解成下三角和上三角矩阵 L 和 U，即 $A=LU$，向前消元和回代被分别理解为解三角形方程组 $Ly=a$ 和 $Ux=y$ 利用浮点运算量（flop）的概念（如同 C B.Moler 引进的那样），即执行一次浮点加法和一次浮点乘法以及少量下标运算所包含的总运算量，可以证明 LU 分解，向前消去和回代分别需要 $m^3/3$，$m^2/2$ 和 $m^2/2$ 个浮点运算量

对于数值计算来说，只保证系数 a_{11} 等主元（pivot）不为零是不够的，除非它们是可能的最佳元素，如果绝对值最大的 a_j 用作主元，那么就称其为部分主元法（partial pivoting） 如果整个矩阵（或者后续步骤中的子矩阵）中绝对值最大的元素作为主元，则称为完全主元法（complete pivoting） 部分主元法使得当矩阵 A 有奇异顺序主子矩阵时 LU 分解成为可能就相当于行交换．它需要 $O(m^2)$ 次比较 可以证明用主元策略时这种方法是数值稳定的（见**计算算法的稳定性**（stability of a computational algorithm），**计算过程的稳定性**（stability of a computational process））．

数值线性代数方面的一部杰作是[A1] [A6]中讨论了 Gauss 消去法的数值稳定性

在 [A4] 中可以找到该法的 Fortran 程序 较早的 Algol 程序可见 [A5]

参考文献

[A1] Golub, G H and Loan, C F van, Matrix computations, North Oxford Acad , 1983

[A2] Wilkinson, J H , The algebraic eigenvalue problem, Clarendon Press, 1965

[A3] Strang, G , Linear algebra and its application, Acad Press, 1976

[A4] Dongarra, H , Bunch, J R , Moler, C B and Stewart, G W , LINPACK users guide, SIAM, 1978

[A5] Wilkinson, J H and Reinsch, C , Handbook for automatic computation, 2 Linear algebra, Springer, 1971

[A6] Bussinger, P A , Monitoring the numerical stability of Gaussian elimination, *Numer Math* , **16** (1971), 360－361

蔡大用 译 李家楷 校

Gauss 数 [Gauss number , Гауссово число]

复整数 $a+bi$，其中 a 和 b 是任意有理整数．在几何上，Gauss 数构成平面上一切具有整有理坐标的格点 C F Gauss 于 1832 年在他的关于双二次剩余的工作中最先考虑了这种数 他还发现复整数集 Γ 的一些性质

集合 Γ 是一个整环，它的单位（即单位元的因子）是 1，-1，i，$-i$，不存在其他单位 整环 Γ 的一类复素数（即不能分解为非平凡积的数，称为 Gauss 素数（Gaussian prime））具有形式

$$\alpha=a+bi$$

的数，其模 $N(\alpha)=a^2+b^2=p$ 是形式为 $4n+1$ 的有理素数 p 或 $p=2$，对于另一类复素数，p 是形式为 $4n+3$ 的有理素数 Gauss 素数的一些例子是 $1+i$，$1+2i$，$3+4i$，3，7，等等

整环 Γ 中的任何数都能唯一地分解为 Γ 中的素数之积，单位和次序不计 具有这个性质的整环称为唯一因子分解整环（unique factorization domains）或 Gauss 环（Gaussian rings）(亦见**唯一分解环**（factorial ring））

在双二次剩余理论中，Gauss 数是有理数域的第一个简单而重要的扩张

参考文献

[1] Gauss, C F , Disquisitiones Arithmeticae, Yale Univ Press, 1966（译自拉丁文）

Б М Бредихин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hardy, G H and Wright, E M , An introduction to the theory of numbers, Clarendon Press, 1960

张鸿林 译

Gauss 原理 [Gauss principle , Гаусса принцип]，最小约束原理（principle of least forcing）

由 C F Gauss（[1]）建立的，基本的、最通用的微分的**经典力学的变分原理**（variational principles of classical mechanics）之一，表达了系统满足加于系统的理想约束及在给定时刻系统各点位置和速度为常数的条件的一族可能运动中的真实运动的极值性质．

根据 Gauss 原理，“任一时刻，受任一形式约束和任意力作用的质点系的运动将以一种尽可能相似于这些点是自由时发生的方式运动，也即受到最小的可能约束——dt 时间内约束的量度定义为每点的质量和该点偏离它为自由时应处位置的距离的平方的乘积之和”（[1]）

Gauss 原理等价于 **d'Alembert - Lagrange 原理**（d'Alembert - Lagrange principle），对完整和非完整系统都可应用 它已推广于系统解除部分约束的情况（[2]，[3]），以及系统受非理想约束的情况和连续介质情况（[4]）

参考文献

[1] Gauss, C F , Ueber ein allgemeines Grundgesetz der Mechanik, *J Reine Angew Math* , **4**（1829），232－235

[2] Болотов, Е А , 《Изв Физ - матем об - ва при Казан ун - те ,》, （2）**21**（1916），3，99－152

[3] Четаев, Н Г , 《Изв Физ - матем об - ва при Казан ун - те》,（3）**6**（1932－1933），68－71

[4] Румянцев, В В , 《Прикл матем и механ 》, **37**

(1973), 6, 963 – 973　　　B B Румянцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Arnol'd, V I, Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978 (译自俄文)

[A2] Whittaker, E T, Analytical dynamics of particles and rigid bodies, Dover, reprint, 1944

[A3] Lindsay, R B and Margenau, H, Foundations of physics, Dover reprint, 1957

唐福林 译

Gauss 求积公式[Gauss quadrature formula, Гаусса квадратурная формула]

求积公式

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i),$$

其中结点 (node) x_i 和权 c_i 的选择使得该公式对于函数

$$\sum_{k=0}^{2n-1} a_k \omega_k(x)$$

是精确的，这里诸 $\omega_k(x)$ 是给定的线性无关的函数(积分限也可以是无穷的) C F Gauss([1])首先引入了对于 $a=-1$, $b=1$, $p(x)\equiv 1$ 情况下的这种公式 他得到的下述公式对于任意次数不超过 $2n-1$ 的多项式都是精确的

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = A_1^{(n)} f(x_1) + \quad + A_n^{(n)} f(x_n) + R_n,$$

其中 x_k 是 **Legendre 多项式** (Legendre polynomials) $P_n(x)$ 的根，而 $A_k^{(n)}$ 和 R_n 由下面公式定义

$$A_k^{(n)} = \frac{2}{(1-x_k^2)[P_n'(x_k)]^2},$$

$$R_n = \frac{2^{2n+1}[n!]^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(c), \quad -1<c<1$$

当被积函数充分光滑时就应该采用这种公式，可以大大节省节点的数目．例如，$f(x)$ 是由很昂贵的实验确定的或者是应用累次积分计算重积分过程中产生的 在这些实际应用中，恰当地选择**权函数** (weight function) 和函数 $\omega_j(x)$ 是很重要的

对很多类 $p(x)$ 和 $\omega_j(x)$, Gauss 求积公式的结点表是现成的 ([5])，特别对于 $p(x)\equiv 1$, $\omega_j(x)=x^j$ 直给到 $n=512$

如取 $p(x)\equiv 1$, $\omega_j(x)=x^j$，作为一种子线段剖分计算积分的方法 Gauss 求积公式可用在自动选择步长的标准积分程序中 ([6])

参考文献

[1] Gauss, C F, Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi, in Werke, Vol 3, K Gesellschaft Wissenschaft Gottingen, 1886, 163 – 196.

[2] Крылов, В И, Приближенное вычисление интегралов, М, 1959 (英译本 Krylov, N M, Approximate calculation of integrals, Macmillan, 1962)

[3] Крылов, В И, Шульгина, Л Т, Справочная книга по численному интегрированию, М, 1966

[4] Бахвагов, Н С, Численные методы, М, 1973 (英译本 Bakhvalov, N S, Numerical methods analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977)

[5] Stroud, A H and Secrest, D, Gaussian quadrature formulas, Prentice-Hall, 1966

[6] Стандартная программа для вычисления однократных интегралов по квадратурам типа Гаусса, в 26, М, 1967

Н С Бахвалов, В П Моторный 撰

【补注】 E B. Christoffel 曾对一般的 Gauss 求积公式 ($w\neq 1$) 进行了详细的研究 ([A3])，因此求积系数也称为 Christoffel 系数或 **Christoffel 数** (Christoffel numbers)(亦见[A1])．在[A2]中可以找到这些系数的表．

参考文献

[A1] Hilderbrand, F B, Introduction to numerical analysis, McGraw-Hill, 1974

[A2] Abramowitz, M and Stegun, I A, Handbook of mathematical functions, Appl Math Series, 25, Nat Bur Stand & Dover, 1970

[A3] Christoffel, E B, Ueber die Gausssche Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben, J Reine Angew Math, 55 (1858), 81 – 82.

[A4] Davis, P J and Rabinowitz, P, Methods of numerical integration, Acad Press, 1984

[A5] Piessens, R, et al, Quadpack, Springer, 1983.

蔡大用 译

Gauss 互反律 [Gauss reciprocity law; Гаусса закон взаимности]

联系 **Legendre 符号** (Legendre symbol) (p/q) 和 (q/p) 之值的一个关系式，其中 p 和 q 是相异的奇素数 (见**二次互反律** (quadratic reciprocity law)) 关于二次剩余的基本 Gauss 互反律为下列关系式·

$$\left[\frac{p}{q}\right]\left[\frac{q}{p}\right] = (-1)^{(p-1)/2\ \ (q-1)/2},$$

此外还有两个补充关系式，即

$$\left[\frac{-1}{p}\right] = (-1)^{(p-1)/2} \text{和} \left[\frac{2}{p}\right] = (-1)^{(p^2-1)/8}$$

L Euler 于 1772 年首先叙述了关于二次剩余的互

反律 A Legendre 于1758年给出它的现代形式的表达，并且做了部分证明．C F Gauss 于1801年第一个给出这个定律的完全证明（[1]），他一生根据不同原理对于互反律至少给出了八个不同证明

Gauss 为证明关于三次和四次剩余的互反律而做的努力，促使他引进复整数环

参考文献

[1] Gauss, C F , Disquisitiones Arithmeticae, Yale Univ Press, 1966(译自拉丁文)

[2] Виноградов, И М , Основы теории чисел 8 изд , М , 1972

[3] Hasse, H , Vorlesungen über Zahlentheorie, Springer, 1950

С А Степанов 撰

【补注】 为推广二次互反律（Gauss 互反律通常这样称呼）而做的努力是**代数数论**（algebraic number theory）和**类域论**（class field theory）发展的重要推动力 二次互反律的一个深远推广称为 Artin 互反律（Artin reciprocity law）

张鸿林 译

Gauss 半群 [Gauss semi-group, Гауссова полугруппа]

一个有单位元，满足消去律的交换半群，在其中任意非可逆元素 a 都能分解为不可约元素（即不能表成非可逆因子的乘积的元素）的乘积，其次，对于任意两个这样的分解

$$a=b_1 \cdots b_k \text{ 和 } a=c_1 \cdots c_l$$

来说，都有 $k=l$，并且必要时对因子重新编号后，可得

$$b_1=c_1\varepsilon_1, \quad \cdots, \quad b_k=c_k\varepsilon_k,$$

这里 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k$ 是可逆元素．Gauss 半群的典型的例子包括非零整数的乘法半群和一个域上一元非零多项式的乘法半群．Gauss 半群中任意两个元素都有最大公因子

参考文献

[1] Курош, А Г, Лекции по общей алгебре, 2 изд , М , 1973(中译本 А Г 库洛什，一般代数学讲义，上海科学技术出版社，1964)

Л Н Шеврин 撰 郝钢新 译

Gauss 和 [Gauss sum; Гаусса сумма]

如下形式的**三角和**(trigonometric sum)

$$\tau_a(\chi)=\sum_{m=0}^{q-1}\chi(m,q)e^{2\pi i(am)/q},$$

其中 $\chi(m,q)$ 是模 q 的数值特征标 Gauss 和由指定特征标 $\chi(m,q)$ 与整数 a 完全确定 当 q 等于奇素数 p，特征标 $\chi(m,q)$ 等于 **Legendre 符号**（Legendre symbol）(m/q) 时，这种和为 C F Gauss(1811) 所研究．在这种情形下，

$$\tau_a(\chi)=\sum_{m=0}^{p-1}e^{2\pi i(am^2)/p}, \qquad (*)$$

这里 $(a,p)=1$．通过研究和(*)的性质，Gauss 求出了这个和的模的精确表达式

$$|\tau_a(\chi)|=\sqrt{p}.$$

他也解决了决定 $\tau_a(\chi)$ 的符号这一更困难的问题，证明了

$$\tau_a(\chi)=\sqrt{p}, \qquad \text{若 } p\equiv 1 \pmod 4,$$

及

$$\tau_a(\chi)=i\sqrt{p}, \qquad \text{若 } p\equiv 3 \pmod 4.$$

Gauss 利用和(*)的性质解决了数论中的某些问题，一个特殊的例子是，他利用它给出了**二次互反律**(quadratic reciprocity law) 的一个证明

Gauss 和在数论中的重要性只是到了20世纪20年代才变得明显起来 那时，H Weyl 利用一般的三角和（见 **Weyl 和**（Weyl sum））研究一致分布．同时，И. М Виноградов 利用这些和得到了模 p 的最小二次非剩余的上界估计

借助于 Gauss 和，可以建立数论中的两个重要对象之间的关系——即积性特征标 $\chi=\chi(m,p)$ 和加性特征标

$$f_a=f_a(m)=e^{2\pi i(am)/p}$$

之间的关系（为简单起见，只考虑素数模 p 的情形）．由周期为 p 的所有复值函数 $f(x)$ 组成的集合 F 构成复数域上的一个 p 维向量空间．若定义 F 中的数量积为

$$(f,g)=\frac{1}{p}\sum_{x=0}^{p-1}f(x)\overline{g}(x), \quad f,g\in F,$$

则函数 $f_a(m)$ $(a=0, \cdots, p-1)$ 构成 F 的一组正交基，这里有

$$\chi=\sum_{a=0}^{p-1}\alpha_a f_a,$$

其中 $\alpha_a=\tau_a(\chi)/p$ 因而，Gauss 和 $\tau_a(\chi)$(精确到因子 $1/p$)是积性特征标 χ 在加性特征标 f_a 上展开的坐标．从一般形式的 Gauss 和的性质，可推出任一特征标 $\chi=\chi(m,q)$ 可以表为 $e^{2\pi i(am)/q}$ 的线性组合，这是证明 L 函数的函数方程的基础

这些思想被有效地应用于**大筛法**（large sieve），并从加性特征标和估计得到积性特征标和估计．Gauss 和也被应用于表示 L 函数为有限和 这样的表示形式被应用于分圆域的除子类的个数问题

属于二次特征标的 Gauss 和 $\tau_a(\chi)$ 的符号问题，可以表述为属于 $k(\geqslant 3)$ 阶特征标 χ 的 Gauss 和的更一般形式的问题，因而产生了素数模 $p\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ 的三次 Gauss 和的 **Kummer 假设**（Kummer hypothesis），及其对 $k>3$ 的情形的推广

参考文献

[1] Gauss, C F, Disquisitiones arithmeticae, Teubner, 1901 (英译本 Gauss, C F, Disquisitiones arithmeticae, Yale Univ Press, 1966)

[2] Виноградов, И М, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М, 1971 (英译本 Vinogradov, I. M, Selected works, 181 − 295, Springer, 1985)

[3] Davenport, H, Multiplicative number theory, Springer, 1980

[4] Prachar, K, Primzahlverteilung, Springer, 1957

[5] Hasse, H, Vorlesungen über Zahlentheorie, Springer, 1950

Б М Бредихин 撰

【补注】 模 q 的数值特征标基本上就是剩余类环 $\mathbf{Z}(q)$ 的单位群 $\mathbf{Z}(q)^*$ 的特征标，即 Abel 群的同态 χ $\mathbf{Z}(q)^*\to\to T$，其中 $T=\{z\in\mathbf{C}\ |z|=1\}$ 给定这样的一个 χ，通过设

$$\chi(a)=\chi(\bar{a}),\ \text{若}\ (a,q)=1,$$
$$\chi(a)=0,\ \text{若}\ (a,q)>1,$$

可把 χ 扩展成 $\mathbf{Z}$ 上的函数，其中 $\bar{a}$ 表示包含 a 的模 q 的剩余类．于是，这个 $\mathbf{Z}$ 上的函数 χ 满足 $\chi(ab)=\chi(a)\chi(b)$ 当且仅当 $(a,q)=1$ 时 $\chi(a)\neq 0$，当 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,q)$ 时 $\chi(a)=\chi(b)$，以及反过来，任一满足这些条件的函数必是模 q 的数值特征标 模 q 的数值特征标有 $\varphi(q)$ 个，其中 φ 是 **Euler 函数**（Euler function） 模 q 的数值特征标也称为模 q 的剩余特征标（residue character）或模 q 的 **Dirichlet 特征标**（Dirichlet character)

潘承彪 译 戚鸣皋 校

Gauss 定理 [Gauss theorem, Гаусса теорема]，奇妙定理（teorema egregium)

Euclid 空间 E^3 中正则曲面的 **Gauss 曲率**（Gaussian curvature)（即主曲率的乘积）在曲面等距变形时保持不变（这里“正则性”是指 C^3 光滑浸入） Gauss 定理得自事实 曲面在点 (u,v) 处的 Gauss 曲率 K 可用曲面的第一基本形式

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

的系数及其在该点处的一阶、二阶导数来表出．K 的这种表达式被称为 Gauss 方程（Gauss equation)，它可用多种形式写出（[2]） 在特别的坐标系下，Gauss 方程能被简化．于是，在等温坐标系下（$E=G=\lambda$，$F=0$）为

$$K=-\frac{1}{2\lambda}\Delta\ln\lambda,$$

在半测地坐标系下（$E=1$，$F=0$）为

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}\ \frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}\ .$$

Gauss 方程和 **Peterson - Codazzi 方程**（Peterson - Codazzi equations）构成了用曲面的第一、第二基本形式来重建曲面的方程组的可积条件．由 Gauss 方程及 **Gauss - Bonnet 定理**（Gauss - Bonnet theorem）得知 正则曲面上测地三角形的内角之和与 π 之差等于该三角形的球面象的有向面积（[1]）

Gauss 定理是由 C F Gauss 所建立的（[1]），它是在曲面的内蕴和外蕴几何学之间的关系的研究中第一个而且是最重要的结果．

对 Riemann 空间 V^n 中的一个正则 m 维曲面 F^m $(2\leqslant m\leqslant n-1)$ 而言，Gauss 定理的下列推广成立（[3]，[4]）

$$k(a,b)=\tilde{k}(a,b)+\sum_{i=1}^{n-m}(l_i(a,a)l_i(b,b)-\\ -l_i^2(a,b)),\qquad(*)$$

这里 $k(a,b)$，$\tilde{k}(a,b)$ 分别是 F^m 和 V^n 在所考虑的点处关于 F^m 的切向量 a，b 所定义的二维方向的截面曲率，l_i 是 F^m 在此点关于法正交标架中第 i 条法线的第二基本形式 由（$*$）知道，对 E^n 中的超曲面 F^{n-1}，主曲率的所有偶的初等对称函数

$$K_{2p}=\sum_{i_1<\ <i_{2p}}k_{i_1}\cdot\ k_{i_{2p}},$$

$2\leqslant 2p\leqslant n-1$，是由 F^{n-1} 的第一基本形式所确定的．在偶数维空间 $E^{2m}(m>1)$ 中，超曲面 F^{2m-1} 由其第一基本形式及 Gauss - Kronecker 曲率

$$K=k_1\quad k_{2m-1}$$

（在 K 不为零的条件下）唯一确定（[5]）

对 E^3 中一大类二维非正则曲面，可定义“外蕴曲率”为与其球面映射有关的一个 Borel 测度，而定义“内蕴曲率”为同三角形内角之和与 π 之差相关连的一个测度 Gauss 定理的一个推广是说外蕴曲率与内蕴曲率相同．对一般凸曲面（[6]）和具有有界外蕴曲率的 C^1 光滑曲面（[7]），已经得到 Gauss 定理的这种推广

参考文献

[1] Gauss C F, Allgemeine Flachentheorie, W Engelmann, Leipzing, 1990（译自拉丁文）

[2] Blaschke, W, Einführung in die Differentialgeometrie, Springer, 1950

[3] Gromoll, D, Klingenberg, W and Meyer, W, Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968

[4] Eisenhart, L P, Riemannian geometry, Princeton

Univ Press, 1949
[5] Sternberg, S, Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964
[6] Александров, А Д, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М - Л, 1948 (英译本 Aleksandrov, A D, Die innere Geometrie der konvexen Flachen, Akademie-Verlag, 1955)
[7] Погорелов, А В, Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М, 1969 (英译本 Pogorelov, A V, Extrinsic geometry of convex surfaces, *Amer Math Soc*, 1973)
Ю Д Бураго 撰

【补注】 Peterson-Codazzi 方程更常被称为 Mainardi-Codazzi 方程.

参考文献

[A1] Berger, M and Gostiaux, B, Differential geometry, Springer, 1968 (译自法文)
[A2] Dombrowski, P, 150 years after Gauss, *Astérisque*, **62** (1979)
[A3] Do Carmo, M, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, 1976
[A4] Kobayashi, S and Nomizu, K, Foundations of differential geometry, 2, Interscience, 1969
[A5] Spivak, M, Diffferential geometry, 1 - 5, Publish or Perish, 1979
沈纯理 译

Gauss 变换 [Gauss transform, Гаусса преобразование]

由积分

$$W(\zeta)[x]=\frac{1}{\sqrt{\pi\zeta}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{u^2}{\zeta}\right]x(t+u)du,$$

$$\mathrm{Re}\zeta>0$$

定义的函数 $x(t)$ 的线性函数变换 $W(\zeta)[x]$ 如果 $x(t)\in L_2(-\infty,+\infty)$, 那么 $W(\zeta)[x]\in L_2(-\infty,+\infty)$, 对实值 $\zeta=\bar{\zeta}$, 算子 $W(\zeta)$是自伴的 ([1]).

Gauss 变换的反演公式是

$$x(t)=\exp\left\{-\frac{\zeta}{4}\frac{d^2}{dt^2}\right\}W(\zeta)[x(t)]$$

当 $\zeta=4$ 时, Gauss 变换即为所知的 Weierstrass 变换 (Weierstrass transform)

参考文献

[1] Hille, E and Phillips, R, Functional analysis and semi-groups, Amer Math Soc, 1957
[2] Диткин, В А и Прудников, А П, в кн Итоги науки Сер Математика Математический анализ, 1966, М, 1967, 7 - 82 (1967)
А П Прудников 撰

【补注】 以上的反演公式可用半群解释. 求 Gauss 变换的反演的另一方法是在第一个方程中记 $t+u=v$, 然后将一个双边 Laplace 变换 (Laplace transform) 结果代入. 则反演公式即由众所周知的 Laplace 变换技巧得出

参考文献

[A1] Sneddon, I N, The use of integral transforms, McGraw-Hill, 1972
陈一元 译 郑维行 校

Gauss 变分问题 [Gauss variational problem, Гаусса вариационная задача]

一个变分问题, 其研究始于 C F Gauss (1840) ([1]), 可用现代语言阐述如下 设 μ 是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ $(n\geqslant 3)$ 上的一个能量有限的正测度 (见**测度的能量** (energy of measures)), 又设

$$U^{\mu}(x)=\int\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,d\mu(y)$$

定义了 μ 的 **Newton 位势** (Newton potential) U^{μ}, 要从具紧支集 $K\subset\mathbf{R}^n$ 的所有测度 λ 中, 求一个使积分

$$\int(U^{\lambda}-2U^{\mu})d\lambda$$

达到最小值的测度 μ_0 这个积分是能量有限的测度全体构成的准 Hilbert 空间中的标量积 $(\lambda-2\mu,\lambda)$.

Gauss 变分问题的重要性在于这一事实, 即平衡测度 (见 **Robin 问题** (Robin problem)) 可作为某个选定的 μ 的 Gauss 变分问题的解被求得. 例如, μ 可取作这样一个球面上的均匀质量分布, 该球面以坐标原点为中心且包围了 K

参考文献

[1] Gauss, C F, Allgemeine Lehrsatze in Beziehung auf die im verkehrten Verhaltnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehung- und Abstossungs-Krafte, in Werke, Vol 5, K Gesellschaft Wissenschaft Gottingen, 1877, 195 - 242
[2] Ландкоф, Н С, Основы современной теории потенциала, М, 1966, гл 2 (英译本 Landkof, N S, Foundations of modern potential theory, Springer, 1972)
[3] Brelot, E, Eléments de la theorie classique du potentiel, Sorbonne Univ Paris, 1959
Е Д Соломенцев 撰

【补注】 测度 μ_0 是 μ 在这样一个凸锥上的投影, 该凸锥由所有具有限能量且支集含于 K 的正测度 λ 构成. 亦见 [A1] 第 I 部分第 XIII 章对这专题的论述

参考文献

[A1] Doob, J L, Classical potential theory and its probabilistic counterpart, Springer, 1984
高琪仁、吴炯圻 译

Gauss 信道 [Gaussian channel, канал Гауссовский]

信道转移函数定义为条件 Gauss 分布的**通信信道** (communication channel). 更确切地说, 在有限时间间隔 $[0,T]$ 内, 如果通信信道 (Q,V) 满足下列条件, 则称它为 Gauss 信道 1) 输入和输出信号的值空间

$(\mathscr{Y}, \mathscr{S}_y)$ 和 $(\tilde{\mathscr{Y}}, \mathscr{S}_{\tilde{y}})$ 是具有可测集的，普通 σ 代数的实值函数 $y(t)$ 和 $\tilde{y}(t)$, $t \in [0, T]$ 的值空间（即高斯信道的输入和输出信号分别由随机过程 $\eta = \{\eta(t) \ t \in [0, T]\}$ 和 $\tilde{\eta} = \{\tilde{\eta}(t) \ t \in [0, T]\}$ 给出），2) 对于任一确定的 $y \in Y$，信道转移函数 $Q(y, \cdot)$ 定义为一个条件 Gauss 分布（如果随机变量集合的每一个有限子族都具有有限维条件**正态分布**（normal distribution），其二阶矩又与条件无关，那么该随机变量集合就具有条件 Gauss 分布（conditional Gaussian distribution））；3) 限制 V 仅受随机变量 η 的二阶矩的影响

在区间 $(-\infty, \infty)$ 上 Gauss 信道的一个例子是这样一个信道，其输入信号为平稳随机序列 $\eta = (\ldots, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \ldots)$，其输出信号是由下式得到的平稳随机序列 $\tilde{\eta} = (\ldots, \tilde{\eta}_{-1}, \tilde{\eta}_0, \tilde{\eta}_1, \ldots)$，

$$\tilde{\eta}_i = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \eta_{i-k} + \zeta_i, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

式中，$\zeta = (\ldots, \zeta_{-1}, \zeta_0, \zeta_1, \ldots)$ 是独立于 η 的平稳 Gauss 随机序列，且 $E\zeta_i = 0$ ($i = \pm 1, \pm 2, \ldots$)，谱密度为 $f_\zeta(\lambda)$，$-1/2 \leqslant \lambda \leqslant 1/2$ 对输入信号的限制为

$$\int_{-1/2}^{1/2} |\Phi(\lambda)|^2 f_\eta(\lambda)\, d\lambda \leqslant S$$

式中，$f_\eta(\lambda)$ 是 η 的谱密度，$\Phi(\lambda)$ 是某一函数，而 S 是一常数．该信道的容量由下式给出

$$C = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \log \max \left[\left| \frac{a(\lambda)}{\Phi(\lambda)} \right|^2 \frac{\mu}{f_\zeta(\lambda)}, 1 \right] d\lambda = S$$

式中，$a(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k \lambda}$，$\mu$ 由下式确定

$$\int_{-1/2}^{1/2} \max \left[\mu - \left| \frac{\Phi(\lambda)}{a(\lambda)} \right|^2 f_\zeta(\lambda), 0 \right] d\lambda = S$$

参考文献

[1] Wozencraft, J M M and Jacobs, J M, Principles of communication Engineering, Wiley, 1965

亦见**通信信道**（communication channel）中引用的 [1], [4], [6].

Р Л Добрушин, В В Прелов 撰 周荫清 译

Gauss 曲率 [Gaussian curvature, Гауссова кривизна]，曲面的

正则曲面在一给定点的**主曲率**（principal curvature）的乘积．若

$$\mathrm{I} = ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

是曲面的**第一基本形式**（first fundamental form）及

$$\mathrm{II} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

是曲面的**第二基本形式**（second fundamental form），则 Gauss 曲率能用公式

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

来计算．Gauss 曲率恒等于**球面映射**（spherical map）的 Jacobi 行列式

$$|K|_{P_0} = \lim_{d(s) \to 0} \frac{S}{s},$$

这里 P_0 是曲面上一点，s 是包含 P_0 的区域 U 的面积，S 是 U 的球面象的面积，d 是区域的直径 Gauss 曲率在**椭圆点**（elliptic point）处是正的，在**双曲点**（hyperbolic point）处是负的，在**抛物点**（parabolic point）或**平坦点**（flat point）处为零，它可仅用第一基本形式的系数及其导数来表示（**Gauss 定理**（Gauss theorem）），即

$$K = \frac{1}{4W^4} \begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} + \frac{1}{2W} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \frac{F_v - G_u}{W} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{F_u - E_v}{W} \right\},$$

这里

$$W^2 = EG - F^2$$

因为 Gauss 曲率仅依赖于度量，即仅依赖于第一基本形式的系数，所以 Gauss 曲率在**等距形变**（deformation, isometric）下是不变的．Gauss 曲率在曲面论中起了特殊的作用，有许多关于它的计算公式（[2]）

此概念由 C F Gauss（[1]）引入，因而得名．

参考文献

[1] Gauss, C F, Allgemeine Flachentheorie, W Engelmann, Leipzing, 1900（译自拉丁文）

[2] Blaschke, W and Reichardt, H, Einfuhrung in die Differentialgeometrie, Springer, 1960

Е В Шикин 撰

【补注】 全 Gauss 曲率（total Gaussian curvature）（常简记为全曲率（total curvature））是指量

$$\iint K d\sigma$$

（亦见 **Gauss-Bonnet 定理**（Gauss-Bonnet theorem））

对由 $x = x(s)$ 所给出的光滑空间曲线 C，C 的总曲率 K 定义为 C 的球面象的长度（亦见**球面标形**（spherical indicatrix）），且能用沿 C 的关于 Frénet 标架（见 **Frénet 三棱形**（Frénet trihedron））(x, e_1, e_2, e_3) 的 **Frénet 公式**（Frénet formulas）$e_1 = \kappa_1 e_2$, $e_2 = -\kappa_1 e_1 + \kappa_2 e_3$, $e_3 = -\kappa_2 e_2$ 表示为

$$K = \int \kappa_1 ds$$

沈纯理 译

Gauss 过程 [Gaussian process, Гауссовский процесс]

一个实随机过程 $X(t)$ $(t\in T)$，它的所有有限维分布都是 Gauss 分布，即对任意 $t_1, \quad , t_n \in T$，随机变量 $X(t_1), \quad , X(t_n)$ 的联合概率分布的特征函数有以下形式

$$\varphi_{t_1 \quad t_n}(u_1, \quad , u_n) =$$

$$=\exp\{\iota\sum_{k=1}^{n}A(t_k)u_k - \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n}B(t_k, t_j)u_k u_j\},$$

其中 $A(t)=\mathsf{E}X(t)$ 是数学期望，

$$B(t, s)=\mathsf{E}[X(t)-A(t)][X(s)-A(s)]$$

是**协方差** (covariance) 函数．Gauss 过程 $X=X(t)$ 的概率分布完全决定于它的数学期望 $A(t)$ 和协方差函数 $B(t, s)$ $(s, t\in T)$ 对任意函数 $A(t)$ 和任意正定函数 $B(t, s)$ 存在一个具有期望 $A(t)$ 和协方差 $B(t, s)$ 的 Gauss 过程 $X(t)$．一个具有向量值

$$X(t)=\{X_1(t), \quad , X_m(t)\}$$

的多维随机过程，如果任意变量

$$X_{i_1}(t_1), \quad , X_{i_n}(t_n)$$

的联合概率分布是 Gauss 分布，则 $X(t)$ 称 Gauss 过程

一个复 Gauss 过程 (complex Gaussian process) $X=X(t)$ $(t\in T)$ 是一个形如

$$X(t)=X_1(t)+\iota X_2(t)$$

的过程，其中 $X_1(t)$, $X_2(t)$ 联合起来形成一个二维实 Gauss 过程．关于复 Gauss 过程，一个附加的约定是

$$\mathsf{E}X(s)X(t)=A(s)\ A(t),$$

其中 $A(t)=\mathsf{E}X(t)$．这个条件是为了保证不相关和独立等价，这个性质是通常的 Gauss 随机变量所具有的．它可以改写为

$$\mathsf{E}[X_1(t)-A_1(t)][X_1(s)-A_1(s)]$$

$$=\mathsf{E}[X_2(t)-A_2(t)][X_2(s)-A_2(s)]$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{Re}B(t, s),$$

$$\mathsf{E}[X_1(t)-A_1(t)][X_2(s)-A_2(s)]$$

$$=-\frac{1}{2}\operatorname{Im}B(t, s),$$

其中

$$B(t, s)=\mathsf{E}[X(t)-A(t)][\overline{X(s)-A(s)}]$$

是过程 $X(t)$ 的协方差函数，而

$$A_1(t)=\mathsf{E}X_1(t),\ A_2(t)=\mathsf{E}X_2(t)$$

线性空间 U 上的线性广义随机过程 $X=\langle u, X\rangle$ $(u\in U)$，如果它的特征泛函 $\varphi_X(u)$ 具有形式

$$\varphi_X(u)=e^{\iota A(u)-B(u\ u)/2},\ u\in U,$$

那么就称为广义 Gauss 过程 (generalized Gaussian process)，其中 $A(u)=\mathsf{E}\langle u, X\rangle$ 是这个广义过程 $X=\langle u, X\rangle$ 的数学期望而

$$B(u, v)=\mathsf{E}[\langle u, X\rangle - A(u)][\langle v, X\rangle - A(v)]$$

是它的协方差泛函

设 U 是具有内积 (u, v) $(u, v\in U)$ 的 Hilbert 空间．在 U 中取值的随机变量 X 称为 Gauss 的 (Gaussian)，如果 $X=\langle u, X\rangle$ $(u\in U)$ 是广义 Gauss 过程 数学期望 $A(u)$ 是 Hilbert 空间 U 上的一个连续线性泛函，而 $B(u, v)$ 是 U 上的连续双线性泛函，并且有

$$B(u, v)=(Bu, v),\ u, v\in U,$$

这里正算子 B 是一个核算子，称为协方差算子 对任意这种 $A(u)$ 和 $B(u, v)$，存在一个 Gauss 变量 $X\in U$ 使得广义过程 $X=\langle u, X\rangle$ $(u\in U)$ 具有期望 $A(u)$ 和协方差函数 $B(u, v)$

例 设 $X=X(t)$ 是区间 $T=[a, b]$ 上的 Gauss 过程，并设过程 $X(t)$ 是可测的，且有

$$\int_a^b \mathsf{E}[X(t)]^2 dt<\infty,$$

那么 $X(t)$ $(t\in T)$ 的几乎所有的轨道将属于 T 上平方可积函数 $u=u(t)$ 所组成的空间 U，对 $u, v\in U$ 赋予内积

$$(u, v)=\int_a^b u(t)v(t)dt$$

那么，用公式

$$\langle u, X\rangle=\int_a^b u(t)X(t)dt,\ u\in U$$

定义了一个空间 U 上的广义 Gauss 过程．这个广义过程 $X=\langle u, X\rangle$ 的期望和协方差泛函分别由下述公式表示

$$A(u)=\int_a^b u(t)A(t)dt,$$

$$B(u, v)=\int_a^b\int_a^b B(t, s)u(t)v(s)dtds$$

此处 $A(t)$ 和 $B(t, s)$ 分别是 $T=[a, b]$ 上原始过程 $X=X(t)$ 的期望和协方差函数．

设 H 是所有二阶矩有限的随机变量组成的 Hilbert 空间，具有内积 $(Y_1, Y_2)=\mathsf{E}Y_1Y_2$，如果把 Gauss 过程 $X=X(t)$ (参数 t 跑遍任意集 T) 看作是 Hilbert 空间 H 中的一条曲线，那么它的几乎所有的基本性质可

以用几何术语来表述．此时，

$$(X(t),1)=A(t),$$

而

$$(X(t)-A(t),X(s)-A(s))=B(t,s)$$

Ю А Розанов 撰

严平稳 Gauss 过程可以通过某种动力系统来实现（轨道空间的推移，见[1]） 所得到的动力系统（因为类似于正态概率分布，有时表示为正态的（normal））作为具有连续谱的动力系统的例子是有趣的，用[4]和[5]中介绍的关于 H 的分解，它的性质可以研究得更清楚．已经用这种方法构造出了第一个具有"非经典"的谱性质的动力系统的实际例子．

参考文献

[1] Doob, J L , Stochastic processes, Chapman and Hall, 1953

[2] Ибрагимов, И А , Розанов, Ю А , Гауссовские случайные процессы, М , 1970（英译本 Ibragimov, I A and Rozanov, Yu A , Gaussian random processes, Springer, 1978）

[3] Cramér, H and Leadbetter, M R , Stationary and related stochastic processes, Wiley, 1967

[4] Itô, K Multiple Wiener integral, *J Math Soc Japan*, **3** (1951), 1, 157 − 169

[5] Itô, K , Complex multiple Wiener integral, *Japan J Math* , **22** (1952), 63 − 86

Д В Аносов 撰

【补注】 有时称 Gauss 过程为正态过程（normal process）．关于平稳 Gauss 过程的细节见**平稳随机过程**（stationary stochastic process）

过去二十年间，在实值 Gauss 过程 $(X_t)_{t\in T}$ 关于 T 上定义的伪距离 d ·

$$d(s,t)=\|X(s)=X(t)\|_{L_2}$$
$$=[B(s,s)-2B(s,t)+B(t,t)]^{1/2}$$

的轨道的正则性的研究中，美国和法国的学派做了许多艰苦的工作．[A2]中叙述了这个问题的历史和确切的结果．这一工作也产生了研究（非 Gauss 的）Banach 值的随机过程的一些工具

参考文献

[A1] Neveu, J , Processus aleatoires Gaussiens, Presses Univ Montreal, 1968

[A2] Fernique, X Fonctions aléatores gaussiennes, les resultats de M Talagrand, *Astérisque*, **145 − 146** (1987), 177 − 186, Exp 660 Sém Bourbaki 1985/86

刘秀芳 译

Gegenbauer 多项式 [Gegenbauer polynomials; Гегенбауэра многочлены]

同超球多项式（ultraspherical polynomials）．

Gegenbauer 变换 [Gegenbauer transform，Гегенбауэра преобразование]

函数 $F(t)$ 的**积分变换**（integral transform） $T\{F(t)\}$

$$T\{F(t)\}=\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\rho-1/2}C_n^\rho(t)F(t)dt=f_n^\rho,$$
$$\rho>-\frac{1}{2}, n=0,1,2,$$

这里，C_n^ρ 是 **Gegenbauer 多项式**（Gegenbauer polynomials） 如果一个函数能够按 Gegenbaner 多项式展开为广义 Fourier 级数，则下列反演公式成立

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(n+\rho)\Gamma^2(\rho)2^{2\rho-1}}{\pi\Gamma(n+2\rho)}C_n^\rho(t)f_n^\rho,$$
$$-1<t<1$$

Gegenbauer 变换把微分运算

$$R[F(t)]=(1-t^2)F''-(2\rho-1)tF''$$

化为代数运算

$$T\{R[F(t)]\}=-n(n+2\rho)f_n^\rho.$$

参考文献

[1] Диткин, В А , Прудников, А П , в сб , Итоги науки Сер Математика Математический анализ, 1966, М , 1967, 7 − 82（英译本 Ditkin, V A and Prudnikov, A P , Operational calculus, *Progress in Math* , 1 (1968), 1 − 75).

А П Прудников 撰

【补注】 对于任何正交多项式系，都能形式地考虑上面这样一对变换，见 **Fourier 级数（按正交多项式展开的）**（Fourier series in orthogonal polynomials）中的(1)和(2)．对于任意 n 个复变元的情况，也考虑了 Gegenbauer 变换（以及更一般地，**Jacobi 变换**（Jacobi transform））．这时，存在积分形式的反演公式，以及同抽样理论的关系，见[A1]，[A2]．

参考文献

[A1] Butzer, P L , Stens, R L and Wehrens, M , The continuous Legendre transform, its inverse transform, and applications, *Internat J Math Sci* , **3** (1980), 47 − 67

[A2] Koornwinder, T H and Walter, G G , The finite continuous Jacobi transform and its inverse, *J. Approx Theory* (to appear)

张鸿林 译

Гельфанд 表示 [Gel'fand representation; Гельфанда представление]

在交换 Banach 代数 A 的元素 a 和 A 的极大理想空间 X 上的函数 $\hat{a}$ 之间建立了对应关系的映射．在 X 的点和 A 到复数域中的同态间存在一一对应关系．如果相应的辨识已作出，Гельфанд 表示由公式 $\hat{a}(x)=$

$x(a)$ 实现．在局部紧 Abel 群的群代数的特殊情形（把卷积作为该代数中的乘法，亦见**群代数（局部紧群的）**（group algebra (of a locally compact group))), Гельфанд 表示和 **Fourier 变换**（Fourier transform）一致（更详细的可见 **Banach 代数**（Banach algebra)). Гельфанд 变换是由 И М Гельфанд（[1]）引进的

参考文献

[1] Гельфанд, И М, 《Матем сб》, **9[51]**（1941), 3－24

Е А Горин 撰

【补注】 Гельфанд 表示也称作 Гельфанд 变换（Gel'-fand transform），见 [A2] 和**交换 Banach 代数**（commutative Banach algebra）

应用特别选取的代数的 Гельфанд 表示可以证明各种逼近定理（例如见 [A2] 11 13 节）．一个著名的这种定理是 Wiener 定理（Wiener theorem）（亦见 [A1] 第九章第二节），如果 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{2\pi i t n}$ 是区间 $[0,1]$ 上非零的绝对收敛（Fourier）级数，那么 $1/f(t)$ 可以表作这个区间上的绝对收敛的 Fourier 级数

在代数几何中用到一个非常类似的表示（变换）．设 A 是具有单位的交换环，对元素 $a\in A$ 可联系仿射概形的态射 Spec(A) → Spec$(Z[T])$（函数），它由环同态 $Z[T]\to A$, $T\mapsto a$ 给出（见**仿射概形**（affine scheme)．在代数闭域 k 上的仿射簇的情形，函数 $\hat{a}$ Spec(A) → Spec$(k[T])$（其中 A 现在是 k 代数）在 Spec(A) 的闭点处取值 a mod m $\in K$，它由极大理想 m 表示，这指出了这个结构和 Гельфанд 变换的关系．

参考文献

[A1] Yosida, K, Functional analysis, Springer, 1980（中译本 吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1980）

[A2] Rudin, W, Functional analysis, McGraw-Hill, 1979

余庆余 译

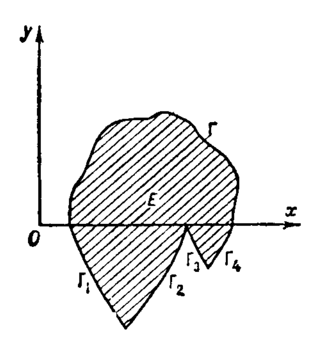
Gellerstedt 问题 [Gellerstedt problem, Геллерстедта задача]

Чаплыгин 型方程

$$K(y)z_{xx}+z_{yy}=0$$

的边值问题，其中函数 $K(y)$ 是递增的，$K(0)=0$，当 $y\neq 0$ 时，$yK(y)>0$．未知函数 $z(x,y)$ 给定在这样的边界上，它们由充分光滑的周线和一些特征线段组成．所考虑的方程在半平面 $y>0$ 中是椭圆型的，在直线 $y=0$ 上是抛物型的，而在 $y<0$ 中是双曲型的．双曲半平面由两族特征线覆盖，它们分别满足方程 $y'=[-K(y)]^{-\frac{1}{2}}$ 和 $y'=-[-K(y)]^{-\frac{1}{2}}$．在直线 $y=0$ 上一族特征线过渡到另一族特征线．

设 E 是单连通域，它的边界由 $y\geqslant 0$ 中充分光滑的



周线 Γ 以及 $y\leqslant 0$ 中的特征线段 Γ_1, Γ_2, Γ_3 和 Γ_4 组成，其中 Γ_1, Γ_3 是同一族的特征线，而 Γ_2, Γ_4 是另一族的（见图） 在 E 上对下列边值问题解的存在性和唯一性定理成立 函数 $z(x,y)$ 给定在 $\Gamma+\Gamma_1+\Gamma_4$ 上；函数 $z(x,y)$ 给定在 $\Gamma+\Gamma_2+\Gamma_3$ 上．

这些问题首先是由 S Gellerstedt（[1]）（对 $K(y)=\operatorname{sgn}y\cdot|y|^{\alpha}$, $\alpha>0$）进行研究的，他利用了由 F Tricomi（[2]）对 **Tricomi 问题**（Tricomi problem）所发展的方法，且对它作了推广 Gellerstedt 问题在近声速气体动力学中有着重要的应用 对某些多连通域以及对包含有低阶项的线性方程，亦研究了 Gellerstedt 问题及与此有关的问题（见 [3]）．

参考文献

[1] Gellerstedt, S, Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx}+z_{yy}=0$, *Ark Mat Astr Fysik*, **26A** (1937), 3, 1－32

[2] Tricomi, F, Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto Mem Lincei, 1923, ser V XIX fasc, Ⅶ, 134－247（中译本 F 特里谷米，论二阶混合型线性偏微分方程，科学出版社，1957）．

[3] Смирнов, М М, Уравнения смешанного типа, М 1970（英译本 Smirnov, M M, Equations of mixed type, Amer Math Soc, 1978）

Л П Купцов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bers, L, Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics, Wiley, 1958

孙和生 译 陆柱家 校

总体 [general aggregate 或 population, генеральная совокупность]

统计抽样方法理论（见**抽样法**（sample method)）中的一个概念．在数理统计中，一个"总体"是同类元素的一个集合，按一给定规则从其中抽出的某一子集称为样本（sample)．例如，在涉及破坏性试验的**统计质量控制**（statistical quality control）中，总体是具有共同特性（比如寿命，与规定的标准、公差的符合程度等）的产品集合，在最简单的情形下，控制样本是从总体中随机抽取的 按照概率论的观点，"随机"

抽取是指，如果总体包含 N 个元素，样本量是 $n(n<N)$，则这种抽取应使任何 n 个元素被抽到的概率为 $n!(N-n)!/N!$ 在从全部彩票中确定中彩彩票时实行的就是这种抽样规则 彩票的全体被看作总体，它自然必须是有限的．

在数理统计中，常将任何同类观测的结果看作一个“样本”，即使是在这些观测结果不符合上述总体概念的情况下．例如，测定某物理常数时，含有随机误差的观测值也常常被看作是取自一无限总体的样本．这里实际上假定可以进行任意多次测量．所有可能的测量结果是一个无限集合，把它看作总体，实际得到的结果看作取自这个总体的样本 这时，假定抽样规则由分布函数 F 确定，即得到一个包含在半开区间 $(a,b]$ 中的观测结果的概率为 $F(b)-F(a)$

无限总体的概念在逻辑上并不是无可非议的，也不是不可缺少的 在解决统计问题时，并不需要总体本身，而只需要相应分布函数 F 的某些特征．从概率论的观点，一个取自无限总体的样本是具有一给定分布律的某些随机变量的观测值 特别地，如果这些变量是独立同分布的，它们的观测值称为简单样本 (simple sample) 如果接受了术语“样本”的这种解释，再引进术语“总体”就变成多余的了

Л Н Большев 撰 陶 波 译 李国英 校

一般代数 [general algebra, общая алгебра]

代数学中从事于各种代数系统研究的部分，其中包括群论，环论，模论，半群理论，格论等 但矩阵和线性方程组，代数几何和代数数论，多重线性代数等方面的研究不属于一般代数的研究范围 作为代数学的一部分的一般代数的范围是按惯例约定的，而且它的界限也不是一成不变的．例如域论，有限群论和有限维李代数理论是否应考虑为一般代数的内容是很难于回答的．

如果一个泛代数具有一个与其运算相容的序或拓扑，那么就分别得到一个偏序代数或一个拓扑代数．这些问题的研究也属于一般代数的范围．大部分已形成的理论是属于偏序代数以及拓扑群和拓扑环．

一般代数的起源可追朔到 19 世纪，当时某些有限群和有限维代数已被研究 然而近代的一般代数的发展与集合论思想在代数中的渗透是分不开的，这是 20 世纪的一个成果 因而仅仅在 1916 年才出现了第一篇在群的定义中不要求有限的专著 (О Ю Шмидт，见 [1])．这就重新奠定了群论以及后来的环论的研究方向 这篇重新奠定方向的论著的结果影响了 B L. van der Waerden 1930－1931 用德文发表的专著 ([2])．

群以及环的普遍性质的发现导致了对格、泛代数以及范畴的研究 模型论和代数系统理论的出现是与代数和数理逻辑之间的联系的发现分不开的，半群和拟群的产生是由于人们希望了解群论中各种结果对元素的可逆性和结合律的依赖程度，一般代数的这些新出现的部分后来都找到它们本身特有的问题、特有的发展方法以及特有的应用领域 (例如半群理论在自动机的代数理论中是特别重要的)．另外，一般代数的这些新的发展逐渐开始影响它赖以产生的古典领域．例如代数簇概念 (泛代数理论的形式化) 在近代群论和环论中起着重要作用 还有一个值得一提的例子是用子群格和正规子群格定义的群类的研究，以及用理想格和子环格定义的环类的研究，格同构问题的研究也同样值得一提 亦见**泛代数** (universal algebra)．

参考文献

[1] Шмидт, О Ю, Абстрактная теория групп, 2 изд, М -Л, 1933 (英译本 Shmidt, O Yu, Abstract theory of groups, Freeman, 1966)

[2] Waeden, B L van der, Algebra, 1－2, Springer, 1967－1971 (中译本 B L 范德瓦尔登，代数学，Ⅰ，Ⅱ，科学出版社，1963，1976)

[3] Курош, А Г, Лекции по общей алгебре, 2 изд, М, 1973 (中译本 А Г 库洛什，一般代数学讲义，上海科学技术出版社，1962)

[4] Курош, А Г, Общая алгебра Лекции 1969/1970, учебного года, М, 1974

[5] Мальцев, А И, Алгебраические системы, М, 1970 (英译本 Mal'tsev, A I, Algebraic systems, Springer, 1973)

[6] Suzuki, M, Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups, Springer, 1956

Л А Скорняков 撰

【补注】 在西方的文献中，“一般代数”通常不用作技术术语，除非把它当作**泛代数** (universal algebra) 同义语．

事实上，无限群在某些专著之前就已出现 (例如见 [A1] 的第 14 节，在这一节中显然谈到一个群中不同运算的个数可以是有限的，也可以是无限的，也可见 [A2])

参考文献

[A1] Burnside, W, Theory of groups of finite order, Cambridge Univ Press, 1897

[A2] Schoenflies, A, Kristallsysteme und Kristallstruktur, Teubner, 1891

卢景波 译

通积分 [general integral; общий интеграл]

n 个常微分方程的方程组

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \ i = 1, \ldots, n \qquad (1)$$

在区域 G 中的通积分是 n 个关系式的集合

$$\Phi_i(t, x_1, \ldots, x_n) = C_i, \ i = 1, \ldots, n, \qquad (2)$$

它们含有 n 个参数 $(C_1, \ldots, C_n) \in C \subset \mathbf{R}^n$，并且以隐

函数的形式描绘了构成这个方程组在区域 G 中的**通解**(general solution)的函数族．通常把函数集

$$\Phi_i(t, x_1, \quad, x_n), i=1, \quad, n \qquad (3)$$

而不是关系式(2)称为方程组(1)的通积分 (2)中的每个关系式(或者(3)中的每个函数)都称为(1)的一个**首次积分**(first integral) 有时把(1)的通积分理解为比(2)更一般的关系式集合

$$\Phi_i(t, x_1, \quad, x_n, C_1, \quad, C_n)=0, i=1, \quad, n.$$

对于 n 阶常微分方程

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \quad, y^{(n-1)}),$$

其通积分是一个含有 n 个参数的关系式

$$\Phi(x, y, C_1, \quad, C_n)=0,$$

它以隐函数的形式描绘了这个方程在区域 G 中的通解．

一阶偏微分方程的通积分是这个方程所含变量之间的、具有一个任意函数的关系式，每当选定任意函数后，把这个关系式代入方程，均可使方程得到满足

亦见**微分方程的积分**(integral of a differential equation)

参考文献见**通解**(general solution)

Н Х Розов 撰　张鸿林 译

一般线性群 [general linear group, полная линейная группа]

一个有单位元的结合环(见**结合环与结合代数**(associative rings and algebras) K 上一切 $(n\times n)$ 可逆矩阵所组成的群，常记作 $GL_n(K)$ 或 $GL(n, K)$ 一般线性群也可以定义为具有 n 个生成元的自由右 K 模 V 的自同构群 $\mathrm{Aut}_K(V)$.

在研究群 $GL(n, K)$ 时，对它的正规结构有极大兴趣 群 $GL(n, K)$ 的中心 Z_n 由元素取自**环 K 的中心**(centre of a ring)的标量矩阵组成 当 K 是交换的时候，定义**特殊线性群**(special linear group) $SL(n, K)$ 是行列式为 1 的矩阵所组成的群 当 K 是一个域时，群 $GL(n, K)$ 的**换位子群**(commutator subgroup)与 $SL(n, K)$ 一致(除开 $n=2$)，$|K|=2$ 的情形)，并且 $GL(n, K)$ 的任何**正规子群**(normal subgroup)或者包含在中心 Z_n 内，或者包含 $SL(n, K)$，特别，射影特殊线性解(projective special linear group)

$$PSL(n, K)=SL(n, K)/SL(n, K)\cap Z_n$$

是一个单群(除开 $n=2$, $|K|=2,3$ 的情形)．

如果 K 是一个**除环**(skew-field)且 $n>1$, $GL(n,K)$ 的任意正规子群或者在 Z_n 内或者包含 $GL(n, K)$ 的由**平延**(transvection)生成的换位子群 $SL^+(n, K)$，并且商群 $SL^+(n, K)/SL^+(n, K)\cap Z_n$ 是单群．再者，存在一个自然同构

$$GL(n, K)/SL^+(n, K)\simeq K^*/[K^*, K^*],$$

这里 K^* 是除环 K 的乘法群 如果 K 在它的中心 k 上是有限维的，则 $SL(n, K)$ 的作用由 $GL(n, K)$ 中一切缩减范数为 1 的矩阵所组成的群来表现，群 $SL(n, K)$ 与 $SL^+(n, K)$ 不一定总是相同的，虽然当 k 是一个整体域时情况是如此(见 **Kneser-Tits 假设**(Kneser-Tits hypothesis))

一个环 K 上一般线性群的正规结构的研究与**代数 K 理论**(algebraic K-theory)相关联．一般环 K 上的群 $GL(n, K)$ 可以含有很多正规子群 例如，如果 K 是一个没有零因子的交换环并且具有限个生成元，那么 $GL(n, K)$ 是一个**剩余有限群**(residually-finite group)，即对于每一个元素 g 来说，存在一个指数有限的正规子群 N_g 不包含 g 在 $K=\mathbf{Z}$ 的情形，对 $GL(n, Z)$ 的正规子群的描述实际上等价于对 $SL(n, \mathbf{Z})$ 的**同余问题**(congruence problem) 因为

$$[GL(n, \mathbf{Z}) \quad SL(n, \mathbf{Z})]=2,$$

并且当 $n>2$ 时，群 $SL(n, \mathbf{Z})$ 的任意非标量正规子群都是一个**同余子群**(congruence subgroup)

一般线性群的结构与其他典型群的结构之间有着很深的类似．这种类似也推广到单代数群和 Lie 群上

参考文献

[1] Artin, E, Geometric algebra, Interscience, 1957

[2] Dieudonne, J A, La géométrie des groupes classiques, Springer, 1955

[3] Bass, H, Algebraic K-theory, Benjamin, 1968

В П Платонов 撰

【译注】

参考文献

[B1] 华罗庚、万哲先，典型群，上海科学技术出版社，1963

郝新 译

一般位置 [general position 或 generic position, общее положение]

用于下列词组中的一个术语："在一般位置中对象 O 有性质 S(或诸性质 S_i)"，"S 为一般位置的一性质"，"化(变换)为一般位置"，等等.其确切意义与上下文有关 通常所考虑的一切对象的集合 $\mathfrak{D}$ 有一种结构，允许某些子集 $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{D}$ 被看成"小的"，"可忽略的"或相反，"大的"，"重大的"，于是 S 被看成"一

般位置的性质”，如果具有此性质的对象构成𝔇的一个“大”子集. 𝔇通常有下列结构之一. a) **代数簇**（algebraic variety）; b) **微分流形**（differentiable manifold）（可能无限维），c) 拓扑空间，此术语的第一种用意多为 **Baire 空间**（Baire space），或 d) **测度空间**（measure space） 下面是“小的”一些例子: 低维代数子簇，微分子流形以及它们的有限或可数并，无处稠密集或第一纲集，零测度集. 集合 $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{D}$ 被看成“大的”，如果它的补是“小的”. 于是可说 $\mathfrak{A}$ 包含 $\mathfrak{D}$ 的“最多”或“几乎所有”的对象，以及把被几乎所有对象满足的性质 S 称为“典型的”或一般位置性质，等等. 人们通常说到“典型”对象，或一般位置对象时，总蕴含（有时不予说明）下面的意思 有一个或多个“典型”性质（属于哪一类应从上下文看得清楚）以及关心具有这些性质的对象

在较弱意义下，情形 c) 与 d) 中的“大”子集可以表示空间 $\mathfrak{D}$ 的非空开子集中的第二纲子集或正测度子集. 这时就说此对象集“不能忽略”（但不再说它是“典型的”）.

在情形 a) 与 b) 中，“小”集 $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{D}$ 有正的余维数 $\operatorname{codim}\mathfrak{A}$. 这时自然说当 $\operatorname{codim}\mathfrak{A}$ 变大时，$\mathfrak{A}$ 变小. 与 b) 接近的一种情况（但更一般些）是，充分光滑地依赖于 n 个（标量）参数的对象 $O(\lambda_1, \quad, \lambda_n)$ 的 n 参数族，以及所有可能的这样的族构成的 Baire 空间. 若几乎所有（依 c) 中意义）这些族不含 $\mathfrak{A}$ 的对象，则说 $\operatorname{codim}\mathfrak{A}>n$，并且若此事对任何 n 为真，则令 $\operatorname{codim}\mathfrak{A}=\infty$ 讨论余维数在**分歧**（bifurcation）理论与**可微映射的奇异性**（singularities of differentiable mappings）理论中起重要作用（亦见[8]）

某些运算 g 可以作用在对象上，这些运算的集合 G 通常是一个群或至少是具有单位元 e 的半群. 如果所考虑的性质据上下文是清楚的，那么可以说“对象 O 被运算 g 化为一般位置”.“化为”的意思是，gO 有这些性质. 像 $\mathfrak{D}$ 一样，G 通常赋予一种结构，以便允许人们说运算的“大”集，或者说具有必要的性质的运算 g，$O\to gO$，可选得任意接近于 e（“用小移位化为一般位置”）.

例如，平面上一般位置的一条直线与一个圆周或不相交或交于两点. 此时对象为对 (a, b)，这里 a 是直线，b 是圆周，并且运算可以是 b 为固定条件下作用于 a 的 Euclid 运动（或仅是平移）. 一切可能对象的集合 $\mathfrak{D}$ 与群 G 自然地赋予上述结构，并且一般位置可以据各种式样来解释.

位置这一术语最初用于类似的几何问题中，然后它被转移到具有几何特色的数学领域或者至少受几何的相当影响的领域（虽然包括第二纲集或全测度集的论述超出这些领域的范围）. 直至今天，当人们说到某一环绕流形中两个子流形的**横截性**（transversality）时（或者一个浸入子流形的自相交的横截性的有关情况时），“一般位置”术语经常用来直接推广上面例子的情况 特别地，在几何拓扑中（考虑逐片线性或拓扑流形与相应的映射类），术语“一般位置”几乎全是用作横截性的同义语

代数几何中的简单例子（像上面那样）容易用消元理论来分析，而基本域可以是完全任意的（通常是代数闭的）. 有一些关于更复杂的情况的一般位置的定理（例如，**Bertini 定理**（Bertini theorems），以及关于超平面截口的 **Lefschetz 定理**（Lefschetz theorem）），当研究代数群在代数簇中的作用时，**一般位置点**（point in general position）起重大作用（[1]）

在微分拓扑与可微映射奇点理论中，一般位置用得很广泛. 证明通常用 Sard 定理或其推论以及 Abraham 与 Thom 横截性定理来进行（见[2], [3]），这些定理更适于直接应用 在无限维情形下，Sard 定理不成立，但一些较弱结果有时对应用已足够(见[4], [5], [14])

在光滑动力系统理论中有若干关于“典型”性质的结果. 其中大多数（尤其是分支理论中的）可化为 Sard 定理去证明，与此无关的正面结果不多（见[6], [7], [9], [10] 与**粗系统**（rough system）条目后的文献）. 光滑动力系统理论的一个特征是，在拓扑意义与度量意义下一般位置（上述 c) 与 d)）之间存在着本质的区别（[11], [15]）

关于流形上微分几何中的一般位置，见[12], [13]

参考文献

[1] Mumford, D , Geometric invariant theory, Springer, 1965

[2] Lang, S , Introduction to differentiable manifolds, Interscience, App Ⅲ, 1967

[3] Арнольд, В И , Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, M , 1978

[4] Eells, J and McAlpin, J , An approximate Morse-Sard theorem, *J Math Mech* , **17** (1968), 11, 1055 - 1064

[5] Quinn, F , Transversal approximation on Banach manifolds, in Global analysis, Proc Symp Pure Math , Vol 15, Amer Math Soc , 1970 213 - 222

[6] Gutierrez, C , Structural stability of flows on the torus with a cross-cap, *Trans Amer Math Soc* , **241** (1978), 311 - 320

[7] Gutierrez, C , Smooth nonorientable nontrivial recurrence on two-manifolds, *J Differential Equations*, **29** (1978), 3, 388 - 395

[8] Kurland, H and Robbin, J , Infinite codimension and transversality, in Dynamical systems, Warwick 1974, Lec-

ture notes in math , Vol 468, Springer, 1975, 135－150

[9] Takens, F , Tolerance stability, in Dynamical systems, Warwick 1974, Lecture notes in math , Vol 468, Springer, 1975, 293－304

[10] Добрынский, В А, Шарковский, А Н, 《Докл АН СССР》, **211** (1973), 2, 273－276

[11A] Арнольд, В И, 《Изв АН СССР Сер Матем》, **25** (1964), 1, 21－86

[11B] Арнольд, В И, 《Изв АН СССР Сер Матем》, **28** (1964), 2, 479－480

[12] Wall, C , Geometric properties of generic differentiable manifolds, in Geometry and topology, Lecture notes in math , Vol 597, Springer, 1977, 707－774

[13] Klingenberg, W , Lectures on closed geodesics, Springer, 1978

[14] Arnol'd, V I , Varchenko, A N and Gusein-Zade, S M , Singularities of differentiable maps, 1, Birkhauser, 1985(译自俄文)

[15] Arnol'd, V I , Afraimovich, V S , Ilyashenko, Yu, S and Shil'nikov, L P , Dynamical systems, 5, Springer (译自俄文)

Д В Аносов 撰

【补注】 关于 Thom 横截性定理，见**可微映射的奇点** (singularities of differentiable mappings) 与 [A1] 在有限维情形它被推广到**节**(jet)扩张[A2] 横截性定理的简化证明连同 **Sard 定理** (Sard theorem) 的一个证明，例如可见 [A3]

最后，当出现几种结构的情形时 (像在 **R** 中有拓扑结构与 Lebesgue 测度)，一般位置的不同概念导致悖论的例子，见 [A4]

参考文献

[A1] Thom, R , Un lemma sur les applications différentiable, *Bol Soc Math Mexico*, 1 (1956), 2, 59－71

[A2] Boardman, J M , Singularities of differentiable maps, *Publ Math IHES*, **33** (1967), 383－419

[A3] Brocker, Th and Lander, L , Differentiable germs and catastrophes, Cambridge Univ Press, 1975

[A4] Oxtoby, J C , Measure and category, Springer, 1971 (译自德文)

郑维行 译 沈永欢 校

一般递归函数 [general recursive function, общерекурсивная функция]

在变元的一切值上有定义的**部分递归函数** (partial recursive function) 一般递归函数的概念可如下地独立于部分递归函数的概念而定义 一切一般递归函数类是包含一切**原始递归函数** (primitive recursive function)，且对函数的复合及**最小数算子** (least-number operator) 封闭的最小函数类，在其中最小数算子要满足的条件是 它只对满足

$$\forall x_1, \quad , x_n \exists y g(x_1, \quad , x_n, y) = 0$$

的 $g(x_1, \quad , x_n, y)$ 施行 但是一般递归函数的研究通常在一切部分递归函数类中进行．特别地，它关系到以下事实 不存在数 $n>0$，使得有对一切 n 元一般递归函数类的通用函数是一般递归函数．

在**形式算术** (arithmetic, formal) 中，在如下意义下，一切一般递归函数是可显式定义的 (explicitly definable)，对任意一般递归函数 $f(x_1, \quad , x_n)$ 可构造满足如下性质的算术公式 $F(x_1, \quad , x_n, y)$ 对任意自然数 $k_1, \cdot , k_n, k$，若 $f(k_1, \quad , k_n)=k$，则 $\vdash F(\overline{k}_1, \quad , \overline{k}_n, \overline{k})$；但若 $f(k_1, \cdot , k_n) \neq k$，则 $\vdash \neg F(\overline{k}_1, \quad , \overline{k}_n, \overline{k})$，其中 $\overline{k}_1, \quad , \overline{k}_n, \overline{k}$ 是表示数 $k_1, \quad , k_n, k$ 的项，且符号 $\vdash$ 表示在算术演算中的可推导性

参考文献

[1] Новиков, П С, Элементы математической логики, 2 изд, М , 1973 (英译本 Novikov, P S , Elements of mathematical logic, Oliver & Boyd and Addison-Wesley, Edinburgh, 1964)

[2] Mendelson, E , Introduction to mathmatical logic, v Nostrand, 1964

В Е Плиско 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kleene, S C, Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本 S C 克林，元数学导论，科学出版社，1984)

[A2] Rogers, jr, H, Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967

杨东屏 译

一般递归算子 [general recursive operator, общерекурсивный оператор]

定义在一切处处可定义函数上，且把处处可定义函数映到处处可定义函数的**部分递归算子** (partial recursive operator)

В Е Плиско 撰 杨东屏 译

通解 [general solution, общее решение]

n 个常微分方程的方程组

$$\dot{x} = f(t, x), \ x = (x_1, \quad , x_n) \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

在区域 D 中的通解是 n 参向量函数族

$$x = \varphi(t, C_1, \quad , C_n), \ (C_1, \quad , C_n) \in C \subset \mathbf{R}^n, \tag{2}$$

关于 t 是光滑的，关于参数是连续的，由此适当选取参数值可以得到方程组 (1) 的任何解，其图形处于区域 $G \subset D$ 内．这里，$D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 是使方程组 (1) 的存在和唯一性定理的条件满足的一个区域．(有时规定参数也可取值 $\pm\infty$) 在几何上，方程组 (1) 在区域 G 中的通解表示这个方程组的完全覆盖整个区域 G 的

不相交积分曲线族

由方程组(1)在 G 中的通解可以得到这个方程组的具有初始条件 $x(t_0)=x^0((t_0, x^0)\in G)$ 的 **Cauchy 问题**(Cauchy problem)的解 可由 n 个方程的方程组 $x^0=\varphi(t_0, C_1, \cdot, C_n)$ 决定 n 个参数 $C_1, \cdot, C_n$ 的值,然后代入(2).如果 $x=\psi(t, t_0, x^0)$ 是方程组(1)的满足条件 $x(t_0)=x^0((t_0, x^0)\in D)$ 的解,则 n 参函数族

$$x=\psi(t, t_0, x_1^0, \quad , x_n^0)$$

是这个方程组在区域 D 中的通解,并称为通解的 Cauchy 形式(Cauchy from of a general solution),其中 t_0 是一个固定数,而把 $x_1^0, \quad , x_n^0$ 看作参数 如果知道了通解,就可唯一地重建微分方程组 为此,只需从 n 个关系式(2)和把(2)对 t 微分而得到的 n 个关系式中消去 n 个参数 $C_1, \quad , C_n$ 即可.

对于 n 阶常微分方程

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \quad , y^{(n-1)}), \qquad (3)$$

它在区域 G 中的通解具有下列 n 参函数族的形式:

$$y=\varphi(x, C_1, \quad , C_n), (C_1, \quad , C_n)\in C\subset\mathbf{R}^n, \qquad (4)$$

由此,适当选取参数值,就能得到方程(3)的具有任意初始条件

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0, \quad , y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

$$(x_0, y_0, y_0, \quad , y_0^{(n-1)})\in G\subset D$$

的解.这里,$D\subset\mathbf{R}^{n+1}$ 是使方程(3)的存在和唯一性定理的条件满足的一个区域

当参数取特定值时,由通解得到的函数称为特解(particular solution) 包含给定方程组(方程)在某个区域中的一切解的函数族并不总能表示为自变量的显函数 这个函数族可以表示为隐函数的形式,这时称为**通积分**(general integral),或者表示为参数形式.

如果一个给定的常微分方程(3)能以闭形式积分(见**微分方程的闭形式积分法**(integration of differential equations in closed form)),则通常可以得到形如(4)的关系式,其中参数是作为积分常数产生的,并且是任意的.(所以常常说 n 阶方程的通解含有 n 个任意常数)但是,这样的一个关系式决不总是在使原方程的 Cauchy 问题的解存在且唯一的整个区域中的通解.

参考文献

[1] Степанов, В В, Курс дифференциальных уравнений 8 изд, М, 1959(中译本 В В 史捷班诺夫,微分方程教程,高等教育出版社,1955)

[2] Еургин, Н П, Книга дия чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, 3 изд, Минск, 1979

Н Х Розов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hale, J K, Ordinary differential equations, Wiley, 1980(中译本 J K Hale,常微分方程,高等教育出版社,1980).

[A2] Ince, E L, Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956

张鸿林 译

一般拓扑学 [general topology, общая топология]

几何学的分支,涉及对连续与极限的研究,有其由这些概念的性质自然确定的一般性.一般拓扑学的首要概念是**拓扑空间**(topological space)与**连续映射**(continuous mapping)的概念,这是 F Hausdorff 于1914年引进的.

连续映射的一个特例是同胚映射,即是两个拓扑空间之间的连续一一映射,其逆映射也是连续的.可以用同胚映射彼此映成的空间(即同胚的空间),在一般拓扑学中视为一样.一般拓扑学中基本问题之一是寻求并研究自然的拓扑不变量,即是空间在同胚映射下保持不变的性质(见**拓扑不变量**(topological invariant)) 当然,空间的任何性质如果可以完全借助于它的拓扑结构陈述出来,自然就是一个拓扑不变量.空间的某条性质,只有当它的陈述是借助于定义在空间的点集上的附加结构,并与空间的拓扑结构有某种关联时,其拓扑不变性才需要证明.同伦群的拓扑不变性可以作为一个例子

拓扑不变量不一定可以用数来表示.例如,连通性、(Hausdorff)紧性以及可度量化性都是拓扑不变量 在数值不变量(即在每个拓扑空间上取数值的不变量)中,最重要的是维数不变量 小**归纳维数**(inductive dimension) ind,大**归纳维数** Ind 以及 **Lebesgue 维数**(Lebesgue dimension) dim(覆盖意义下的维数).

另一类拓扑不变量以**基数**(cardinal number)为值,起着重要的作用 其中有权与特征(见**拓扑空间的权**(weight of a topological space))

有些拓扑空间类涉及一组拓扑不变量,每一类各由一个或另一个拓扑不变量的限制所确定.最重要的空间类是可度量化空间,紧空间,Тихонов 空间,仿紧空间以及羽状空间(见**可度量化空间**(metrizable space),**紧空间**(compact space),**Тихонов 空间**(Tikhonov space),**仿紧空间**(paracompact space),**羽状空间**(feathered space))

一般拓扑学中基本的"内在"问题包括·(1)甄别重要的新的拓扑空间类,(2)对不同的空间类进行比

较，(3) 研究某一类空间，并且整体地研究这一类空间的范畴性质．问题(2)无疑是其中的中心问题，目的是保证一般拓扑学的内在统一性

甄别重要的新的拓扑空间类(即新的拓扑不变量)往往涉及考虑空间的与其拓扑结构自然相容的某些附加结构(数值结构、代数结构、序结构)．例如，可以区分出可度量化空间、有序空间、拓扑群空间、对称空间，等等．覆盖方法在解决问题(1),(2)及(3)时起着重要的作用．利用覆盖以及覆盖之间的关系，其中最重要的是加细及星形加细这些关系，可以挑出紧空间，仿紧空间这些基本的空间类，可以提出紧性之类的拓扑性质 覆盖方法在**维数论**(dimension theory)中也起着重要作用

要解决中心问题(2)，空间和映射的相互归类法是特别重要的，即在某些简单限制下，利用连续映射建立各种各样的拓扑空间类之间的联系 这样，很一般性的空间可以说成是某些更简单的空间在某些"良好"映射下的象．例如，满足第一可数公理的空间可以刻画为度量空间在连续开映射下的象．这样的联系在讨论拓扑空间类时建立了一个有效的参考系

逆谱方法(见**系统(范畴中的)**(system (in a category))，**空间的谱**(spectrum of spaces))与覆盖方法及映射方法有密切关系，可以使研究复杂的拓扑空间化为讨论更简单空间的映射系．

最后，基数值拓扑不变量或基数函数(见**基数特征**(cardinal characteristic))的方法对解决问题(2)是重要的．这种不变量非常符合一般拓扑学的集论性质．与此相关，基数值不变量体系有很多分支，并且实际上影响到所有其余的拓扑性质 基数值不变量的另一个重要特点是它们密切的相互依赖性，基于这种依赖性便可以对这样的不变量进行算术运算，比较它们的大小．由于这个特点，基数值不变量理论在一般拓扑学中起着统一的作用，通向它的各部分

一般拓扑学的外在问题中，下述一般性质的问题特别值得注意 一个拓扑结构的性质怎样同别的与该拓扑结构相容的结构关联起来，以及这些性质如何关联起来? 某些特殊的这类问题涉及拓扑群、拓扑向量空间以及拓扑空间上的测度 对于每个紧 Hausdorff 空间，相应地有该空间上所有连续实值函数组成的 **Banach 代数** (Banach algebra) 这样，拓扑空间理论就同 Banach 代数的理论有密切的关系 Banach 空间上的**弱拓扑** (weak topology)在泛函分析中起着巨大的作用，是一类在应用上非常重要的不可度量化的拓扑结构 每个 Тихонов 空间都由该空间上所有连续实值函数构成的环在点式收敛拓扑下唯一确定，这类结果使一般拓扑学与**拓扑代数**(topological algebra)结合起来．

紧化(compactification)的概念在位势理论中找到了应用(见**边界(一致代数理论中的)**(boundary (in the theory of uniform algebras))，**位势论中的 Martin 边界** (Martin boundary in potential theory))

一般拓扑学在数学教育的方法论方面也是重要的．连续性、收敛性以及连续变换这些基本概念，只有在一般拓扑的概念及结构的框架下才能完全得以阐明．很难举出什么数学领域完全不用到一般拓扑学的概念和语言 它在数学上的统一作用在这里尤其明显．一般拓扑学在数学中的地位也是由下述事实确定的 在数学上普遍重要的整整一系列的原理和定理，只有在一般拓扑的框架下才能有其自然的(即符合这些原理和定理的本质的)陈述．作为例子可以举出紧性概念(这是 Heine - Borel 关于选取区间上有限子覆盖的引理的抽象)，关于紧空间之积的紧性定理(这是"有限维方体是紧集"这一断言的推广)，以及紧空间上的连续实值函数是有界函数并且达到其上确界及下确界的定理．这一连串的例子还可延伸下去 第二范畴集的概念，完全性概念，扩张的概念(这些概念以及与之有关的、对整个数学都重要的那些结果的特性本身，使得在一般拓扑学的框架范围内对它们的研究成为最自然、最明白的事情)．

参考文献

[1] Александров, П С , Теория функций действительного переменного и теория топологических пространств, М , 1978, 280 - 358

[2] Александров, П С ,《Успехи матем наук》, **15** (1960), 2, 25 - 95

[3] Александров, П С ,《Успехи матем наук》, **19** (1964), 6, 3 - 46, **20** (1965), 1, 253 - 254

[4] Александров, П С , Федорчук, В В ,《Успехи матем наук》, **33** (1978), 3, 3 - 48

[5] Архангельский, А В ,《Успехи матем наук》, **21** (1966), 4, 133 - 184

[6] Архангельский, А В ,《Успехи матем наук》, **33** (1978), 6, 29 - 84

А В Архангельский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Arkhangel'skiĭ, A V , Function spaces in the topology of pointwise convergence, and compact sets, *Russian Math Surveys*, **39** (1984), 5, 9 - 56 (*Uspekhi Mat Nauk*, **39** (1984), 5, 11 - 50)

[A2] Arkhangel'skiĭ, A V , Classes of topological groups, *Russian Mat Surveys*, **36** (1981), 3, 151 - 174 (*Uspekhi Mat Nauk*, **36** (1981), 3, 127 - 146)

[A3] Engelking, R , General topology, PWN & North-Holland, 1977

[A4] Kunen, K and Vaughan, J E , Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, 1984

胡师度、白苏华 译

一般型代数曲面 [general-type algebraic surface, algebraic surface of general type, основного типа алгебраическая поверхность]

在**代数曲面** (algebraic surface) 的 Enriques 分类中最大的几类中的一类曲面．即代数闭域 K 上一个光滑射影曲面 X 称为一般型的，如果

$$\kappa(X) = 2,$$

这里 κ 是**小平维数** (Kodaira dimension)．这一条件等价于存在整数 $n>0$ 使得线性系 $|nK|$ 定义了一个 X 到其在某个 P^N 中的象上的双有理映射，这里 K 为 X 的典范除子 (divisor)．每一个一般型代数曲面都有一个到其极小模型的双有理态射

一般型极小代数曲面由下列任一条性质所刻画 ([1],[3],[6])．

a) $K^2>0$ 且 $KD\geqslant 0$，这里 D 为任一有效除子，

b) $K^2>0$ 且 $P_2\geqslant 2$，这里 $P_2=\dim|2K|+1$ 为 X 的第二个多重亏格，

c) $K^2>0$ 且 X 不是**有理曲面** (rational surface)，

d) 存在整数 n_0，使得对于任意整数 $n\geqslant n_0$ 由线性系 $|nK|$ 所定义的映射 φ_{nK} 是 X 到其在 $P^{\dim|nK|}$ 中的象上的一个双有理态射．

【译注】 c) 或 d) 只能刻画一般型曲面，但不一定是极小的．

对于一般型代数曲面其数值特征之间存在着 (不等式) 关系．设 P_g, q 分别为其**几何亏格** (geometric genus) 和**非正则性** (irregularity)，则下列不等式对任一一般型极小代数曲面成立

1) $q\leqslant p_g$,

2) 当 K^2 是偶数时 $p_g\leqslant K^2/2+2$，当 K^2 是奇数时 $p_g\leqslant(K^2+3)/2$ (这两个不等式称为 Noether 不等式 (Noether inequalities))，

3) $K^2\leqslant 3C_2$，这里 C_2 为 X 的第二陈 (省身) 类 (Chern class) (或 X 的拓扑 **Euler 示性数** (Euler characteristic))．

一般型代数曲面的多重典范映射 φ_{nK} 的最完备的结果是 Bombieri-小平定理 (Bombieri-Kodaira theorem) 设 X 为特征 0 的代数闭域上的一般型极小曲面，则对于任意整数 $n\geqslant 5$，映射

$$\varphi_{nK}.X\to P^{\dim|nK|}$$

是到其象上的一个双有理态射 存在一般型代数曲面，使得 φ_{4K} 不具有这一性质 (见 [5],[8],[9])

参考文献

[1] Алгебраические поверхности, М, 1965 (Труды Матем ин-та АН СССР, т 75) (英译本 Shafarevich, I R, et al, Algebraic surfaces, Proc Steklov Inst Math, 75 (1967))

[2] Богомолов, Ф А, 《Изв АН СССР Сер матем》, **42** (1978), 1227-1287

[3] Beauville, A, Surfaces algébriques complexes, *Astérisque*, **54** (1978)

[4] Bombieri, E, Canonical models of surfaces of general type, *Publ Math IHES*, **42** (1972), 447-495

[5] Bombieri, E and Catanese, F, The tricanonical map of surfaces with $K=2$, $p_g=0$, in C P Ramanujam, A tribute, Springer, 1978, 279-290

[6] Bombieri, E and Husemoller, D, Classification and embeddings of surfaces, in R Hartshorne (ed) Algebraic Geometry, Proc Symp Pure Math, Vol 29, Amer Math Soc, 1974, 329-420

[7] Horikawa, E Algebraic surfaces of general type with small c_1^2, Ⅰ, *Ann of Math*, **104** (1976), 357-387

[8A] Horikawa, E, Algebraic surfaces of general type with small c_1^2, Ⅱ, *Invent Math*, **37** (1976), 121-155

[8B] Horikawa, E, Algebraic surfaces of general type with small c_1^2, Ⅲ, *Invent Math*, **47** (1978), 209-248

[8C] Horikawa, E, Algebraic surfaces of general type with small c_1^2, Ⅳ, *Invent Math*, **50** (1978-1979), 103-128

[9] Kodaira, K, Pluricanonical systems on algebraic surfaces of general type, *J Math Soc Japan*, **20** (1968), 170-192

[10] Miyaoka, Y, On the Chern numbers of surfaces of general type, *Invent Math*, **42** (1977), 225-237

В А Исковских 撰

【补注】 上面有些结果只在特征 0 时得到了证明，如不等式 $K^2\leqslant 3C_2$ 只在特征 0 时成立．

关于正特征时一般型曲面的典范模型的结果见 [A2].

参考文献

[A1] Barth, W, Peters, C and Ven, A van de, Compact complex surfaces, Springer, 1984

[A2] Ekedahl, T, Canonical models of surfaces of general type in positive characteristic, *Publ Math IHES*, **67** (1988), 97-144

刘先仿 译

普遍有效性 [general validity, общезначимость]

逻辑公式 (logical formula) 的一种性质，对一个公式所含的非逻辑符号，即谓词变元和命题变元，作任意一种解释时，这个公式的取值都为真．具有这一性质的公式称为普遍有效的 (general valid)，恒真的 (identically true) 或重言式 (tautologies)．每个普遍有效的公式都代表一条**逻辑定律** (logical law)．"A 是普遍有效的"常写作"$\vDash A$"．逻辑公式中最重要的形式要数命题公式和谓词公式．对经典**逻辑运算** (logical operation) 而言，命题公式的普遍有效性 (general validity) 可以用构造**真假值表** (truth table) 的方法来验证：一个公式普遍有效当且仅当对命题变元所取的任

何真假值，这个公式的取值总是 T（“真”）．谓词公式的普遍有效性（general validity）是指这个公式在任何一个**模型**（逻辑中的）（model (in logic)）中都真．所有普遍有效的谓词公式组成的集合是不可判定的，这就是说，不存在一种算法可以用来判断任意一个谓词公式是否普遍有效．**Gödel 完全性定理**（Gödel completeness theorem）说明，在经典谓词演算中，所有普遍有效的谓词公式都是可推演的，而且只有这些公式是可推演的．

参考文献

[1] Kleene, S C, Mathematical logic, Wiley, 1967

В Е Плиско 撰

【补注】 通常也用“一致有效的”（universally valid）来代替“普遍有效的”一词． 沈复兴 译

广义殆周期函数 [generalized almost-periodic functions, обобщенные почти периодические функции]

殆周期函数的各种推广所成的函数类 其中的每一类都推广了 **Bohr 殆周期函数**（Bohr almost-periodic functions）和 **Bochner 殆周期函数**（Bochner almost-periodic functions）的某些方面．下述数学概念（结构）出现在 Bohr 与 Bochner 殆周期性的定义中 1) 定义在整个直线上的连续函数空间，可视为以

$$\rho\{f,g\}=\sup_{x\in\mathbf{R}^1}|f(x)-g(x)| \qquad (*)$$

为距离（distance）的度量空间，2) 直线 $\mathbf{R}^1$ 到复平面 $\mathbf{C}^1$ 中的映射（函数），3) 直线 $\mathbf{R}^1$ 作为一个群，4) 直线 $\mathbf{R}^1$ 作为一个拓扑空间．

殆周期函数的现有推广能依据这些结构方便地予以分类

1) 如果代替连续性，要求函数 $f(x)(x\in\mathbf{R}^1)$ 在每个有界区间上是 p 幂可积的可测函数，则如下三种表示式可取作距离

Степанов 距离（Stepanov distance）

$$\rho_{S_l^p}\{f,g\}=\sup_{x\in\mathbf{R}^1}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f(x)-g(x)|^p dx\right\}^{1/p},$$

Weyl 距离（weyl distance）

$$\rho_{W^p}\{f,g\}=\lim_{l\to\infty}\rho_{S_l^p}\{f,g\},$$

Besicovitch 距离（Besicovitch distance）

$$\rho_{B^p}\{f,g\}=\left\{\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)-g(x)|^p dx\right\}^{1/p}$$

相应于这些距离，可以有广义 **Степанов 殆周期函数**（Stepanov almost-periodic functions），广义 **Weyl 殆周期函数**（Weyl almost-periodic functions）和广义 **Besicovitch 殆周期函数**（Besicovitch almost-periodic functions）

2) 假设直线 $\mathbf{R}^1$ 不是映到 $\mathbf{C}^1$，而是映到一个 Banach 空间 B 这样的映射称为抽象函数（abstract function） 假设抽象函数是连续的，并且它们之间的距离由式 (*) 定义，但其中的模用范数代替，则 Bohr 与 Bochner 的定义可被推广并且导致所谓抽象殆周期函数（abstract almost-periodic functions）

进一步的推广是以拓扑向量空间代替 Banach 空间获得的．在此情形下，对零元的每个邻域 U，实数 $\tau=\tau_U$ 称为 f 的 U 殆周期（U-almost-period），如果对一切 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+\tau)-f(x)\in U$

若用弱拓扑代替范数拓扑，则可得到所谓弱殆周期函数（weak almost-periodic functions） 函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R}^1, f\in B)$ 称为弱殆周期的，如果对任意泛函 $\varphi\in B^*$，函数 $\varphi(f(x))$ 是数值殆周期函数．

3) 假设用一个抽象群（不必是拓扑群）G 代替直线 $\mathbf{R}^1$，并考虑 G 到一拓扑向量空间（特别地，到 $\mathbf{C}^1$）中的映射 $f(x)$, $x\in G$ 采用 Bochner 的定义作为殆周期函数的定义是方便的 f 称为群 G 上的殆周期函数（almost-periodic function on the group），如果函数族 $f(xh)$ $(h\in G)$（或等价地，函数族 $f(hx)$）关于 G 上的一致收敛性是条件紧的（见**群上的殆周期函数**（almost-periodic function on a group））

4) 在群上殆周期函数的定义中，重要的并不是群的运算本身，而是函数的位移算子 $T^h f(x)=f(xh)$（或 $f(hx)$），$x, h\in G$ 因此，殆周期函数的进一步推广可由推广这种位移算子得到 设 Ω 是一个抽象空间（不必是群），并设 $f(x)$ $(x\in\Omega)$ 是定义在 Ω 上的函数．对于 $h\in\Omega$，线性算子 T^h 称为**广义位移算子**（generalized displacement operators），如果下列公理满足

α) 结合性 $T_h^g T_x^h f(x)=T_g^h T_x^g f(x)$,

β) 中性元的存在性 存在 $h_0\in\Omega$，使得 $T^{h_0}=I$，这里 I 是恒等算子

函数 $f(x)$ $(x\in\Omega)$ 称为关于广义移位算子族 $\{T^h\}$ 的殆周期函数，如果函数族 $T^h f(x)$（h 作为参数）关于 Ω 上的一致收敛性是条件紧的 必须注意，此种函数理论的发展仍然很贫乏，甚至关于一些特殊的广义位移算子族也是如此（见 [1], [5]）．

5) 设 $\lambda_1, \quad, \lambda_n, \quad$ 是实数的有限集或可数集 假设赋于直线 $\mathbf{R}^1$ 如下拓扑，使之成为拓扑向量空间 原点的邻域是满足 $|e^{i\lambda_n x}-1|<\varepsilon$ $(n=1, \quad, N)$ 的实数 x 所成的集合（数 ε 与 N 可任意选择，以确定一个邻域） 于是，Bohr 殆周期函数与依此拓扑的一致连续函数原来是一致的（作为数列 $\{\lambda_k\}$，可以取该函数的 Fourier 指标或它们的一个积分基） 依此拓扑的连续函数提供了殆

周期函数的另一个推广，这就是所谓的 Левитан N 殆周期函数（Levitan N-almost periodic functions）. N 殆周期函数的定义能以明显的方式推广到定义在 Abel 群上（并且，不太明显地，到非交换群上）的函数．

由 M. Fréchet 引入的与遍历理论中某些问题有关的所谓渐近殆周期函数，不太适合于上述广义殆周期函数的分类．函数 f $\mathbf{R}^1 \to \mathbf{C}^1$ 称为渐近殆周期函数（asymptotic almost-periodic function）．如果对每个 $\alpha \in \mathbf{R}^1$ 与任何实数序列 $\{h_n\}$，$h_n \to \infty$，存在 $\{h_n\}$ 的子序列 $\{k_n^{(\alpha)}\}$，使得 $f(x+k_n^{(\alpha)})$ 对所有 $x>\alpha$ 一致收敛．

参考文献

[1] Левитан, Б М , Почти-периодические функции, М , 1953

[2] Besicovitch, A S , Almost periodic functions, Cambridge Univ Press, 1932

[3] Amerio, L and Prouse, G , Almost-periodic functions and functional equations, v Nostrand Reinhold, 1971

[4] Bochner, S , Abstrakte fastperiodische Funktionen, *Acta Math*, **61** (1933), 149-184

[5] Марченко, В А, в кн, тр Моск матем об-ва, т 2, М, 1953, 3-83

[6] Левин, Б Я, 《Укр матем ж.》, **1** (1949), 49-101

[7] Besicovitch, A S and Bohr, H , Almost periodicity and general trigonometric series, *Acta Math* , **57** (1931), 203-292

[8] Левитан, Б М , Жиков, В В , Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения, М , 1978 (英译本 Levitan, B M and Zhikov, V V, Almost-periodic functions and differential equations, Cambridge Univ Press, 1982).

[9] Frechet, M , Les fonctions asymptotiquement presque-periodiques continues, *C R Acad Sci Paris* , **213** (1941), 520-522

[10] Frechet, M , Les transformations asymptotiquement presque périodiques discontinues et le lemme ergodique I, *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, **63** (1950), 61-68

Б М Левитан 撰

【补注】 关于这个课题更多的内容可参看**殆周期函数**（almost-periodic function）与**群上的殆周期函数**（almost-periodic function on a group）

除了上面定义的弱殆周期概念外，还有另一个可应用到拓扑群 G 上复值函数（但可容易地推广到取值于任意 Banach 空间的函数）的定义 有界连续函数 f $G \to \mathbf{C}$ 称为弱殆周期的（weakly almost-periodic），如果函数族 $x \mapsto f(xh)$ $(h \in G)$ 关于 G 到 $\mathbf{C}$ 的有界连续函数空间 $C(G, \mathbf{C})$ 的弱拓扑是条件紧的（见 [A3], [A1] 与 [A2]）．在 [A6] 中指出，这些定义对向量值函数是彼此不等价的

关于广义位移算子（特殊）族的殆周期性，见 [A5]（在上面的定义中，T_x^g 的下标 x 表示广义位移算子 T^g 作用于变量为 x 的函数．因此，$T_h^g T_x^h f(x)$ 是由 T^g 作用于函数 $h \mapsto (T^h f)(x)$ 得到的）. 同样，变换群上的殆周期函数（almost-periodic function on a transformation group）概念是 设群 G 连续作用于空间 X 上，有界连续函数 f $X \to \mathbf{C}$ 称为在变换群（G, X）上是（弱）殆周期的，如果函数族 $x \mapsto f(tx)$ $(t \in G)$ 关于空间 $C(X, G)$ 的一致拓扑（相应地，弱拓扑）是条件紧的（例如见 [A4]）．

关于 Левитан N 殆周期函数更多的资料可在 [8] 与 [A7] 中找到．

参考文献

[A1] Burckel, R B , Weakly almost-periodic functions on semigroups, Gordon & Breach, 1970

[A2] Leeuw, K S de and Glicksberg, I , Almost periodic functions on semigroups, *Acta Math* , **105** (1961), 99-140

[A3] Eberlein, W F, Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions, *Trans Amer Math, Soc* , **67** (1949), 217-240

[A4] Landstadt, M B, On the Bohr compactification of a transformation group, *Math Z*, **127** (1972), 167-178

[A5] Levitan, B M , The application of generalized displacement operators to linear differential equations of the second order, *Transl Amer Math Soc* (1), **10** (1950), 408-451

[A6] Milnes, P, On vector-valued weakly almost periodic functions, *J London Math Soc* (2), **22** (1980), 467-472

[A7] Reich, A , Prakompakte gruppen und Fastperiodicitat, *Math Z* , **116** (1970), 216-234

苏维宜 译

广义解析函数［generalized analytic function, обобщенная аналитическая функция］

满足下述方程组的函数 $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+au+bv=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+cu+dv=0,\quad (1)$$

其中实系数 a,b,c,d 是实变量 x,y 的函数 使用记号

$$2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y},$$

$$4A=a+d+i(c-b),\quad 4B=a-d+i(c+b),$$

原先的方程组可写为如下形式

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}+Aw+B\bar{w}=0.$$

如果方程组(1)的系数 A 和 B 在整个 z 平面 E 中属于类 $L_{p,2}$, $p>2$, 则在该平面的任一区域 D 中每个满足 (1) 的广义解析函数 $w(z)$ 可表示为

$$w(z)=\Phi(z)e^{\omega(z)},\quad (2)$$

其中

$$\omega(z)=\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{A(\zeta)+B(\zeta)\overline{w}/w}{\zeta-z}\,d\xi d\eta,\quad \zeta=\xi+\imath\eta,$$

而 $\Phi(z)$ 是 D 中 z 的确定的解析函数．

当 $B\neq0$ 时，由公式(2)给出的广义解析函数与解析函数之间的关系是非线性的．广义解析函数 $w(z)$ 通过非线性积分方程(2)由一个给定的解析函数唯一确定．

存在线性算子

$$w(z)=\Phi(z)+\iint_D \Gamma_1(z_1,\zeta)\Phi(\zeta)\,d\xi d\eta+$$
$$+\iint_D \Gamma_2(z,\zeta)\,\overline{\Phi(\zeta)}\,d\xi d\eta,\tag{3}$$

它建立了在有界域 D 内解析、在闭域 $D\cup S$ 上连续的函数 $\Phi(z)$ 的集合与 D 上的广义解析函数 $w(z)$ 的集合之间的一一对应，其中 $\Gamma_1(z_1,\zeta)$ 与 $\Gamma_2(z,\zeta)$ 是可由方程组 (1) 的系数 A,B 表出的确定的函数

由公式 (3) 可导出广义解析函数的各种积分表示，它们是关于解析函数的 Cauchy 积分公式的推广．形如 (3) 的广义解析函数表示式在研究其边值问题时是有用的．

如果 A,B 是实变量 x,y 的解析函数，则对于定义在单连通区域中的广义解析函数有下述表示式·

$$w(z)=\exp\int_{z_0}^{z} A(z,\tau)\,d\tau+\{\Phi(z)+\int_{z_0}^{z}\widetilde{\Gamma}_1(z,\overline{z},t)\,\Phi(t)\,dt$$
$$+\int_{z_0}^{\overline{z}}\widetilde{\Gamma}_2(z,\overline{z},t)\,\overline{\Phi(t)}\,dt\},\tag{4}$$

其中 $\widetilde{\Gamma}_1$，$\widetilde{\Gamma}_2$ 是其变元的解析函数并可通过 A，B 表示，$\Phi(z)$ 是 z 的任一解析函数 (公式 (4) 并非是公式 (3) 的特殊情形)

特别当 A，B 是 x，y 的整函数时，(4) 对 z 平面中任一单连通域成立．

把一般二阶椭圆型方程

$$a\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu=0\tag{5}$$

化简为形式

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+Cu=0$$

的问题，等价于把正定二次型 $adx^2+2bdxdy+cdy^2$ 化简为标准型的问题．后一问题又可归结为求出由 **Beltrami 方程** (Beltrami equation)

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}-q(z)\frac{\partial w}{\partial z}=0,\quad w=u+\imath v\tag{6}$$

的解确定的同胚，其中

$$q(z)=\frac{(a-\sqrt{\Delta}-\imath b)}{(a+\sqrt{\Delta}+\imath b)},$$

$$\Delta=ac-b^2,\ |q(z)|<1.$$

如果(5)是一致椭圆型方程 ($\Delta\geqslant\Delta_0=\text{cosnt}>0$)，则 $|q(z)|<q_0=\text{const}<1$．

研究 Beltrami 方程的基本问题，是对给定的区域 D 构造一个解 这可由下述断言导出 如果 $\omega(z)$ 是 Beltrami 方程的实现区域 D 到区域 $\omega(D)$ 上的同胚的一个解，则 D 内的任一其他解具有形式

$$w(z)=\Phi[\omega(z)],\tag{7}$$

其中 Φ 是 $\omega(D)$ 内的任一解析函数．

当 $q(z)$ 为可测，在 D 外 $q(z)=0$，并且 $|q(z)|\leqslant q_0<1$ 时，Beltrami 方程 (6) 的一个单值解可通过函数

$$w(z)=z-\frac{1}{\pi}\iint_E \frac{\rho(\zeta)}{\zeta-z}\,d\xi d\eta\tag{8}$$

给出，其中 ρ 满足**奇异积分方程** (singular integral equation)

$$\rho(z)-\frac{q(z)}{\pi}\iint_E \frac{\rho(\zeta)\,d\xi d\eta}{(\zeta-z)^2}=q(z)\tag{9}$$

(积分理解为 Cauchy 主值意义) 这个方程在某个类 $L_p(E)$ ($p>2$) 中有唯一解．例如，可以用逐次逼近法得到此解 (见**序列逼近法** (sequential approximation, method of)) 函数 (8) 属于类 $C_\alpha(E)$，$\alpha=\frac{p-2}{2}$，并实现平面到其自身上的一个拓扑映射，且有 $w(\infty)=\infty$，当 $z\to\infty$ 时，$z^{-1}w\to1$ 如果 $q\in C_\alpha^m(E)$，$0<\alpha<1$，$m\geqslant0$，则 $w(z)\in C_\alpha^{m+1}$

一个一致椭圆型方程组由两个形如 (采用复记号)

$$\frac{\partial w}{\partial\overline{z}}-q_1(z)\frac{\partial w}{\partial z}-q_2(z)\frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{z}}+Aw+B\overline{w}=0\tag{10}$$

的一般一阶椭圆型方程构成．通过由某个形如 (6) 的方程的解所确定的同胚，可以把方程组 (10) 化简为形式 (1)．但也可以直接研究 (10)，以避免某些附加限制

在条件 $A,B\in L_p(D)$ ($p>2$) 下考虑某个有界域中的方程 (10)，此时 (10) 的每个解可表示为

$$w(z)=\Phi[\omega(z)]e^{\varphi(z)},\tag{11}$$

其中 $\omega(z)$ 是系数为

$$q(z)=q_1(z)+q_2(z)\frac{\overline{\partial w/\partial z}}{\partial w/\partial z}$$

的 Beltramı 方程 (6) 的一个解确定的同胚，$\Phi(\omega)$ 是区域 $\omega(D)$ 中的解析函数，$\varphi(z)\in C_{\alpha}(E)$ $(\alpha=\frac{p-2}{2})$ 在 $D\cup S$ 外全纯并且在无穷远处取值为零．当 (10) 式左边的系数依赖于 w 及其任何阶导数，并设上面所给的条件对所考虑的解得到满足时，表示式 (11) 也成立．公式 (11) 可以如同 (2) 那样反演

公式 (11) 可使解析函数经典理论中的一系列性质转移到 (10) 的解上 唯一性定理（见**解析函数的唯一性** (unıqueness propertıes of analytıc functıons)），**辐角原理** (argument, prıncıple of the)，**最大值原理** (maxımum prıncıple)，等等

一个一般 Q 拟共形映射是形如 (10) (其中 $A=B=0$) 的某个一致椭圆型方程组的一个解，反之也真．因而用上面陈述的结果可以通过纯分析手段解**拟共形映射** (quası-conformal mappıng) 的基本问题

广义解析函数论使得广义 Rıemann-Hılbert 问题 (generalızed Rıemann-Hılbert problem) 的详尽研究成为可能（亦见 **Riemann-Hilbert 问题（解析函数）** (Rıemann-Hılbert problem (analytıc functıons)))．这个问题是要寻求 (1) 的在 $D\cup S$ 上连续并具有边界条件

$$\mathrm{Re}[\overline{\lambda(z)}\,w(z)]=\alpha u+\beta v=\gamma,\quad z\in S \tag{12}$$

的解，其中 α,β,γ 是给定的 $C_{\alpha}(S)$ $(0<\alpha<1)$ 中的实值函数，且 $\alpha^2+\beta^2=1$．一般地，区域 D 是多连通的．

可以把问题 (12) 归结为一个等价的奇异积分方程，并得到边值问题 (12) 的完全的定性分析．

设区域 D 的边界 S 由有限条满足 Ляпунов 条件（见 **Ляпунов 曲面和曲线** (Lyapunov surfaces and curves)）的简单闭曲线 $S_0,\ \ ,S_m$ 组成，由于所给方程和边界条件的形式在共形映射下不变，故不失一般性可假定 S_0 是位于所考虑区域 D 中的以 $z=0$ 为圆心的单位圆，而 $S_1,\cdots,S_m$ 是位于 S_0 内的圆．

问题 (12) 的指标 (ındex) n 是等于当点 ζ 循正向绕 S 一周时

$$\frac{1}{2\pi}\arg[\alpha(\zeta)+\imath\beta(\zeta)]$$

的改变量的整数．所给边界条件可化为较简单的形式

$$\mathrm{Re}[z^{-n}e^{\imath C(z)}w(z)]=\gamma,\quad z\in S,$$

此处在 S_j 上，$C(z)=C_j$，$C_0=0$，而 $C_1,\ \cdot\ ,C_m$ 是能被 α,β 唯一地表示的某些实参数

对于伴随问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial w^*}{\partial\overline{z}}-Aw^*-\overline{B}\,w^*=0,\quad z\in D,\\&\mathrm{Re}\Big[(\alpha+\imath\beta)\frac{d\overline{z}}{ds}\,w^*(z)\Big]=0,\quad z\in S,\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

其指标由公式 $n'=m-n-1$ 给出．

关于问题 (12) 的基本结果可表述如下：

1) 问题 (12) 有解，当且仅当

$$\int_S(\alpha+\imath\beta)w^*\gamma ds=0,$$

其中 w^* 是伴随问题的任一解．

2) 设 l,l' 分别是齐次问题 (12), (13) 线性无关解的个数，则 $l-l'=n-n'=2n-m+1$．

3) 如果 $n<0$，则齐次问题 (12) 没有非零解

4) 如果 $n>m-1$，则齐次问题 (12) 恰有 $l=2n+m-1$ 个线性无关的解，而非齐次问题 (12) 有（唯一）解，当且仅当 $\int_S(\alpha+\imath\beta)w_j^*\gamma ds=0$, $j=1,\ \ ,l'$, $l'=m-2n+1$，其中 $w_j(j=1,\cdot\ ,l')$ 是齐次问题 (13) 的一个完全解组

5) 如果 $m=0$, $n=0$，则 $l=1$，齐次问题的所有解具有 $w(z)=\imath ce^{\omega_0(z)}$ 的形式，其中 c 是实常数，ω_0 是 $D\cup S$ 上的连续函数．

上述结果完全刻画了单连通域 $(m=0)$ 和多连通域 $(n<0, n>m-1)$ 情形的问题 (12)．情形 $0\leqslant n\leqslant m-1$ 需加专门考虑

参考文献

[1] Векуа, И Н, Обобщенные аналитические функции, М, 1959 (中译本 依·涅·维库阿，广义解析函数，人民教育出版社，上下册 1960)．

А В Бицадзе 撰

【补注】 **解析函数** (analytıc functıon) w 当然满足 $\partial w/\partial\overline{z}=0$ (即 $A=B=0$)，对于满足 (1) 的函数，其名称"广义解析函数"有时也用伪解析函数 (pseudo-analytıc functıon)，见 [A1]，[A2]

方程组 (1) 常称为 Carelman 方程组 (Carelman system) 或 Bers-Векуа 方程组 (Bers-Vekua system)．

关于 Rıemann-Hılbert 问题亦见 [A4]

参考文献

[A1] Bers, L, An outlıne of the theory of pseudo-analytıc functıons, *Bull Amer Math Soc*, **62** (1956), 291－331

[A2] Bers, L, Theory of pseudo-analytıc functıons, New York Unıv, 1953 (中译本 L 倍尔斯，准解析函数论，科学出版社，1964)．

[A3] Rodın, Yu L, Generalızed analytıc functıons on Rıemann surfaces, Sprınger, 1987．

[A4] Rodın, Yu L, The Rıemann boundary problem on Rıemann surfaces, Reıdel, 1988．

沈永欢 译

广义上同调论 [**generalized cohomology theories, обобщенные теории когомологий**]，异常上同调论 (extraordınary cohomology theorıes)

一类从空间对的范畴到分次交换群范畴的特殊函子．一个广义上同调论可以记作 (h^*,δ)，其中 h^* 是

从拓扑空间对范畴 P 到分次交换群范畴 GA 的函子（即对每一对空间 (X, A) 对应了一个分次交换群 $h^*(X,A)=\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} h^n(X,A)$，并且对于每个连续映射 $f\ (X, A)\to(Y, B)$ 对应了一组同态 $\{h^n(f)\ h^n(Y, B)\to h^n(X, A)\}_{n=-\infty}^{\infty}$），而 δ 是一组同态

$$\{\delta^n_{(X\ A)}\ \ h^n(A)\to h^{n+1}(X, A)\},$$

对于每一对空间 (X, A) 给出，并在下述的意义之下是自然的，即对任何连续映射 $f\ (X, A)\to(Y, B)$ 下式成立

$$\delta^n_{(X\ A)}\circ h^n(f|_A)=h^n(f)\circ\delta^n_{(Y\ B)};$$

而且满足下列三条公理

1）同伦公理（homotopy axiom） 若两个映射 f, $g\ (X, A)\to(Y, B)$ 为同伦的，则对所有的 n，同态 $h^n(f)$ 与 $h^n(g)$ 相同.

2）正合公理（exactness axiom） 对于任何空间对 (X, A)，序列

$$\to h^n(X, A)\xrightarrow{h^n_{(j)}}h^n(X)\xrightarrow{h^n_{(i)}}h^n(A)\xrightarrow{\delta^n_{(X\ A)}}$$
$$\xrightarrow{\delta^n_{(X\ A)}} h^{n+1}(X, A)\xrightarrow{h^{n+1}_{(j)}}$$

是正合的，这里 $\iota\ A\to X$, $\jmath\ X=(X,\phi)\to(X, A)$ 为明显的含入映射

3）切除公理（excision axiom） 设 (X, A) 为一空间对，设 $U\subset A$ 满足 $\bar{U}\subset A$，则含入映射 $\iota\ (X\backslash U, A\backslash U)\to(X, A)$ 对于所有的 n 诱导同构

$$h^n(X, A)\to h^n(X\backslash U, A\backslash U)$$

对于**上纤维化**（cofibration）(X, A)，则由公理可知投影 $(X, A)\to(X/A, \mathrm{pt})$ 诱导同构

$$h^n(X/A, \mathrm{pt})\to h^n(X, A),$$

其中 pt 是由单独一点所构成的空间

常常将 $h^n(f)$ 简写作 f^*，将 $\delta^n_{(X,A)}$ 简写作 δ 群 $h^n(X, A)$ 称为空间对 (X, A) 的 n 维（广义）上同调群，分次群 $h^*(\mathrm{pt})$ 称为这个广义上同调论的系数群.

在广义上同调论的定义中，范畴 P 可以换为上纤维化空间对的范畴，或 CW 复形对的范畴 $\mathfrak{S}$，或有限 CW 复形对的范畴 $\mathfrak{S}_F$（这时，在切除公理中必须要求 $(X\backslash U, A\backslash U)$ 同构于有关范畴里的一个对象）. 在后两种情形下就说 (h, δ) 为定义在范畴 $\mathfrak{S}$ 或 $\mathfrak{S}_F$ 上的广义上同调论.

选择"广义上同调"这个称呼是因为下述的理由. 在 [2] 中曾证明任何函子 $\mathfrak{S}_F\to GA$ 如果满足公理 1）－3）以及所谓维数公理（$h^i(\mathrm{pt})=0$ 当 $i\neq 0$），必为通常的以 $h^0(\mathrm{pt})$ 为系数的**上同调论**（cohomology）H^* 稍后人们注意到代数拓扑中许多有用的构造（例如，**配边**（cobordism），**K 理论**（K-theory））均满足公理 1）— 3），这些构造之所以有效，在很大程度上依赖于从这些公理经过形式上的推导而得到的性质 这就使得上述广义同调论的概念能够被接受.

设 X 为选定基点的空间，令 $\varepsilon\ \mathrm{pt}\to X$ 为它的基点 X 的约化广义上同调群 $\tilde{h}^n(X)$ 定义作

$$\tilde{h}^n(X)=\ker(h^n(\varepsilon)\cdot\ h^n(X)\to h^n(\mathrm{pt}))$$

有一个明显的裂解

$$h^n(X)=\tilde{h}^n(X)\oplus h^n(\mathrm{pt}),$$

而且这个裂解是典范的，这里可注意 $h^n(\mathrm{pt})\subset h^n(X)$ 是由映射 $X\to\mathrm{pt}$ 诱导的. 显然，$\tilde{h}^n(X)\approx h^n(X, \mathrm{pt})$ 又由 1）— 3），对于上纤维化 (X, A) 有同构 $h^n(X, A)\approx h^n(X/A, \mathrm{pt})$（见 [2], [3]），从而 $h^n(X, A)\approx\tilde{h}^n(X/A)$ 这里，一如通常，$X/A=X\cup\mathrm{pt}=X^+$ 当 $A=\phi$

若 (X, A) 为上纤维化，则从公理推知序列

$$\to\tilde{h}^n(X/A)\xrightarrow{j^*}\tilde{h}^n(X)\xrightarrow{\iota^*}\tilde{h}^n(A)\xrightarrow{\delta}$$
$$\xrightarrow{\delta}\tilde{h}^{n+1}(X/A)\to \qquad (*)$$

为正合（在上纤维化范畴中有自然性）. 这里 $\iota\ A\to X$, $\jmath . X\to X/A$ 的意义明显，δ 为迭合同态

$$\tilde{h}^n(A)\subset h^n(A)\to h^{n+1}(X, A)\approx\tilde{h}^{n+1}(X/A)$$

特别，若 X 为 A 上的锥形 CA（见**映射锥**（mapping cone）），则 $\tilde{h}(X)=0$（同伦公理），且 X/A 为 A 的**纬垂**（suspension）SA；序列（*）的正合性蕴含有关于 A 为自然的纬垂同构（suspension isomorphism）$\sigma_A\ \ \tilde{h}^i(A)\to\tilde{h}^{i+1}(SA)$ 同构 σ 可以用来重建 δ（见 [2], [3]），这是利用所谓 Puppe 序列来完成的. 运用 $h^N(N\to\infty)$ 于上述序列即得（*）的正合性. 因此，广义上同调论 (h^*, δ) 可以完全地从约化广义同调论 $(\tilde{h}^*, \delta)$ 构作出来

广义同调论 h^* 称为乘性的，如果对 P 中任意的空间对 $(X, A), (Y, B)$ 存在自然配对

$$h^p(X, A)\oplus h^q(Y, B)\to$$
$$\to h^{p+q}(X\times Y, X\times B\cup A\times Y)$$

并且满足分次交换性与结合性（见 [4], [5]） 这时，对于 $(X, A)\in P$, $h^*(X, A)$ 关于乘法

$$h^p(X, A)\oplus h^q(X, A)\to h^{p+q}(X\times X,$$
$$X\times A\cup A\times X)\xrightarrow{\Delta^*} h^{p+q}(X, A)$$

构成一个分次（交换，结合）环，其中

$$\Delta:(X, A)\to(X\times X, A\times A)\subset$$

$$\subset (X\times X,\ X\times A\cup A\times X)$$

为对角映射，并且诱导映射 $f^*\ h^*(Y,B)\to h^*(X,A)$ 为环同态．更一般些，可以定义两个广义同调论到第三个的配对([5])．

通常的上同调 $H^n(X,G)$ 可以定义作 X 到 **Eilenberg-MacLane 空间**(Eilenberg-MacLane space) $K(G,n)$ 的连续映射同伦类 $[X,K(G,n)]$ 所构成的群．这可按下述方式推广到广义上同调论．一序列空间 $\{M_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 与连续映射 $s_n\ SM_n\to M_{n+1}$，这里 SM_n 是 M_n 的纬垂，称为一个**空间的谱**(spectrum of spaces)．对于一个空间 X，群 $\tilde h^n(X)$ 由下式定义

$$\tilde h^n(X)=\lim_{k\to\infty}[S^kX,M_{n+k}]$$

其中映射

$$[S^kX,M_{n+k}]\to[S^{k+1}X,M_{n+k+1}]$$

定义为下列的迭合映射

$$[S^kX,M_{n+k}]\xrightarrow{S}[S^{k+1}X,SM_{n+k}]\xrightarrow{(s_{n+k})}$$

$$\xrightarrow{(s_{n+k})}[S^{k+1}X,M_{n+k+1}]$$

纬垂同构 $\sigma_X^n\ \tilde h^n(X)\to\tilde h^{n+1}(SX)$ 可用显然的方式构作．于是，每个空间谱给出了某个广义上同调论 (h^*,σ)，从而，给出一个非约化的广义同调论 (h^*,δ)

如果一个广义上同调论 (h^*,δ) 可以按上述方式从一个空间谱得到，就说这个谱表示了 (h^*,δ)；或 (h^*,δ) 可由这个谱表示　可以证明，范畴 $\mathfrak{S}_F$ 上的任何广义同调论可用空间谱来表示([5])

若 (h^*,δ) 可用环谱来表示，则它是可乘的([5])　对于在范畴 $\mathfrak{S}$ 上给出的广义上同调论其逆亦真．

设 $F\to E\to B$ 为 **Serre 纤维化**(Serre fibration)．对于任何广义上同调 h^* 与任何 n，群 $h^n(F)$ 构成 B 上的一个局部群系．这时存在 Dold-Atiyah-Hirzebruch 谱序列 $\{E_r^{p,q}\}$，起始项为 $E_2^{p,q}=H^p(B;\{h^q(F)\})$ 若 B 为有限 CW 复形，则这个谱序列收敛，其极限项相配于 $h^*(E)$(见[1])．特别若 $F=\mathrm{pt}$，则得到谱序列 $H^p(X,h^q(\mathrm{pt}))\Rightarrow h^n(X)$，使得(有时)可从 $H^*(X)$ 与 $h^*(\mathrm{pt})$ 算出 $h^*(X)$

对于广义上同调论 h^* 可以对应以一个对偶的广义同调论(generalized homology theory) h_*，它所满足的公理类似于广义上同调论的公理，只不过同调是协变算子([4])　这里，若空间 X 与 Y 互为 $(n+1)$ 对偶(见 **S 对偶性**(S-duality))，则 $\tilde h^i(X)\approx\tilde h_{n-i}(Y)$　又若 h^* 由谱 $\{M_n,s_n\}$ 表示，则

$$\tilde h_i(X)=\lim_{k\to\infty}\pi_{i+k}(X\wedge M_k)$$

若 h^* 是一个可乘的上同调论，则有一个交截配对 $\cap$

$$\cap\quad h_n(X,X_1\cup X_2)\oplus h^q(X,X_1)\to h_{n-q}(X,X_2)$$

广义上同调论的最重要例子是 **K 理论**(K-theory)以及各种**配边**(cobordism)理论．对偶于配边的广义同调论是**下配边**(bordism)

设 ξ 为 X 上的 n 维向量丛，设它在广义上同调论 h^* 中为可定向的(见**定向**(orientation))，并设 $T\xi$ 为它的 **Thom 空间**(Thom space)　这时，广义的 **Thom 同构**(Thom isomorphism) $h^i(X)\approx\tilde h^{i+n}(T\xi)$ 成立(见[1])　由此(以及 Milnor-Spanier-Atiyah 对偶定理([7]))可导出广义 **Poincaré 对偶性**(Poincaré duality)　设 P 是形式维数 n 的 **Poincaré 空间**(Poincaré space)(例如，闭 n 维流形)，并设其法丛在 h^* 中可定向，则对任何整数 i 有 $h_i(P)\approx h^{n-i}(P)$　设 ν 为 P 上的 N 维法丛，$T\nu$ 为它的 Thom 空间．空间 $P^+=P\cup\mathrm{pt}$ 与 $T\nu$ 为 $(N+n)$ 对偶性．**S 对偶性**(S-duality)中的 $(n+1)$ 对偶性通常称为 n 对偶性　．因此有

$$h_i(P)\approx\tilde h_i(P^+)\approx\tilde h^{N+n-i}(T\nu)\approx h^{n-i}(P)$$

在这个对应之下，单位元 $1\in h^0(P)$ 所对应的元素 $z\in h_n(P)$ 称为 P 在上同调论 h^* 中的基本类，这推广了经典的**基本类**(fundamental class)概念　可以证明同构 $h^i(P)\approx h_{n-i}(P)$ 由"与基本类作交截"而得到，即具有形式 $x\to z\cap x$(见[4])．

设 F 为实数域 $\mathbf{R}$，复数域 $\mathbf{C}$ 或四元数体 $\mathbf{H}$　可乘的广义上同调论 h^* 称为 F 可定向的，如果所有的 F 向量丛在 h^* 里为可定向的．于是，对于任何 F 可定向广义上同调论 h^* 与 X 上任何 F 向量丛可以定义纤维化 ξ 的取值于群 $h^*(X)$ 的广义示性类(见**示性类**(characteristic class))，此时，若 F 等于 $\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$ 或 $\mathbf{H}$，并且用通常的上同调论 H^*(或 $H^*(\mathbf{Z}_2)$ 当 $F=\mathbf{R}$)，则将分别得到 Stiefel，Chern 或 Borel 类．在这个场合，GF 配边理论　(见**配边**　(cobordism))是一个万有的 F 可定向广义上同调论．这从下列事实也清楚地看出，即存在联系着 $h^*(X)$ 与 $GF_0^*(X)$ 以及 $h^*(\mathrm{pt})$ 的谱序列，　这里 F_0 是 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$　另外，对每个 $\mathbf{C}$ 可定向广义上同调论 h^* 可以对应以环 $h^*(\mathrm{pt})$ 上的一个**形式群**　(formal group)，协边的万有性反映在这样的事实，即酉配边理论的形式群在所有的形式群中是(纯代数的)万有的．理论 h^* 的形式群载负了 h^* 的大量信息．

常有必要将一个在某子范畴上定义的广义上同调理论扩张到整个范畴上．例如，有时有必要将范畴 $\mathfrak{S}_F$ 上的一个广义上同调论 h^* 扩展到整个范畴 $\mathfrak{S}$ 上．

第一种方法．找到一个谱来表示 h^*(在 $\mathfrak{S}_F$ 上)，利用这个谱将广义上同调论 h^* 扩张到整个 $\mathfrak{S}$ 上

第二种方法．设在 $\mathfrak{S}_F$ 上已给了理论 h^*，并设 $X\in\mathfrak{S}$，设 $\{X_\alpha\}$ 为 X 的一族有限 CW 子空间，它们将 X 收尽无遗，置

$$\overleftarrow{h}(X)=\varprojlim h^*(X_\alpha),$$

则 $\overleftarrow{h}^*$ 为 $\mathfrak{S}$ 上的一个函子，它满足除了正合公理外，一个广义上同调论应满足的所有公理(函子 $\varprojlim$ 不一定保持正合性)．从而，对于 $X\in\mathfrak{S}$ 以及任何扩张 $h^*\ \mathfrak{S}_F\to GA$ 的广义上同调 $h^*.\ \mathfrak{S}\to GA$，自然同态

$$h^*(X)\to\overleftarrow{h}^*(X)$$

为满同态

在一般情形下则出现谱序列 $E_r^{**}(X)\Rightarrow h^*(X)$，这里 $E_r^{p,q}(X)=\varprojlim{}^p\{h^q(X_\alpha)\}$，这里 $\varprojlim{}^p$ 为 $\varprojlim$ 的高阶导出函子，见[10]

对于一个在 $\mathfrak{S}_F$ 上给出的广义同调论 h_*，函子

$$\overrightarrow{h}_*(X)=\varinjlim h_*(X_\alpha)$$

满足正合公理，因此总是 h_* 的从 $\mathfrak{S}_F$ 到 $\mathfrak{S}$ 的扩张．

第三种方法类似于 Aleksandrov-Čech 法，依靠神经的构作(见**集合族的神经**(nerve of a family of sets))

广义上同调论还可以扩张到空间谱的范畴上去．设 $M=\{M_n,S_n\}$ 为空间谱．群 $\widetilde{h}^*(M)$ 由下式定义

$$\widetilde{h}^i(M)=\varinjlim_{n\to\infty}\widetilde{h}^{i+n}(M_n),$$

而映射

$$\widetilde{h}^{i+n}(M_n)\leftarrow\widetilde{h}^{i+n+1}(M_{n+1})$$

具有形状如

$$\widetilde{h}^{i+n}(M_n)\approx\widetilde{h}^{i+n+1}(SM_n)\leftarrow\widetilde{h}^{i+n+1}(M_{n+1})$$

这样在空间谱范畴上得到的函子 h^* 满足一个约化广义上同调论所应满足的全部公理(移植到空间谱范畴来看)(见[5])

一个自然的问题是"比较"不同的广义上同调论，特别是一个广义上同调论用另一个来表达的问题　后者的解可以看作是万有系数公式的一个深远的推广．在这里，Adams 型的谱序列是最有力的工具　前面已经列举了一个这样的例子"从协边到定向的广义上同调论"的谱序列．另一个例子．设 h^* 与 k^* 是两个广义上同调理论．设 A_h 为 h^* 的上同调运算环(见**上同调运算**(cohomology operation))，Y 是一个表示 K^* 的谱，而 X 是某个谱(特别，为一个空间)．那么(对于"良性的 X，Y 与 h^*" 见[6])存在谱序列以 $\mathrm{Ext}_{A_h}^{**}(h^*(Y),h^*(X))$ 为起始项，其极限项共轭于 $k^*(X)$　此外还有其他一些联结一个广义上同调论到另外广义上同调论的谱序列(见[8]，[9])

探究如何将一个广义上同调论作为一个上同调函子处理将是很有用的，也就是说，将 $h^*\ P\to GA$ 分解为迭合 $P\xrightarrow{\iota}A\to GA$，其中 ι 是一个典范的函子(与 h^* 无关)映入一个 **Abel 范畴**(Abelian category) A 在[8]中概述了实现这一步的一种方式．

参考文献

[1] Dold, A, Relations between ordinary and extraordinary homology, in Colloq Algebraic Topology August 1 – 10, 1962, Aarhus Univ, 1962, 2 – 9

[2] Eilenberg, S and Steenrod, N E, Foundations of algebraic topology, Princeton Univ Press, 1952

[3] Conner, P E and Floyd, E E, Differentiable periodic maps, Springer, 1964

[4] Whitehead, G W, Recent advances in homotopy theory, Amer Math Soc, 1970

[5] Switzer, R, Algebraic topology-homotopy and homology, Springer, 1975

[6] Новиков, С П, «Изв АН СССР, Сер Матем», **31** (1967), 4, 855 – 951

[7] Atiyah, M F, Thom complexes, *Proc, London Math Soc*, **11** (1961), 291 – 310

[8] Adams, J F, Stable homotopy and generalized homology, Univ of Chicago, 1974

[9] Dyer, E and Kahn, D, Some spectral sequences associated with fibrations, *Trans Amer Math Soc*, **145** (1969), 397 – 437

[10] Araki, S and Yosimura, Z, A spectral sequence associated with a cohomology theory of infinite CW-complexes, *Osaka J Math*, **9** (1972), 3, 351 – 365

[11] Dyer, E, Cohomology theories, Benjamin, 1969

Ю Б Рудяк 撰

【补注】 关于 Puppe 序列见锥(cone)条第三部分．

孙以丰 译

广义导数 [**generalized derivative, обобщенная производная**]，函数型的

导数概念对某些不可微函数类的推广．第一个定义属于 С Л Соболев(见[1]，[2])，他从他的**广义函数**(generalized function)概念的观点得出广义导数的定义．

设 f 和 φ 是 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中开集 Ω 上的局部可积函数，即在任何有界闭集 $F\subset\Omega$ 上 Lebesgue 可积．如果对任何在 Ω 中具有紧支集的无限次可微函数 ψ(见**紧支集函数**(function of compact support))有

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x)dx=-\int_\Omega\varphi(x)\psi(x)dx,\quad(1)$$

则称 φ 是 f 对 x_j(在 Ω 上)的广义导数，并记作 $\varphi=\partial f/\partial x_j$

广义导数 $\partial f/\partial x_j=\varphi$ 的第二个等价定义如下 如果可在一个 n 维零测集上修改 f 使得修改后的函数(仍记为 f) 对几乎所有(在 $n-1$ 维 Lebesgue 测度意义下)如下的 $x^j=(x_1,\ \ ,x_{j-1},x_{j+1},\ \ ,x_n)$ 关于 x_j 局部绝对连续，这些 x^j 属于 Ω 到平面 $x_j=0$ 的投射 Ω'，那么 f 在 Ω 上**几乎处处**(almost-everywhere)有偏导数(在这个词的通常意义下) $\partial f/\partial x_j$ 如果函数 $\varphi=\partial f/\partial x_j$ 在 Ω 上几乎处处成立，那么 φ 是 f 对 x_j 在 Ω 上的广义导数．于是，广义导数是在 Ω 上几乎处处定义的 如果 f 以及它通常意义下的导数 $\partial f/\partial x_j$ 在 Ω 上连续，那么后者也是 f 对 x_j 在 Ω 上的广义导数．

高阶广义导数 $\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j$，$\partial^3 f/\partial x_i\partial x_j^2$，　可归纳地定义．它们与微分的次序无关(在几乎处处意义下)．

广义导数还有第三个等价定义．假定对每个有界闭集 $F\subset\Omega$，定义在 Ω 上的函数 f 和 φ 有性质

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_F |f_\nu-f|\,dx=0,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_F \left|\frac{\partial f_\nu}{\partial x_j}-\varphi\right|dx=0,$$

且假定函数 f_ν，$\nu=1,2,\ \ $，以及它们的偏导数 $\partial f_\nu/\partial x_j$ 在 Ω 上连续，那么 φ 是 f 在 Ω 上对 x_j 的广义偏导数($\varphi=\partial f/\partial x_j$)(亦见 **Соболев 空间**(Sobolev space))

从广义函数论的观点，广义导数可以定义如下 设给出一个在 Ω 上局部可和函数 f，把 f 视为广义函数并令 $\partial f/\partial x_j=\varphi$ 是广义函数论意义下的偏导数，如果 φ 表示 Ω 上局部可和函数，那么 φ 是(在第一个(原始)意义下的)广义导数．

广义导数的概念甚至更早就被考虑了(例如可见[3]，其中考虑了在 Ω 上平方可积的广义导数)．于是很多研究者独立于他们的先行者得到了这个概念(关于这个问题可见[4])

参考文献

[1] Соболев, С Л，《Докл АН СССР》, **8** (1935), 291－294

[2] Соболев, С Л，《Матем сб》, **1** (1936), 39－72

[3] Levi, B, Sul principio di Dirichlet, *Rend Circ Mat Palermo*, **22** (1906), 293－359

[4] Никольский, С М, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М, 1969 (英译本 Nikol'skiĭ, S M, Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, Springer, 1975)

С М Никольский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Agmon, S, Lectures on elliptic boundary Value problems, v Nostrand, 1965

余庆余 译

广义位移算子 [**generalized displacement operators** 或 **generalized shift operators**, **обобщенного сдвига операторы**], 超群 [hypergroup]

从群上函数空间位移算子的某些性质公理化而提出的一个概念 象**卷积**(convolution)、**群代数**(group algebra)、**正定函数**(positive-definite function)、**殆周期函数**(almost-periodic function)等重要的数学概念，都能用群位移算子来阐述 在广义位移算子理论的框架中，更深刻的推广也能从与上面列出的概念有关的基本原则和结果获得．特别地，广义位移算子理论在**抽象调和分析**(harmonic analysis, abstract)中已经有了实质应用

述语"广义位移算子"与"超群"是由 J Delsarte 提出的(见[1]－[3]) 在此领域中的重要概念与许多原始结果也归属于他 广义位移算子理论的系统结构主要在 Б М Левитан 的工作中给出(例如见[4]－[7])．

基本概念 设 H 是任意集合，Φ 是定义在 H 上的复值函数的向量空间 假设对每个元 $x\in H$，有 Φ 上的线性算子 R^x 与之对应，使对任一固定的 $h\in H$ 与对所有的 $\varphi\in\Phi$，函数 $\psi(x)=R^x\varphi(h)$ 在 Φ 中成立．Φ 上的线性算子 $\varphi(x)\mapsto\psi(x)=R^x\varphi(h)$ 记为 L^h(也就是，$L^h\varphi(x)=R^x\varphi(h)$) 线性算子 R^x 称为广义位移算子(generalized displacement operator)，如果下列条件(公理)满足 1) $R^xL^y=L^yR^x$ 对任意 $x,y\in H$ 成立(结合性公理)；2) H 中存在中性元(neutral element) e，使 $R^e=I$，这里 I 是恒等算子．在此情况下，集合 H 称为超群(hypergroup)，因此"广义位移算子的集"与"超群"是等价的 算子 R^x 通常称为右位移算子(right displacement operator)，而 L^x 称为左位移算子(left displacement operator)

广义位移算子是以明显的方式来源于任何关于位移不变的函数的向量空间，这种函数定义在一个具有单位元的半群或群上 设 R^x $\varphi(h)\mapsto\varphi(h\cdot x)$，其中 $h\cdot x$ 是 h 与 x 在半群中的乘积，又设 L^x $\varphi(h)\mapsto\varphi(x\cdot h)$，于是结合性公理化为半群中乘法的可结合性，并且中性元是半群的单位元，因此算子 R^x 形成广义位移算子族 下面给出非平凡的例子．

在一般情况下，L^x 并不形成广义位移算子，这是因为算子 L^e 并不是单位元．然而，L^e 是投影子，并且它的值域 $\widetilde{\Phi}$ 称为 Φ 中的基本子空间(fundamental subspace)．算子 L^x 形成 $\widetilde{\Phi}$ 中的广义位移算子族，并且左与右位移算子之间的对称性是复位的 广义位移算子的第二公理通常加强为 $L^e=I$，亦即 $\widetilde{\Phi}=\Phi$ 条件 1) 与 2) 是关于广义位移算子的最一般公理 具更多限制的

广义位移算子类可由增加附加条件来选择 如果 $R^xR^y=R^yR^x$ 对所有 $x, y\in H$ 成立，则 R^x 称为交换的(commutative) 在此情形下，超群 H 也称为交换的．如果关于 H 作更进一步的假设，则对于广义位移算子新条件将以自然的方式产生 例如，若 H 是具有测度 m 的局部紧空间，则通常要求算子 R^x 与 L^x 协调地作用在 H 上连续函数空间 $C(H)$ 与空间 $L_p(H, m)$ 中，$p\geqslant 1$，因此对 R^x 与 L^x 应附加连续型条件，若 H 是光滑流形，则要增加可微性条件，等等 不同样式的公理在 [1], [3]−[6], [8], [15]−[20] 中给出．

与群相关的广义位移算子的例子 Delsarte 广义位移算子(Delsarte generalized displacement operator) 设 G 是拓扑群，K 是 G 的自同构紧群，并设 dk 是 K 上的 Haar 测度，$\int dk=1$ 在 G 上的连续函数空间 $\Phi=C(G)$ 中，广义位移算子 R^x 由方程

$$R^x\varphi(g)=\int_K\varphi(g\cdot k(x))\,dk$$

定义，其中 $\varphi\in\Phi$, $k(x)$ 是 $x\in G$ 在自同构 $k\in K$ 之下的象，而 $g\cdot k(x)$ 是 G 中的元素 g 与 $k(x)$ 的积 群的单位元是中性元．广义位移算子的两个公理是满足的，如果 G 是交换的，则 Delsarte 广义位移算子也是交换的．基本子空间 $\widetilde{\Phi}$ 由所有在与 K 的作用相关的轨道上取常值的函数组成，并且当 x 与 y 在同一轨道上时，算子 R^x 与 R^y 在 Φ 上恰好一致 因此轨道空间 H 也能由超群的结构给出，只须把 Φ 与 H 上的连续函数空间视为等同，并且令 $R^h=R^x$，其中 x 是轨道 h 上的任一元素 若 G 是 $\mathbf{R}$，并且自同构群由两个元素（关于原点的反射与恒等映射）组成，则 $R^x\varphi(t)=[\varphi(t+x)+\varphi(t-x)]/2$ 在此情形下，基本子空间由偶函数组成，而且轨道空间与半实轴 $0\leqslant t<\infty$ 等同 Delsarte 广义位移算子的另一个特殊情况是 $G=K$, $k(x)=k^{-1}xk$，此时基本子空间由 K 上的中心函数 (central function) 组成，而由轨道生成的超群即共轭类是交换的

关于紧子群(compact subgroup)的双陪集(double cosets)．设 G 是局部紧群，K 是紧子群，且 H 是 K 的二重陪集空间（对 $g\in K$，这种陪集包含所有形如 k_1gk_2 的元素，其中 $k_1, k_2\in K$） 如果 K 是 G 的正规子群，则 H 与商群 G/K 重合 设 Φ 是 G 上满足 $\varphi(k_1gk_2)=\varphi(g)$ 的所有连续函数的空间，其中 $k_1, k_2\in K$, $g\in G$ 广义位移算子由公式

$$R^x\varphi(g)=\int_K\varphi(xkg)\,dk$$

定义．空间 Φ 可以等同于 H 上连续函数空间 $C(H)$，并且如 Delsarte 定义位移算子那样，H 可由超群的结构给出．如果 G 是线性半单 Lie 群，且 K 是它的极大紧子群，则超群 H 是交换的，且与 G 上的球面函数密切相关（特别地，所有球面函数都属于 Φ）

在上述诸例中，代替连续函数空间，可以考虑另一些函数空间（见 [8], [13], [15]−[19]）

结合代数(hypercomplex system) 设 Φ 是有限结合代数，亦即具有一个固定基 $H=\{h_1, \ , h_n\}$ 的有限维结合代数 若把函数 $\varphi(h)$ 与元素 $\sum_{i=1}^{n}\varphi(h_i)h_i\in\Phi$ 相对应，则代数 Φ 与有限集 H 上的函数空间等同 设

$$R^x\varphi(h)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(h_i)\,h_i*x,$$

这里 h_i*x 是 h_i 与 x 在代数 Φ 中的积 算子 R^x 形成广义位移算子族的充要条件是基 H 中的某个元为 Φ 的右单位元．由此建立了有限集上函数空间中任意广义位移算子与有限结合代数之间的对应关系 于是，广义位移算子的概念可视为经典的结合代数概念的深刻推广 能够自然地作为具有可数基或连续统幂次的基的结合代数来处理的广义位移算子的重要例子，例如在 [4], [5], [8] 中都有所考虑．

广义位移算子的生成元(generators)与 Lie 定理(Lie theorem) 设超群 H 是可微的（或复解析的）流形，并且对所有的 $\varphi\in\Phi$, $u(x,y)=R^x\varphi(y)$ 是 $H\times H$ 上的可微（相应地，全纯）函数．又设 $(h_1, \ , h_n)$ 是 $h\in H$ 的局部坐标，并选择其坐标系，使得中性元的坐标为 $(0, \ , 0)$ R^x 的 k 阶右位移生成元(generator)（无穷小算子(infinitesimal operator)）是形如

$$R_{k_1\ \ k_n,h}\quad\varphi(h)\mapsto\left.\frac{\partial^k u(x,h)}{\partial^{k_1}x_1\ \ \partial^{k_n}x_n}\right|_{x=0}$$

的线性算子，其中 $u(x,h)=R^x\varphi(h)$, $k=k_1+\ \ +k_n$ 左位移生成元可类似地定义为

$$L_{k_1\ \ k_n,h}\quad\varphi(h)\mapsto\left.\frac{\partial^k u(h,x)}{\partial^{k_1}x_1\ \ \partial^{k_n}x_n}\right|_{x=0}$$

由结合性公理可推出，任一个左位移生成元与所有的右位移生成元可交换（也与算子 R^x 可交换）．把结合性条件 $R^xL^y\varphi(h)=L^yR^x\varphi(h)$ 对于 $h_1, \ , h_n$ 微分适当多次，并且令 $h=0$，就得到方程组

$$L_{k_1\ \ k_n\,x}(u)=R_{k_1\ \ k_n,y}(u), \tag{*}$$

其中 $u(x,y)=R^x\varphi(y)$，这个方程组应视为 Lie 第一正定理到广义位移算子情形的推广（关于 Delsarte 广义位移算子见 [3]，关于一般情形见 [5]） 在确定 $u(x,y)$ 时，并非一定涉及式 (*) 中所有的方程．例如，对于 Lie 群上的位移，第一阶生成元就已唯一地确定了函数 u（就是群乘法）．在一般情形下，一些低阶生成元可以退化为例如乘以常数的乘法．因此，式 (*) 中相应的方程就不含有有用的信息．这就提出如下的问题 从式

(*)中选出最少数目的方程，使能唯一地确定广义位移算子 这里，退化的生成元会增加初始条件的数目．如果在一定的初始条件下，包括条件 $u|_{x=0}=\varphi(y)$，式(*)的有限组唯一地确定解 $u(x,y)=R^x\varphi(y)$，并且如果该组中左边的算子与右边所有的算子可交换，则算子 R^x 是广义位移算子 这个论断类似于 Lie 第一逆定理[5] 对于某种类型的广义位移算子，Lie 第二与第三（正与逆）定理的类似定理已被证明（见[5]）．特别地，在 n 个变元的无限次可微函数空间中，广义位移算子已被构造出来，对于这种算子，右（左）位移生成元可产生任意给定的 n 维 Lie 代数 这些生成元的一个明确的描述已经以二阶积分——微分算子的形式获得（[10]） 借助于类似的技巧，可以构造出作用在（n 个变元的）整解析函数空间中，与生成任意的 n 维实 Lie 代数的任意阶生成元，广义位移算子还能借助于这些生成元再建立．广义位移算子不仅能从 Lie 代数出发来构造，而且也可以从更一般的类的交换关系出发（见[7]，[12]）来构造 因此，直线上的广义位移算子在[1]中被这样构造出来，那里是从类似于 Taylor 级数的一个级数的二阶生成元显式出发的，此级数给出通常位移依微分算子的幂的展开式 具有二阶 Sturm-Liouville 型生成元的直线上的可换广义位移算子已详细地描述过（见[4]，[5]），并且已应用于 Sturm-Liouville 算子与方程．直线上可微函数空间中的具有 Sturm-Liouville 型生成元（包括非交换的）的广义位移算子的完整分类已在[14]中给出

广义位移算子与超群代数（hypergroup algebras）**的表示**．关于广义位移算子的表示论并不像关于群的发展得那样好，但却是用类似的方式去构造的 这种类似讨论十分深入，例如，借用生成元概念，广义位移算子的表示可用无穷小方法去研究，正如对于 Lie 群情形那样（见[3]，[5]，[11]） 把广义位移算子的表示作为结合超群代数的表示来处理是方便的，就像群代数那样（见**无穷维表示**（infinite-dimensional representation））．如果超群 H 是局部紧的，则 H 上具紧支集的复 Radon 测度空间 $M(H)$ 便有关于广义卷积超群代数的结构，这里元 $f,\ g\in M(H)$ 的广义卷积 $f*g$ 由方程

$$\int\varphi d(f*g)=\iint R^y\varphi(x)\,df(x)\,dg(y)$$

定义，其中 φ 是 H 上的任意连续函数 超群结构可以类似地定义在 H 上具紧支集的广义函数空间 $D(H)$ 中（或在 H 上的解析泛函空间 $A(H)$ 中），如果该超群是可微的（或复解析）流形．在自然拓扑之下，$M(H)$，$D(H)$ 与 $A(H)$ 是拓扑代数，并且集中在中性元 $e\in H$ 的 δ 函数是上述诸代数的右单位元 反之亦然 如果在空间 $M(H)$ 中（相应地，$D(H)$，$A(H)$ 中）赋予自然拓扑，以及 δ 函数为右单位元的拓扑结合代数的结构也已给定，则存在 H 上（唯一的）超群结构，使得广义卷积与 $M(H)$（相应地，$D(H)$，$A(H)$）的乘法相同．代数 $M(H)$（相应地，$D(H)$，$A(H)$）的连续表示可理解为相应的广义位移算子的连续（相应地，无穷次可微、全纯）表示（见[20]）

具有对合的 Banach 超群代数的对称表示理论类似于群的酉表示论 关于交换的与紧的广义位移算子表示的最完整的结果（参看[4]－[6]）已经获得．在一定条件下，H 上关于正测度 m 可和函数空间 $L_1(H,m)$ 能赋予具有对合的 Banach 超群代数的结构．这些条件之一是 测度 m 在广义位移之下不变（关于各种不同式样的确切定义，参看[4]－[6]，[15]－[19]） 在自然假设下，对于右或左广义位移之下不变的测度，唯一性（确定到一个纯量倍数）也已证明，也有对于这种测度的存在性的充分条件（像超群的紧性，可换性或离散性等条件，见[8]，[16]－[18]）．然而，关于一般形式的广义位移算子，不变测度的存在性问题仍然未解决（1982）．与 $L_1(H,m)$ 一起，有界变分测度的 Banach 超群代数与超群 C^* 代数起着重要作用

Banach 超群代数及其对称表示已在[4]，[6]，[8]，[15]－[19]中研究过 关于直线上某些广义位移算子的解析泛函代数已在[9]中进行了研究 对于一般类型的广义位移算子，拓扑超群代数及其表示曾在[20]中考虑过，其中谱分析与谱综合问题是作为超群代数的理想问题来处理的 在[12]中，应用超群代数的技巧来解决 B П Маслов 算子方法框架中有关数学物理的问题．

调和分析（harmonic analysis）．下述模式揭示了交换广义位移算子的结构（见[4]，[5]）．设 m_1 与 m_2 分别是 H_1 与 H_2 上给定的正测度，$\chi(x,y)$ 是定义在 $H_1\times H_2$ 上的函数，设广义 Fourier 变换（generalized Fourier transformation）由

$$\varphi(x)\mapsto f(y)=\int\varphi(x)\overline{\chi(x,y)}dm_1(x)$$

给出，它是 Hilbert 空间 $L_2(H_1,m_1)$ 与 $L_2(H_2,m_2)$ 之间的同构 又设反演公式

$$\varphi(x)=\int f(y)\chi(x,y)dm_2(y)$$

成立．如果测度 m_2 是离散的，则这个公式给出 $\varphi(x)$ 依广义 Fourier 级数（generalized Fourier series）的展开式．如果对某个 $e\in H_1$ 与所有 $y\in H_2$，成立 $\chi(e,y)=1$，则 H_1 还具有超群结构 在此情况下，广义位移算子由公式

$$R^k\varphi(x)=\int f(y)\chi(k,y)\chi(x,y)dm_2(y)$$

定义．因此，广义位移算子自然地是由关于直交函数系的展开以及算子谱理论等问题提出，这保证了广义

位移算子理论的应用领域的广泛性（例如见[4],[5],[8],[15]—[19]）．在可换广义位移算子情形，关于正定函数表示的Bochner定理与Понтрягин对偶性定理已被推广，广义Fourier变换已经定义，并且类似于**Plancherel定理**（Plancherel theorem）也已经证明（对于这些结果的各种样式，见[15]—[17]） 借助于表示理论，关于非交换广义位移算子的调和分析也可以建立 例如，关于广义位移算子的Plancherel定理与反演公式在非交换情形下的类似结果都已获得，其中包括局部紧群的相应结果作为特例，关于紧广义位移算子的Peter-Weyl的类似定理成立．在殆周期与平均周期函数理论的精华中，调和分析的各种式样发展到广义位移算子情形都有所考虑（见[1],[2],[4],[8],[9],[14],[20]） Wiener-Tauber的类似定理关于交换广义位移算子已经获得（见Wiener-Tauber 定理（Wiener-Tauber theorem）） 谱综合问题也有所考虑（见[21],[22]） 关于广义位移算子在群调和分析方面的应用，见[8],[13],[16],[19]

参考文献

[1] Delsarte, J, Sur une extension de la formule de Taylor *J Math Pures Appl*, **17**(1938), 213—231

[2] Delsarte, J, Une extension nouvelle de la theorie des fonctions presque-periodiques de Bohr, *Acta Math*, **69** (1938) 259—317

[3] Delsarte, J, *Colloque Internat CNRS*, 1956, 29—45

[4] Левитан, Б М,《Успехи матем наук》, **4**(1949), 1, 3—112

[5] Левитан, Б М, Теория операторов обобщенного сдвига, М, 1973

[6] Левитан, Б М,《Докл АН СССР》, **47**(1945), 3—6, 163—165, 323—326, 401—403

[7] Левитан, Б М,《Докл АН СССР》, **123**(1958), 243—245

[8] Березанский, Ю М, Крейн С Г,《Успехи матем наук》, **12**(1957), 1, 147—152

[9] Красичков, И Ф,《Изв АН СССР Сер матем》, **31** (1967) 1, 37—60, **32**(1968), 5, 1024—1032

[10] Грабовская, Р Я, Крейн, С Г,《Math Nachr》, 1976, Bd 75, 9—29

[11] Грабовская, Р Я, Кононенко, В И, Осипов, В Б,《Изв АН СССР Сер матем》, **41**(1977), 4, 912—936

[12] Маслов, В П,《Теорет и матем физика》, **33**(1977), 185—209

[13] Ращевский, П К,《Тр Моск матем об-ва》, **38**(1979), 139—185

[14] Гуревич, Д И,《Матем заметки》, **25**(1979), 3, 393—408

[15] Dunkl, C F, The measure algebra of a locally compact hypergroup, *Trans Amer Math Soc*, **179**(1973), 331—348

[16] Jewett, R I, Spaces with an abstract convolution of measures, *Adv in Math* **18**(1975), 1, 1—101

[17] Spector, R, Apercu de la theorie des hypergroups, in Anal harmonique des Groupes de Lie Sem Nancy-Strasbourg, Lecture notes in Math, Vol, 497, Springer, 1975, 643—673

[18] Spector, R, Measures invariantes sur les hypergroupes, *Trans Amer Math Soc*, **239**(1978), 147—165

[19] Ross K A, Hypergroups and centers of measure algebras, Symposia Math, Vol 22, Acad Press, 1977, 189—203

[20] Литвинов, Г Л,《Тр Семинара по вект и тенз анализу》, **18**(1978), 345—371

[21] Chilana, A K and Ross, K A, Spectral synthesis in hypergroups, *Pacific J Math*, **76**(1978), 313—328

[22] Chilana A K and Kumar, A, Spectral synthesis in Segal algebras on hypergroups, *Pacific J Math*, **80** (1979), 1, 59—76

[23] Koornwinder, T, The addition formula for Jacobi polynomials and spherical harmonics, Lie algebras applications and computational method, *Siam J Appl Math*, **25**(1973), 2, 236

Б М Левитан, Г Л Литвинов 撰

【补注】 也见[A2] 如果局部紧群G与紧子群K,(G, K)形成一个Гельфанд对（Gel'fand pair），则其相应的广义位移算子是可换的．可换超群结构可对应一个依**Jacobi多项式**（Jacobi polynomials）的展开与对偶展开 关于产生广义位移算子的Sturm-Liouville算子类，见[A2]

参考文献

[A1] Chebli, H, Opérateurs de translation généralisee et semi-groupes de convolution, in J Faraut (ed) Théorie du potentiel et analyse harmonique, Lecture notes in math, Vol 404, Springer, 1974, 36—59

[A2] Vainerman, L I, Duality of algebras with an involution and generalized shift operators, *J Soviet Math*, **42**(1988), 2113—2138 (*Itogi Nauk i Tekhn Mat Anal*, **24** (1986), 165—206)

苏维宜 译

广义函数［generalized function，обобщенная функция］

经典的函数（function）概念的推广．在工程、物理学和数学的很多问题中都需要这样的推广．广义函数的概念使得有可能以数学上正确的方式来表达诸如质点、点电荷和点偶极子的密度，单层或双层的（空间）密度，瞬时源的强度等理想化的概念 另一方面，广义函数的概念反映了这样一个事实，在现实中，一个物理量不可能在一点被测量，只可能量度它在给定点的充分小邻域内的均值．于是，对描述各种物理量的分布来说，广义函数方法是一个方便的、适当的工具，因之广义函数也称为分布（distribution）

广义函数是20世纪20年代末期，由P A M Dirac (见[1]) 在他的关于量子力学的研究中首次引进的，在该研究中，他系统地使用了δ函数及其导数的概念 (见δ **函数** (delta-function)) 1936年，С. Л Соболев ([2]) 在解决双曲方程的Cauchy 问题时奠定了广义函数的数学理论基础. 在20世纪 50年代，L. Schwartz (见[3]) 给出了广义函数论的系统阐述并指出了众多的应用 后来，主要受到理论物理、数学物理以及微分方程理论需要的刺激，这个理论被许多数学家、理论物理学家极大地发展了 (见[4]－[7]) 广义函数论已经取得巨大的进展，有着众多的应用，广泛地应用于数学、物理学和工程.

形式上，广义函数定义为充分"好"的(检验)函数φ的向量空间上的连续**线性泛函** (linear functional) $f \quad \varphi \to (f, \varphi)$ 检验空间的一个重要例子是空间$D(O)$——开集$O \subset \mathbf{R}^n$上的在O中有紧支集的$C^\infty(O)$函数之集合，并赋予了空间族$C_0^\infty(\overline{O}_k)$的强归纳极限(并)拓扑，其中$O_k \subset\subset O_{k+1}$，$\overline{O}_k$紧，$\bigcup_k O_k = O$ 空间$C_0^\infty(\overline{O}_k)$是支集在$O_k$中的$C^\infty(\mathbf{R}^n)$函数之集合，其拓扑由范数

$$\|\varphi\|_{C^p(\overline{O}_k)} = \max_{\substack{\|\alpha\| \leqslant p \\ x}} |D^\alpha \varphi(x)|, \ p = 0, 1,$$

的可数集给出

$D(\mathbf{R}^n)$中的检验函数的一个例子是"冠状函数 (cap)"

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon \exp\left[-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2} \right], & \text{当 } |x| \leqslant \varepsilon \text{ 时}, \\ 0 & \text{当 } |x| > \varepsilon \text{ 时}, \end{cases}$$

$$\int \omega_\varepsilon(x) dx = 1$$

广义函数空间 (space of generalized functions) $D'(O)$是$D(O)$的对偶空间，$D = D(\mathbf{R}^n)$，$D' = D'(\mathbf{R}^n)$ $D'(O)$中广义函数序列的收敛定义为$D'(O)$中泛函的弱收敛 (weak convergence)，也就是说，在$D'(O)$中当$k \to \infty$时$f_k \to 0$是指对一切$\varphi \in D(O)$，当$k \to \infty$时$(f_k, \varphi) \to 0$

为使$D(O)$上的线性泛函f是O中的广义函数，即$f \in D'(O)$，必要充分条件是对任何开集$O' \subset\subset O$，存在数K和m使

$$|(f, \varphi)| \leqslant K \|\varphi\|_{C^m(\overline{O}')}, \ \varphi \in D(O') \qquad (1)$$

如果能选取 (1) 中的整数m与O'无关，那么广义函数f有有限阶 (finite order)，这种m的最小者称为f在O中的阶 (order) 由 (1)，一切广义函数f在任意相对紧集$O' \subset O$中有有限阶

空间$D'(O)$是完全的 如果$D'(O)$中的广义函数序列f_k，$k = 1, 2, \cdot$，使得对任意的$\varphi \in D(O)$，数列(f_k, φ)收敛，那么泛函

$$(f, \varphi) = \lim_{k \to \infty} (f_k, \varphi)$$

属于$D'(O)$

广义函数最简单的例子是O上局部可积函数生成的广义函数

$$\varphi \to (f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx, \ \varphi \in D(O) \qquad (2)$$

由O上局部可积函数f根据 (2) 定义的广义函数称作O上的正则广义函数 (regular generalized function)，其余的广义函数称作奇异的 (singular) 在O上局部可积函数和O上正则广义函数之间存在着一一对应. 在这个意义下，"通常"的函数，即O上局部可积函数是$D'(O)$中的 (正则) 广义函数.

$\mathbf{R}^n$上奇异广义函数的一个例子是Dirac δ函数 (Dirac δ-function)

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \qquad \varphi \in D$$

它描述了集中在点$x = 0$上的单位质量的密度 "帽"$\omega_\varepsilon(x)$ (弱) 逼近于δ函数 当$\varepsilon \to +0$时，在D'中，$\omega_\varepsilon \to \delta$

设$f \in D'(O)$，$\omega_\varepsilon(x)$是"帽"，那么$C^\infty(O_\varepsilon)$中函数

$$f_\varepsilon(x) = (f(y), \omega_\varepsilon(x-y))$$

称作f的正则化 (regularization)，且当$\varepsilon \to +0$时，在$D'(O)$中$f_\varepsilon \to f$ 此外，$D'(O)$中的每个f都是$D(O)$中函数的弱极限 后一条性质有时被作为定义广义函数的出发点，和广义函数空间的完全性定理一起，它导出广义函数的一个等价定义 ([8])

一般说来，广义函数在单个的点上不必有值. 不过也可以讲一个广义函数和一个局部可积函数在一个开集上重合 广义函数$f \in D'(O)$在$O' \subset O$上和O'上局部可积函数f_0重合，如果f在O'上的限制是f_0，即是说，根据 (2)，如果对所有的$\varphi \in D(O')$，

$$(f, \varphi) = \int f_0(x) \varphi(x) dx,$$

那么说$f = f_0(x)$、$x \in O'$ 特别是，当$f_0 \equiv 0$得出广义函数f在O'中消没的定义 O中具有如下性质的点x的集合称为f的支集 (support)，在这些点的任何邻域上f不为0 f的支集记作$\operatorname{supp} f$ (亦见**广义函数的支集** (support of a generalized function)). 如果$\operatorname{supp} f \subset O$且紧，那么$f$称为在$O$中有紧支集 (compact support)

对分段粘合广义函数 (piecewise glueing generalized

function)，如下定理成立 设对每个 $y\in O$，$D'(U_y)$ 中的一个广义函数 f_y 已给定，其中 $U_y\subset\subset O$ 是 y 的邻域，且使得这些元素 f_y 是相容的，即在 $U_{y_1}\cap U_{y_2}\neq\emptyset$ 中 $f_{y_1}=f_{y_2}$，那么存在 $D'(O)$ 中广义函数 f，对一切 $y\in O$，f 和 f_y 在 U_y 中重合

广义函数的例.

1) Dirac δ 函数 $\operatorname{supp}\delta=\{0\}$

2) 由

$$\left[\mathscr{P}\left[\frac{1}{x}\right],\varphi\right]=\mathrm{p\ v}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx,\ \varphi\in D(\mathbf{R}^1)$$

定义的广义函数 $\mathscr{P}(1/x)$ 称作 $1/x$ 的积分的有限部分或主值. $\operatorname{supp}\mathscr{P}(1/x)=\mathbf{R}^1$ 分布 $\mathscr{P}(1/x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上奇异，但在开集 $\mathbf{R}^1\setminus O$ 上正则且和 $1/x$ 重合

3) 曲面 δ 函数. 设 S 是分片光滑曲面，μ 是 S 上连续函数，广义函数 $\mu\delta_S$ 由

$$(\mu\delta_S,\varphi)=\int_S\mu(x)\varphi(x)\,dS_x$$

定义 这里对 $x\overline{\in}S$，$\mu\delta_S(x)=0$，且 $\mu\delta_S$ 是奇异函数 这个广义函数描述了集中在 S 上的质量或电荷的空间密度，其中在 S 上具有曲面密度 μ（**单层密度**（density of a simple layer））

广义函数上的线性运算是作为检验函数上的相应运算的推广而引进的.

变量变换（change of variables） 设 $f\in D'(O)$，$x=Ay+b$ 是从 O 到 O_1 上的线性变换 由

$$((f(Ay+b),\varphi)=\left[f,\ \frac{\varphi[A^{-1}(x-b)]}{|\det A|}\right],$$

$$\varphi\in D(O_1)\quad(3)$$

定义 $D'(O_1)$ 中的广义函数 $f(Ay+b)$ 因为运算 $\varphi(y)\mapsto\varphi[A^{-1}(x-b)]$ 是 $D(O)$ 到 $D(O_1)$ 上的同构，运算 $f(x)\mapsto f(Ay+b)$ 是 $D'(O)$ 到 $D'(O_1)$ 上的同构. 特别是，如果 $A=\lambda I$，$\lambda\neq0$，$b=0$（$x=\lambda y$ 是相似变换，如果 $\lambda<0$，还有一次反射），那么

$$(f(\lambda y),\varphi)=\frac{1}{|\lambda|^n}\left[f,\ \varphi\left[\frac{x}{\lambda}\right]\right],$$

如果 $A=I$（$x=y+b$ 是移位 b），那么

$$(f(y+b),\varphi)=(f,\ \varphi(x-b)).$$

公式(3)使我们可以定义这样一些广义函数，如平移不变的，球对称的，中心对称的，齐次的，周期的，Lorentz 不变的，等等

设函数 $a\in C^1(\mathbf{R}^1)$ 在直线 $\mathbf{R}^1$ 上只有简单零点 x_1，x_2，，那么函数 $\delta(a(x))$ 定义为

$$\delta(a(x))=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta(x-x_k)}{|a'(x_k)|}$$

例. 4) $\delta(-x)=\delta(x)$

5) $(\delta(x-x_0),\varphi)=\varphi(x_0)$

6) $\delta(x^2-a^2)=[\delta(x-a)+\delta(x+a)]/2a,\ a>0$

7) $\delta(\sin x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-k\pi)$

积（product） 设 $f\in D'(O)$，$a\in C^\infty(O)$，积 $af=fa$ 定义为

$$(af,\varphi)=(f,a\varphi),\quad\varphi\in D(O)$$

由此 $af\in D'(O)$，且对通常的可积函数，af 与函数 f 和 a 的通常乘法一致（亦见**广义函数的积**（generalized functions, product of））.

例. 8) $a(x)\delta(x)=a(0)\delta(x)$

9) $x\mathscr{P}(1/x)=1$

但是，不能用这样的方法把积运算推广到任意广义函数使得它是结合的和交换的. 事实上，如果可以作到，那么将得出矛盾

$$(x\delta(x))\mathscr{P}\left[\frac{1}{x}\right]=0\mathscr{P}\left[\frac{1}{x}\right]=0,$$

$$(x\delta(x))\mathscr{P}\left[\frac{1}{x}\right]=(\delta(x)x)\mathscr{P}\left[\frac{1}{x}\right]$$

$$=\delta(x)\left[x\mathscr{P}\left[\frac{1}{x}\right]\right]=\delta(x)$$

对某些广义函数类可以定义这样的积，但可能不唯一确定

微分法（differentiation） 设 $f\in D'(O)$，f 的 $\alpha=(\alpha_1,\ \ ,\alpha_n)$ 阶**广义（弱）导数**（generalized (weak) derivative）

$$D^\alpha f(x)=\frac{\partial^{|\alpha|}f(x)}{\partial X_1^{\alpha_1}\ \ \partial X_n^{\alpha_n}},\ |\alpha|=\alpha_1+\ \ +\alpha_n$$

定义为

$$(D^\alpha f,\varphi)=(-1)^{|\alpha|}(f,D^\alpha\varphi),\ \varphi\in D(O)\qquad(4)$$

因为运算 $\varphi\mapsto(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi$ 从 $D(O)$ 到 $D(O)$ 中线性且连续，由(4)式右端定义的泛函 $D^\alpha f$ 是 $D'(O)$ 中的广义函数. 如果 $f\in C^p(O)$，那么对所有使 $|\alpha|\leqslant p$ 的 α，$D^\alpha f\in C^{p-|\alpha|}(O)$

如下性质成立 $f\mapsto D^\alpha f$ 是从 $D'(O)$ 到 $D'(O)$ 中的线性连续运算，$D'(O)$ 中的任何广义函数(在推广的意义下)无穷次可微，导数与微分的次序无关，当 $a\in C^\infty(O)$ 时，对积 af 的微分 Leibniz 公式成立，微分不扩大支集，$D'(O)$ 中的每一广义函数，在任何开集 $O'\subset\subset O$ 上，是 O' 中连续函数的导数，如果 O 是凸区域，具常系数的微分方程 $Lu=f$，$f\in D'(O)$ 在 $D'(O)$ 中可解，支集为零点的任何 N 阶广义函数可被唯一地表成

$$f(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant N} a_\alpha D^\alpha \delta(x)$$

例．10) $\theta'(x)=\delta(x)$，其中 θ 是 Heaviside 函数 (Heaviside function) (跳跃函数 (jump function))

$$\theta(x)=\begin{cases}1 & 如\ x\geqslant 0,\\ 0 & 如\ x<0\end{cases}$$

11) $(\delta', \varphi)=-\varphi'(o)$，$-\delta'(x)$ 描述在点 $x=0$，矩为 $+1$，沿 x 轴正方向的偶极子的电荷密度．

12) 定向曲面 S 上单层密度的法向导数是 $\delta'(x)$ 的一个推广

$$\left[\frac{\partial}{\partial n}(\mu\delta_S), \varphi\right]=-\int_S \mu\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds_x, \ \varphi\in D$$

广义函数 $-\partial(\mu\delta_S)/\partial n$ 描述了相应于 S 上偶极子分布的空间电荷密度，该曲面具有矩曲面密度 μ，并沿 S 的一给定的法线方向 n 定向 (双层密度 (density of a double layer))

13) 方程 $u'=0$ 在 $D'(\mathbf{R}^1)$ 中的通解是 $u(x)=C$，其中 C 是任意常数．

14) 方程 $xu=0$ 在 $D'(\mathbf{R}^1)$ 中的通解是 $u(x)=C\delta(x)$

15) $x^m\delta^{(k)}(x)=0$, $k=0, 1, \quad, m-1$

16) 三角级数

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}, \ |a_k|\leqslant A(1+|k|)^m,$$

在 D' 中收敛，且在 D' 中可逐项微分无穷多次．

17) $(1/2\pi)\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2k\pi)$

亦见**广义函数的导数** (generalized function, derivative of a)

直积 (direct product)　设 $f\in D'(O_1)$, $g\in D'(O_2)$，它们的直积由公式

$$(f(x)\times g(y), \varphi)=$$
$$=(f(x), (g(y), \varphi)), \ \varphi(x, y)\in D(O_1\times O_2) \quad (5)$$

定义．因为 $\varphi\mapsto(g(y), \varphi(x, y))$ 是从 $D(O_1\times O_2)$ 到 $D(O_1)$ 中的线性、连续运算，由 (5) 定义的泛函 $f(x)\times g(y)$ 是 $D'(O_1\times O_2)$ 中的广义函数．直积是结合的和可交换的运算，且

$$\operatorname{supp}(f\times g)=\operatorname{supp}(f)\times\operatorname{supp}(g)$$

如果 $D'(O_1\times O_2)$ 中的广义函数 $f(x, y)$ 可以表成

$$f(x, y)=f_0(x)\times 1(y), \ f_0\in D'(O_1)$$

的形式，那么它与 y 无关，这时记作 $f(x, y)=f_0(x)$.

例．18) $\delta(x)=\delta(x_1)\times \quad \cdot\times\delta(x_n)$

19) 均匀弦的振动方程 $u_{tt}=u_{xx}$ 在 $D'(\mathbf{R}^2)$ 中的通解由

$$u(x, t)=f(x+t)+g(x-t)$$

给出，其中 f 和 g 是 $D'(\mathbf{R}^1)$ 中的任意广义函数．

卷积 (convolution)　设 f 和 g 是 $D'(\mathbf{R}^n)$ 中具有如下性质的广义函数　它们的直积 $f(x)\times g(y)$ 可延拓到形若 $\varphi(x+y)$ 的函数，其中 φ 在如下意义下跑遍 $D(\mathbf{R}^n)$　对 $D(\mathbf{R}^{2n})$ 中具如下性质的函数列 $\eta_k(x, y)$，

$$|D^\alpha\eta_k(x, y)|\leqslant C_\alpha, \ \eta_k(x, y)\to 1,$$
$$D^\alpha\eta_k(x, y)\to 0, \ |\alpha|\geqslant 1, \ k\to\infty$$

(在任何紧集上)，数列 $(f(x)\times g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x+y))$ 有与序列 $\{\eta_k\}$ 无关的极限，这个极限就称作 f 和 g 的卷积，记作 $f*g$．于是

$$(f*g, \varphi)=\lim_{k\to\infty}(f(x)\times g(y),$$
$$\eta_k(x, y)\varphi(x+y)), \ \varphi\in D(\mathbf{R}^n) \quad (6)$$

从 D' 的完全性推出 $f*g\in D'(\mathbf{R}^n)$．由简单例子可知，并非对所有的 f 和 g 卷积都存在．如果其中一个广义函数有紧支集，卷积必存在．如果卷积在 D' 中存在，那么它可交换，$f*g=g*f$　对卷积的微商如下公式成立

$$f*D^\alpha g=D^\alpha(f*g)=D^\alpha f*g \quad (7)$$

以及

$$f*\delta=\delta*f=f, \quad (8)$$

从而由 (7) 可得

$$D^\alpha f=f*D^\alpha\delta$$

最后

$$\operatorname{supp}(f*g)\subset\overline{\operatorname{supp}(f)+\operatorname{supp}(g)}$$

例

$$(1*\delta')*\theta=1'*\theta=0*\theta=0,$$
$$1*(\delta'*\theta)=1*\theta'=1*\delta=1$$

表明卷积是非结合运算　但是有结合的 (可交换的) 卷积代数存在．根据 (8)，δ 函数是它们中的单位元．例如，D' 中支集在一个闭凸的锐角锥 Γ (其顶点在原点) 中的广义函数组成的集合 $D'(\Gamma)$ 构成卷积代数．记

$$D_+=D'([0, \infty)), \ n=1.$$

D' 中广义函数 $\mathscr{E}$ 称作具有常系数的微分算子 $L(D)$ 的基本解 (fundamental solution) (点源函数 (point-source function))，如果它满足方程

$$L(D)\mathscr{E}(x)=\delta(x)$$

如果 $L(D)$ 的基本解 $\mathscr{E}$ 已知，那么对 D' 中那些使卷积 $f*\mathscr{E}$ 存在的 f，方程 $L(D)u=f$ 的解可以被构造出来，这个解就由 $u=f*\mathscr{E}$ 给出．

例. 20) 分数次微分或积分算子的核$f_\alpha(x)$, $-\infty<\alpha<\infty$

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}\dfrac{\theta(x)x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \alpha>0,\\ f^{(N)}_{\alpha+N}(x), & \alpha+N>0,\ N\text{是整数}.\end{cases}$$

这里$f_\alpha * f_\beta=f_{\alpha+\beta}$, $f_0=\delta$, $f_1=\theta$, $f_{-k}=\delta^{(k)}$, k是整数. 如果$f\in D_+$, $\alpha>0$, 那么$f*f_\alpha=f^{(-\alpha)}$足α阶本原(对$\alpha<0$, $-\alpha$阶导数)

21) $\Delta\mathscr{E}=\delta(x)$,

$$\mathscr{E}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & n=2,\\ -\dfrac{1}{4\pi|x|}, & n=3\end{cases}$$

22) $\mathscr{E}_t-\mathscr{E}_{xx}=\delta(x,t)$,

$$\mathscr{E}(x,t)=\frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4t}$$

23) $\mathscr{E}_{tt}-\mathscr{E}_{xx}=\delta(x,t)$,

$$\mathscr{E}(x,t)=\frac{1}{2}\theta(t-|x|)$$

Fourier **变换** (Fourier transformation). 它是对缓增广义函数类$S'=S'(\mathbf{R}^n)$定义的. 检验函数空间$S=S(\mathbf{R}^n)$由那些$C^\infty(\mathbf{R}^n)$函数组成, 它们以及所有各阶导数在无穷远处都以比$|x|^{-1}$的任何幂次都快的速度递减. S的拓扑由范数

$$\|\varphi\|_p=\sup_{\substack{x\\|\alpha|\leqslant p}}(1+|x|^2)^{p/2}|D^\alpha\varphi(x)|,$$

$$\varphi\in S,\ p=0,1,$$

的可数集给出. 这里$D\subset S$, $S'\subset D'$, 且这些嵌入是连续的 在$\mathbf{R}^n$上局部可积的缓增函数属于S', 且由公式(2)定义S上的正则泛函

S'中的每个广义函数都是某个缓增连续函数的导数, 所以在$\mathbf{R}^n$上有有限阶.

S'中广义函数f的 Fourier **变换** (Fourier transform) $F[f]$由方程

$$(F[f],\varphi)=(f,F[\varphi]),\ \varphi\in S$$

定义, 其中

$$F[\varphi](\xi)=\int\varphi(x)e^{i(\xi\ x)}dx,\ \varphi\in S$$

是经典的 **Fourier 变换** (Fourier transform) 因为运算$\varphi\mapsto F[\varphi]$是$S$到$S$上的同构, 运算$f\mapsto F[f]$是$S'$到$S'$上的同构. F的逆由

$$F^{-1}[f]=\frac{1}{(2\pi)^n}F[f(-\xi)],\quad f\in S'$$

给出.

对$f\in S'$, 以下的基本公式成立:

$$D^\alpha F[f]=F[(ix)^\alpha f],\ x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\ \ x_n^{\alpha_n},$$

$$F[D^\alpha f]=(i\xi)^\alpha F[f],$$

$$F[f*g]=F[f]F[g],$$

如果g有紧支集. 如果广义函数f是周期函数, 其n周期为$T=(T_1,\ \ ,T_n)$, $T_j>0$, 那么$f\in S'$, 且可展成三角级数

$$f(x)=\sum_{|k|=0}^{\infty}c_k(f)e^{i(k\omega\ x)},$$

$$|c_k(f)|\leqslant A(1+|k|)^m,$$

它在S'中收敛到f 这里

$$\omega=\left[\frac{2\pi}{T_1},\ \ ,\frac{2\pi}{T_n}\right],\ k\omega=\left[\frac{2\pi k_1}{T_1},\ \ ,\frac{2\pi k_n}{T_n}\right]$$

例. 24) $F[x^\alpha]=(2\pi)^n(-i)^{|\alpha|}D^\alpha\delta(\xi)$, 特别是, $F[1]=(2\pi)^n\delta(\xi)$

25) $F[D^\alpha\delta]=(-i\xi)^\alpha$, 特别是, $F[\delta]=1$

26) $F[\theta]=i/(\xi+i0)=\pi\delta(\xi)+i\mathscr{P}(1/\xi)$

亦见**广义函数的 Fourier 变换** (Fourier transform of a generalized function)

Laplace **变换** (Laplace transformation) 设广义函数$g\in S'(\Gamma)=S'\cap D'(\Gamma)$, 其中$\Gamma$是闭凸锐角锥 令$C=\operatorname{int}\Gamma^*$, 其中$\Gamma^*=\{y\ (y,\xi)\geqslant 0$ 对所有$\xi\in\Gamma$成立$\}$是Γ的对偶锥. g的 Laplace 变换定义为

$$L[g](z)=F[g(\xi)e^{-(y\ \xi)}](x),\ z=x+iy. \quad (9)$$

映射$g\mapsto L[g]$定义一个从卷积代数$S'(\Gamma)$到代数$H(C)$上的同构, $H(C)$由这样的函数$f(z)$组成, 它们在楔$T^C=\mathbf{R}^n+iC$中全纯且满足以下的增长条件 存在数$\alpha=\alpha(f)\geqslant 0$和$\beta=\beta(f)\geqslant 0$, 使得对任意锥$C'\subset\subset C$(即$\bar{C}'\subset C\cup\{0\}$), 存在数$M_f(C')$使

$$|f(z)|\leqslant M_f(C')\frac{1+|z|^\alpha}{|y|^\beta},\ z\in T^C$$

Laplace 变换L的逆由方程

$$g(\xi)=e^{(y\ \xi)}F_x[f(x+iy)](\xi) \qquad (10)$$

给出, 其中(10)的右端与$y\in C$无关.

由方程(9)和(10)给出的$g(\xi)$和$f(z)$间的一一对应可以方便地由以上的图示表出.

$$g(\xi)\leftrightarrow f(z),$$

其中f称作g的**变换** (transform), g称作f的**谱函数** (spectral function).

当 $y\to 0$, $y\in C$ 时，代数 $H(C)$ 中的每个 $f(z)$ 都在 S' 中有边界值 $f(x+i0)$，根据(9)，由公式 $f(x+i0)=F[g]$ 和 f 的谱函数 g 相联系　对 Laplace 变换以下的基本公式成立

$$(i\xi)^\alpha g(\xi) \leftrightarrow D^\alpha f(z),$$

$$D^\alpha g(\xi) \leftrightarrow (-iz)^\alpha f(z),$$

$$g_1 * g_2 \leftrightarrow L[g_1]L[g_2](z),\ g_1,\ g_2\in S'(\Gamma)$$

例　27) $f_\alpha(t) \leftrightarrow (-iz)^\alpha$，特别

$$\delta^{(k)}(t) \leftrightarrow (-iz)^k,\ \theta(t) \leftrightarrow \frac{i}{z}$$

参考文献

[1] Dirac, P A M, The principles of quantum mechanics, Charendon Press, 1947

[2] Соболев, С Л, 《Матем сб》, **1** (1936), 39-72

[3] Schwartz, L, Théorie des distributions, 1-2, Hermann, 1950-1951

[4] Боголюбов, Н Н, Логунов, А А, Тодоров, И Т, Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М, 1969 (英译本 Bogolyubov, N N, Logunov, A A and Todorov, I T, Introduction to axiomatic quantum field theory, Benjamin, 1975)

[5] Гельфанд, И М, Шилов, Г Е, Обобщенные функции, в 1-3, М, 1958 (中译本 И М 盖尔芳特， Г. Е. 希洛夫，广义函数，Ⅰ-Ⅲ，科学出版社，1965-1985))

[6] Владимиров, В С, Уравнения математической физики, 4 изд, М, 1981 (英译本 Vladimirov, V S, Equations of mathematical physics, Mir, 1984)

[7] Владимиров, В С, Обобщенные функции в математической физике, 2 изд, М, 1979 (英译本 Vladimirov, V S, Generalized functions in mathematical physics, Mir, 1979)

[8] Antosik, P, Mikusiński, J and Sikorski, R, Theory of distributions The sequential approach, Elsevier, 1973

В С Владимиров 撰

【补注】 记号 $O'\subset\subset O$ 意指闭包 $\bar{O}'$ 含于 O 中．通常一个函数(或分布)的支集定义为使函数值不为零的那些点构成的集合的闭包．

参考文献

[A1] Yosida, K, Functional analysis, Springer, 1980 (中译本 吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1980)

[A2] Jones, D S, The theory of generalized functions, Cambridge Univ Press, 1982

[A3] Rudin, W, Functional analysis, McGraw-Hill, 1974

[A4] Hormander, L V, The analysis of linear partial differential operators, 1, Springer, 1983

余庆余 译

广义函数的导数 [generalized function, derivative of a, обобщенной функции производная]

通常**微分法** (differentiation) 运算的弱推广．设 f 是**广义函数** (generalized function)，$f\in D'(O)$　$\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ 阶的广义(弱)导数

$$D^\alpha f=\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},\ |\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$$

由方程

$$(D^\alpha f, \varphi)=(-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\varphi),\ \varphi\in D(O) \quad (*)$$

定义．因为运算 $\varphi\mapsto(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi$ 从 $D(O)$ 到 $D(O)$ 线性且连续，由(*)右端定义的泛函 $D^\alpha f$ 是 $D'(O)$ 中的广义函数．如果 $f\in C^p(O)$，那么对所有使 $|\alpha|\leqslant p$ 的 α，$D^\alpha f\in C^{p-|\alpha|}(O)$

对广义函数的导数有如下性质成立　运算 $f\mapsto D^\alpha f$ 从 $D'(O)$ 到 $D'(O)$ 线性且连续，$D'(O)$ 中的任一广义函数无穷次可微(在推广的意义下)，微分结果与次序无关，当 $a\in C^\infty(O)$ 时，对乘积 af 的微分，**Leibniz 公式** (Leibniz formula) 成立，$\operatorname{supp} D^\alpha f\subset \operatorname{supp} f$

设 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(O)$，可能广义导数恒同于某个 $L^1_{\mathrm{loc}}(O)$ 函数．在这种情形 $D^\alpha f(x)$ 是函数型的**广义导数** (generalized derivative)

例　1) $\theta'=\delta$，其中 θ 是 Heaviside 函数，δ 是 Dirac 函数(两者均见 **δ 函数** (delta-function))

2) 方程 $u'=0$ 在类 D' 中的通解是任意常数．

3) **三角级数** (trigonometric series)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx},\ |a_k|\leqslant A(1+|k|)^m$$

在 D' 中收敛，且在 D' 中可逐项微分无穷多次．

参考文献

[1] Schwartz, L, Théorie des distributions, 1, Hermann, 1950

[2] Соболев, С Л, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб, 1962 (中译本 С Л 索伯列夫，泛函分析在数学物理中的应用，科学出版社，1959)

В С Владимиров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Yosida, K, Functional analysis, Springer, 1980 (中译本 吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1980)

[A2] Hormander, L, The analysis of linear partial differential operators, 1, Springer, 1983

余庆余 译

广义函数的积 [generalized functions, product of, обобщенных функций произведение]

$D'(O)$ 中的**广义函数** (generalized function) f 和

函数 $a\in C^{\infty}(O)$ 的积, $af=fa$ 由方程

$$(af,\varphi)=(f,a\varphi),\ \varphi\in D(O)$$

定义，这里 $af\in D'(O)$，对 $L^1_{loc}(O)$ 中（通常的）函数 f 来说，积 af 与函数 f 和 a 通常的乘积相同.

例 1) $a(x)\delta(x)=a(0)\delta(x)$, 2) $x\mathscr{P}(1/x)=1$

但是，不能用这种办法把积运算推广到任意的两个广义函数并使其满足结合律和交换律，否则将有矛盾

$$(x\delta(x))\mathscr{P}\left[\frac{1}{x}\right]=O\mathscr{P}\left[\frac{1}{x}\right]=0,$$

$$(x\delta(x))\mathscr{P}\left[\frac{1}{x}\right]=(\delta(x)x)\mathscr{P}\left[\frac{1}{x}\right]=$$

$$=\delta(x)\left[x\mathscr{P}\left[\frac{1}{x}\right]\right]=\delta(x)$$

为定义两个广义函数 f 和 g 的积，粗糙地说，只需它们具有如下性质 在任何点的邻域中 f 的"非正则性"应被 g 的相应的"正则性"所补偿，反之亦然．例如

$$\operatorname{sing\,supp} f\cap\operatorname{sing\,supp} g=\phi$$

（见**广义函数的支集**（support of a generalized function）） 在广义函数的某些类中可以定义乘积，但是它可能不唯一确定．

例．3) 全纯函数 $H(C)$ （一频率广义函数）的代数的边值:

$$f(x+i0)g(x+i0)=\lim_{\substack{y\to 0\\ y\in C}}f(x+iy)\,g(x+iy),$$

在 S' 中.

它们构成具单位元的结合和交换代数（[2]）

4) $\delta^2(x)=c\delta(x)$，其中 c 是任意常数．事实上，

$$\delta_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}\to\delta(x),\ \varepsilon\downarrow 0,\ \text{在}\ D'\ \text{中}.$$

但是对于使 $\varphi(0)=0$ 的检验函数 φ

$$(\delta_\varepsilon^2,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon^2}{\pi^2(x^2+q^2)^2}\varphi(x)dx\to 0,\ \ \varepsilon\downarrow 0$$

因此，如果 $\varphi\in D$, $\varphi(0)=0$，令 $(\delta^2,\varphi)=0$ 是自然的．把这个泛函延拓到 D 中所有的检验函数 φ 就得到 4)

5) 积 $\theta(x)/x$ 的定义．函数 $\theta(x)/x$ 不属于 $L^1_{loc}(\mathbf{R}^1)$，但是它定义一个正则广义函数 当 $x<0$ 时为 D' 中的 0，当 $x>0$ 时为 D' 中的 $1/x$．它们可以一致地延拓成 D' 中的广义函数，例如由取发散积分的 Hadamard 有限部分（使其重正规化（renormalizing））

$$\left[\left[\frac{\theta(x)}{x}\right]_M,\varphi\right]=\int_0^M\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx+$$

$$+\int_M^\infty\frac{\varphi(x)}{x}dx,\ \varphi\in D,$$

来实现．广义函数 $(\theta(x)/x)_M$（$\theta(x)/x$ 的重正规化泛函）依赖于任意参数 $M>0$ 重正规化中的任意性是这样的

$$\left[\frac{\theta(x)}{x}\right]_M-\left[\frac{\theta(x)}{x}\right]_{M_1}=\ln\frac{M_1}{M}\delta(x)$$

这些想法导致**量子场论**（quantum field theory）中的 Feynman 振幅的重正规化过程 重正规化常数（例如，质量和电荷）作为任意常数出现，就像这里的 $\ln(M_1/M)$ 广义函数的积最一般的定义是用**波前集**（wave front）这一术语给出的

参考文献

[1] Schwartz, L, Théorie des distributions, 1－2, Herman, 1950－1951

[2] Владимиров, В С, Обобщенные функции в математической физике, М, 1976（英译本 Vladimirov, V S, Generalized functions in mathematical physics, Mir, 1979）

[3] Боголюбов, Н Н, Парасюк, О С,《Acta Math》, **97**（1957）, 227－266

[4] Hepp, K, Théorie de la renormalization, Springer, 1969

В С Владимиров 撰

【补注】 对广义函数和乘积定义的其他探讨可见[A3]

一般说来，除非对某个 (x,ξ)，$(x,\xi)\in\mathrm{WF}(f)$ 和 $(x,-\xi)\in\mathrm{WF}(g)$（$\mathrm{WF}(f)$ 表示 f 的**波前集**（wave front set）），两个广义函数 $f,g\in D'(O)$ 的积可以被定义．亦见[A4]，第 8 章

参考文献

[A1] Colombeau, J F, New generalized functions and multiplication of distributions, North-Holland, 1984

[A2] Keller, K, Analytic regularizations, finite part prescriptions and products of distributions, *Math Ann* **236**（1978）, 49－84

[A3] Koornwinder, T H and Looder, J J, Generalized functions, in P L Butzer, R L Stens and B Sz-Nagy（eds） *An aniversary volume on approximation theory and functional analysis*, Birkhauser, 1984, 151－164

[A4] Hormander, L, The analysis of linear partial differential operators, 1, Springer, 1983

余庆余 译

广义函数空间 [**generalized functions, space of; обобщенных функций пространство**]，分布空间（distribution space）

（充分好的）检验函数空间（space of test functions）的对偶空间．**Fréchet 空间**（Fréchet space）（FS 型）和强对偶于它们的空间（DFS 型）在这里起着

重要的作用. FS型空间是Banach空间的直接集的投射极限，它的对偶空间是DFS型空间 DFS型空间是Banach空间的直接集的归纳极限，它的对偶空间是FS型空间. FS型和DFS型空间都是完全、可分、自反和Montel的. 在FS型和DFS型空间中，弱收敛和强收敛一致.

检验函数和广义函数空间的例.

1) 空间S和S'（急减（rapidly-decreasing））检验函数空间$S=S(\mathbf{R}^n)$由那些$C^\infty(\mathbf{R}^n)$函数组成，它和它的各阶导数在无穷远处递降速度快于$|x|^{-1}$的任意幂次. 这个空间是Banach空间序列S_p（$p=0, 1,$ ）的投射极限，S_p由$C^p(\mathbf{R}^n)$函数组成，范数为

$$\varphi \to \|\varphi\|_p = \sup_{|\alpha| \leq p} (1+|x|^2)^{p/2} |D^\alpha \varphi(x)|,$$

且包含$S_{p+1} \subset S_p$是紧的，S是FS型的. 对偶空间$S' = S'(\mathbf{R}^n)$（缓增（slow growth）广义函数空间）是Banach空间列S_p'的归纳极限，其中嵌入$S_p \subset S_{p+1}$是紧的，故S'是DFS型的 如果一个广义函数序列在S'中弱收敛，那么在某个空间S_p中，它依泛函的范数收敛. Fourier变换是空间S和空间S'上的同构.

2) 空间$D(O)$和$D'(O)$（O是$\mathbf{R}^n$中开集）. 由在O中有紧支集（见**广义函数的支集**（support of a generalized function））的$C^\infty(O)$函数组成的检验函数空间，它被赋予FS型空间（递增）序列$C_0^\infty(\overline{O}_k)$（$k=1, 2,$ ）的强归纳极限拓扑，其中$\{O_k\}$是严格递增开集序列，该序列穷尽O，$O_k \subset\subset O_{k+1}$，$\overline{O}_k$紧，$\bigcup_k O_k = O$ 空间$C_0^\infty(\overline{O}_k)$是Banach空间（递减）序列$C_0^p(\overline{O}_k)$（$p=0, 1,$ ）的投射极限，$C_0^p(\overline{O}_k)$由支集在$\overline{O}_k$中的$C^p(\mathbf{R}^n)$函数组成，其范数为

$$\varphi \to \|\varphi\|_p = \max_{\substack{|\alpha| \leq p \\ x}} |D^\alpha \varphi(x)|,$$

其中嵌入$C_0^{p+1}(\overline{O}_k) \subset C_0^p(\overline{O}_k)$是紧的. 令$D'(O)$是（强）对偶于$D(O)$的空间，$D=D(\mathbf{R}^n)$，$D'=D'(\mathbf{R}^n)$ $D(O)$中的检验函数序列在$D(O)$中收敛，如果它在某个空间$C_0^\infty(\overline{O}_k)$中收敛. $D'(O)$中广义函数序列在$D'(O)$中收敛，如果它在$D(O)$的每个元素上收敛（弱收敛）. $D(O)$上的线性泛函是$D'(O)$中的广义函数的必要充分条件是对任意开集$O' \subset\subset O$，存在数K和m使

$$|(f, \varphi)| \leq K \|\varphi\|_m, \ \varphi \in D(O')$$

空间$D'(O)$是（弱）完全的· 如果广义函数序列$f_k \in D'(O)$，$k=1, 2, \cdot$，使得对$D(O)$中的任意φ，数列(f_k, φ)收敛，那么泛函

$$(f, \varphi) = \lim_{k \to \infty} (f_k, \varphi)$$

属于$D'(O)$ $D'(O)$中的广义函数在边界∂O的邻域中有无限制的"增长"，特别是，任何一个函数$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(O)$由公式

$$\varphi \to (f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx, \ \varphi \in D(O)$$

决定$D'(O)$中的一个广义函数

3) 空间Φ和Φ' 令Φ_ρ是所有在管状邻域$|y| < \rho$, $x \in \mathbf{R}^n$中全纯的函数$\varphi(z)$组成的Banach空间，$z = x + iy$，其范数为

$$\varphi \to \|\varphi\|_\rho'' = \sup_{\substack{|y| < \rho, \\ x \in \mathbf{R}^n}} e^{\rho|x|} |\varphi(x+iy)|;$$

当$\rho > \rho'$嵌入$\Phi_\rho \subset \Phi_{\rho'}$是紧的. 令$\Phi$是（递增）空间序列$\Phi_{1/n}$（$n \to \infty$）的归纳极限. 空间$\Phi$是DFS型的，它的对偶$\Phi'$是FS型. Φ的元素是Fourier超函数（Fourier hyperfunction），Φ'和空间S_1^1同构

参考文献

[1] Schwartz, L, Théorie des distributions, 1－2, Hermann, 1950－1951

[2] Bourbaki, N, Elements of mathematics Topological vector spaces, Addison-Wesley, 1977 （译自法文）

[3] Dieudonne, J and Schwartz, L, La dualité dans les espaces ($\mathscr{F}$) et ($\mathscr{L}\mathscr{F}$)', *Ann Inst Fourier*, **1**(1949), 61－101

[4] Grothendieck, A, Sur les espaces (F) et (DF), *Summa Brasil Math*, 3 (1954), 6, 57－123

[5] Гельфанд И М, Шилов, Г Е, Пространства основных и обобщенных функций, М, 1958 （中译本 И М 盖尔芳特, Г Е 希洛夫, 广义函数 II, 基本函数和广义函数的空间, 科学出版社, 1985）

[6] Yoshinaga, K, On a locally convex space introduced by J S E Silva, *J Sci Hiroshima Univ Ser A*, **21** (1957), 89－98

[7] Kawai, T, On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, *J Fac Sci Univ Tokyo Sect 1A Math* (1970), 467－517

[8] Владимиров, В С, Обобщеные функции в математической физике, 2 изд, М, 1979

В С Владимиров 撰

【补注】 关于分布空间的泛函分析性质可见[A1] 关于在某些给定的积分变换下不变的广义函数空间可见[A2], [A3], [A4]. 满足这种不变性要求的检验空间和广义函数空间可从一个可分**Hilbert空间**（Hilbert space）X以及X上的无界**自伴算子**（self-adjoint operator）A构造出来. 检验空间（＝解析空间（analyticity space））由$S_{X,A} = \bigcup_{t>0} e^{-tA}(X)$定义. 分布空间$T_{X,A}$（＝轨道空间（trajectory space））由具有如下性质的映射$F:(0, \infty) \to X$组成 对所有$t, \tau > 0$, $F(t+\tau) = e^{-tA} F(\tau)$ 对偶对是$\langle F, \varphi \rangle = (F(\varepsilon), e^{\varepsilon A} \varphi)_X$,

其中 ε 是依赖于 $\varphi \in S_{X\ A}$ 的充分小的数.

以上两类空间都是 Hilbert 空间的归纳和投射极限 很多 Гельфанд-Шилов 空间属于这一类型

关于经典的例子，这些空间的拓扑性质和其上的算子代数可见[A3]，[A4]

参考文献

[A1] Treves, F, Topological vector spaces, distributions and kernels, Acad Press, 1967

[A2] Zemanian, A H, Generalized integral transformations, Interscience, 1968

[A3] Bruijn, N G de, A theory of generalized functions with applications to Wigner distribution and Weyl correspondence, *Niew Archief for Wiskunde* (3), **21** (1973), 205 – 280

[A4] Eijndhoven, S J, L van and Graaf, J de, Trajectory spaces, generalized functions and unbounded operators, *Lecture notes in math*, 1162, Springer. 1985

[A5] Antosik P, Mikusiński, J and Sikorski, R, Theory of distributions The sequential approach Elsevier, 1973

[A6] Kothe, G, Topological vector spaces, 1, Springer, 1969

[A7] Horvath, J, Topological vector spaces and distributions, Addison-Wesley, 1966

[A8] Rudin, W, Functional analysis, McGraw-Hill, 1974

【译注】 这里的 FS 型空间是 Frechet 空间中特定的一类.

余庆余 译

广义群 [generalized group, обобщенная группа]

同逆半群 (inversion semi-group).

广义幂零群 [generalized nilpotent group, обобщенно нильпотентная группа]

在群的一个广义幂零类中的群. 一个群类称为广义幂零的，如果它包含所有**幂零群** (nilpotent group)，并且它与有限群类的交就是一切有限幂零群所成的类. 很多广义幂零群类已被研究，主要是研究了它们之间的联系. 最重要的广义幂零群类是**局部幂零群** (locally nilpotent group) 类，**诣零群** (nil group) 类，**Engel 群** (Engel group) 类以及具有正规化子条件的群类. 大多数广义幂零群类是在研究中心列或正规列的各种性质以及子群系时被引入的 (见[1], [2])

参考文献

[1] Курош А Г, Теория групп, 3 изд, М, 1967 (中译本 А Г 库洛什, 群论, 高等教育出版社, 上册, 1987, 下册, 1982)

[2] Курош, А Г, Черников, С Н, 《Успехи матем наук》, **2** (1947), 3, 18–59

А Л Шмелькин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Robinson, D J S, Finiteness conditions and generalized soluble groups, Springer, 1972

[A2] Robinson, D J S, A course in the theory of groups, Springer, 1980

郝钢新 译

广义序列 [generalized sequence, направленность], 网 (net)

把一个**有向集** (directed set) A 映入一个 (拓扑) 空间 X 的映射，即是一个对应关系，使得对于每个 $\alpha \in A$ 都有一个 $x_\alpha \in X$ 与之相应 拓扑空间 X 中的广义序列 $\{x_\alpha\ \ \alpha \in A, \leqslant\}$ 在 X 中收敛于点 $x \in X$ (有时附上 "关于**有向序** (directed order) $\leqslant$")，如果对 x 的每个邻域 O_x，存在 $\beta \in A$，使得当 $\beta \leqslant \alpha \in A$ 时 $x_\alpha \in O_x$ 这就是 Moore-Smith 收敛 (Moore-Smith convergence) 的概念 ([3]) (较之基于**滤子** (filter) 概念的收敛，这种收敛性似乎更符合直观的思维) 广义序列可以用来刻画**分离公理** (separation axiom)，各种**紧性** (compactness) 性以及诸如**紧化** (compactification) 的种种构造.

通常的序列是广义序列的特殊情形，这时 A 是自然数集.

参考文献

[1] Kelley, J L, General topology, v Nostrand, 1955 (中译本 J L 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982)

[2] Reid, M and Simon, B, Methods of modern mathematical physics, 1, Functional analysis, Acad Press, 1972

[3] Moore, E H and Smith, H L, A general theory of limits, *Amer J Math*, **44** (1922), 102 – 121

В И Пономарев 撰

【补注】 "广义序列"的说法在西方几乎不用，通常使用的术语是"网" (net) (**有向集** (directed set)) 应该指出，序列并不总是足以刻画上述种种拓扑性质，在这种意义下网的概念是必不可少的

胡师度、白苏华 译

广义解 [generalized solution, обобщенное решение]

微分 (伪微分) 方程古典解概念的一种推广. 数学物理中的许多问题导致此概念的产生，在这些问题中要求把非足够次可微的函数，甚至无处可微的函数，以及更一般的对象诸如广义函数、超函数等等看作为微分方程的解. 这样，广义解的概念即与**广义导数** (generalized derivative) 和**广义函数** (generalized function) 的概念紧密相关. 广义解的概念可追溯到 L Euler ([9]).

微分方程

$$L(x, D)(u) \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha u(x) = f(x), \quad (1)$$

$$f \in D'(O),\ a_\alpha \in C^\infty(O),$$

在类 $D'(O)$ 中的一个广义解（generalized solution）是在 O 中满足方程（1）的 $D'(O)$ 中的任一广义函数 u，即对于任意检验函数 $\varphi \in D(O)$，等式 $(u, L^*\varphi) = (f, \varphi)$ 成立，其中 L^* 是 Lagrange 意义下 L 的伴随算子.

$$L^*\varphi = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi)$$

微分方程边值问题的广义解必须在某种适当的广义下（在 $L_p(\partial O)$ 或 $D'(\partial O)$ 中，等等）满足边界条件，例如，当 $r \to 1-0$ 时，在 $L_2(|s|=1)$ 中 $u(rs) \to u(s)$，或者，当 $t \to +0$ 时，在 D' 中 $u(x, t) \to u_0(x)$

对于微分方程的边值问题，在用变分方法求解时，在应用差分方法时，以及在应用 **Fourier 法**（Fourier method）、**极限吸收原理**（limit absorption principle）**极限振幅原理**（limiting-amplitude principle）、拟粘性法等等作为古典解的弱极限时产生了广义解

例. 1）方程 $x^2 u' = 0$ 在 $D'(\mathbf{R})$ 类中的通解由

$$u(x) = C_1 + C_2\theta(x) + C_3\delta(x)$$

给出，其中 θ 是 Heaviside 函数 $x \geq 0$ 时，$\theta(x) = 1$，$x < 0$ 时，$\theta(x) = 0$，δ 是 Dirac **delta 函数**（delta-function），此外，在这里以及下文中的 $C_1, C_2,$ 是任意常数.

2）方程 $x^2 u' + u = 0$ 在 $C^\infty(\mathbf{R})$ 类中只有一个解，即 $\theta(-x)e^{1/x}$，而在超函数类中，它的通解由公式 $u(x) = C_4 e^{1/(x-i0)} + C_5 e^{1/(x+i0)} + C_6\theta(-x)e^{1/x}$ 给出

3）波动方程 $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ 在 $C(\mathbf{R}^2)$ 类中的通解由公式 $u(x, t) = f(x+at) + g(x-at)$ 给出，这里 f 和 g 是 $C(\mathbf{R})$ 类中的任意函数

4）**Laplace 方程**（Laplace equation）$\Delta u = 0$ 在 $D'(O)$ 类中的每个解 u 在 O 中是（实）解析的

5）**热传导方程**（heat equation）$u_t = a^2 \Delta u$ 在 D' 中的每个解 u 是无穷次可微的

6）每个具有常系数的微分算子 $L \not\equiv 0$ 都有 S' 类的（缓增）**基本解**（fundamental solution）

7）令 $L(D) \not\equiv 0$ 是任一常系数微分算子. 如果 O 是一个有界区域，那么对于 $L_2(O)$ 中任意的 f，方程 $L(D)u = f$ 有广义解 u 在 $L_2(O)$ 中

8）边值问题

$$\Delta u = f,\ u|_{\partial O} = 0,\ f \in L_2(O) \qquad (2)$$

在 Соболев 类 $W_2^{(1)}(O)$ 中的广义解 u 作为求二次泛函

$$J(u) = \int_O \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + 2uf \right) dx$$

在 $W_2^{(1)}(O)$ 类中的极小的经典变分问题的解而得到对于 $L_2(O)$ 中任意的 f，这个变分问题的解在 $W_2^{(1)}(O)$ 类中存在并唯一 这样，对于所有的 $f \in L_2(O)$，边值问题（2）的广义解给出了算子 Δ 的一个自伴扩张（刚扩张，或 Friedrichs 扩张） 边值问题（2）的广义解及其所有一阶导数在 O 中是正则的（即，是 O 中的局部可积函数），一般而言，它的二阶导数是奇异广义函数

参考文献

[1] Соболев, С Л ,《Матем сб》, **1** (1936), 1, 39－72

[2] Соболев, С Л , Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб , 1962（中译本 С Л 索伯列夫，泛函分析在数学物理中的应用，科学出版社，1959）

[3] Schwartz, L , Théorie des distributions, 1－2, Hermann, 1950－1951

[4] Гельфанд, И М , Шилов, Г Е , Некоторые вопросы дифференциальных уравнений, М , 1958

[5] Hormander, L , The analysis of linear partial differential operators, 1－4, Springer, 1983－1985

[6] Komatsu, H , (ed.), Hyperfunctions and pseudo－differential equations, Lecture notes in math , 287, Springer, 1973

[7] Владимиров, В С , Уравнения математической физики, 4, изд , М , 1981（英译本 Vladimirov, V S Equations of mathematical physics, M Dekker, 1971）

[8] Владимиров, В С , Обобщенные функции в математической физике, М , 2 изд , 1979（英译本 Vladimirov, V S , Generalized functions in mathematical physics, Mir, 1979）

[9] Euler, L , Institutionum calculi integralis, in Opera Omnia, series prima, opera math , Vol 11－13, Teubner, 1913－1914

В С Владимиров 撰

【补注】 当解属于 $D'(O)$ 时边界值和边界条件的概念的推广需要特别的说明，例如，见 L. Hormander, The analysis of linear partial differential operators，第 3 卷，附录 B 中的讨论

有关（拟）粘性法，亦见**粘性解**（viscosity solutions）

陆柱家 译

广义可解群 [generalized solvable group, обобщенно разрешимая группа]

在群的一个广义可解类中的群. 一个群类称为广义可解的，如果它包含所有**可解群**（solvable group），并且它与有限群类的交就是一切有限可解群所成的类. 很多广义可解群类已被研究；主要是研究了它们之间的联系 最重要的广义可解群类是**局部可解群**（locally solvable group）类 其他的类是在研究正规

列和次正规列时被引入的(见 [1], [2])

参考文献

[1] Курош, А Г, Теория групп, 3 изд, М, 1967 (中译本 А Г 库洛什, 群论, 高等教育出版社, 上册, 1987, 下册, 1982)

[2] Курош, А Г, Черников, С Н, 《Успехи матем наук》, 2 (1947), 3, 18－59

А Л Шмелькин 撰 郝钢新 译

生成函数 [**generating function** 或 generatrix, **производящая функция** 或 генератриса], 亦称母函数

数列或函数序列 $\{a_n(x)\}$ 的生成函数是幂级数的和

$$F(x, w)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) w^n,$$

它的收敛半径是正的. 如果生成函数为已知, 则解析函数的 Taylor 系数的性质可用来研究序列 $\{a_n(x)\}$ 在某些条件下, 对于在某个区间 (a, b) 上与权函数 $h(x)$ 正交的多项式 $\{P_n(x)\}$, 存在生成函数

$$F(x, w)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) w^n, \ x \in (a, b)$$

对于**经典正交多项式** (classical orthogonal polynomials), 生成函数可以用权函数 $h(x)$ 显式表示, 它用于计算这些多项式在个别点上的数值, 还用于导出这些多项式与其导数之间的一些恒等关系式

在概率论中, 一个以概率 $\{p_\xi(n)\}$ 取整数值 $\{n\}_0^{\infty}$ 的**随机变量** (random variable) ξ 的生成函数定义为

$$F(\xi, z)=\sum_{n=0}^{\infty} p_\xi(n) z^n, \ |z| \leqslant 1$$

利用生成函数可以计算 ξ 的概率分布, 它的数学期望和方差是

$$p_\xi(n)=\frac{1}{n!} F^{(n)}(\xi, 0), \ \mathrm{E}\xi=F'(\xi, 1),$$

$$\mathrm{D}\xi=F''(\xi, 1)+F'(\xi, 1)-[F'(\xi, 1)]^2$$

随机变量 ξ 的生成函数也可定义为随机变量 z^ξ 的数学期望, 即 $F(z, \xi)=\mathrm{E} z^\xi$

参考文献

[1] Szego, G, Orthogonal polynomials, Amer Math Soc, 1975

[2] Суетин, П К, Классические ортогональные многочлены 2 изд, М, 1979

[3] Feller, W, An introduction to probability theory and its applications, 1－2, Wiley, 1957－1971 (中译本 W 费勒著, 概率论及其应用, 1979)

П К Суетин 撰

【补注】 在形式幂级数意义下的生成函数也时常使用

生成函数的其他常用形式有指数生成函数 (exponential generating function)

$$F(x, w)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x) w^n}{n!}$$

以及(形式) **Dirichlet 级数** (Dirichlet series)

$$F(x, s)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{n^s}$$

通常可以证明对这些生成函数作运算而不考虑其收敛性是正确的 钟集译 李乔校

范畴的生成对象 [**generating object of a category**, **образующий объект категории**]

见范畴的生成元 (generator of a category).

半群的生成算子 [**generating operator of a semi-group**, **производящий оператор полугруппы**]

一个作用于复 Banach 空间 X 上的线性**算子半群** (semi-groups of operators) $T(t)$ $(0<t<\infty)$ 在零点的导数 如果 $T(t)$ 按算子范数连续, 那么它具有形式 $T(t)=e^{tA_0}$, 其中 A_0 是有界算子,

$$\lim_{t \to 0} \frac{T(t)x-x}{t}=A_0 x \qquad (1)$$

对于任何 $x \in X$ 成立, 且 A_0 为这个半群的生成算子. 反之, 如果左端的极限对所有 $x \in X$ 存在, 那么 $T(t)=e^{tA_0}$

当 $T(t)$ 仅仅是**强连续半群** (strongly-continuous semi-group) 时, 将出现更复杂的情形. 在这种情形下, 极限 (1) 未必对每个 x 都存在. 定义于使极限存在的所有 x 的线性集 $D(A_0)$ 上的算子 A_0 是线性而无界的, 且称为无穷小算子 (infinitesimal operator) 特别地, A_0 于所有形如 $\int_\alpha^\beta T(t) y dt$ 的元素上有定义, $\alpha, \beta>0$, $y \in X$ 如果 X_0 表示一切 $T(t)$ $(t>0)$ 的值域之并的闭包, 那么 $D(A_0)$ 在 X_0 中稠密, 并且 $\bigcap_n D(A_0^n)$ 也在 X_0 中稠密 A_0 的值也位于 X_0 中 如果 A_0 是一个无界算子, 那么 $D(A_0)$ 是 X_0 中第一范畴集

如果 X_0 不含使得 $T(t)x \equiv 0$ 的元素 x, 那么 A_0 有闭包 $A=\overline{A_0}$, 它也称为半群 $T(t)$ 的生成算子 (generating operator) 在这种情形下, 对于 $x \in D(A)$,

$$T(t)x-T(s)x=\int_s^t T(\tau) A x d\tau, \qquad (2)$$

$$\frac{dT(t)x}{dt}=A_0 T(t)x=T(t)Ax$$

这些方程定义了一个算子 A, 一般而言, 它是 A_0 的

闭包的一个扩张 它亦称为 $T(t)$ 的广义生成算子(generalized generating operator)

在使反常积分

$$\int_0^t T(s)xds \qquad (3)$$

收敛的所有 $x\in X$ 的集合 D_R 上，对于 $\mathrm{Re}\lambda>\omega$，我们定义算子

$$R(\lambda)x=\lim_{t\to 0}\int_t^{\infty} e^{-\lambda s}T(s)xds,$$

其中 ω 是半群 $T(t)$ 的型．这个算子具有下列性质

1) $R(\lambda)D_R\subset D_R$,

2) $R(\lambda)x-R(\mu)x=(\mu-\lambda)R(\lambda)R(\mu)x$,

3) $R(\lambda)(\lambda I-A_0)x=x,\ x\in D(A_0)$,

4) $(\lambda I-A)R(\lambda)x=x,\ x\in D_R\cap X_0$

如果积分(3)对任何 $x\in X$ 绝对收敛，那么当且仅当 $T(t)x\equiv 0\ (x\in X)$ 蕴含 $x=0$ 时，生成算子 A 存在，算子 $R(\lambda)$ 有界，而且如果 $X=X_0$，那么它与 A 的**预解式**(resolvent)一致 A_0 为闭(即 $A=A_0$)的充分必要条件是，对所有 $x\in X_0$，

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds=x$$

在算子半群的理论中，基本问题是建立起算子半群的性质与它的生成算子的性质之间的关系，后者通常是借助于 $R(\lambda)$ 来表示的

参考文献

[1] Hille, E and Phillips, R , Functional analysis and semi-groups, Amer Math Soc , 1957

[2] Забрейко, П П , Зафиевский, А В , 《Докл АН СССР》, **189**(1969), 5, 934 - 937

[3] Забрейко, П П , Зафиевский, А В , 《Докл АН СССР》, **195**(1970), 1, 24 - 27

С Г Крейн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Крейн, С Г , Линейные дифференциальные операторы в банаховом пространстве М , 《Наука》, 1971 (英译本 Krein, S G Linear differential equations in Banach space, Amer Math Soc , 1971)

[A2] Pazy, A , Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer, 1983

王声望 译 郑维行 校

范畴的生成元 [generator of a category, образующий элемент категорий]，生成对象(generating object)

【补注】 范畴 $\mathfrak{C}$ 中的一个对象，使其相应的表示函子 $\mathfrak{C}\to\mathrm{Set}$ 在一种适当的意义下"捡出这个范畴的对象间的差异"．在普通用法中，这个概念有两个准确的定式 第一，一个对象 G 称为一个生成元(有时称为强生成元(strong generator)或正常生成元(proper generator))，如果对于 $\mathfrak{C}$ 中给定的一个不可逆的单射 $m\ A'\to A$，存在一个 $h\ G\to A$，它不能通过 m 来分解成因式之积 第二，G 称为一个生成元，如果对于一对态射 $f,g\ A\rightrightarrows B$，$f\neq g$，存在一个 $h\ G\to A$ 使 $fh\neq gh$，有些作者称具有这种性质的对象为分离子(separator)．

在任何具有等化子的范畴中，第一种意义下的生成元也就是第二种意义下的生成元．如果范畴是平衡的(balanced)(即具有这样的性质，一个态射若既是单的又是满的，就必须是一个同构)，其逆也真，但一般并不如此 例如，在拓扑空间的范畴中，只有一个点的空间是第二种意义下的生成元，但不是第一种意义下的生成元 在集合的范畴中，一个单元集合(或甚至于任何非空集合)在两种意义下都是生成元，在一个泛代数簇中，任何非空集合上的自由代数在两种意义下都是生成元

生成元概念的一个推广是对象的一个生成集(generating set)，或生成元的集合(set of generators)(也称分离集(separating set)，等等)的概念 一些对象的集合 $\{G_\iota\ \iota\in I\}$ 称为一个生成集(在第一或第二意义下)如果它满足上述相应的条件，但要将"存在一个 $h\ G\to A$"换成"对某一个 $\iota\in I$，存在一个 $h\ G_\iota\to A$"．在一个有余积的 **Abel 范畴** (Abelian category)(或者，更一般地，在一个有零对象的范畴(见**范畴的零对象** (null object of a category)))中，生成集的存在蕴涵着生成元的存在，因为我们可以简单地取生成集中诸对象的余积 但是在更一般的范畴中，这并不真实 例如，在拓扑空间 X 上的层的(集合的)范畴中，X 的开子集的截段的层形成一个生成集(在两种意义下)，但当 X 不是平凡空间时，单独一个生成元并不存在

在一个有余积的范畴中，由投射对象(见**范畴的投射对象** (projective object of a category))所组成的生成集的存在性蕴涵着每一个对象都是一个投射对象的满态射象(就是，适当重复取生成元的余积) 为此原因，假定一个 Abel 范畴有一个投射生成元，这在同调代数中起着重要的作用

周伯埙 译

泛点 [generic point, общая точка]，亦称一般点

拓扑空间中的一个使得其闭包为全空间的点．具有泛点的空间是**不可约拓扑空间** (irreducible topological space)，但一个不可约空间可能没有或有很多的泛点．如果空间满足 **Колмогоров 公理** (Kolmogorov axiom)，则它至多有一个泛点 任一不可约代数簇或不可约概形都有唯一的泛点 这时的泛点正好是该簇上有理函数域的谱．

"泛点"有时也用来表示某个**处于一般位置的点** (point in general position)，此时也可称为一般点

В И Данилов 撰

【补注】 满足 Колмогоров 公理的空间常称为 T_0 空间

刘先仿 译

脱殊集 [**generic-set，общее множество**]

拓扑空间 X 中的集合 M，它是 X 中可数多个稠密开集的交 如果 X 中每个脱殊集都在 X 中稠密，则 X 称为 **Baire 空间** (Baire space)

М И Войцеховский 撰

【补注】 上面定义的这种"脱殊集"主要用于微分拓扑以及动力系统的理论，在这些学科里，一条性质称为脱殊地成立，如果，比如说，对参数脱殊集成立

可数多个稠密开集之交（或含有这种交的集合）通常称为剩余集 (residual set, comeager set)，因为它的补集是贫集 (meager set)，即可数多个无处稠密集之并集（**无处稠密集** (nowhere-dense set)） 贫集在拓扑上无足轻重，所以俄文术语"层状集"恰当地说明了这种集合 Baire 范畴定理 (Baire category theorem) (见 **Baire 定理** (Baire theorem)) 说，在完全可度量化空间中，剩余集是稠密集，这个定理对局部紧致空间也对

在**数理逻辑** (mathematical logic) 与**集合论** (set theory) 中也使用"脱殊集" 这是指某些互不矛盾的条件构成的"脱殊的"集合，使得一组指定的语句中每个语句都得到判定

集合论中的**力迫法** (forcing method) 可能是最著名的例子. 这里整个条件集是一个**偏序集** (partially ordered set)，而脱殊集是一个**滤子** (filter)，与某一组稠密集中所有的集合都相交 另一个例子则属于模型论力迫法 (model-theoretic forcing)，这里的条件都是有限多个原始语句或其否定组成的无矛盾系统

在很多例子中，待判定的语句集是可数集，而所有的极大无矛盾的条件集合构成一个紧拓扑空间 于是可以引用 Baire 范畴定理判定，在本条目的意义下，脱殊集的集合实际上是一个稠密脱殊集

在代数几何（或解析几何）中，在以 **Zariski 拓扑** (Zariski topology) 来处理**概形** (scheme) 或准概形时，脱殊集通常是指"含有一个稠密开集"，或一个维数较低的集合的补集，这往往是一回事 例如，如果是在处理用复流形或解析簇或代数簇进行局部参数化的一族对象，那么，"该族中某个元素脱殊地 (generically) 具有某条性质"或"该族的某个脱殊元 (generic member) 具有该性质"这种陈述就是指该族中不具有该性质的元素之集合含于某个严格低维的子簇中 例如脱殊光滑性 (generic smoothness) 结果说，若 f $X \to Y$ 是特征为零的一个代数闭域上代数簇之间的态射，X 是非异簇，则存在一个非空开子集 $U \subset Y$，使得 f $f^{-1}(U) \to U$ 是光滑的

亦见**泛点** (generic point)

参考文献

[A1] Kunen, K , Set theory, North-Holland, 1980

[A2] Barwise, J (ed), Handbook of mathematical logic, North-Holland, 1977

[A3] Griffiths, Ph and Harris, J , Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978, p 20 ff

[A4] Hartshorne, R , Algebraic geometry, Springer, 1977, 272

胡师度、白苏华 译

遗传代数 [**genetic algebra，генетическая алгебра**]

【补注】

设 A 是域 K 上 $n+1$ 维非结合的交换代数 .

设域 L 是 K 的一个代数扩张，A_L 为 A 在 L 上的扩张（亦见**域的扩张** (extension of a field)） 如果 A_L 容许一组基 $\{c_0, c_1, \quad , c_n\}$ $(c_0 \in A)$ 且由

$$c_i c_j = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{ijk} c_k, \quad i, j = 0, \quad , n$$

所定义的乘法系数 λ_{ijk} 满足下列性质

$\lambda_{000} = 1$,

$\lambda_{0jk} = 0$, 当 $k < j$ 时, $j = 1, \quad , n$, $k = 0, \quad , n$,

$\lambda_{ijk} = 0$, 当 $k \leqslant \max\{i, j\}$, $i, j = 1, \quad , n$, $k = 0, \quad , n$

那么 A 称为遗传代数 (genetic algebra). $\{c_0 \quad c_n\}$ 称为 A 的一组典范基 (canonical basis)，乘法系数 λ_{0ii} $(i = 0, \quad , n)$ 是遗传代数的不变量，并称为 A 的列根 (train roots)

代数 A 称为压缩的 (baric)，若存在一个非平凡代数同态 ω $A \to K$，ω 称为权同态 (weight homomorphism) 或简称为权 (weight) 每个遗传代数都是压缩的，其权 ω $A \to K$ 由 $\omega(c_0) = 1$, $\omega(c_i) = 0$ $(i = 1, \quad , n)$ 来定义，并且 $\ker\omega$ 是 A 的一个 n 维理想

设 $T(A)$ 是代数 A 的变换代数，即它是由（例如说）左变换 L_a $A \to A$, $x \to ax$, $a \in A$ 及恒等变换生成的代数

非结合的交换代数 A 是遗传代数，当且仅当对任意 $T \in T(A)$, $T = f(L_{a_1}, \quad , L_{a_k})$，其特征多项式的系数仅仅是 $\omega(a_1)$, $\quad , \omega(a_k)$ 的函数 .

历史上，遗传代数最初就是根据这种性质定义的 (R D Schafer ([A5])) H Gonshor ([A3]) 证明了，这与上面第一个定义是等价的 P Holgate ([A4]) 证明了，在压缩代数 A 中，其权 ω 是唯一确定的，只要 $\ker\omega$ 是一个诣零理想

遗传学中的代数开始于 I M H Etherington ([A2]) 的工作 他把 Mendel 法则转化为代数形式 考虑由一个或几个部位处有遗传差异的二倍（或 $2r$ 倍）个体组成的无限大随机配对群体 . 设 $a_0, \quad , a_n$

为不同遗传的配子．群体的状态可由配子的出现率的向量 $(\alpha_0, \quad, \alpha_n)$ 来描述，这里

$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1, \ i = 0, \quad, n, \ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$$

配子 a_i 与 a_j 的随机结合形成合子 $a_i a_j, i, j = 0, \quad,$ n 在无选择情况下，所有合子有相同繁殖率　令 γ_{ijk} 是由合子 $a_i a_j (i, j = 0, \quad, n)$ 产生的配子 $a_k (k = 0, \quad, n)$ 的相对出现率，

$$\left.\begin{aligned} &0 \leqslant \gamma_{ijk} \leqslant 1, \ i, j, k = 0, \quad, n, \\ &\sum_{k=0}^{n} \gamma_{ijk} = 1, \ i, j = 0, \quad, n \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A1)}$$

设分离率 (segregation rates) γ_{ijk} 是对称的，即

$$\gamma_{ijk} = \gamma_{jik}, \ i, j, k = 0, \quad, n \qquad \text{(A2)}$$

视元素 $a_0, \quad, a_n$ 为域 $\mathbf{R}$ 上自由的抽象元．在向量空间 $V = \{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i a_i \quad \alpha_i \in \mathbf{R}, i = 0, \quad, n\}$ 中，乘法是由

$$a_i a_j = \sum_{k=0}^{n} \gamma_{ijk} a_k, \ i, j = 0, \quad, n$$

及其双线性扩张到 $V \times V$ 上来定义的．于是 V 成为一个交换代数 G，称为配子代数 (gametic algebra) 实际上的群体对应元素 $a = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i a_i \in G$，其中 $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1, i = 0, \quad n$ 及 $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$ 群体的随机结合对应于代数 G 中相对应的元素的乘积．在更一般假定下（包括变种、杂交、多倍性）配子代数是遗传代数．例子可在 [A2] 或 [A7] 中找到

合子代数 (zygotic algebra) Z 可从配子代数 G 通过加倍 (duplication) 得到，即作为 G 与本身的对称张量积

$$Z = G \otimes G / J, \qquad \text{(A3)}$$

这里 $J = \{\sum_{i \in I} (x_i \otimes y_i - y_i \otimes x_i) \quad x_i, y_i \in G, i \in I, |I| < \infty\}$.

合子代数描述了随机配对状况下二倍或 ($2r$ 倍) 个体构成群体的演化．

权 ω 的压缩代数称为列代数 (train algebra)，若 x 的所有主幂的秩多项式的系数仅依赖于 $\omega(x)$，即该多项式有形式

$$x^r + \beta_1 \omega(x) x^{r-1} + \quad + \beta_{r-1} \omega^{r-1}(x) x = 0 \quad \text{(A4)}$$

权 ω 的压缩代数 A 称为特殊列代数 (special train algebra) 若 $N = \ker \omega$ 是幂零的并且主幂 $N^i (i \in N)$ 是 A 的理想，见 [A2] Etherington ([A2]) 证明，每个特殊列代数是列代数 Schafer ([A5]) 证明，每个特殊列代数是遗传代数，每个遗传代数是列代数　这些代数的进一步刻画可见 [A7] 中第 3，4 章．

设 A 是权 ω 的压缩代数，若 A 中所有元素 x 满足等式

$$x^2 x^2 = \omega^2(x) x^2,$$

则称 A 为 Bernstein 代数 (Bernstein algebra) 每个 Bernstein 代数含有一个幂等元 e　由此幂等元使 A 分解成

$$A = E \oplus U \oplus V,$$

这里

$$E = e \cdot K, \ U = \operatorname{Im} L_e|_N, \ V = \ker L_e$$

整数 $p = \dim U$ 及 $q = \dim V$ 是 A 的不变量．数对 $(p+1, q)$ 称为 Bernstein 代数 A 的型 (type)，见 [A7] 中第 9 章　在 [A6] 中给出 Bernstein 代数是 **Jordan 代数** (Jordan algebra) 的充分必要条件．

Bernstein 代数是由 S Bernstein ([A1]) 作为对 Hardy-Weinberg 法则 (Hardy-Weinberg law) 的推广而引入的，这个法则说，随机配对群体在一代后是均衡的．

参考文献

[A1] Bernstein, S , Principe de stationarité et generalisation de la loi de Mendel, *C R Acad Sci Paris*, **177** (1923), 581－584

[A2] Etherington, I M H , Genetic algebras, *Proc R Soc Edinburg*, **59** (1939), 242－258

[A3] Gonshor, H , Contributions to genetic algebras, *Proc Edinburgh Math Soc* (2), **17** (1971), 289－298

[A4] Holgate, P , Characterizations of genetic algebras, *J London Math Soc* (2), **6** (1972), 169－174

[A5] Schafer, R D , Structure of genetic algebras, *Amer J Math* , **71** (1949), 121－135

[A6] Walcher, S , Bernstein algebras which are Jordan algebras, *Arch Math* , **50** (1988), 218－222

[A7] Worz-Busekros, A , Algebra in genetics, Lecture notes in biomath , 36, Springer, 1980

A Worz-Busekros 撰

许永华、朱胜林 译　牛凤文 校

Gentzen 形式系统 [Gentzen formal system, Генцена формальная система]

用于形式化和研究由引入和消去假设所构成的证明的逻辑演算．由 G Gentzen ([2]) 提出．Gentzen 形式系统分为自然推导系统 (natural derivation systems) (或自然演绎系统 (natural deduction systems)，它模仿了普通数学推导的形式，特别适合于用前者的记法表示后者) 和矢列式系统 (sequent system) (或逻辑系统 (logistic systems)，它允许综合一个给定公式所有可能的证明以得出关于一个证明的正规形式的结论，并且应用于**证明论** (proof theory) 和自动定理证明理论) 有时

把 Gentzen 形式系统与矢列式型的系统等同 然而，自然演绎系统可以用**矢列式（逻辑中的）**（sequent（in logic）），而矢列式 Gentzen 形式系统有时形式化为公式演算而不是矢列式演算，所有 Gentzen 形式系统有时可看作自然演绎系统，因为它们在某种程度上反映了处理逻辑连接词和假设的通常方法．

自然演绎系统由引入和消去逻辑符号的规则组成．只有少数逻辑公理（通常一个或两个），例如，语言 $\{\forall, \supset, \neg\}$ 的经典命题演算的自然变式由公理 $A \to A$ 以及下列规则定义 引入规则（introduction rules）

$$\frac{A,\ \Gamma \to B}{\Gamma \to (A \supset B)}\ (\supset^+),$$

$$\frac{A, \Gamma \to B \quad A,\ \Sigma \to \neg B}{\Gamma, \Sigma \to \neg A}\ (\neg^+),$$

$$\frac{\Gamma \to A(b)}{\Gamma \to \forall x A(x)}\ (\forall^+),$$

其中 b 在 Γ 或 $\forall x A(x)$ 中不出现；消去规则（elimination rules）

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Sigma \to (A \supset B)}{\Gamma,\ \Sigma \to B}\ (\supset^-),\quad \frac{\Gamma \to \forall x A(x)}{\Gamma \to A(t)}(\forall^-),$$

$$\frac{\Gamma \to B \quad \Sigma \to \neg B}{\Gamma, \Sigma \to \Delta}\ (\neg^-),\quad \frac{\Gamma \to \neg\neg A}{\Gamma \to A}\ (\neg\neg^-),$$

其中 t 是任意项，以及结构规则（structural rules）

$$\frac{\Gamma \to C}{A,\ \Gamma \to C}$$ （加细（refinement 或 thinning）），

$$\frac{A, A,\ \Gamma \to C}{A,\ \Gamma \to C}$$ （压缩（contraction）），

$$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \to C}{\Gamma, B, A, \Sigma \to C}$$ （重排（rearrangement）或置换（permutation））

线下的矢列式称为规则的结论（conclusion of the rule），而线上的称为前提（premises） 公理 $A \to A$ 表示假设 A 的引入，规则（$\supset^+$）说明假设的消去 上边的矢列式公式 B 依赖于假设 A，但下边矢列式的公式 $A \supset B$ 不再依赖 A 自然演绎系统偶尔也定义为依赖于假设的隐式记法的公式演算（以区别于矢列式演算） 这样，演算中的一个推导是一个树形图，其顶点是任何公式（不必是公理），以及根据推导规则的延续过程．这些规则是从由矢列式描述的自然系统的各自规则中消去前提得到的，假设的消去需要加上适当的条件，例如

$$\frac{A \quad B}{A \& B}\ (\&^+), \qquad \frac{\begin{matrix}[A]\\ \\ B\end{matrix}}{A \supset B}\ (\supset^+)$$

考虑到在这个推导中一个公式的一个出现 V 依赖于一个假设 D，除非 D 是公理，D 处于 V 的上部的一个顶点上，且假设 D 在由 D 引导到 V 的一个枝上时不能被消去．在解释这种推导时，一个公式 C 的每个出现转换为一个矢列式 $\Gamma \to C$，其中 Γ 是公式 C 的相关出现所依赖的假设的完全列举．自然演绎系统和通常相应系统的（Hilbert）变式的联系由下列命题建立· $\Gamma \to C$ 在自然演绎系统中可推导，当且仅当 C 在通常系统中由含固定变量的 Γ 可推导．

自然演绎系统其原始形式对于分析搜索一个推导不是非常适用的 企图确定推导一个公式所需的前提和规则，可能导致歧义——原则上，这可能是适当的逻辑联结词的引入规则或者消去规则． 消去规则中可能前提集合是潜无限的（由改变规则（$\supset^-$）中的公式 A） 由于这个原因，具有子公式性质（subformula property）的规则是有用的 前提仅含结论的子公式，而无穷多个可能性仅出现于形如（$\forall^-$）规则中项的选择中 在矢列式 Gentzen 形式系统中所有公式都有子公式性质，或只有一个规则不满足这个性质——截规则（cut rule）

$$\frac{\Gamma \to A \quad A,\ \Sigma \to \Delta}{\Gamma,\ \Sigma \to \Delta}$$

或另外类似的规则，例如，规则（$\neg^-$） 因此，具有子公式性质的 Gentzen 形式系统也称为无截 Gentzen 形式系统（cut-free Gentzen formal systems）

例 经典谓词演算 LK 的一种无截形式．可推导对象是 $\{\supset, \neg, \forall\}$ 上的公式组成的矢列式 公理是 $A \to A$

后项规则（succedent rules）

$$\frac{A, \Gamma \to B}{\Gamma \to (A \supset B)}\ (\to\supset),\qquad \frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg A}\ (\to\neg),$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A(b)}{\Gamma \to \Delta, \forall x A(x)}\ (\to\forall),$$

其中 b 在 Γ 和 $\forall x A(x)$ 中不出现．

前项规则（antecedent rules）

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A}{\neg A, \Gamma \to \Delta}\ (\neg\to),\quad \frac{A(t), \Gamma \to \Delta}{\forall x A(x), \Gamma \to \Delta}\ (\forall\to),$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \quad B, \Gamma \to \Delta}{A \supset B, \Gamma \to \Delta}\ (\supset\to).$$

结构规则（structural rules） 后项和前项中的截、重排、加细和压缩（见**矢列式（逻辑中的）**（sequent（in logic）））

在比较矢列式和自然演绎系统中，后项规则对应于引入规则，而前项规则对应于消去规则 截用于在矢列式 Gentzen 形式系统中消去规则的建模 LK 的子公式性质可由下面的 Gentzen 定理（Gentzen theorem）（截消定理（cut-elimination theorem））得到

对LK中每个推导，可以构造一个（相同矢列式的）无截推导．这个定理为证明无量词系统的可解性提供了可能性．用一个给定无量词公式的子公式，能够构造只有有限多个匹配的矢列式（矢列式是匹配的（matching）如果它们在前项和后项中只在排序和项的重复次数上不同），由此能够构造只有有限多个能产生推导的候选者，一个给定公式是可证的，如果这样的候选者中包括一个推导

Gentzen形式系统提供了借助于纯构造概念表示理论的有意义特性的可能性，这样，一个直觉主义数学的Gentzan形式系统只在所用的单一后项而不是任意矢列式上不同于相应的经典系统．在无截系统中可以证明相容性（即空矢列式的不可推导性）和（在直觉主义情况下）将要推导的析取式的析取项之一的可推导性．

Gentzen形式系统的一个重要推广是包含具有无限前提集合的规则，如无限归纳规则（rule of infinite induction）（ω-规则）．

$$\frac{A(0),\quad ,A(N),\quad}{\forall x A(x)}$$

的半形式系统．

参考文献

[1] Kleene, S C, Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951（中译本 S C 克林，元数学导论，科学出版社，1985）

[2] Gentzen, G, Untersuchungen uber das logische Schliessen, *Math Z*, **39** (1934), 176－210, 405－431

[3] Curry, H B, Foundations of mathematical logic, McGraw-Hill, 1963

[4] Prawitz, D, Ideas and results in proof theory, in J E Fenstad (ed) Proc 2-nd Scand Logic Symp, North-Holland, 1971, 235－308

Г Е Минц 著 眭跃飞 译

曲线的亏格 [genus of a curve, род кривой]

域k上一维**代数簇**（algebraic variety）的一个数值不变量 光滑完全**代数曲线**（algebraic curve）X的亏格等于X上正则微分1形式（见**微分形式**（differential form））空间的维数．代数曲线X的亏格按定义等于双有理同构于X的完全代数曲线的亏格 对任一整数$g>0$，都存在亏格g的代数曲线 代数闭域上亏格$g=0$的代数曲线是**有理曲线**（rational curve），即双有理同构于射影直线P^1的曲线 亏格$g=1$的曲线即**椭圆曲线**（elliptic curve），双有理同构于P^2中三次光滑曲线 亏格$g>1$的代数曲线分为两类 超椭圆曲线和非超椭圆曲线．对非超椭圆曲线X，由完全光滑曲线的典范类K_X所定义的有理映射$\varphi_{|K_X|}$ $X\to P^{g-1}$是一个同构嵌入，而对**超椭圆曲线**（hyper-elliptic curve）X，映射$\varphi_{|K_X|}$ $X\to P^{g-1}$是有理曲线的一个双叶覆叠，$\varphi_{|K_X|}(X)$它在$2g+2$个点上分歧．

如果X是一个m次平面射影曲线，则

$$g=\frac{(m-1)(m-2)}{2}-d,$$

这里d是一个衡量X偏离光滑性的非负整数 如果X仅有通常二重点，则d等于X的奇点个数 对于空间中曲线X的亏格g，有如下的估计

$$g\leqslant\begin{cases}\dfrac{(m-2)^2}{4}, & \text{若 } m \text{ 为偶数,}\\ \dfrac{(m-1)(m-3)}{4}, & \text{若 } m \text{ 为奇数,}\end{cases}$$

这里m是X在P^3中的次数

当k是复数域$\mathbf{C}$时，代数曲线X就是**Riemann曲面**（Riemann surface），这时亏格g的光滑复曲线同胚于具有g个环柄的球面

参考文献

[1] Шафаревич, И Р, Основы алгебраической геометрии, М, 1972（英译本 Shafarevich, I R, Basic algebraic geometry, Springer, 1977）

[2] Hartshorne, R, Algebraic geometry Springer, 1978

Вик С Куликов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Springer, G, Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1957

[A2] Griffiths, P A and Harris, J E, Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978

刘先仿 译

曲面的亏格 [genus of a surface, род поверхности]

代数闭域k上的二维代数簇的一个数值双有理不变量．有两种不同的亏格，即**算术亏格**（arithmetic genus）和**几何亏格**（geometric genus）．完全光滑代数曲面X的几何亏格p_g等于

$$p_g=\dim_k H^0(X,\Omega_X^2).$$

即等于X上正则微分2形式空间的维数（见**微分形式**（differential form）） 其算术亏格p_a等于

$$p_a=\chi(X,\mathcal{O}_X)-1=\dim_k H^2(X,\mathcal{O}_X)-\dim_k H^1(X,\mathcal{O}_X)$$

完全光滑代数曲面X的这两种亏格由公式$p_g-p_a=q$联系起来，这里q为X的**非正则性**（irregularity），它等于X上正则微分1形式空间的维数．

参考文献

[1] Алгебраические поверхности, М 1965（Труды МИАН СССР, т 75）（英译本 Shafarevich, I R, et al, Algebraic surfaces, Proc Steklov Inst Math, **75** (1967)）

Вик С Куликов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hartshorne R, Algebraic geometry, Springer 1977

[A2] Barth W, Peters, C and Ven, A van de, Compact complex surfaces, Springer, 1984

[A3] Griffiths, P A and Harris, J E, Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978

刘先仿 译

代数函数的亏格 [genus of an algebraic function, род алгебраической функции]

见**代数函数** (algebraic function)

算术群的元素的种 [genus of an element of an arithmetic group, род элемента арифметической группы]

连通的代数 **Q** 群 G 的单位群 $G_{\mathbf{Z}}$ 内，与给定的元素 a 在 $G_{\mathbf{Q}}$ 及 $G_{\mathbf{Z}_p}$ 中都共轭的元素的集合，其中 p 取遍所有素数，**Q** 和 $\mathbf{Z}_p$ 分别表示有理数域和 p 进整数环．元素 a 的类 (class) 定义为它在 $G_{\mathbf{Z}}$ 中的共轭类．一个元素 a 的种分解为不相交的类的个数是有限的 ([1])，此数记为 $f_G(a)$，称为元素 a 在种中的类数 (number of classes)．这里出现的 $G_{\mathbf{Z}}$ 上的函数 f_G 是在关于共轭的问题中用以反映局部-整体原则的偏差程度的重要数值特征．一般说来，$f_G(a)>1$. 进而言之，如果群 G 是半单的并且群 $G_{\mathbf{Z}}$ 是无限的，则对于任一算术子群 $H\subset G_{\mathbf{Z}}$，有 $\sup_{a\in H}f_G(a)=\infty$ (见 [1], [3]) 这里所考虑的概念是二次型理论中相应的经典概念的自然的变形，用于与共轭性有关的算术群的剩余逼近的研究中 (见 [2])．

参考文献

[1] Платонов, В П, 《Докл АН СССР》, **200** (1971), 4, 793-796

[2] Платонов, В П, Матвеев, Г В, 《Докл АН БССР》, **14** (1970), 9, 777-779

[3] Рапинчук А С, 《Докл АН БССР》, **25** (1981), 2, 101-104

А С Рапинчук 撰 赵春来 译 冯绪宁 校

整函数的亏格 [genus of an entire function, род целой функции]

对**整函数** (entire function) $f(z)$ 的形如

$$f(z)=z^{\lambda}e^{Q(z)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\times\exp\left(\frac{z}{a_k}+\frac{z^2}{2a_k^2}+\cdots+\frac{z^p}{pa_k^p}\right)\qquad(*)$$

的表示式而言，数 p, q 中较大的整数，这里 q 是多项式 $Q(z)$ 的次数，p 是满足条件

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^{p+1}}<\infty$$

的最小整数．数 p 称为公式 (*) 中出现的积的亏格 (genus of the product)

参考文献

[1] Левин, Б Я, Распределение корней целых функций, М, 1956 (英译本 Levin B Ya, Distributions of zeros of entire functions, Amer Math Soc, 1964)

А Ф Леонтьев 撰

【补注】 亏格在整函数因子分解定理中有用，见，例如，**Hadamard 定理** (Hadamard theorem)，**Weierstrass 定理** (Weierstrass theorem)

参考文献

[A1] Boas, R P, Jr, Entire functions, Acad Press, 1954.

沈永欢 译

冰岩学中的数学问题 [geocryology, mathematical problems in, геокриологии математические задачи]

冻土和岩层中发生的过程和现象，以及季节性或永久性冻结岩层 (永冻层) 的地理传播和形成条件，在这些研究中所引起的数学问题

冰岩学中感兴趣的问题出现在分离相间具有动边界区域对温度场和湿度场相互作用的研究中．冰岩学中数学问题的典型特色在于这样的事实 岩层冻结和解冻期间发生的质量交换和热交换是紧密地相互联系着的．问题归结为抛物型准线性方程组，因为介质的热交换和水分交换特性本质上依赖于所寻求的函数．这种问题的典型例子是湿度饱和的细弥散岩粒的冻结的研究，它伴随着水分向冻结线前沿的徙动，伴随着溶胀，以及粗弥散岩粒的解冻的研究，它伴随着水分的渗入和滤出 工程地质学中具有特殊重要性的是，对具有复杂位形的区域，尤其是关于民用建筑和工业建筑附近解冻盆地，多维 **Stefan 问题** (Stefan problem) 的解．历史冰岩学中问题的解必然涉及考虑到地带的形成以及其退化为一点的多前沿 Stefan 问题的研究 在具有辐射热平衡的岩石圈上层中，冻结和解冻过程的协调问题在这方面具有重要性．

В И Дмитриев 撰

【补注】 地面冻结期间能出现一种有关现象，所谓“形成冰透镜结构”，地下形成纯冰层 (透镜)．在北极地区曾观察到大量冰透镜 (ice lenses) 结构．除 Stefan 型数学模型外，对疏松介质中液体冻结，曾提出过其他模型，以其中同时显现液相和固相这样的区域的存在为特征．形成冰透镜结构的一种可能解释，可在与冻结介质的应力分析有关的这种地带的热力学行为中求得．

参考文献

[A1] Williams, P J, Pipelines and permafrost physical geography and development in the circumpolar north, Longman, 1979

[A2] Fasano, A, Primicerio, M, Freezing of porous media a review of mathematical models, in V Boffi and H Neunzert (eds) Proc German-Italian Symp Applic Math in Technology, Teubner, 1984, 288 - 311
徐锡申 译

测地圆 [geodesic circle, геодезическая окружность]

在二维度量流形上与一固定点 O 相距为常数 r 的点的集合 一个特殊情形是 Euclid 平面中的圆.

若 r 很小时，则在正则曲面上或更一般地在二维 Riemann 空间中，测地圆是一条简单闭曲线（不一定具有常**测地曲率**（geodesic curvature)），其上每一点能用唯一的一条最短线（半径（radius）或径向测地线（radial geodesic））与 O 点相连，它与测地圆相交成直角，测地圆围成了一个凸区域 若 $r \to 0$，则测地圆的长度 l 与在 O 点处的 **Gauss 曲率**（Gaussian curvature）可用关系式

$$\frac{2\pi r - l}{r^3} \to \frac{\pi}{3} K$$

相联系. 若 r 很大，则有可能有多于一条的径向测地线连到测地圆上相同的点，圆周可能围成一个非凸区域，它也可能由几个分支所构成 在整体微分几何学研究中经常用到测地圆. 在一般的凸曲面及具有非正则度量的流形中的测地圆的性质在 [1] 中进行了研究.

在 Darboux 意义下的测地圆是常测地曲率的闭曲线. 它是等周问题中的平稳曲线. 它与常曲率曲面上通常的测地圆是一致的（[2]).

参考文献

[1] Bugaro, Yu D and Stratilatova, M B, Circumferences on a surface, *Proc Steklov Inst Math*, **76** (1965), 109 - 141 (*Trudy Mat Inst Steklov*, **76** (1965), 88 - 114)

[2] Blaschke, W, Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie Affine Differentialgeometrie, 2, Springer, 1923

В А Залгаллер 撰

【补注】 两种类型的测地圆在更一般的场合也被考虑. 第一种被推广成 Riemann 流形中的距离球面（distance sphere）的概念. 第二种推广是外在球面（extrinsic sphere）的概念，即为具有非零平行平均曲率法向的全脐点子流形

参考文献

[A1] Nomizu, K and Yano, K, On circles and spheres in Riemannian geometry, *Math Ann*, **210** (1974), 163 - 170

[A2] Berger, M and Gostiaux, B, Differential geometry manifolds, curves and surfaces, Springer, 1988 (译自法文)

[A3] Chen, B Y, Geometry of submanifolds M Dekker, 1973

沈纯理 译

测地坐标 [geodesic coordinates, геодезические координаты]，在具有联络系数为 Γ^k_{ij} 的仿射联络的空间的点 P 处的

在 P 处使得所有 $\Gamma^k_{ij}=0$ 的任何坐标系. 如果等式 $\Gamma^k_{ij}=0$ 在一条给定曲线上的每点处成立，则称之为沿曲线的测地坐标（**Fermi 坐标**（Fermi coordinates)). 在具有度量张量 g_{ij} 的 Riemann 空间中，测地坐标 x^k 经常用条件 $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$ 来定义，这是因为在此情形下它等价于条件 $\Gamma^k_{ij}=0$ 对于对称联络，特别对于 Riemann 联络，在任何点处的测地坐标是存在的，沿任何没有自交的正则弧的测地坐标也存在. 对 Euclid 空间中的曲面 F，测地坐标为由 F 在 P 处的切平面中的直角 Descartes 坐标系所给出，设 Q 是由 F 的沿曲线的切平面族所生成的包络面，如果到可展曲面 Q 上的射影是有效的，则 Q 上的内蕴 Descartes 坐标系将是 F 上的 Fermi 坐标系.

在测地坐标系下，张量场的协变导数在 P 点处的分量等于张量分量的通常导数. 这可被取为协变导数的定义，因为按照 E Cartan 关于将 Euclid 几何的几何对象和运算转移至更一般空间的思想，在所采用的特殊坐标系下，它们的非 Euclid 特性的效应被最大程度地消除. 这个思想也形成了广义相对论中运用测地坐标系的基础，在广义相对论中它们与时空中局部惯性参考系相联系，这种系统的研究在理论的物理解释中起了重要的作用

几何条件 $\Gamma^k_{ij}=0$ 意味着在坐标系所定义的区域中直线 $x^i = \xi^i t$（ξ^i = 常数，t 为参数）与所考虑的空间中使在 P 点向量

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = \left\{\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right\}$$

为零的曲线 $\gamma(t)$ 之间存在着一个对应关系. 如果测地坐标系使得从 P 点出发的任意方向的直线对应于一条满足 $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$ 的测地线，则称这种坐标系为 Riemann 坐标系.

Ю А Волков 撰

【补注】 在西方，Riemann 坐标更普遍地被称为法坐标（normal coordinates）或测地极坐标（geodesic polar coordinates)

参考文献

[A1] Berger, M and Gostiaux, B, Differential geometry manifolds, curves and surfaces, Springer, 1988 (译自法文)

[A2] Sternberg, S, Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964

[A3] Klingenberg, W, Riemannian geometry, de Gruyter, 1982 (译自德文)

沈纯理 译

测地曲率[geodesic curvature, геодезическая кривизна], *在曲面 F 上曲线 γ=r(t) 的一点处的*

曲线 γ 的切线绕 F 的法向 $\mathbf{n}$ 的旋转率，即沿 γ 运动时，切向的旋转角率向量在 $\mathbf{n}$ 上的射影 假设 γ 及 F 是正则的、定向的，且速度是相对于沿 γ 的弧长 s 而被计算的 测地曲率能定义为 γ 在所讨论的点处 F 的切平面上的射影曲线的曲率 测地曲率为

$$k_g = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{n})}{|\mathbf{r}'|^3},$$

这里"撇"表示关于 t 的微分

当 γ 在 F 上变动时，测地曲率成为表示长度 $L(\gamma)$ 的变分的函数的部分．如果端点是固定的

$$\delta L = -\int k_g(\mathbf{v}, \delta\mathbf{r})ds, \text{ 这里 } \mathbf{v} = \left[\mathbf{n}, \frac{d\mathbf{r}}{ds}\right],$$

$\delta\mathbf{r}$ 是曲线的变分向量 满足 $k_g \equiv 0$ 的曲线是**测地线**(geodesic line)

积分 $\int k_g ds$ 称为曲线 γ 的全测地曲率(total geodesic curvature)或旋度(rotation) 闭围道的旋度与它在曲面上所围区域的全曲率之间的联系由 **Gauss-Bonnet 定理**(Gauss-Bonnet theorem)给出

测地曲率成为曲面的**内蕴几何学**(interior geometry)的一部分，它能用度量张量及内蕴的曲面坐标关于参数 t 的导数来表出．如果不将 Riemann 空间看作浸入在 Euclid 空间中而来研究它的几何学，则测地曲率就是对曲线能定义的唯一的曲率，而可省去"测地"的字样．当考虑 Riemann 空间的子流形上的曲线时，曲线的曲率可以在外部空间中定义，也可在子流形中定义——正如曲面上一条曲线的空间曲率及测地曲率．

可对一般凸曲面上的曲线 γ 导入测地曲率的概念．如果曲线 γ 具有长度，且其每一段弧有一确定的旋度，则 γ 在点 x 处的右(左)测地曲率(right (left) geodesic curvature)乃是当弧向点 x 收缩的条件下，弧的右(左)旋度对其长度的比率的极限

测地曲率的两种概念在 Finsler 空间中也有定义．它们的差别在于替代 $\mathbf{v}$ 的向量的长度的确定方式有所不同．在测地线上，这些测地曲率为零

Ю С Слободян 撰

【补注】

参考文献

[A1] Do Carmo, M, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, 1976

[A2] Berger, M and Gostiaux, B, Differential geometry, Springer, 1980(译自法文)

[A3] O'Neill, B, Elementary differential geometry, Acad Press, 1966

[A4] Blaschke, W and Leichtweiss, K, Elementare differentialgeometrie, Springer, 1973

[A5] Kobayashi, S and Nomizu, K, Foundations of differential geometry, 1, Wiley (Interscience), 1963

沈纯理 译

测地距离[geodesic distance, геодезическое расстояние]

连接两点(或两集合)的最短**测地线**(geodesic line)的长度 在变分学中，测地距离是对连接这两点的极值曲线所取的泛函极值．

【补注】

参考文献

[A1] Busemann, H, The geometry of geodesics, Acad Press, 1955

[A2] Klingenberg, W, Riemannian geometry, de Gruyter, 1982(译自德文)

沈纯理 译

测地流[geodesic flow, геодезический поток]

一个这样的流 $\{S_t\}$，它的相空间是 Riemann(更一般地，Finsler)流形 M^n(所谓此流的构形流形(configuration manifold))的切向量的流形 TM^n，而其运动则定义如下．设 $v \in TM^n$ 为 M^n 在点 $x \in M^n$ 的切向量，并设其长为 $|v| \neq 0$ 设 M^n 上的测地线 γ 是过 x 并依方向 v 作的，再设 x_t 是 γ 上的点，它与 x 沿 γ 的距离为 $t|v|$(γ 上的正向合于向量 v 在 x 的方向) 于是有 $S_t v = v_t = dx_t/dt$ 当 $|v| = 0$ 时，有 $S_t v \equiv v$ 于是 $|v_t|$ = 常数，因此单位长向量便构成 TM^n 中的子流形 W^{2n-1} 且关于 $\{S_t\}$ 不变 测地流往往理解为流 $\{S_t\}$ 在 W^{2n-1} 上的限制 在局部坐标下测地流可用二阶常微分方程组来描述，它在 Riemann 流形情形，取下列形式

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \sum_{j\,k} \Gamma^i_{jk}(x_t)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0,$$

其中 x^i 为点 x_t 的第 i 坐标，且 Γ^i_{jk} 为第二类 **Christoffel 符号**(Christoffel symbol) 测地流保持 TM^n 上自然**辛结构**(symplectic structure)，而它在 W^{2n-1} 上的限制保持相应的**切触结构**(contact structure) 测地流在几何中显然起重要作用(亦见**大范围变分学**(variational calculus in the large)) 此外，若对时间作某种改变，则据 **Maupertuis 原理**(Maupertuis principle)，有可能将力学系统的运动的描述化为测地流的描述．

Д В Аносов 撰

【补注】 关于对力学系统的应用，例如见[A2]中 45D 与附录 1J 与 4F 在具有负曲率的(紧)流形上的测地流具有有趣的动力性质(见**双曲集**(hyperbolic set)，**Y 系统**(Y-system))，见[A1]．关于测地流在微分几何中的应用，见[A3]，第 3 章

参考文献

[A1] Anosov, D V, Geodesic flows on compact Riem-

annian manifolds of negative curvature, *Proc Steklov Inst Math* **90** (1969) (*Trudy Mat Inst Steklov*, **90** (1969))

[A2] Arnold, V I, Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978(译自俄文)

[A3] Klingenberg, W, Riemannian geometry, Springer, 1982 (译自德文) 郑维行 译 沈永欢 校

测地几何学 [**geodesic geometry** 或 geometry of geodesics, **геодезических геометрия**]

一种度量空间(*G* 空间(*G*-space))的几何学，这种空间具有下列性质：局部地定义为最短线的**测地线**(geodesic line)的延伸是唯一的.

*G*空间是用下列公理系来定义的

1) *G* 空间是一个度量空间，$\rho(x, y)$ 是空间中的距离，

2) *G* 是有限紧致的，即 *G* 中有界的无限集合具有极限点，

3) *G* 在 Menger 意义下是凸的，即对两点 $x \neq y$，存在着与 x, y 不同的第三点 z，使得

$$\rho(x, z) + \rho(z, y) = \rho(x, y),$$

4) 对每点 a 存在 $r>0$ 使得在球 $\rho(a, x)<r$ 内，对点 $x \neq y$，存在着与 x, y 不同的第三点 z，使得 $\rho(x,y)+\rho(y,z)=\rho(x,z)$(局部延拓公理)，

5) 如果在公理 4) 中能找到两点 z_1和 z_2 使得 $\rho(y, z_1)=\rho(y, z_2)$，则 $z_1=z_2$(唯一延拓公理).

特别地，*G* 空间的类包括**Riemann 空间**(Riemannian space)及 **Finsler 空间** (Finsler space)

使得测地线延伸一般是可能的，且测地线的任何线段仍为最短线的 *G* 空间被称为直线空间(straight space). 它们包括了例如 Euclid 空间，Minkowski 和 Лобачевский 空间及所有非正曲率的单连通 Riemann 空间. 在直线空间及在某些特殊类型(椭圆)的 *G* 空间中，一条测地线是由两点所决定的.

在一般的 *G* 空间中，与在 Minkowski 空间中不一样，球面不总是凸的. 按照最短线和测地线所定义的垂直性与 Euclid 空间时不一样，它不必须是对称的. 运用 *G* 空间去区分 Euclid 空间、球空间和 Minkowski 空间的准则已被叙述过

G 空间理论表明微分几何的许多结果与可微性条件没有关系. 该理论推广了在 Finsler 空间上的研究，使得有可能去研究仿射空间和射影空间的度量化，它将直线转换成测地线；去研究在度量化下测地线网选择的自由度. 许多迄今未解决的问题是与 *G* 结构的可能的拓扑结构相联系着([1])

参考文献

[1] Busemann, H, The geometry of geodesics, Acad Press, 1955 B A Залгаллер 撰

【补注】 其进一步的推广及结果，可见[A1] “*G* 空间”一词，与 *G* 集类似，也可用来表示在其上具有(拓扑)群 *G* 作用的(拓扑)空间这样一个完全不同的概念.

参考文献

[A1] Gromov M, Structures metriques pour les variétés Riemanniennes, F Nathan, 1981 沈纯理 译

测地线假设 [**geodesic hypothesis**, **геодезических гипотеза**]

确定 Einstein 引力理论中(即广义**相对论**(relativity theory)中)自由试探粒子运动的说法 在 Newton 物理学中，如果没有任何力(甚至没有引力)作用于一个粒子，则该粒子称为自由的(free) 在广义相对论中，不存在作为四维向量的引力概念，引力性质由 Riemann 时空结构予以定义. 因此，在广义相对论中认为引力场中粒子的运动(假如没有任何非引力作用于它)是自由的. 测地线假设的精确表述如下 具有非零静质量的一个自由试探粒子，它的世界线是时空的非各向同性类时测地线，具有零静质量的一个自由试探粒子(光子，中微子)是时空的各向同性测地线.

测地线假设是经典力学中**惯性定律**(law of inertia)的自然推广. **测地线**(geodesic line)的微分方程是广义相对论中的运动方程.

测地线假设的表述中出现试探粒子的概念意味着忽略了与这些粒子的有限尺度及其内部结构有关的效应，并且认为它们所产生的引力场很小可以略而不计. 试探粒子是真实粒子的理想化极限情况，并且对于广泛且自然类理想化试探粒子有可能获得测地线假设作为 **Einstein 方程** (Einstein equations)([3])的推论. 这个事实描述广义相对论与其他场论之间的实质差别，在其他场论中不可能由场方程获得运动方程.

参考文献

[1] Фок, В А, Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд, М, 1961, гл 6 (英译本 Fock, V A, The theory of space, time and gravitation, Macmillan, 1954)

[2] Synge, J L, Relativity the general theory, North-Holland & Interscience, 1960

[3] Infeld, L and Hoffmann, B, Gravitational equations and problems of motion, *Ann of Math*, **39** (1938), 65 – 100 Д Д Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Infeld, L and Plebański, J, Motion and relativity, Pergamon & Polish Acad Sci, 1960 徐锡申 译

测地线 [**geodesic line** 或 geodesic, **геодезическая линия**]

将 Euclid 几何中直线（或直线段）概念推广到更一般类型空间的一种几何概念 在各种空间中测地线的定义依赖于特殊空间的几何所基于的特殊结构（度量，线素，线性联络） 在度量已被预先指定的空间的几何学中，测地线被定义成局部最短线．在具有联络的空间中测地线被定义为这样的曲线，即切向量场沿此曲线是平行的．在 Riemann 和 Finsler 几何中，线素是预先给定的(换言之，在所讨论的流形的每点的切空间中给定了一个度量)，于是线的长度能用逐段积分得出，而测地线被定义为长度泛函的极值曲线

测地线是由 J Bernoulli 和 L Euler 最先研究的，他们企图在 Euclid 空间的正则曲面上找出最短线 在这样的线上，**测地曲率**（geodesic curvature）为零，且这些曲线的主法线与曲面的法线平行．在等距变形下，测地线是保持的．具有有限个自由度的保守力学系统的运动能用一条在适当选取的 Riemann 空间中的测地线来描述．

Riemann 空间中的测地线已被很彻底地研究了．设 M^n 是具有 $C^k\,(k\geqslant 2)$ 类度量张量 g_{ij} 的 n 维 Riemann 空间．测地线作为极值曲线的定义使得有可能在任意局部坐标系 $x^i\,(i=1,\quad,n)$ 下对任何参数化 $\gamma=\{x^i(t)\}$ 写下其微分方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right)-\frac{\partial F}{\partial x^i}=0,$$

这里

$$F=\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}\ ,\ \dot{x}^i=\frac{dx^i}{dt}$$

另外等价地，测地线方程的形式能从沿 γ 切向量 $\dot{\gamma}=\{\dot{x}^i\}$ 的平行性假设导出 如果 t 是沿测地线的弧长 s，或是 s 的一个线性函数，则

$$\frac{D}{dt}(\dot{\gamma})=0,\ 或\ \ddot{x}^i+\Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k=0 \qquad (1)$$

由方程（1)，测地线的定义也涉及了参数的一个典范选择 在这样的定义下，具有初始切向量 ξ，$x(0,\xi)=x_0$，$\dot{x}(0,\xi)=\xi$ 的测地线 $\gamma=x(t,\xi)$ 通过给定点 x_0 在 x_0 处切空间到所考虑的空间中的映射 $\xi\to x(1,\xi)$ 是具有极点 x_0 的指数映射．在邻近于极点 x_0 处，它是一个微分同胚，它将 Riemann 坐标导入到所考虑的空间

如果像(1)中那样，函数 F 是 $\{\dot{x}^i\}$ 的二阶齐次函数，则测地线的许多性质对于由二阶方程 $\ddot{x}=F(x,\dot{x})$ 所表出的曲线也是保持的 藉助于切丛对这类方程的研究，产生了**喷射**（spray）及其积分曲线的概念 测地线乃是这类曲线的一种特殊情形（[2]）

测地线的局部性质类似于 Euclid 空间中的直线．充分短的测地线弧在具有相同端点的可求长曲线中是最短的．仅有一条测地线以给定方向通过任意点．每点具有一个邻域 U，使得 U 中任何两点能用位于 U 中的唯一一条测地线连接（[3]）

从一点 x_0 出发的测地线弧可延伸到什么距离使得它在 x_0 的邻域内的曲线中仍保持最短的问题是一个变分学的问题．测地线与邻近曲线的比较基于长度的二阶变分的研究，这时考虑沿特殊变分 $\gamma(s,t)$ 所属的测地线 $\gamma(s)$ 的特别的速度场（**Jacobi 向量场**（Jacobi vector field)） 对任何固定的 t，曲线 $\gamma(s,t)$ 是测地线，而测地线上的参数 s 保持为典范参数 如果在 γ 的原点处速度为零，则在 γ 上使得某个非零 Jacobi 向量场为零的点被称为共轭点，测地线在直到第一共轭点为止的范围内在邻近曲线中保持最短性．对延伸至共轭点外的测地线弧，存在着具有相同端点的与原曲线无限邻近的更短的曲线 Jacobi 场 $\eta(s)$ 满足方程

$$\frac{D^2\eta}{ds^2}+R(\dot{\gamma},\eta)\dot{\gamma}=0,$$

这里 $\dot{\gamma}$ 是测地线 $\gamma(s)$ 的切向量，而 $R(\dot{\gamma},\eta)$ 是**曲率变换**(curvature transformation)，或在 Fermi 坐标系 x^i 下，$x^1=s$

$$\frac{d^2\eta^i}{ds^2}+R^i_{1k\ 1}\eta^k=0, \qquad (2)$$

这里 $R^i_{ij\ k}$ 是曲率张量．Jacobi 向量场与曲率之间的联系确定了测地线性质对空间曲率的依赖性．例如，在负曲率空间中，不存在共轭点，如果再加上空间是单连通的条件，则任何测地线是最短线，且从一点发出的测地线是指数地发散的 这些性质在动力系统的理论中是有其重要性的（见**测地流**（geodesic flow)） 曲率效应的单调性质形成了几个所谓比较定理的内容 特别地，到第一共轭点的距离及在此线段（由条件 $\eta(0)=0$，$\left|\frac{D\eta}{ds}\right|=1$ 归一化）上 Jacobi 向量场的长度随空间曲率的增加而递减 这里，两测地线的比较的前提是在具有相同长度的对应点处第二个空间所有的曲率大于第一个空间的任何的曲率（[4]）

在广义相对论中方程（2）是运用测地线性质对时空曲率进行物理解释的源泉（[5]）

如果比较不限于邻近曲线，则测地线弧可能在其通过共轭点前失去其最短性 这甚至在单连通空间中也可能发生，即产生此现象有拓扑和度量两方面的理由．

在延伸共轭点之间保持最短性的测地弧时的曲率的效应问题在研究空间的曲率与拓扑结构之间的联系中是十分重要的 闭测地线的条数或者连接两点的不同测地线条数对空间拓扑结构的依赖性形成了**大范围变分学**（variational calculus in the large）的一个课题（[6]，[4]，[7]）

被视为运动的可能的轨道的测地线族形成了动力系统理论及遍历性理论的一个课题．

在具有仿射联络的空间中，测地线是用方程（1）来定义的．连接两点的测地线的存在性及唯一性及凸邻域的存在性等局部性定理对这类空间是成立的．

具有类似性质的测地线在具有射影联络的空间及在流形具有更一般联络的情形下也能被定义．

对泛函（不一定是长度泛函）的变分问题的几何化产生了**Finsler空间**（Finsler space）的概念及在此空间中的测地线．这些空间的基本几何性质的分离导致了用测地线的存在性及可延伸性来定义的**测地几何学**（geodesic geometry）的概念

在具有不正则度量的度量空间中研究得最广泛的测地线是在凸曲面上及在**有界曲率的二维流形**（two-dimensional manifold of bounded curvature）上的测地线．这里，测地线不一定是一条光滑曲线，它可能不能延伸或者——在具有有界曲率的二维流形中——它可能有不唯一的延伸 在凸曲面上的测地线总是具有半切线，如果它能被延伸，则延伸是唯一的．测地线可从一点按几乎所有方向发出 已发现在这些空间中作为测地线类的闭包的**拟测地线**（quasi-geodesic line）类要比测地线类本身更为自然一些（[8]）

参考文献

[1] Рашевский, П К, Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд, 1967

[2] Lang, S, Introduction to differentiable manifolds, Interscience, 1967

[3] Helgason, S, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad Press, 1978

[4] Gromoll, D, Klingenberg, W and Meyer, W, Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968

[5] Synge, J L, Relativity The general theory, North-Holland & Interscience, 1960

[6] Люстерник, Л, А, Шнирельман, Л, Г, Топологические методы в вариационных задачах, М, 1930

[7] Milnor, J, Morse theory, Princeton Univ Press, 1963

[8] Александров, А Д, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М-Л, 1948

Ю А Волков 撰

【补注】 Riemann 坐标通常被称为法坐标（normal coordinates）或测地极坐标（geodesic polar coordinates），见**测地坐标**（geodesic coordinates）

凸邻域（convex neighbourhood），亦称为法邻域（normal neighbourhood），是一个邻域 U，使得对其中任意两点，能用 U 中唯一的测地线相接连

参考文献

[A1] Klingenberg, W, Lectures on closed geodesics, Springer, 1978（译自德文）

[A2] Busemann, H, The geometry of geodesics, Acad Press, 1955

[A3] Klingenberg, W, Riemannian geometry, de Gruyter, 1982（译自德文）

[A4] Berger, M and Gostiaux, B, Differential geometry manifolds, curves and surfaces, Springer, 1988（译自法文）

[A5] O'Neill, B, Semi-Riemannian geometry (with applications to relativity), Acad Press, 1983

沈纯理 译

测地流形 [**geodesic manifold, геодезическое многообразие**]，点 x 处的

光滑（Riemann 或具有仿射联络的）流形 M^n 的子流形 M^k，使得 M^n 中在 x 处与 M^k 相切的**测地线**（geodesic line）与 M^k 至少有二阶接触．如果 M^k 中每条测地线也是 M^n 中的测地线，则上述要求对 M^k 的每点均成立．这样的测地流形 M^k 称为全测地流形（totally geodesic manifolds）

Ю А Волков 撰

【补注】 亦分别被称为测地子流形（geodesic submanifold）及全测地子流形（totally geodesic submanifold）

参考文献

[A1] Klingenberg, W, Riemannian geometry, Springer, 1982（译自德文）

沈纯理 译

测地映射 [**geodesic mapping, геодезическое отображение**]，射影映射（projective mapping）

将空间 U 中的测地直线变到空间 V 中的测地线的映射 f．测地映射 $f\ U \to V$ 是一个局部同胚（如果 U, V 是光滑流形，则为微分同胚），这里 U, V 是测地线所在的空间

如果一个空间局部地容许一个将它映至 Euclid 空间的测地映射，则此空间称为射影平坦的（projectively flat）．一个 Riemann 空间到另一个 Riemann 空间的测地映射在例外情形下是存在的．在 Riemann 空间当中仅仅常曲率空间才是射影平坦的（[1]） 对所有射影平坦 Riemann 度量的描述构成了 Hilbert 第四问题（[2]）

在具有仿射联络的空间的理论中，人们不提测地映射，而是讨论联络的测地变换，它把联络变至同一流形上的另一个联络，且保持测地线．从联络 Γ^i_{jk} 到联络 $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ 的变换是测地映射，如果条件 $\tilde{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + A^i_k \psi_j + A^i_j \psi_k$ 满足，这里 ψ_i 是余向量场．具有仿射联络的空间是射影平坦的充要条件是射影曲率张量为零

参考文献

[1] Schouten, J A, Ricci-calculus, Springer, 1954（译自德文）

[2] Погорелов, А В, Четвертая проблема Гильберта, М, 1974（英译本 Pogorelov, A V, Hilbert's fourth problem, Winston & Wiley, 1979）

Ю А Волков 撰 沈纯理 译

测地网 [geodesic net, геодезическая сеть]

由两个单参数**测地线** (geodesic line) 族所构成的网 (net) 沈纯理 译

测地区域 [geodesic region, геодезическая область]

曲面 F 上一些点所构成的一个连通集 G，使得对 G 中每点 x 存在一个以 x 为中心的圆盘 $K(x)$，使得 $K_G = G \cap K(x)$ 具有下列类型之一 1) $K_G(x) = K(x)$, 2) $K_G(x)$ 是一个半-圆盘，3) $K_G(x)$ 是 $K(x)$ 的一个扇形，而不是一个半-圆盘，或者 4) $K_G(x)$ 由 $K(x)$ 的有限个除 x 外没有公共点的扇形 u_i 所构成.

在第一种情况下，点 x 称为正则内点 (regular interior point)，在第二种情况下称为正则边界点 (regular boundary point)，在第三种情况下称为角点 (angular point)，在第四种情况下称为结点 (nodal point) 如果测地区域本身是紧的，且无结点，则称为正规区域 (normal region) 正规区域或者是一个闭曲面，或者是一个带边界的曲面，其边界由有限个两两不相交的 Jordan 多边形所构成.

通过对两点 a 和 b 之间导入所谓 G 距离 (G-distance) ρ_G (即连接 a 和 b 的所有完全包含在 G 中的可求长曲线长度的最大下界)，可把测地区域看成一个度量空间 G 中一条具有端点 a, b 的可求长的弧称为 G 线段 (G-segment)，如果它是在 G 中 a 和 b 之间的最短连线 单点被看成是长度为零的 G 线段. 对 G 线段的所有点，方程 $\rho_G(a, x) + \rho_G(x, b) = \rho_G(a, b)$ 成立. G 射线 (G-ray) 是一条位于测地区域内，且其每一条部分弧均为 G 线段的射线. G 线 (G-line) 由除了原点外没有公共点的两条射线组成，使得包含在该线上的每条弧都是 G 线段

测地区域具有全曲率的充要条件是对穷尽测地区域的任何正规区域序列，全曲率趋于一个公共值. 如果区域的 Gauss 曲率没有一处为负或者没有一处为正，则区域具有全曲率 如果区域不具有全曲率，则总可以找到一个正规区域的穷尽序列，使得全曲率趋于 $\pm\infty$ 如果同胚于闭半平面的完全测地区域的边界仅具有有限个角点，且 $\omega_1, \ldots, \omega_n$ 为在测地区域内测量出来的相应的角度，则对全曲率 $C(G)$，有下列的不等式

$$C(G) \leqslant \pi - \sum_{i=1}^{n} (\pi - \omega_i)$$

参考文献

[1] Cohn-Vossen, S E, Kurzeste Wege und Totalkrummung auf Flachen, *Compos Math*, **2** (1935), 69 – 133

Ю С Слободян 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cheeger, J and Ebin, D, Comparison theorems in Riemannian geometry, North-Holland, 1975

沈纯理 译

测地挠率 [geodesic torsion, геодезическое кручение], E^3 中曲面 F 上曲线 γ 的

F 的切平面绕 γ 的切线的旋转率 在切线沿 γ 运动过程中该比率是按照弧长 s 来计量的. 设曲线 γ 和曲面 F 为正则的、定向的. F 上的测地挠率是由点及曲线的方向来确定的，且等于该方向上测地线的挠率. 测地挠率由

$$\tau_g = \left[\frac{d\mathbf{r}}{ds}\ \mathbf{n}\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} \right] = \tau + \frac{d\varphi}{ds} = (k_2 - k_1)\sin\alpha\cos\alpha$$

给出. 这里 $\mathbf{r}$ 是曲线的径向量，$\mathbf{n}$ 是 F 的单位法向量，τ 是 γ 的通常的挠率，φ 是曲线的密切平面与曲面的切平面之间的夹角，k_1 和 k_2 为曲面的主曲率，α 是曲线与 k_1 的方向之间的夹角 Ю С Слободян 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M and Gostiaux, B, Differential geometry manifolds, curves and surfaces, Springer, 1988, p 395 (译自法文)

[A2] Do Carmo, M, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, 1976, p 153, 261

[A3] Spivak, M, Differential geometry, 3, Publish or Perish, 1979

沈纯理 译

测地三角形 [geodesic triangle, геодезический треугольник]

由三个不同点以及将它们彼此相连接的**测地线** (geodesic line) 所构成的一个图形. 称这些点为顶点，称测地线为三角形的边，在任何空间中，只要测地线存在，就能考虑测地三角形

若测地三角形位于同胚于开圆盘的区域中且它的边构成一条简单闭围道，则将其内部区域附加到测地三角形上去 在一个正则曲面上，测地三角形的内角之和减去 π (三角角盈 (excess of the triangle)) 等于此内部区域的全曲率 ([1])

在度量空间中给定一个测地三角形，人们经常考虑具有相同边长的平面三角形. 这样就有可能导入度量空间中两条最短直线之间夹角的各种各样的概念 在二维情形时，当角度测量已被导入之后，就可作为由测地三角形的角盈表达的集函数来导入全曲率 测地三角形网可作为用多面体度量来逼近度量的一种源泉 ([2])

在所考虑的空间中的测地三角形的角与在平面或常曲率曲面上具有相同边长的三角形的相应角之间的

差异是能被估计的([1],[3],[4])

参考文献

[1] Gauss, C F, Allgemeine Flachentheorie, W Engelmann, Leipzig, 1900(译自拉丁文)

[2] Александров, А Д, Залгаллер, В А, Двумерные многообразия ограниченной кривизны, М -Л, 1962(英译本 Aleksandrov, A D and Zalgaller, V A, Intrinsic geometry of surfaces, *Amer Math Soc*, 1967)

[3] Александров, А Д, Одна теорема о треугольниках в метрическом пространстве и некоторые ее приложения,《Тр матем ин-та АН СССР》, **38**(1951), 5-23

[4] Gromoll, D, Klingenberg, W and Meyer, W, Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968

B A Залгаллер 撰

【补注】

参考文献

[A1] Klingenberg, W, Riemannian geometry, de Gruyter, 1982(译自德文)

[A2] Cheeger, J and Ebin, D, Comparison theorems in Riemannian geometry, North-Holland, 1975

[A3] Cheeger, J, Müller, W and Schrader, R, On the curvature of piecewise flat spaces, *Comm Math Physics*, **92**(1984), 405-454

沈纯理 译

大地测量学中的数学问题 [geodesy, mathematical problems in, геодезии математические задачи]

涉及在唯一坐标系中对地球的重力场和对地球的形状的确定的问题. 所采用的坐标系是正交 Descartes 坐标系 (x, y, z) 和正交曲线坐标系 B, L, H([2]) 或 u, v, w, 它们与回转扁椭球相联系(基于地球与这种椭球之间的相似性). 这里

$$\left.\begin{aligned} x &= (N+H)\cos B\cos L, \\ y &= (N+H)\cos B\sin L, \\ z &= \left[\frac{b^2}{a^2}N+H\right]\sin B, \\ N &= a\left[1-\frac{c^2}{a^2}\sin^2 B\right]^{-1/2}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

其中 a 和 b 分别是半长轴和半短轴, $2c$ 是焦距,

$$\left.\begin{aligned} x &= c\sin u\cos v\cosh w, \\ y &= c\sin u\sin v\cosh w, \\ z &= c\cos u\sinh w \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

地球的形状和地球的重力场由几何学测量(点之间的距离, 方向之间的角度), 重力测量, 月球定位, 以及地球人造卫星和河外射电源的观测而推出.

通过甚长基线(约几千公里)干涉测量术(VLBI)对天文台之间距离的测定是目前最准确(约几厘米)的技术. 这些测定可用于建立地球上的坐标系. 在发展地球表面上角度的网络时, 必须规定局域坐标系的取向元素.

在利用地外数据发展大地测量网络时, 无重垂线的大地测量起重要作用. 采用卫星全球定位系统(GPS)是现在实现这类型测量的最有前途的方法. 该系统的准确度在 50km 距离下约为 ±2cm(见[1],[5]).

地球重力场的一般确定是以卫星观测和天体力学的特殊方法为基础的, 即, 人造卫星的研究用来确定地球重力场与一球形场之间的差别. 这照例是通过将势展成球面函数的级数而寻求其展开系数来完成的, 现在直展至第 180 或第 360 次和阶 天体力学的方法补充以卫星跟踪站的引力场和坐标的同时确定的理论

应用地球表面上重力测量和大地测量以确定地球引力场和地球形状的近代理论是由 M C Молоденский 建立的(见[3],[4],[6]) 它是以求解带斜导数的 Laplace 方程的边值问题为基础的. 吸引势 U

$$U = \frac{fmi}{c}Q_0(i\sinh w) + \\ + \frac{\omega^2 a^2}{3}\cdot\frac{Q_2(i\sinh w)}{Q_2(ib/c)}P_2(\cos u)$$

的场, 接近于地球的场, 可用作参考场. 这里, f 是引力常量, m 是接近地球质量的质量, ω 是其转动的角速度, P 和 Q 分别是第一类和第二类 Legendre 函数. 引力势 W 用其高度轴零点(海平面)处的值 W_0 以及其增量来表达, 后者是由大地水准测量和沿其力线的重力测量推得

$$W = W_0 - \int g\,dh,$$

其中 dh 是水平面高度元增量. 势的增量 $\int g\,dh$ 用于确定近似坐标 w_0, 假设水准测量是在势 U 的场中实现的. 为了使 w_0(即, 高度 H)更精确, 以及为了确定地球的外引力场,去求所谓分布势 T·

$$T = W - \Omega - U \quad (3)$$

就足够了. 这里 Ω 是由地球自转所产生的离心力势. 为了寻求势, 地球表面上的边界条件是通过应用关系式 $dW/dH = -g$ 和通过计算坐标 w_0 处的 dU/dw 而获得的 在无穷远处 $(\sinh w \to \cosh w \to \infty)$, 势 T 满足条件 $\lim T = 0$

问题的解同样归结为寻求地球表面上单层的密度, 它由某种关系与势 T 相联系. 这个关系和这个边界条件产生一个第二类奇异积分方程 对于这个方

程，在某些条件下 Fredholm 择一成立．对于椭球参考场，边界条件定义唯一解．如果参考场退化至球形场，任何一次球面函数成为问题的解．由于不可避免的试验误差，引进下列补充条件 地球的惯心与参考椭球心相重合，以及地球惯量主中心极轴与参考椭球短轴相平行

地球的惯心不必位于其自转轴上 尤其是，如果为了减小引力内插中的误差而从地球的引力场除去地形质量的不规则效应，将是这种情况．在多山区域，由于地球表面的复杂性，实际数值计算是困难的．

在处理几何数据中取作出发点的某点的坐标 B，L，H，初始是任意地固定下来的，但使得重垂线离椭球法线的偏差的分量 $\varphi-B$，$(\lambda-B)\cos B$ 很小．同时假定地球自转轴与椭球轴平行，以及假定初始天文子午面与初始测地子午面也是平行的．

W_0 的值和地球惯心的坐标是通过将上述积分方程的解与观测得的天文纬度 φ 和天文经度 λ，以及由几何水准测量和天文重力水准测量而得的高度 H，进行比较而求得

地球形状的数学理论的基本原理是由 I Newton (1687) 建立的，他在假设地球密度均匀的情况下计算了地球椭球体的扁率．A Clairaut (1743) 进行了在流体静力学平衡下自转的情况下不均匀地球的重力场的一级近似研究 L Euler (1757) 建立了地球势水准面理论的基本原理 P Laplace (1785) 研究了天体（球体，尤其是旋转椭球体）的吸引，推广了 Clairaut 关于在我们的行星表面上重力分布的结果，没有应用流体静力学平衡的假设，并保持了 Clairaut 证明的精确度（地球的扁率是 1 ∶ 300 的量级）．而且，Laplace 发展了球面函数和级数的理论．G Stokes (1849) 的研究，随后由许多大地测量学家发展和完成，在 M C Молоденский 的研究出现以前，被用作大地测量中重力测量的理论基础．Stokes 是将地球形状的确定问题当作边值问题来处理的第一人，当证实了 Clairaut 和 Laplace 的结果的同时，并给出对球体第一边值问题的近似解．Stokes 的解预先确定了 P Dirichlet 的结果，后者于 1852 年通过展成球面函数的方法求解了对球的一个类似问题 Stokes 还将球体上方行星水平表面的高度用行星表面上的重力来表达 有可能用其表面上单层的引力来代替物体的引力，是由 C．F Gauss 于 1840 年证明的 不均匀液体在流体静力学平衡下的转动理论对地球物理学和大地测量学问题的联合求解是重要的．这个领域的主要结果应归功于 A M Ляпунов，L Lichtenstein 和 S．Chandrasekhar

参考文献

[1] Bock, Y, et al, A demonstration of 1 − 2 parts in 10^7 accuracy using GPS, *Bulletin Géodésique*, **60** (1986), 241 − 254

[2] Mohle, A, Die Verwendung von geographischen Koordinaten in der Theorie allgemeiner Flachen, Friedrich-Wilhelm Univ Bonn, 1934, Dissertation

[3] Молоденский, М С, Еремеев, В Ф, Юркина, М И, Методы изучения внешнего гравитационого поля и фигуры Земли, М, 1960 (英译本 Molodenskii, M S, Eremeev, V F and Yurkina, M I, Methods for study of the external gravitational field and figure of the Earth, Israel Program Sci Transl, 1962)

[4] Moritz, H, Advanced physical geodesy, H Wichmann, Karlsruhe, 1980

[5] Senus, W J, NAVSTAR Global Positioning System status, in The future of terrestrial and space methods for positioning, Proc Internat Assoc Geodesy and Geophysics XVIII General Assembly Hamburg, August 15 − 27, Ohio State Univ, 1983, 181 − 445

[6] Vaníček and Krakiwsky, E J, Geodesy the concepts, North-Holland, 1982

В Ф Еремеев, М И Юркина 撰

【补注】

参考文献

[A1] Jeffreys, H, The Earth, its origin, history and physical constitution, Cambridge Univ Press, 1970

徐锡申 译

几何近似 [**geometric approximation**, **геометрическое приближение**]，几何光学近似（geometrical-optics approximation），射线近似（ray approximation）

形式为

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_S(x, y, z)}{(-i\omega)^S} e^{i\omega\tau(x, y, z) - i\omega t},$$

且形式上满足描述波动现象的方程（或方程组，当 u_S 是矢量时）的级数

为求解在高频区域的波动传播问题（见**绕射数学理论**（diffraction, mathematical theory of）），发展了构造几何近似的所谓**射线方法**（ray method）([1])，([2]) 有一种假说 只要几何近似的项中没有奇点，那么所得级数就是所求解的渐近展开 此假说能在特殊情况下得到证明 这里也存在几何近似的不定常类比．

函数 u_S 的构造是基于考察射线场，亦即泛函

$$\int \frac{ds}{c(x, y, z)}$$

的极值（见 **Fermat 原理**（Fermat principle）），这里 $c(x, y, z)$ 是所研究的各向同性物理介质的波速，ds 是弧长元．令某一对参数 α，β 表征射线，参数 τ 表征射线上的点，并令

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{c(x, y, z)}$$

参数 α, β, τ 可用作曲线坐标．由这一坐标至正交 Descartes 坐标系的转换按公式

$$\mathbf{r}(\alpha, \beta, \tau) = \mathbf{r}(x, y, z)$$

进行 曲面 $\tau =$ 常数与射线正交 在射线场没有奇异性的点上，量

$$J = \left| \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \right] \right|$$

不为零，它称为几何扩展（geometric spreading） 量 J 出现在联系函数 u_s 的递归关系中，并在几何近似的所有构造中起重要作用

参考文献

[1] Friedlander, F G , Sound pulses, Cambridge Univ Press, 1958

[2] Бабич, В М , Булдырев, В С , Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М , 1972

В М Бабич 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kline, M and Kay I W , Electromagnetic theory and geometrical optics, Interscience, 1965

[A2] Felsen, L B and Marcuvitz, N , Radiation and scattering of waves, Prentice-Hall, 1973, Sect 1 7

唐福林 译

几何复形[geometric complex，геометрический комплекс]

在 Euclid 空间或 Hilbert 空间中满足某些条件的一些单形的集合．有限几何复形（finite geometric complex）是 Euclid 空间中一些闭单形的有限集合，任何两个单形或者无公共点，或者沿一公共面相交 两个几何复形看成是同构的，如果在它们的顶点之间可建立一一对应，且这对应在它们的所有单形之间也诱导出一个一一对应．一几何复形的任何数目的单形构成它的一个子复形 任何几何复形同构于足够高维数的某个单形的子复形．一个有限几何复形的维数（dimension of a finite geometric complex）是指它的组成单形的最大维数．

无限几何复形（infinite geometric complex），在至多相差同构的范围内，定义成为某个不必是可数维的 Hilbert 空间中一些单形的集合，这些单形的顶点是某个标准正交基的向量的终点 任何几何复形定义一个由其单形的所有点构成的拓扑空间，即该几何复形的多面体．一个无限几何复形的维数（dimension of an infinite geometic complex）是其单形维数的最小上界 对一无限几何复形，由它在外围 Hilbert 空间中的嵌入所诱导的多面体的拓扑，不是仅有的与其所有单形上通常拓扑相容的拓扑，可以有弱拓扑的例子．

Е Г Скляренко 撰

【补注】 在拓扑学和微分几何学中，作为抽象**单纯复形**（simplicial complex）的实现，这些复形是极其频繁地出现的 事实上，词组“单纯复形”有时是“几何复形”的代名词 周围的 Euclid 或 Hilbert 空间仅仅是不明显地作为顶点集上的所有实值函数的集合出现的．特殊的一些例子是多面体的**三角剖分**（triangulation）以及开覆盖网（见**集合族的网**（nerve of a family of sets））．注意，几何复形也是**胞腔复形**（cell complex).

参考文献

[A1] Munkres, J R , Elements of algebraic topology, Addison-Wesley, 1984

[A2] Spanier, E , Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966

[A3] Grünbaum, B , Convex polytopes, Interscience, 1967

[A4] Grünbaum, B , Polytopes, graphs and complexes, *Bull Amer Math Soc* , **76** (1970) , 1131－1201

姜国英 译

几何作图[geometric constructions，геометрические построения]

借助若干种被假定是完全精确的工具（直尺、圆规等等）求解某些几何问题 工具的选择决定使用这些工具可解的问题的类 直尺和圆规是几何作图的两种基本工具 一个作图问题用直尺和圆规是可解的，如果所求点的坐标可由对给定点的坐标施行有限步的加法、乘法、除法和开平方运算而得到（例如见**分圆多项式**（cyclotomic polynomials）） 否则，该问题就不能用直尺和圆规来解，例如**倍立方问题**（duplication of the cube），**三等分角问题**（trisection of an angle）以及**化圆为方问题**（quadrature of the circle）等 任何用圆规和直尺可解的作图问题也可用如下几组工具中的任何一组来求解 单一圆规（Mohr-Mascheroni 作图（Mohr-Mascheroni construction），G Mohr, 1672, L Mascheroni, 1797)，具有两条平行边的直尺——可由一个三角形（三角尺）来代替（A Adler, 1890），直尺和在图形所在平面内给定的标出圆心的圆（Poncelet-Steiner 作图（Poncelet-Steiner constructions），V Poncelet, 1822, J. Steiner, 1833)

参考文献

[1] Adler, A , Theorie der geometrischen konstruktionen, Goschen, 1906

[2] Hilbert, D , Grundlagen der Geometrie, Springer, 1913

[3] Энциклопедия элементарной математики, кн 4, Геометрия, М , 1963

П С Моденов, А С Пархоменко 撰

【补注】 一个作图问题用直尺和圆规是可解的，当且仅当对应的代数问题的 **Galois 群**（Galois group）的阶为 2^k, $k \in \mathbf{N}$ 例如，正 n 边形是可作出的，当且仅当每个整除 n 的奇素数幂是一个 Fermat 素数（Fermat pri-

me) $2^{2^m}+1$, 例如 3, 5, 17, 257, 65537, (?)

上面所描述的经典作图和作图问题，是构造确定的几何对象的一些算法（使用简单的运算） 在计算机制图学（computer graphics）和计算机辅助设计（CAD）(computer aided design) 中几何对象的广泛应用已导致了一种算法几何学（algorithmic geometry)现代形式的出现 即计算几何学（computational geometry）. 另外，出现于 VLSI 设计中的计算问题已促成了这个研究领域的形成. 计算几何学的主题恰好与几何问题的算法方面及有关事项相关，如存储管理方面以及此类算法的计算复杂性（亦见**复杂性理论**（complexity theory）及**算法的计算复杂性**（algorithm, computational complexity of an)）.

涉及的典型问题，例如寻找一个点集的凸包，寻找两凸集的交，构作一平面点集的 Вороной 图（Voronoï diagram)，点的位置查询，描述由一超平面集确定的布置，以及构造三角剖分

给定一平面点集 S，对应的 Вороной 图把该平面划分为 $\#S$ 个多边形区域，每个点 $s\in S$ 对应其中的一个区域. 一点 s 的开 Вороной 区域由平面上所有这样的点组成，它们到 s 的距离小于到 S 中任何其他点的距离 一个 Вороной 图能在 $O(n\log n)$ 时间内被作出 (其中 $n=\#S$) 并且能在 $O(\log n)$ 时间内被查询.

点的位置查询指的是判定一个给定点处于一个(平面的，或空间的，) 给定剖分的什么区域.

在 $\mathbf{R}^n$ 中给定一超平面的集合 H，则这些超平面把该空间剖分为有限个 d 维区域，$d=0,\ ,n$，并且由 H 所确定的布置（arrangement）便是对应的剖分. 例如，$\mathbf{R}^2$ 中处于一般位置的三条直线把该平面剖分为 7 个二维区域、9 个一维线段和 3 个零维点. 确定超平面布置（hyperplane arrangement）意指描述这个剖分(并把它（有效地）存入存储器中)

参考文献

[A1] Bieberbach, L , Theorie der geometrischen konstruktionen, Birkhauser, 1952

[A2] Mehlhorn, K , Multidimensional searching and computational geometry, Springer, 1984

[A3] Edelsbrunner, H , Algorithms in combinatorial geometry, Springer, 1987

【译注】 耐人寻味的是，在沉寂了一百多年之后，经典的几何作图问题又有了出乎意料的进展. 这就是所谓锈规（rusty compasses）作图问题 早在达·芬奇时代，已有数学家研究锈规作图，但这一问题长期以来几乎没有进展 20 世纪 80 年代初又有人具体提出，能否仅用一个固定半径的"生锈"圆规完成下列两项作图问题（不用直尺）(1) 任给两点 A, B，求作点 C，以使 ABC 组成等边三角形 (2) 任给两点 A, B，求作 A 和 B 的中点. 虽然早在 60 年代初就有人在 [B1] 中断言上述第二项作图是不可能的，这两个问题在数年后均获肯定解答 尤其出人意料的是 [B2] 中获得的一般结果 任给两个点 A, B，仅用一个只能画单位圆的固定半径的圆规，可以作 A 和 B 的 k 等分点（这里 k 是任意正整数)，也可以作以 AB 为一边的正 n 边形的全部顶点，$n=3, 4, 5, 6, 8, 12, 17, 257,$ 等等. 更一般地讲，若令 A 和 B 的 Descartes 坐标为 $(0,0)$ 和 $(\lambda, 0)$，则人们仅用一只能画单位圆的圆规可以作出所有的坐标为 $(\lambda x, \lambda y)$ 的点，这里 x 和 y 是有理数域的某个 2^m 次正规扩域中的任意元素 ($m=1, 2, 3,$). 直观而通俗地讲就是 凡从两个点出发，用好的圆规和直尺能作出的一切点，仅用一只固定半径的圆规也可以作出. 这与许多人的设想大相径庭

至于从三个以上的点出发的作图问题，生锈圆规能否代替好的圆规和直尺? 目前尚属未解决问题.

参考文献

[B1] Kostovskii, A N, Geometrical Constructions Using Compasses Only, Blaisdell, New York, 1961

[B2] Zhang Jingzhong, Yang Lu and Hou Xiaorong, What can we do with only a pair of rusty compasses? Geometriae Dedicata **38** 137-150, 1991

杨 路、侯晓荣 译 张景中 校

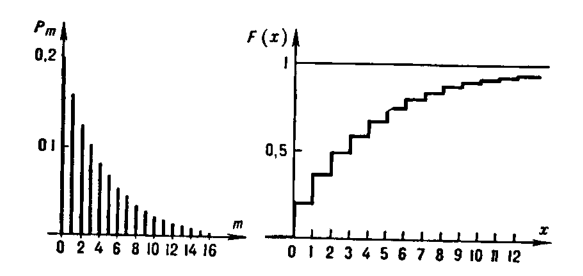
几何分布 [geometric distribution, геометрическое распределение]

以概率 $p_m=pq^m$ 取非负整数值 $m=0,1,$ 的离散随机变量的分布，此处分布参数 $p=1-q$ 是 (0, 1) 中的数. 特征函数是

$$f(t)=\frac{p}{1-qe^{it}},$$

数学期望是 q/p，方差是 q/p^2，生成函数是

$$P(t)=\frac{p}{1-qt}$$



几何分布 a) 概率 p_m, b) 分布函数 ($p=0.2$)

在成功概率为 p，失败概率为 q 的独立试验中，出现第一次成功之前的试验次数这一随机变量遵从几何分布. 这个名字来自形成这一分布的几何级数.

В М Калинин 撰 陶 波 译 李国英 校

几何亏格 [**geometric genus**, **геометрический род**]

非奇异代数簇的一个数值不变量.代数曲线的几何亏格与**曲线的亏格** (genus of a curve) 相同 代数曲面的几何亏格的定义首先由 A Clebsch 和 M Noether 在19世纪下半叶从不同的观点给出 Noether 还证明了几何亏格的双有理不变性 代数闭域 k 上的非奇异射影代数簇 X 的几何亏格被定义为它的 $n=\dim X$ 次正则**微分形式** (differential form) 空间的维数．在这种情况下用 $p_g(X)$ 表示 X 的几何亏格．由 Serre 对偶定理

$$p_g(X)=\dim_k H^n(X,\mathcal{O}_X),$$

这里 $\mathcal{O}_X$ 为 X 的结构层，数 $p_g(X)-1$ 正好是 X 的典范系的维数 (亦见**除子** (divisor)) 几何亏格在判断代数曲面的有理性 (见**有理曲面** (rational surface)) 和代数曲面的一般分类中具有重大意义．双有理同构的光滑射影簇的几何亏格相等．

参考文献

[1] Baldassarri, M , Algebraic varieties, Springer, 1956

[2] Шафаревич, И Р , Основы алгебраической геометрии, М , 1972(英译本 Shafarevich, I R , Basic algebraic geometry, Springer, 1977)

И В Долгачев 撰

【补注】 亦见**算术亏格** (arithmetic genus) .

参考文献

[A1] Hartshorne, R , Algebraic geometry, Springer, 1977

刘先仿 译

几何轨迹 [**geometric locus**, **геометрическое место точек**]

在几何学中有时使用的一个概念 几何轨迹通常指的是(形成曲线或曲面的)一些点的集合，由于这些点满足某些几何上的要求而与空间中的其他点区分开来．例如，椭圆可以定义为平面上满足下述条件的一些点的几何轨迹．这些点与两个给定点的距离之和为常数．

А Б Иванов 撰

【补注】 “几何轨迹”一词有点陈旧，现在通常指的是由某种性质定义的点集

参考文献

[A1] Coxeter, H S M , Introduction to geometry, Wiley, 1961

[A2] Hilbert, D and Cohn-Vossen, S , Anschauliche Geometrie, Springer, 1932

张鸿林 译

几何平均值 [**geometric mean**, **геометрическое среднее**]，亦称几何平均，正数 $a_1, a_2, \quad, a_n$ 的一个数，它等于这些给定数之积的 n 次方根，即

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \quad a_n}$$

一些数的几何平均值总是小于**算术平均值** (arithmetic mean)，除非这些数都相等，在这种情况下，几何平均值等于算术平均值．两个数的几何平均值也称为它们的比例中项 (proportional mean)

张鸿林 译

几何对象理论 [**geometric objects, theory of**, **геометрических объектов теория**]

微分几何学中基于群表示理论的一个分支，运用外微分形式方法有可能将微分准则导入到几何对象论之中，这将成为在对具有基本群的空间及广义空间(纤维空间，具有联络的空间，赋以不同微分-几何结构的微分流形)的微分-几何研究中的一个有效的工具．

设 r 参数的 Lie 群 G 的每个元素 S 对应于属于拓扑空间 E 的某个区域 D 中每点 M 的一个变换，且令群的零元素 S_0 对应于空间到其自身中的恒等变换(映射) 设相继施行两元素 S_u 和 S_v 对应的变换等价于这两元素的乘积所对应的变换，且空间中已导入适当的坐标系．于是 G 在 E 上可局部地表示为变换群．空间 E 称为群 G 的表示空间 (representation space of the group) 或具有基本群 G 的空间．

具有给定基本群 G 的几何对象或与群 G 相配的几何对象(简称 G 对象)被定义为 G 的表示空间中的一点．在词的广义理解下，这空间本身称为几何对象的空间或广义齐性空间 (generalized homogeneous space) 几何对象空间的实现了其基本群的变换群称为此几何对象的变换群 在群 G 的同一个表示空间中的两个几何对象称为等价的，如果可用 G 的一个变换将其中之一变到另一个．一个非可迁系统称为在真正意义下的几何对象空间．G 的表示空间称为具有基本群 G 的齐性空间，如果在其上实现了此群的一个一一可迁表示 在有限群的任何一一表示空间中，存在一个由有限个点所构成的标架

设一个一一可迁表示在几何对象空间 X 中已被实现．设表示空间是一个流形且连同一个标架 R，使其接受基本群 G 的所有可能的变换，于是可得到标架的一个完全族(空间)，在其上 G 的一个单纯可迁表示得以实现．此空间被恒同于 G 的群空间或参数空间．如果取这个空间的任意点(标架)为参考点，且让它相应于 G 的单位元，则此空间的所有点被一一对应于 G 的元素．群参数可被视为活动标架的参数

也有可能在标架族及群的元素之间建立一一对应，使得群的每个元素 S_a 对应于从一个随意固定的初始(绝对)标架 R 经过由元素 S_a 所确定的右(左)推移所得到的标架 $R_a=RS_a$ 流动的元素 S_u 将对应于流动的“活动”标架 R_u 关于标架 R，G 的表示空间的每点 X 能用其坐标 $\widetilde{X}^K(K=1, \quad, N)$ 来定义，称

此坐标为几何对象 X 的绝对坐标 (absolute coordinates) 或绝对分量 (absolute components) 几何对象相对于标架 $R_u = S_u^{-1} R$ 的相对分量 X_u^K 是由原几何对象经过从活动标架 R_u 变到绝对标架 R 的变换所转换得到的几何对象关于绝对标架 R 的绝对分量 $X^K = S_u \widetilde{X}^K$ 及 $X^K = f^k(u^s, \widetilde{X}^J)$, 此处 u^s 是 r 参数的群参数, $s=1$, , r 固定几何对象的相对分量 X^K 满足完全可积的微分方程组

$$dX^K - \xi_s^K \omega^s = 0, \qquad (1)$$

这里 $\omega^s = \omega^s(u, du)$ 是 G 的左不变形式, 且 $\xi_s^K = \xi_s^K(X^J)$. 方程组(1) 称为几何对象的不变性微分方程组, 也称为具有不变形式 ω^s 的群 G 的表示的微分方程组. 函数 ξ_s^K 称为主确定几何对象函数 (或确定表示函数). 形如(1) 的系统为具有相对分量 X^K 及群 G 的几何对象的不变性微分方程组的充要条件是系数 ξ_s^K 仅为变量 X^K 的函数及给定系统 (1) 是完全可积的 (几何对象论中的基本定理). 确定几何对象函数的结构 Lie 方程

$$\frac{\partial \xi_p^J}{\partial X^K} \xi_q^K - \frac{\partial \xi_q^J}{\partial X^K} \xi_p^K = C_{pq}^s \xi_s^J, \quad p, q, s = 1, \quad , r$$

的成立乃是几何对象的不变性微分方程组为完全可积的充要条件. 微分形式

$$\Delta X^J \equiv dX^J - \xi_s^J(X)\omega^s$$

称为表示的结构形式或具有相对分量 X^J 的几何对象的结构形式 (structure forms of the geometric object). 几何对象的表示空间的维数 N 被定义为对象 X 的秩. 在对象 X 的空间上一个 r 参数群的一一可迁表示的必要条件是关系式 $N \leqslant r$. 数 $\rho = N - R$ 称为几何对象的亏格, 这里 R 是矩阵 (ξ_s^K) 的秩 亏格 ρ 与几何对象的独立绝对不变量的数目相同.

形式为

$$\Delta X^J, \Omega_{K_1}^J, \quad , \Omega_{K_1 \quad K_a}^J,$$

的方程组是完全可积的, 这里

$$\Omega_{K_1 \quad K_a}^J = \frac{\partial^a \xi_s^J}{\partial X^{K_1} \quad \partial X^{K_a}} \omega^s, \; a = 1, 2,$$

对群 G 的表示空间的固定点 X_0,

$$\Delta X_0^J \equiv -\xi_s^J(X_0)\omega^s = 0,$$

且所得出的形式

$$\overline{\Omega}_{K_1 \quad K_a}^J = \Omega_{K_1 \quad K_a}^J |_{X^J = X_0^J = \text{常数}}$$

满足线性群的结构方程.

在形式

$$\Omega_{K_1}^J, \quad , \Omega_{K_1 \quad K_m}^J$$

中的线性独立形式的数目 r_m 是 G 的表示空间的一个算术不变量. $\rho_m = r - r_m$ 称为 G 的表示空间的 m 阶迷向特征标 (character of isotropy) 数 ρ_α 形成了一个非增序列. 总存在着一个最小数 q, 使得

$$\rho_1 \geqslant \quad \geqslant \rho_{q-1} \geqslant \rho_q = \rho_{q+1} =$$

数 q 也是 G 的表示空间的一个算术不变量, 称为几何对象 X 的非线性的阶.

如果不变性微分方程组

$$dX^J - \xi_s^J(X^K)\omega^s = 0 \qquad (2)$$

包含一个子方程组

$$dX^\alpha - \xi_s^\alpha(X^\beta)\omega^s = 0, \; \alpha, \beta = 1, \quad , n_1 < N,$$

则分量组 X^α 定义了一个几何对象——具有相对分量 X^J 的几何对象的一个子对象 (subobject).

如果两个几何对象 X 和 Y 相配了同样的群, 且一个对象的所有相对分量 Y^α 能用第二对象的相对分量 X^J 的某个解析函数表出·

$$Y^\alpha = Y^\alpha(X^K), \qquad (3)$$

则对象 Y 称为被对象 X 所覆盖. 几何对象 X 称为覆盖几何对象 (covering geometric object), 而 Y 称为被覆盖的几何对象 (covered geometric object) 两个几何对象 X_1 和 X_2 称为相似的, 如果两对象中每一个对象覆盖了另一个对象. 相似几何对象的秩、亏格、特征及型是恒同的. 相似几何对象的一个特殊情形是同构对象 (isomers) 仅仅是它们的分量次序不同的几何对象. 如果几何对象的不变性的微分方程组关于群 G 的所有不变形式 ω^s 是代数可解的, 则与 G 相配的任何其他的对象能用此对象来覆盖.

函数组 (3) 是一个几何对象的相对分量系统的充要条件是在由 Y^α 所满足的微分方程组中, dY^a 关于形式 ω^s 分解的系数仅仅是这些分量 Y^α 的函数, 即

$$dY^\alpha - \eta_s^\alpha(Y^\beta)\omega^s = 0. \qquad (4)$$

如果在具有相对分量 X^J 的几何对象的分量 X^α 所满足的微分方程组

$$dX^\alpha - \xi_s^a(X^J)\omega^s = 0,$$
$$a = 1, \quad , n_2 < N$$

中, 函数 $\xi_s^a(X^J)$ 关于 X^a 的分量是齐次的, 则称函数组 X^a 为被截几何对象 (truncated geometric object)

设存在一几何对象 X 及被 X 覆盖的几何对象 Y, 即 $Y^\alpha = Y^\alpha(X^J)$, 则

$$Y_K^\alpha \equiv \frac{\partial Y^\alpha}{\partial X^K} = F_K^a(X^J)$$

覆盖几何对象的相对分量 X^J，被覆盖几何对象的相对分量 Y^α 及后者关于前者的偏导数 Y^α_K 的总体形成了一个新的被覆盖几何对象的相对分量组

$$\{X^J,\ Y^\alpha,\ \frac{\partial Y^\alpha}{\partial X^K}\} \tag{5}$$

如果方程(2)和(4)分别对 X^J 及 Y^α 都成立，则

$$dY^\alpha_K-\left(\frac{\partial \eta^\alpha_s}{\partial Y^\beta}\ Y^\beta_K-\frac{\partial \xi^J_s}{\partial X^K}\ Y^\alpha_J\right)\omega^s=0$$

几何对象(5)称为导出几何对象(derived geometric object)

几何对象称为是线性的(linear)或者拟张量的(quasi-tensorial)，如果其分量的变换群是线性的，即

$$\widetilde{X}^J=B^J_K(u)X^K+B^J(u)$$

如果 $B^J=0$，则几何对象称为线性齐次的，或张量．几何对象是线性的，其充要条件为定义此几何对象的主函数具有形式

$$\xi_s=K^J_{sK}X^K+K^J_s$$

这里 K^J_{sK}，K^J_s 为常数．几何对象是线性齐次对象，其充要条件为 $K^J_s=0$，即

$$\xi^J_s=K^J_{sK}X^K$$

单分量的张量 X 称为不变量．不变量的微分方程具有形式 $dX-XK_s\omega^s=0$，这里 K_s 为常数　如果 K_s 不全为零，则称不变量为相对的(relative)　如果 $K_s=0$，则称不变量为绝对的(absolute)

如果 V_n 是一个 n 维微分流形，u_i 是点 $u\in U\subset V_n$ 的局部坐标系，这里 U 是在这个流形中的某个区域，则总可以导入由 n 个线性独立的线性微分形式 θ^i 构成的一个完全可积方程组，使得其首次积分是坐标 u^i　这意味着

$$\theta^i=u^i_k\,du^k$$

及

$$D\theta^i=\theta^k\wedge\theta^i_k$$

考虑一组 r 个满足下列结构方程的线性形式 ω^α

$$D\omega^\alpha=\frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}(u)\omega^\beta\wedge\omega^\gamma+\theta^k\wedge\omega^\alpha_k,$$
$$\alpha,\beta,\cdot=n+1,\quad ,n+r$$

关于形式 θ^i，形式 ω^α 具有一个纤维结构(fibre structure)，且如果 $u^i=u^i_0$，即如果 $\theta^k=0$，则形式 ω^α 成为具有结构常数 $C^\alpha_{\beta\gamma}(u^i_0)$ 的一个 r 参数 Lie 群 G 的不变形式．

称相配于群 G 的几何对象场 $\{X\}$ (G 场)是(局部地)被定义在 V_n 上，如果在此流形的任何点 $u\in U$，定义了一个相配于某 Lie 群 G 的几何对象 $\{X\}$ (G 对象)．此处

$$\widetilde{\Phi}^J=\widetilde{\Phi}^J(u^1,\quad ,u^n),$$

这里 $\widetilde{\Phi}^J(J=1,\quad ,N)$ 是 $\{X\}$ 的绝对坐标　因而，

$$d\widetilde{\Phi}^J=\widetilde{\Phi}^J_k\theta^k$$

换言之，满足微分方程组

$$\Delta X^J\equiv dX^J-\Xi^J_\alpha(X^K)\omega^\alpha-X^J_k\theta^k=0 \tag{6}$$

的函数组 X^J 称为相配于群 G 的几何对象场(field of geometric objects)，如果方程组 $\Delta X^J=0$，$\theta^k=0$ 是完全可积的．几何对象 $\{X\}$ 称为场的生成对象，在 $\theta^k=0$ 处的函数 X^J 成为 $\{X\}$ 的相对分量．上述方程称为 $\{X\}$ 场的微分方程．几何对象场在底空间为 V_n，纤维为给定几何对象的空间的相配纤维空间中确定了一个截面．

函数 $\Xi^J_s(X^K)$ 称为主确定场函数，系数 X^J_k 为几何对象场的余确定函数(或场的 Pfaff 导数)　函数 X^J，X^J_k 的总体也是几何对象的一组相对分量，称为 $\{X\}$ 的延拓或 $\{X\}$ 的一阶延拓几何对象

几何对象场的微分方程组(6)沿着形式 θ^k 是正则可拓展的．这意味着作为系统的外微分的结果，可得出一个形式为

$$\Delta X^J_i\wedge\theta^i=0$$

的二次方程组，这里

$$\Delta X^J_i\equiv dX^J_i-\Xi^J_{i\alpha}(X^K,\ X^K_k)\omega^\alpha$$

方程组

$$\Delta X^J_i=X^J_{ik}\theta^k \tag{7}$$

连同(6)形成了拓展几何对象场的微分方程组　反之，系统(6)-(7)是正则可拓展的　经过 q 次拓展后可得到具有相对分量

$$\{X^J,\ X^J_k,\quad ,X^J_{k_1\ \ k_q}\}$$

的 q 阶延拓几何对象场的微分方程组

如果几何对象所相配的群 G 是 p 阶微分群 $GL^p(n,\ R)$，则几何对象被称为微分-几何对象(differential-geometric object)，而这样的对象场被称为微分-几何对象场．

如果一个场的生成对象覆盖另一个对象(被另一个对象所覆盖)，则前者的场称为覆盖的(被覆盖的)场，而后者的场称为被覆盖的(覆盖的)场．

如果一个几何对象场已被定义在一个微分流形 V_n

上，则 V_n 称为已被装配，而给定的场及生成它的对象相应地被称为装配场及装配对象

装配几何对象场诱导了 V_n 上的一个微分－几何结构（在词的广义理解下，是一个 G 结构） 据此，一个装配对象也被认为是一个结构场 结构的类型是由结构对象的类型所确定的

参考文献

[1] Veblen, O and Whitehead, G, The foundations of differential geometry, Cambridge Univ Press, 1932

[2] Лаптев, Г Ф, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, М, 1953(《Тр Моск матем об-ва》, т 2)

Н М Остиану 撰

【补注】 设 M 为一流形，$m\in M$ 是 M 的一点．很一般地说，在 $m\in M$ 处的一个几何对象是指在 $m\in M$ 处的（可容许）坐标系与 N 个数的有序集（即几何对象关于此坐标系的分量）之间的一个对应，使得

i) 对 m 处的每个坐标系 $\varphi\ U\to\mathbf{R}^n$, $m\in M$, 对应有 N 个数的一个集合，

ii) 如果数 $a_1,\cdots,g_N$ 对应于坐标系 φ，数 $g_1,\cdots,g_N$ 对应于坐标系 $\varphi'\ U'\to\mathbf{R}^n$, $m\in U'$，且在 $\varphi_i(U\cap U')$ 上 $f_i=\varphi_i\circ\varphi_i^{-1}$ 给出了局部坐标变换函数，则 g_j 乃是 $g_j(j=1,\ ,N)$ 及仅在 m 的任意小的邻域中的 $f_i(i=1,\ ,n)$ 的泛函的函数.

如果坐标变换均为解析的，则上述要求可写为 g 仅为 g_j 和 f_i 及其所有偏导数在 $\varphi(m)$ 处的值的函数

于是，举例来说，（在一点处）各种类型的张量都是几何对象．

将各个 N 个数的集合联结在一起的函数称为所研究的几何对象的变换规律 于是几何对象成为在研究微分几何时所遇到的最一般的东西 用这种观点对几何对象进行研究的详尽的材料可参见[A1], p 61 ff

如上面那样定义的几何对象及与 Lie 群 G 相配的几何对象在现代数学文献中出现得不多 人们倒是常可找到与 G 结构（G-structure），Γ 结构（这里 Γ 是个 Lie 伪群，见**伪群结构**（pseudo-group structure））及作用在流形上的（局部）变换群（[A2]）等有关的概念．

参考文献

[A1] Schouten, J A, Ricci-calculus, Springer, 1954(译自德文)

[A2] Kobayashi, S, Transformation groups in differential geometry, Springer, 1972

沈纯理 译

几何概率 [geometric probabilities, геометрические вероятности]

与随机地放置在平面或空间的几何图形的相对位置有关的事件的概率 最简单的例子可以陈述如下 随机投点到平面区域 A，如果区域 B 位于 A 中，那么点落入区域 B 中的概率是多少？如果假定所求的概率仅依赖于区域 B 的形状而不依赖于它在 A 中的位置，则必可得出它唯一地由区域 B 的面积和区域 A 的面积之比所确定的结论．

所求的概率关于在 Euclid 空间中包括平移、旋转和反射的变换群是不变的假定在绝大多数几何概率问题中是典型的．答案通常以“有利场合”集的不变测度与“所有场合”集的不变测度之比的形式得出（见**积分几何学**（integral geometry））．这与古典概率定义的类似性是显然的．可以看到，在与几何概率相联系的 **Bertrand 悖论**（Bertrand paradox）中仅有一个回答满足不变性条件

计算几何概率的第一个例子是 **Buffon 问题**（Buffon problem），它在几何中奠定了随机性思想的基础．这个思想的200年长的发展史，由狂热、深入研究时期和冷落、兴趣衰退时期交替组成．在20世纪下半叶，对这个主题日益增长的兴趣导致了所研究的模型的数目有了很大的增长（例如随机集，脉络） 结果，几何概率的理论已经成为概率论的一个新的分支——**随机几何学**（stochastic geometry）

参考文献

[1] Kendall, M G and Moran, P A P, Geometric probability, Griffin, 1963

[2] Kendall, D G and Harding, E F, Stochastic geometry, Wiley, 1974

Ю В Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Stoyan, D, Kendall, W S and Mecke, J, Stochastic geometry and its applications, Wiley, 1987

[A2] Ambartzumian, R V (ed), Stochastic and integral geometry, Reidel, 1987

[A3] Matheron, G, Random sets and integral geometry, Wiley, 1975

刘秀芳 译

等比数列 [geometric progression, геометрическая прогрессия]，亦称几何数列

一个数列，其中每一项都可由相邻的前一项乘以一个数 $q(\neq 0)$ 而得到，数 q 称为这个数列的公比（denominator） 如果 $q>1$，则几何数列称为递增的，如果 $0<q<1$，则称为递减的，如果 $q<0$，则得到交错变号的数列 几何数列的任何一项 a_j 都能通过它的首项 a_1 和公比 q 由公式

$$a_j=a_1q^{j-1}$$

来表示．几何级数（$q\neq 1$）的前 n 项之和由下列公式给出

$$S_n=\frac{a_1-a_1q^n}{1-q}=\frac{a_1q^n-a_1}{q-1}$$

如果 $|q|<1$，则当 n 无限增加时和 S_n 趋向极限 $S=a_1/(1-q)$ 数 S 称为无穷递减几何级数的和 (sum)

表达式

$$a_1+a_1q+\quad+a_1q^n+\quad,|q|<1$$

是最简单的收敛级数的一个例子——几何级数 (geometric series)，数 $a_1/(1-q)$ 是这个几何级数的和

等比级数又称为几何级数，这与下述性质有关 正项等比级数的任何一项 a_n 都等于与其相邻的前一项和后一项的**几何平均值** (geometric mean)，即 $a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$

О А Иванова 撰 张鸿林 译

几何环 [geometric ring，геометрическое кольцо]

一个代数簇的**局部环** (local ring) 或其完全化．域上的多项式环通过对一素理想的完全化、局部化和分式化等运算所得到的交换环称为代数几何环 (algebro-geometic ring) ([3])．一个不可约代数簇的局部环在完全化后不会得到幂零元 ([2])．局部环的这个性质通常称为解析可约性 (analytic reducibility) 正规簇 ([1]) 的局部环的一个类似的事实是 正规代数簇局部环的完全化是正规环 (解析正规性 (analytic normality))．已知有非解析可约或非解析正规的局部 Noetherian 环的例子 ([4]) 伪几何环 (pseudo-geometric ring) 是一个 **Noetherian 环** (Noetherian ring)，它对任一素理想的商环都是日本环 整环 A 称为日本环 (Japanese ring)，若它在其分式域的有限扩张中的整闭包是有限 A 模 ([5])．伪几何环的类关于局部化和有限型扩张是封闭的，它包含整数环和所有完全局部环

亦见**优环** (excellent ring)

参考文献

[1] Zariski, O and Samuel, P, Commutative algebra, 1, Springer, 1975

[2] Chevalley, C, Intersection of algebraic and algebroid varieties, *Trans Amer Math Soc*, 57 (1945), 1－85

[3] Samuel, P, Algèbre locale, Gauthier-Villars, 1953

[4] Nagata, M, Local rings, Interscience, 1962

[5] Grothendieck, A, Eléments de géometrie algebrique Ⅳ. Etude locale des schemes et des morphismes des schémas, Publ Math IHES, no 32 (1967)

В И Данилов 撰 裴定一 译 赵春来 校

几何动力学 [geometro-dynamics，геометродинамика]

统一场论的一个变型，它将所有物理对象简化为几何对象 几何动力学的创立分成几个阶段．

第一个阶段包括在广义相对论基础上创立引力和电磁学的统一理论 这个阶段几何动力学的主要问题可以简化方式表述如下 令给定一个时空的度规 g_{ij}，它是 Einstein 方程

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=T_{ik}(f_{\mu\sigma},g)$$

的一个解，其中 R_{ik} 是 Ricci 张量，T_{ik} 是真空中电磁场的能量动量张量，而 $f_{\mu\sigma}$ 是满足 Maxwell 方程的电磁场的场强张量 任务是用 g_{ik} 来表达 $f_{\mu\sigma}$ 当写成这个简化方式时，问题原则上有解 ([1])，但它的完全解呈现困难 (例如允许非电磁场的存在)，(1988) 尚未克服．

第二个阶段包括创立一个基本粒子理论．一对相互作用粒子的模型是所谓"柄"，它的最简单形式是 **Schwarzschild 场** (Schwarzschild field) 最大解析开拓的拓扑解释 ([2]) 之一 在这个模型中，一个基本粒子的特征 (例如电荷) 由"柄"的某些整数不变量给出 在几何动力学中，时空是多连通的，而其第一 **Betti 数** (Betti number) 与粒子数为同量级 引进了几何子 (geon) 的概念——某个给定辐射的波包，具有浓度足以致空间的相应畸变，使这个波包亚稳定 (即存在一段长时间) 几何动力学预示电磁的、中微子的和引力的几何子 几何子的概念是经典的．人们相信几何动力学概念的量子类似物是基本粒子总体的几何动力学描述 (几何子尚未在实验上观察到.)

第三个阶段包括创立一个连续介质理论，广义地说，它产生与广义相对论同样的结果.

假定几何动力学须包括重子荷守恒定律的破坏．一个具体例子是引力坍缩及随后的黑洞的蒸发过程．

第四个阶段包括试图随后创立一个量子几何动力学 考虑到度规的量子涨落，并证明在量级为 $(\hbar\kappa/c^3)^{1/2}\approx10^{-35}$cm 量级的距离 (其中 $\hbar$ 是 Planck 常量，κ 是 Einstein 引力常量，c 是光速)，这些涨落能实质地改变时空的拓扑学，而必须对应于量子基本粒子.

在写作本文时 (20 世纪 70 年代)，几何动力学是一个尚未充分发展的理论 自旋场的解释 (与张量场不同)，尤其是中微子场的解释，特别困难．几何动力学的许多特色没有充分的数学基础 超空间的理论 ([4]) 是要提供这种基础的一个尝试.

参考文献

[1] Rainich, G Y, Electrodynamics in general relativity theory, *Trans Amer Math Soc*, 27 (1925), 106－136

[2] Wheeler, J A, Geometrodynamics, Acad Press, 1962

[3] Harrison B K, Thorne, K S, Wakano, M, and Wheeler, J A, Gravitational theory and gravitational collapse, Univ Chicago Press, 1965

[4] Зельдович, Я Б, Новиков, И Д, Строение и эволюция Вселенной, М, 1975 (英译本 Zel'dovich, Ya B, Novikov, I D, Relativistic astrophysics, 2, Structure and evolution of the universe, Chicago, 1983)

Д Д Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Wheeler, J A, Some implications of general relativity for the structure and evolution of the universe, in XI Conseil de Physique Solvay Bruxelles 1958, 97－148

徐锡申 译

几何学 [geometry, геометрия]

数学的分支，其根本的论题是物体的空间关系和形状 几何学研究空间关系和形状时并不顾及真实物体的其他性质（密度，重量，颜色等） 在几何学后来的发展阶段，它也处理其他的关系以及与空间形状类似的真实形状 现在，几何学通常已被理解为研究在探讨齐性的对象，现象，事件——并不顾及它们的物理内容——中产生的任何关系与形状，它们与通常的空间关系和形状是相象的 例如，它在考察函数间的距离时并不考虑这些函数的任何特殊性质以及由这些函数描述的任何具体过程（例如，见**度量空间**（metric space），**泛函分析**（functional analysis））

历史回顾 几何学诞生在远古时期 它的产生是由于实践的需要（丈量土地，确定固体的体积）．最简单的一些几何概念和公设已被早期的埃及人与巴比伦人所熟知（公元前第二个千年期的初期） 那时候，几何公设是作为法则提出的，有一些原始的逻辑证明或者根本就没有任何证明 在公元前7世纪与公元后1世纪之间这段时期，几何学主要是在古希腊发展的 其成果是积累了有关决定三角形的度量关系，确定面积和体积，图形的比和相似，圆锥截线以及作图问题的知识 几何定理的比较严格的逻辑证明也在那段时期出现了．**Euclid的《几何原本》**（Elements）是几何学中已知事实的概要及它们的系统化（约公元前300年）．这本著作中提出了几何学的基本假设（公设），由此最简单的平面和立体图形的种种性质便能经逻辑推理导出 这本书也打下了公理方法的初步基础 天文学和大地测量学在公元1－2世纪的发展导致平面与三维**三角学**（trigonometry）的诞生

接下来，一直到17世纪，几何学的发展并不突出．欧洲的文艺复兴促进了几何学的发展．处理立体在平面上表示的透视理论（见**画法几何学**（descriptive geometry））是艺术家和建筑学家感兴趣的中心．这些需求的结果是出现了**射影几何学**（projective geometry）——几何学的分支，它处理图形在所谓的射影变换下不变的性质．

17世纪初，R Descartes（1596－1650）提出了一种全新的研究几何问题的方法 他创造了**坐标**（coordinates）法，这使在几何学中应用代数方法以及后来应用分析学成为可能．这件事标志着几何学蓬勃发展的开始 **解析几何学**（analytic geometry）产生了，其中由代数方程定义的曲线与曲面的性质便用代数方法加以研究．18世纪，L. Euler（1707－1783）与G. Monge（1746－1818）在几何学中应用解析方法奠定了经典的**微分几何学**（differential geometry）的基础．微分几何学的主要部分是曲线与曲面的理论，C F Gauss（1777－1855）和其他的几何学家对之作出了很大的发展和推广．作为几何与代数及分析相互作用的结果，接着便出现了各种特殊的演算，它们在几何学和数学的其他领域中应用得相当方便（**向量演算**（vector calculus），**张量演算**（tensor calculus），**微分形式**（differential form）方法）

不以代数和分析方法为基础，直接用几何图形进行推理的那部分几何学名叫*综合几何学*（synthetic geometry）

几何学的主题，它的主要分支以及与数学其他分支的联系 几何学的最初几步是从物理科学方面作出的，而且所得的最初的一些结果都和物理上可观测的量的性质有关 后来，一直到19世纪后半叶，几何学处理的是空间中物体的形状和关系，它们的性质是由Euclid（见**Euclid几何学**（Euclidean geometry））规定的一些公理确定的 Euclid空间对最简单的物理观测给出了一种如此满意的描述，以至于直到19世纪，对所有的实践目标，它与现实的空间都是相符合的 Н И Лобачевский（1793－1856）在1826年构造出一种几何学（见**Лобачевский几何学**（Lobachevskii geometry）），它所依据的一组公理仅在平行直线的公理（见**第五公设**（fifth postulate））上与Euclid的公理有所不同 其结果是得出一种逻辑上相容的、与Euclid几何学本质上不同的几何学 在数学中能构造各种固有几何学的不同空间这件事，变得清楚了（例如，见**非Euclid几何学**（non-Euclidean geometries）） 这也是多维空间想法的起源 接下来，几何学中新的一步是B Riemann（1826－1866）的思想，他在1854年提出一种广义的空间概念，把它作为任意的齐性对象或现象的连续族，而且他引进了一些空间，其中的距离是按某种给定的"无穷小步骤"的法则来测量的（引进了一种度量） 换言之，人们指定某个函数，它用对应于微小位移的坐标微分来表示沿一条曲线的距离．Riemann的这个想法的发展后来产生了各种广义的指定度量的方法，并导致对如此得到的这些空间中的几何学进行研究（见**Riemann空间**（Riemannian space），**Finsler空间**（Finsler space））．在研究各种力学系统或一般物理对象系统的现实空间中，选择合适的数学空间，并将其元素与所研究系统的对象进行对应，这与所论系统的本性有关 这种数学模型的好坏是由实验来检验的．各种不同的对象，如同或详或简研究的相同的对象，会要求用到不同的空间 在一般的时空物理理论（见**相对论**（relativity theory））中，就用到一种Riemann空间

促使几何学发展和系统化的因素之一是它与群论

的联系．1872年F Klein (1849－1925)在**埃尔兰根纲领** (Erlangen program)中把几何学的主要内容定义如下 给定一流形和它上面的一个变换群 要求人们去建立该群的不变量的理论．例如，正交群的不变量理论便定义了Euclid几何学 这种分类法对于**仿射几何学** (affine geometry)，**共形几何学** (conformal geometry)及**射影几何学** (projective geometry) 都是令人满意的．然而Riemann几何却不能用这种方式定义．因此，E Cartan便引入一些空间，其中对应的变换群在无穷小邻域中仅有局部作用，这就适用于Riemann空间和有不同**联络** (connection) 的空间 S Lie从连续变换群的观点提出了一种群的方法

几何学基础的逻辑分析一直在平行地进行，直到19世纪末 1899年，D Hilbert (1862－1945)在他的书《几何基础》(Grundlagen der Geometrie)（见**几何基础** (foundations of geometry)）中总结了几何学公理系统的相容性、极小性以及完全性

把空间作为齐性对象（现象，状态，图形，函数）连续族的现代概念是出于几何学与数学的其他分支有紧密联系的事实．这种联系在几何学于20世纪的发展中相当有力地表现出来了，当时总的说来，作为数学整体的一项成果，几何学变得极为分明，但它的界限却变得不那么清楚了 现在，数学中的空间被想象成具有某种结构的一个集合，即在其元素或子集之间有某些关系 对可称作连续性的最简单的相当一般的结构的研究，导致从几何学中分离出数学中很大的一个独立分支——拓扑学（见**一般拓扑学** (topology, general)） 几何学假定存在较为丰富多彩的各种结构．由于利用了解析工具，借助于张量（特别是向量）或其他的场，通常还规定了种种补充结构（联络，度量，共形结构和辛结构，等等）

对一些几何结构的研究也会涉及数学的其他领域 这与所用的研究方法有关 于是，**代数几何学** (algebraic geometry) 就研究代数簇和有关的代数与算术问题．几何定律的代数化使得在任意域上构造几何成为可能（包括有限域——有限几何） 这些分支是代数的一部分．无限维空间是在泛函分析中研究的 可是，在数学的所有这些分支中，几何的推理方法仍然是有用的，它是对图形直接进行推理，并不求助于计算．

几何学最有传统性的论题仍然是空间，它们是携有某种附加结构的流形，形状不相同的流形——特别是它们的子流形，以及在流形上的各种不同类型的对象的场．几何学的许多分支能用它们空间的类型及其中所研究的对象的类型进行描述 于是，微分流形的整体几何学是研究具光滑结构的流形，研究光滑流形及其上的光滑的场 而且，这种几何学是在整个流形上大范围地对它们进行研究的 **大范围几何学** (geometry in the large) 研究的是曲线和曲面的类似问题，并容许有非光滑性及奇性，它起源于H Minkowski (1864－1909)创立的**凸体** (convex body) 理论．对几何对象的样本进行度量是在**积分几何学** (integral geometry) 中研究的．**组合几何学** (combinatorial geometry) 是在各维Euclid空间，双曲和椭圆空间中，利用拓扑和度量工具研究几何对象的组合结构（例如最密集的包装与最小的覆盖）

几何学作为研究现实世界的最有力和富有成果的思想及方法来源之一的重要性，已由几何学的发展和应用以及数学与科学各分支中抽象对象的几何直觉的发展所证实

参考文献

[1] Александров, А Д , Геометрия, БСЭ, 3 изд , т 6

[2] Александров, А Д и др , Математика, ее содержание, методы и значение, М , 1956, **1**, 5－69, 180－245, **2**, 97－144（中译本 А Д 亚历山大洛夫等,数学——它的内容、方法和意义，科学出版社，1984)

[3] Waerden, B L van der, Science awakening, Noordhoff, 1975（译自荷兰文）

[4] Wieleitner, H , Geschichte der Mathematik, de Gruyter, 1923

[5] Klein, F , Development of Mathematics in the 19th century, Math Sci Press, 1979（译自德文）

[6] Struik, D J , A concise history of mathematics, Bell, 1954（译自荷兰文）

[7] Hilbert, D , Grundlagen der Geometrie, Springer, 1913（中译本 D 希尔伯特，几何基础，科学出版社，1987)

[8] Об основаниях геометрии, М , 1956

[9] Ефимов, Н В , Высшая геометрия, 5 изд , М , 1971

[10] Klein, F , Vorlesungen über höhere Geometrie, Springer, 1926

亦见个别几何定律的参考文献 Э Г Позняк 撰

【补注】 综合几何是与**几何基础** (foundations of geometry) 紧密相关的

如所知，Gauss和J Bolyai在Лобачевский之前或几乎在相同时候构思出一种非Euclid几何学 但是，后者先发表了他的想法．这一简史，例如见[A1]

群的不变量的理论已由E Cartan作了极其详尽的阐述

利用凸体理论，或凸几何学 (convex geometry) 去解决数论中问题的思想使Minkowski构思出**数的几何** (geometry of numbers) 它与最密集包装与最小覆盖理论（特别是球的）是密切有关的，这件事可追溯到J Lagrange和Gauss，并且它不仅在现代几何学中，而且在代数学和编码理论中均起着突出的作用．

以离散的方面为中心的几何理论（例如包装和覆盖，格点问题等）通常归入离散几何学 (discrete

geometry) 目下．

组合几何学与凸几何学，对现代应用数学的重要分支最优化和**运筹学** (operation research) 来说，是主要的几何工具．

参考文献

[A1] Bonola, R , Non - Euclidean geometry, Dover, reprint, 1955 (译自意大利文)

[A2] Hilbert, D and Cohn - Vossen, S , Anschauliche Geometrie, Springer, 1933

[A3] Tolke, J and Wills, J M (eds), Contributions to geometry, Birkhauser, 1979

[A4] Gruber, P and Wills, J M (eds), Convexity and its applications, Birkhauser, 1983

[A5] Davis, C , Grünbaum, B and Sherk, F A (eds), The geometric vein (Coxeter - Festschrift), Springer, 1980

[A6] Coxeter, H S M , Unvergangliche Geometrie, Birkhauser, 1963

[A7] Dubrovin, B , Novikov, S and Fomenko, A , Modern geometry, Springer, 1984 (译自俄文)

[A8] Greenberg, M , Euclidean and non - Euclidean geometries, Freeman, 1974

[A9] Berger, M , Geometry, 1－2, Springer, 1987 (中译本 M 贝尔热, 几何, 第1－5卷, 科学出版社, 1987－1991)

[A10] Coxeter, H S M , Introduction to geometry, Wiley, 1963

[A11] Boyer, C B , History of analytic geometry, Scripta Math , 1956

[A12] Chasles, M , Aperçu historique sur l'origine et le développment des methodes en geometrie, Gauthier - Villars, 1889

[A13] Coolidge, J L , A history of geometrical methods, Oxford Univ Press, 1947

[A14] Heath, Th L , A manual of greek mathematics, Dover, 1963

[A15] Klein, F , Vorlesungen über hohere Geometrie, Springer, 1926

[A16] Loria, G Storia della geometria descrittiva, U Hoepli, 1921

[A17] Russell, B , An essay on the foundations of geometry, Dover, reprint, 1956

[A18] Waerden, B L van der, Geometry and algebra in ancient civilizations, Springer, 1983

[A19] Kline, M , Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford Univ Press, 1972

姜国英 译　杨 路 校

大范围几何学 [geometry in the large, геометрия в целом]，整体几何学 (global geometry)

处理完整的几何对象（整条曲线，整张曲面，整个空间，类似地，整个向量场，整个张量场或整个某种其他对象的场，类似地，一个几何图形的完整的映射或几何对象的一个场到另一个场的完整的映射）的种种几何理论　术语“大范围几何学”(德文 “Geometrie im Grossen”) 于20世纪初出现在德文的数学文献中　它不同于局部几何学　一个几何对象（场，映射）在局部几何学中，如同在经典的**微分几何学** (differential geometry)中，是仅在一个足够小的区域中被研究的　局部几何学的方法在大范围几何学中已证明是不适合的　在不涉及这种差异时（例如在初等几何学中，在流形的拓扑学中），术语“大范围几何学”是不使用的

“大范围”性质与“小范围”性质之间的质的差异首先体现在有关刚性、形变和曲面的等距浸入这些问题中（例如，一小片凸曲面能在保持其凸性之下作弯曲，而对一个凸体的整个表面来说这是不可能的），体现在测地线的性状中（例如，在一小区域中，光滑曲面上的两点能由唯一的一条测地线相连接，然而在完整的闭曲面上，它们能由无限条测地线相连接），还体现在在不同流形上指定具所给性质度量的可能性中(例如，如果一完全曲面只与球面，平面或射影平面同胚，那么在该曲面上能指定一种曲率处处为正的度量)　这种种问题引出了诸如**大范围变分学** (variational calculus in the large) 这样的独立理论．能较好地适合于研究大范围几何学的微分几何现代方法的发展，对多维无奇性流形上的正则几何结构，引出了许多大范围的定量关系，也产生了许多定性的成果．

当光滑的浸入流形或场在这种流形上延拓时，奇性的产生通常是不可避免的．另外，许多极值问题的解是在非正则的对象上获得的．由于这个原因，许多大范围几何学的问题更自然地就在包含非正则的对象的类上提了出来　为此，就需要有别于微分几何学方法的其他一些方法，将大范围的研究与奇性的研究结合在一起的这种方法，是由 A Д Александров, H B Ефимов 和 A B Погорелов 的几何学派对二维曲面发展起来的，事实上他们在曲面理论中得到了最先进的成果

参考文献

[1] Кон - Фоссен, C Э Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, M , 1959

[2] Александров, A Д , Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, M -Л , 1948

[3] Ефимов, H B , Геометрия 《в целом》, в кн Математика в СССР за 40 лет 1917－1957 т 1, M , 1959

[4] Погорелов, A B , Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, M , 1969 (英译本 Pogorelov, A V , Extrinsic geometry of convex surfaces, Amer Math Soc , 1973)

[5] Gromoll, D , Klingenberg, W and Meyer, W , Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968

A Д Александров, B A Залгаллер 撰

【补注】

参考文献

[A1] Klingenberg, W, Riemannian geometry, de Gruyter, 1982 (译自德文)

[A2] Cheeger, J and Ebin, D, Comparison theorems in Riemannian geometry, North-Holland, 1975

[A3] Yau, S T, Problem section, in Seminar on differential geometry, Ann of Math Studies, Vol 102, Princeton Univ Press, 1982, 669-706

[A4] Milnor, J, Morse theory, Princeton Univ Press, 1963

姜国英 译 杨 路 校

浸入流形的几何学[**geometry of immersed manifolds**, **погруженных многообразий геометрия**]

研究Euclid空间或Riemann空间中子流形的外蕴几何学及研究外蕴和**内蕴几何学**(interior geometry)之间关系的一种理论. 浸入流形的几何学是Euclid空间$\mathbf{R}^3$中曲面的经典微分几何学的一种推广 浸入流形的内蕴及外蕴几何学通常局部地分别用第一、第二基本形式来描述. 对m维流形M^m在流形N^n中的浸入, 存在着合同的概念(见**流形的浸入**(immersion of a manifold)) 在浸入流形几何学中人们考察那些对合同浸入是恒同的性质, 即由浸入f所定义的曲面F^m的性质. 因而, 从几何学的观点来看, 浸入及曲面是没有区别的. 浸入f诱导了**切丛**(tangent bundle)之间的映射$df\ \ TM^m \to TN^n$

子流形F的第一二次(基本)形式(first quadratic (fundamental) form)是在TM^m上由

$$g_p(X, Y) = \bar{g}_{f(g)}(X, Y)$$

所定义的, 这里$p \in M^m$, $X, Y \in TM^m$及$\bar{g}$是N^n上的Riemann度量. 在这里及下文中, 向量$X \in TM^m$与其象$df(X)$在记号上并不加以区分 二次型g定义了在M^m上Riemann空间M^m_g的结构, M^m_g的性质构成了子流形F的内在几何学的内容 如果$\{x^k\}, \{y^\alpha\}(k=1, \quad, m, \alpha=1, \cdot, n)$为$M^m$和$N^n$中的局部坐标, 则浸入$f$用参数方程$y^\alpha = f^\alpha(x^1, \quad, x^m)$给出. 在局部坐标下,

$$g_p(X, Y) = g_{ij}(p) X^i X^j,$$

这里$\{X^i\}$和$\{Y^j\}$是向量X和Y的分量,

$$g_{ij} = \bar{g}_{\alpha\beta} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f_\beta}{\partial x^j},$$

$\{\bar{g}_{\alpha\beta}\}$是Riemann空间$N^n$的度量张量$\bar{g}$的分量.

诸如曲线长度, 区域的体积, 内蕴度量的Levi-Civita联络∇_X, 曲率变换$R(X, Y)Z$等概念是与F的内蕴几何学相关连的. 在这里所适用的计算公式能在**Riemann几何学**(Riemannian geometry)的条目中查到.

第二(基本)张量(形式)(second (fundamental) tensor (form))H定义为

$$H(X, Y)_p = (\bar{\nabla}_X Y)_p - (\nabla_X Y)_p,$$

这里$\bar{\nabla}$和∇分别是N^n和M^m中的Levi-Civita联络 事实上, H与向量场X, Y无关, 而仅与它们在点p处的值有关, 且H是一个双线性的对称映射

$$(TM^m)_p \times (TM^m)_p \to (\nu M^m)_p,$$

这里νM^m是M^m在N^n中的**法丛**(normal bundle) 对每一单位向量$\xi \in (\nu M^m)_p$, 方程

$$\langle H(X, Y), \xi \rangle_p = h_\xi(X, Y)_p = \langle A_\xi(X), Y \rangle_p$$

定义了在方向ξ下的第二二次形式(second quadratic form)(或第二基本形式)h_ξ及形状算子A_ξ 在局部坐标系下, 形式h_ξ的分量$h_{ij}(\xi)$为

$$h_{ij}(\xi) = \bar{g}_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} \xi^\beta,$$

这里$\{\xi^\beta\}$是ξ的分量

可以用通常的方式(即如对Euclid空间$\mathbf{R}^3$中的曲面那样)定义在方向ξ下的主曲率、主方向以及其他与形式h_ξ有关的概念

利用初等对称函数, 可定义多种主曲率函数, 诸如平均曲率

$$H = \frac{1}{m} \sqrt{\sum_{j=1}^{m+n} \left(\sum_{i=1}^{m} K_i(\xi_j) \right)^2},$$

这里$\{\xi_j\}$是法向量的一组标准正交基, $K_i(\xi)$是形式h_i的主曲率, 陈省身-Lashof曲率

$$K = \frac{1}{\omega_{n-m-1}} \int_{\xi \in S^{n-m-1}} |K_1(\xi) \quad K_m(\xi)| d\sigma,$$

这里ω_l是球面S^l的体积, 及第二基本形式的长度

$$S = \sqrt{\sum_{i,j} K_i^2(\xi_j)},$$

(见[1]-[3])

子流形在p点处的第一、第二基本形式的值在至多允许二阶小量的误差下确定了曲面在p的无限邻近处的形状. 每一个$\xi \in (\nu M^m)_p (|\xi|=1)$对应了一个密切抛物体(对Euclid空间中的子流形, 这是关于子流形在由$(TM^m)_p$及ξ所定义的$(m+1)$维平面上投影的密切抛物体) 如果$m=n-1$(即超曲面的情形), 则形式h_ξ在至多相差一个符号的意义下是唯一的. 在这种情形下, 第二基本张量及第二基本形式是没有区别的, 其理论十分类似于$\mathbf{R}^3$中曲面的经典理论

基本方程. 浸入流形的基本方程, 即Gauss方程(Gauss equation), Codazzi-Mainardi方程(Codazzi-Mainardi equation)和Ricci方程(Ricci equation), 建

立了第一、第二基本形式及 M 和 N 的曲率张量之间的关系 对向量丛 TN 关于 M 的限制丛上的每一个 M 的向量场截面 X，令 $t(X)$ 表示切向分量，$n(X)$ 为法向分量 对 M 上的向量场 X, Y，用来定义第二基本形式

$$\bar{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+H(X,\ Y)$$

的 Gauss 公式 (Gauss formula) 给出了 $\bar{\nabla}_X Y$ 的法向－切向分解．在 X 是 M 上的一个向量场及 TN 的截面 ξ 与 M 正交的情形下，(定义形状算子的) Weingarten 公式 (Weingarten formula)

$$\bar{\nabla}_X\xi=-A_\xi X+D_X\xi$$

也给出了法向-切向分解 藉助于形状算子及第二基本形式，对 M 上三个向量场 X, Y, Z, $\bar{R}(X,\ Y)Z$ 的切向分量等于

$$t(\bar{R}(X,\ Y)Z)=R(X,\ Y)Z+ \\ +A_{H(X,Z)}(Y)-A_{H(Y,Z)}(X)$$

取 M 上第四个向量场 W，这将导致 Gauss 方程

$$\langle\bar{R}(X,\ Y),\ Z,\ W\rangle=\langle R(X,\ Y)Z,\ W\rangle+ \\ +\langle H(X,Z),\ H(Y,\ W)\rangle-\langle H(Y,Z),\ H(X,\ W)\rangle. \tag{1}$$

$\bar{R}(X,\ Y)Z$ 的法向分量等于

$$n(\bar{R}(X,\ Y)Z)=D_X H(Y,\ Z)-D_Y H(X,\ Z)+ \\ +H(X,\ \nabla_Y Z)-H(Y,\ \nabla_X Z)-H([X,\ Y],\ Z) \tag{2}$$

在向量丛 $\mathrm{Hom}(TM\times TM,\ \nu(M))$ 上用公式

$$(\tilde{\nabla}_X s)(Y,\ Z)= \\ =D_X(s(Y,\ Z))-s(\nabla_X Y,\ Z)-s(Y,\ \nabla_X Z)$$

定义联络 $\tilde{\nabla}$，这里 $\nu(M)$ 是 M 在 N 中的法丛 于是 (2) 能重写为

$$n(\bar{R}(X,\ Y)Z)= \\ =(\tilde{\nabla}_X H)(Y,\ Z)-(\tilde{\nabla}_Y H)(X,\ Z) \tag{2'}$$

方程 (2) (或 (2′)) 是 (在内蕴形式下的) Codazzi-Mainardi 方程 (亦见 **Peterson-Codazzi 方程** (Peterson-Codazzi equations))

最后，考虑 $\bar{R}(X,\ Y)\xi$ 的法向分量，这里 ξ 是 $\nu(M)$ 的一个截面 (由于 $\bar{R}(W,\ \xi,\ X,\ Y)=\langle R(X,\ Y)\xi,\ W\rangle$ 的对称性质，水平分量得自 Codazzi-Mainardi 方程) 可得 Ricci 方程

$$n(\bar{R}(X,\ Y)\xi)=\tilde{R}(X,\ Y)\xi-H(X,\ A_\xi Y)+ \\ +H(Y,\ A_\xi X) \tag{3}$$

这里 $\tilde{R}=R_D$ 是法丛 $\nu(M)$ 上联络 D 的曲率张量．对等距浸入而言，Gauss, Codazzi-Mainardi 和 Ricci 方程是仅有的一般方程．可合理地期望当 $R(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ 中有三个场是法向时能得出一些有趣的结果．确实地，$(R(\xi,\ \eta)\xi)_p$ 对在点 P 处的浸入流形没有什么作用 (除了 P 点本身)

如外围流形 N 有常曲率 k，则 $\bar{R}(X,\ Y)Z=k(\langle Z,\ Y\rangle X-\langle Z,\ X\rangle Y)$，且 $\bar{R}(X,\ Y)Z$ 切于 M Gauss, Ricci 和 Codazzi-Mainardi 方程化为

$$\langle R(X,\ Y)Z,\ W\rangle= \\ =k(\langle X,\ W\rangle\langle Y,\ Z\rangle-\langle X,\ Z\rangle\langle Y,\ W\rangle)+ \\ +\langle H(X,\ W),\ H(Y,\ Z)\rangle-\langle H(X,\ Z),\ H(Y,\ W)\rangle, \tag{4}$$

$$\langle\bar{R}(X,\ Y)\xi,\ \eta\rangle=\langle\tilde{R}(X,\ Y)\xi,\ \eta\rangle+ \\ +\langle[A_\xi,\ A_\eta]X,\ Y\rangle, \tag{5}$$

这里 $[A_\xi,\ A_\eta]=A_\xi A_\eta-A_\eta A_\xi$，且

$$\tilde{\Delta}_X H(Y,\ Z)-\tilde{\Delta}_Y H(X,\ Z)=0 \tag{6}$$

这些方程在更一般的情形下也是有意义的．事实上，令 E 是过 M 上的一个 Riemann 向量丛，即存在 E 上的一个 (丛) Riemann 度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$，且设存在一个与度量相适合的 Riemann 联络 D $TM\times\Gamma(E)\to E$，这里 $\Gamma(E)$ 表示 E 的光滑截面的空间．这意味着

$$\nabla_X\langle\xi,\ \eta\rangle=\langle D_X\xi,\ \eta\rangle+\langle\xi,\ D_X\eta\rangle.$$

使得 A_ξ $TM\to TM$ 对所有 ξ 均为自伴的双线性映射 A $TM\times E\to TM$ 称为 E 中的第二基本张量，于是 E 中相配的第二基本形式定义为

$$\langle H(X,\ Y),\ \xi\rangle_E=\langle A_\xi X,\ Y\rangle.$$

在此更一般的情形下，三个方程 (4), (5), (6) 仍完全有意义 现有 **Bonnet 定理** (Bonnet theorem) 的下列推广 ([2]) 设 M 是一个单连通 Riemann 流形，在其上装配一个 n 维的 Riemann 向量丛及一个相容的联络 D，第二基本张量 A 及相配的第二基本形式 H 设方程 (4), (5), (6) 成立，则存在着 M 到一个常曲率为 k 的 $\dim(M)+n$ 维的单连通 Riemann 流形 (空间形式 (space form)) 中的一个等距浸入，使法丛为 E

浸入在下列的意义下是唯一的．设 f, f' $M\to\mathscr{R}^m(k)$ 是 M 到常曲率 k 的空间形式 $\mathscr{R}^m(k)$ 中的两个等距浸入，且有相应的法丛 E 和 E'，及在其上的诱导丛度量，第二基本形式及联络．假设存在一个丛映射 $E\to E'$，

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\alpha} & E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow[g]{} & M \end{array}$$

它覆盖了 M 的等距 g 且使 α 保持丛度量、联络及第二基本形式　于是存在 $\mathscr{A}^m(k)$ 的一个刚性运动 G，使得 $G\circ f=f'\circ g$

浸入类（immersion classes）　很早以来，自 Riemann 流形到 $\mathbf{R}^n$，有时也到常曲率 K 的空间中的等距浸入的存在性定理开始，高维浸入流形的几何学就兴起并得到了发展（见**等距浸入**（isometric immersion））关于外蕴几何性质及曲面的外蕴与内蕴几何之间的联系，仅对 $\mathbf{R}^3$ 中的二维曲面详尽地进行了考察　对曲面上的点存在着一种分类，对二维曲面就导致了凸曲面、鞍面及可展曲面等类曲面　与其他曲面相比，这几类曲面成为整体微分几何学研究中的基本事物．在高维情形下，曲面上的点的这种分类尚未见发现（1983）对高维曲面，仅某些类是知道的　k 凸曲面，k 鞍面，k 可展曲面．

***k* 凸曲面**（k-convex surfaces）　$\mathbf{R}^n$ 中曲面 F^m 称为 k 凸的（k-convex），如果对每点 $p\in F^m$，存在法向 $\xi_p\in(\nu F^m)_p$，使得 $h_p(\xi)$ 为正定，且如果对任何 k 维方向 $\sigma_k\in(TF^m)_p(2\leqslant k\leqslant m)$，能在 σ_k 上找到一个二维方向 σ_2，使得 $h_p(\xi)(X,Y)>0$（或 $h_p(\xi)(X,Y)\equiv 0$）对每一个 $\xi_p\in(\nu F^m)_p$ 及 $X,Y\in\sigma_2$，$X,Y\neq 0$ 成立．$\mathbf{R}^n$ 中的 2 凸曲面 F^m 是某个 $\mathbf{R}^{m+1}\subset\mathbf{R}^n$ 中的凸超曲面（[4]）k 凸曲面的内蕴度量具有下列性质　在每点 P 处及对切空间中的每个 k 维方向 σ_k，能找到一个二维方向 $\sigma_2\subset\sigma_k$，使得曲率在 σ_2 方向为严格正的．

***k* 鞍面**（k-saddle surfaces）　$\mathbf{R}^n$ 中的曲面 F^m 称为 k 鞍的（k-saddle），如果对每点 P 及每个法向 $\xi\in(\nu F^m)_p$，$h_p(\xi)$ 的具有一个固定符号的本征值的个数不超过 $(k-1)$，$2\leqslant k\leqslant m$　二维的 k 鞍面是 $\mathbf{R}^n$ 中一个通常的鞍面，人们不能用超平面从它那儿割去鞍点　k 鞍面的内蕴度量具有下列性质　在每点 P 处，对切空间中的每一个 k 维方向 σ_k，存在一个二维方向 $\sigma_2\subset\sigma_k$，使得曲率在 σ_2 方向非正　如果 k 鞍面在 $\mathbf{R}^n$ 中是完全的，则它的同调群 $H_i(F^m)=0$，对 $i\geqslant k$（[4]，[5]）　具有非负 Ricci 曲率的完全 m 维 k 鞍面 F^m 乃是具有 $m-k+1$ 维母元的柱面

***k* 可展（*k* 抛物）曲面**（k-developable（k-parabolic）surfaces）　$\mathbf{R}^n$ 中的曲面 F^m 称为 k 可展的（k-developable），如果对每点 p，存在一个 k 维方向 $\sigma_k\subset(TF^m)_p$，它是由在给定点处关于每一个法向的第二基本形式的零本征值所相应的本征向量所构成的．k 可展曲面的内蕴度量具有下列性质　在每点 P 处，能找到切空间 $(TF^m)_p$ 的一个 k 维子空间 σ_k，使得对任何向量 $X\in\sigma_k$，有 $R_{XY}=0$，这里 $Y\in(TF^m)_p$ 是切空间中任意向量，R_{XY} 是曲率算子．如果 k 可展曲面 F^m 在 $\mathbf{R}^n$ 中是完全的，且装配有一个具有非正 Ricci 曲率的内蕴度量，则它是一个具有 k 维母元的柱面（[6]）

自由浸入（free immersions）．在每点 $p\in F^m$ 处，如果 $H_p(X,Y)$ 的象有最大可能的维数 $m(m+1)/2$，则称此浸入为自由的（free）　在此情形下，浸入 F^m 的径向量的一阶、二阶导数形成了一个线性独立系统．在自由浸入类中，存在着维数 $n>m(m+1)/2+3m+5$ 的等距浸入，这引起了内蕴和外蕴几何学之间联系的完全丧失．例如，$\mathbf{R}^n(n>m(m+1)/2+3m+5)$ 中一个 m 维流形 M^m 的两个自由等距浸入，可用一个由 M^m 的自由等距浸入所构成的同伦相联系（[7]）

具有小余维数的浸入（immersions with small codimension）　如果浸入的余维数 q 很小，则由对流形的内蕴度量的条件可得出　必存在着对曲面的第二基本形式的限制．而由第二基本形式的性质能推导曲面的拓扑及外蕴几何性质　特别，能得到不可浸入定理．例如，如果具有截面曲率 $K_\sigma\leqslant 0$ 的 M^m 被等距浸入到 $\mathbf{R}^{m+q}(q>m)$ 中，则 M^m 必为 $(q+1)$ 鞍面，且（在完全的情形下）其同调群 $H_k(k\geqslant q+1)$ 为零（[5]）特别地，具有 $K_\sigma\leqslant 0$ 的紧 M^m 不能浸入到 $\mathbf{R}^{2m-1}$ 之中（[8]，[9]）．如果另一方面 $K_\sigma<0$，则 M^m 甚至不能局部地浸入到 $\mathbf{R}^{2m-2}$ 之中（[9]）．类似地，具有 $K_\sigma<1$ 的 M^m 不能浸入到半径为 1 的球面 S^{2m-2} 之中．S^{2m-1} 中紧的 F^m，如果 $K_\sigma<1$，则具有零 Euler 示性类且有一个紧的可平行化的覆盖流形（[10]）．考察 $\mathbf{R}^{m+q}$ 中的曲面 F^m，$q\leqslant m+2r-2$，且 $K_\sigma<0$，则它的法 Понтрягин 类（Pontryagin class）满足条件

$$\sum 2^{q-2}p_i^{\perp}p_{r-i}^{\perp}=0$$

如果 $K_\sigma>0$，则由 $q\leqslant m-1$ 知道 F^m 是一个 $(q+1)$ 凸曲面（[9]）　特别，对 $q=1$，它是一个 2 凸曲面．如果 $K_\sigma>0$ 及 $q=2$，则紧曲面 $F^m(m\geqslant 3)$ 具有球面的同调（[11]）　如果 $\mathbf{R}^{m+q}$ 中的 F^m 具有非正的截面曲率，则它是一个 $(m-q(q+1))$ 可展曲面，且在完全的情形下，F^m 是一个具有 $(m-q(q+1))$ 维母元的柱面（[10]）　另一方面，如果 $M^m=M^k\times\mathbf{R}^{m-k}$ 及 $q\leqslant n-2k$，则流形 M^m 在 $\mathbf{R}^{m+q}$ 中的浸入是一个 $(m-2k-q)$ 可展曲面（[8]），且在完全的情形下，F^m 是一个具有 $(m-2k-q)$ 维母元的柱面．在更一般的假设下，紧曲面

$$M^m=M^{p_1}\times\quad\times M^{p_q}\to\mathbf{R}^{n+q},\ p_i\geqslant 2,$$

是超曲面的乘积（[12]）．

参考文献

[1] Eisenhart，L　P，Riemannian geometry，Princeton Univ　Press，1949

[2] Chen，B，Geometry of submanifolds，M　Dekker，1973

[3] Chern，S　S　and Lashof，R　K，On the total cur-

vature of immersed manifolds, *Amer J Math*, **79** (1957), 306 – 318

[4] Шефель, С З 《Сиб матем ж》, **10** (1969), 2, 459 – 466

[5] Глазырин, В В, 《Докл АН СССР》, **233** (1977), 6, 1028 – 1030

[6A] Hartman, P, On isometric immersions in Euclidean space of manifolds with non-negative sectional curvatures, *Trans Amer Soc*, **115** (1965), 94 – 109

[6B] Hartman, P, On isometric immersions in Euclidean space of manifolds with non-negative sectional curvatures II, *Trans Amer Soc*, **147** (1970), 529 – 540

[7] Громов, М Л, 《Докл АН СССР》, **192** (1970), 6, 1206 – 1209

[8] Chern, S S and Kuiper, N H, Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemann manifolds in Euclidean space, *Ann of Math*, **56** (1952), 3, 422 – 430

[9] Боровский, Ю Е, Шефель, С З, 《Сиб матем ж》, **19** (1978), 6, 1386 – 1387

[10] Борисенко, А А, 《Матем сб》, **104** (1977), 4, 559 – 576

[11] Moore, J D, Codimension two submanifolds of positive curvature, *Proc Amer Math Soc*, **70** (1978), 1, 72 – 74

[12] Gardner, R B., New viewpoints in the geometry of submanifolds of $\mathbf{R}^N$, *Bull Amer Math Soc*, **83** (1977), 1, 1 – 35

В. А Топоногов, С З Шефель 撰

【补注】 平均曲率乃是平均曲率法向的长度，而平均曲率法向量是用（取值于法向量的）双线性形式 H 关于第一基本形式取迹来得到的. 极小浸入是用平均曲率法向量恒为零的性质来定义的. 它们局部地解出了最小面积问题

陈（省身）-Lashof 曲率的被积项是 Lipschitz-Killing 曲率的绝对值 众所周知的陈（省身）-Lashof 定理（Chern-Lashof theorem）指出，对 Euclid 空间的紧浸入子流形，陈-Lashof 曲率至少为 2，适当维数的仿射子空间的凸超球面的陈-Lashof 曲率值正好为 2

参考文献

[A1] Gromov, M, Partial differential relations, Springer, 1980（译自俄文）

[A2] Gromov, M and Rokhlin, V, Embeddings and immersions in Riemannian geometry, *Russian Math Surveys*, **25** (1970), 5, 1 – 57

沈纯理 译

数的几何 [geometry of numbers, геометрия чисел]

几何数论（geometric number theory）

用几何方法研究数论问题的数论分支. 1896年 H. Minkowski 在他的基础专著（[1]）中，对数的几何的真正含义给出了系统的描述 某些命题在研究 n 维 Euclid 空间中的图形时似乎是显然的，但在数论中却有着深刻的结论（这已经被 Minkowski 指出），这一事实正是该学科的出发点，并逐步成为数论的独立分支

数的几何的一个基本和典型的问题是确定某个实函数

$$F(x)=F(x_1,\cdots,x_n)$$

的算术最小值 $m(F)$，其中的 $m(F)$ 是当 x 取遍满足某些附加条件（例如 $x\neq 0$）的所有整数点（即具有整数坐标的点）时 $F(x)$ 的下确界 在许多重要的特殊情形下，关于 $m(F)$ 的信息可以从 Minkowski 凸体定理（Minkowski convex-body theorem）得到，这个定理可以描述如下 令 $F(x)<1$ 是一个体积为 V_F 的 n 维凸体并满足 $F(-x)=F(x)$ 及 $F(tx)=tF(x)$（对 $t\geqslant 0$），那么

$$m(F)\leqslant 2V_F^{-1/n}.$$

在研究 Diophantus 不等式（见 **Diophantus 逼近**（Diophantine approximations））

$$|F(x)|\leqslant c$$

的解的存在条件时，量 $m(F)$ 是有用的. 数论中很多问题可以归结到这个问题 二次型的几何（见**二次型**（quadratic form））构成数的几何中一个独立的篇章.

在数的几何中，两个一般形式的问题分别称为齐次问题和非齐次问题.

齐次问题（homogeneous problem）构成数的几何中很多研究的课题处理**点格**（lattice of points）Λ 上的距离函数（见**射线函数**（ray function））F 的齐次最小值 $m(F,\Lambda)$ 格（点）的概念在数的几何中是基本概念之一 令 $a_1,\ \ ,a_n$ 是 n 维 Euclid 空间中线性无关的向量. 点集

$$\{g_1a_1+\ \ +g_na_n\}$$

称为具有基底 $a_1,\ \ ,a_n$ 和行列式

$$d(\Lambda)=|\det(a_1,\ \ ,a_n)|$$

的点（格）（lattice (of points)），其中每个 $g_1,\cdot\cdot,g_n$ 彼此无关地取遍所有整数.

在 $\mathbf{R}^n$ 中，给定距离函数 $F=F(x)$ 和具有行列式为 $d(\Lambda)$ 的格 Λ F 在 Λ 上点 $a\neq 0$ 的值的最大下界

$$m(F,\Lambda)=\inf_{\substack{a\in\Lambda\\ a\neq 0}}F(a)$$

称为 F 在 Λ 上的最小值（minimum）（或者，更确切

地，称为齐次算术最小值（homogeneous arithmetical minimum)）．最大下界可以或者不可以达到，熟知的由不等式 $F(x)<1$ 定义的有界星形体是可以达到的(见**星形体**(Star-like body))．

为了估计 $m(F,\Lambda)$ 的上界，必须计算（或估计）矩离函数 F 的 Hermite 常数（Hermite constant）$\gamma(F)$，它的定义如下

$$\gamma(F)=\sup_{\Lambda}\frac{m(F,\Lambda)}{d(\Lambda)^{1/n}},$$

其中上确界是在所有的 n 维格 Λ 的集合 $\mathbf{Z}_n$ 上取的．数的几何中心课题是确定下面几个量之间的关系，它们是 $\gamma(F)$，集合 $\mathfrak{G}_F=\{x\ \ F(x)<1\}$ 的临界行列式(见下面定义($\Delta(\mathfrak{G}_F)$)和(如果 F 是凸的对称距离函数)体 $\mathfrak{G}_F$ 的**稠密格填装**(packing)的密度 $\theta(\mathfrak{G}_F)$

在 $\mathbf{R}^n$ 中给定集合 $\mathfrak{M}$ 和具有行列式 $d(\Lambda)$ 的格 Λ 格 Λ 称为对 $\mathfrak{M}$ 容许的（admissible）或者 $\mathfrak{M}$ 容许的($\mathfrak{M}$-admissible)，如果 $\mathfrak{M}$ 不包含格 Λ 的非零点．至少有一个容许格点的集合 $\mathfrak{M}$ 称为有限型集（set of finite type)，否则称为无限型集(set of infinite type)．令 $\mathfrak{M}$ 是一个有限型集合，所有 $\mathfrak{M}$ 容许格 Λ 的行列式 $d(\Lambda)$ 集合的下确界

$$\Delta(\mathfrak{M})=\inf d(\Lambda)$$

称为 $\mathfrak{M}$ 的临界行列式(critical determinant) $\Delta(\mathfrak{M})$ 任何满足条件

$$d(\Lambda)=\Delta(\mathfrak{M})$$

的 $\mathfrak{M}$ 可容许格 Λ 称为 $\mathfrak{M}$ 的临界格(critical lattice)．对于无限型集合 $\mathfrak{M}$，可以定义 $\Delta(\mathfrak{M})=+\infty$．

距离函数 F 的 Hermite 常数 $\gamma(F)$ 的计算被归结为由 $F(x)<1$ 定义的星形体 $\mathfrak{G}_F$ 的临界行列式 $\Delta(\mathfrak{G}_F)$ 的计算

$$\gamma(F)=\{\Delta(\mathfrak{G}_F)\}^{-1/n}$$

临界行列式和稠密格填装的密度之间的联系由下面的 Blichfeldt 定理（Blichfeldt theorem）给出．令 $\mathfrak{R}$ 是任意集合，$D\mathfrak{R}$ 是相应的差集合(即点 $\xi-\eta$ 的集合，这里 $\xi,\eta\in\mathfrak{R}$) 及 Λ 是格 为使排列(arrangement) $\{\mathfrak{R},\Lambda\}$，也就是使集合簇 $\{\mathfrak{R}+a\}$(其中 $a\in\Lambda$)为一个填装的充分必要条件是 格 Λ 是 $D\mathfrak{R}$ 允许的．

测度为 $V(\mathfrak{R})$ 的有界Lebesque 可测集 $\mathfrak{R}$ 的稠密格填装的密度 $\theta(\mathfrak{R})$ 定义为

$$\theta(\mathfrak{R})=\frac{V(\mathfrak{R})}{\Delta(D\mathfrak{R})}$$

对任意集合 $\mathfrak{M}$ 和满足条件 $D\mathfrak{R}\subset\mathfrak{M}$ 的测度为 $V(\mathfrak{R})$ 的 Lebesque 可测集 $\mathfrak{R}$，下面的不等式(Blichfeldt 定理的另一种描述)成立

$$\Delta(\mathfrak{M})\geqslant V(\mathfrak{R})$$

如果 $\mathfrak{R}$ 是关于原点 O 对称的凸体，那么

$$\Delta(\mathfrak{R})\geqslant\frac{V(\mathfrak{R})}{2^n\theta(\mathfrak{R})},$$

这里 $\theta(\mathfrak{R})$ 是 $\mathfrak{R}$ 的稠密格填装的密度．这就表明，在对称距离函数 F 的情形下，$\gamma(F)$ 的计算归结为由 $F(x)<1$ 定义的体 $\mathfrak{G}_F$ 的稠密格填装的密度的计算．

在数的几何中，一个非常重要的命题是 Minkowski 凸体定理（Minkowski convex-body theorem)．令 $\mathfrak{R}$ 是凸体，并对坐标原点对称，记 $V(\mathfrak{R})$ 为它的体积，那么

$$\Delta(\mathfrak{R})\geqslant2^{-n}V(\mathfrak{R}).\qquad(1)$$

换言之，一个格 Λ，如果满足

$$V(\mathfrak{R})>2^n d(\Lambda),$$

则在 $\mathfrak{R}$ 中有不同于零的点．

不等式 (1)就是熟知的 Minkowski 不等式（Minkowski inequality)，它给出了关于原点对称的凸体 $\mathfrak{R}$ 的临界行列式 $\Delta(\mathfrak{R})$ 的下界估计．一般情形下，这个不等式不可能被改进．取等号当且仅当 $\theta(\mathfrak{R})=1$．满足条件 $\theta(\mathfrak{P})=1$ 的凸体 $\mathfrak{P}$ 称为**平行多面体**（parallelohedra)．在数的几何和**数学晶体学**（crystallography, mathematical)中，它们起着重要作用

Minkowski 凸体定理的所有应用基于下述事实·对于凸的对称距离函数 F 和行列式为 $d(\Lambda)$ 的任意格 Λ，不等式

$$m(F,\Lambda)\leqslant2\left\{\frac{d(\Lambda)}{V(\mathfrak{G}_F)}\right\}^{1/n}$$

成立，其中的 $\mathfrak{G}_F=\{x\ \ F(x)<1\}$．特别地，对整点格 Λ_0 和距离函数

$$F(x)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{1}{\beta_i}\left|\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j\right|\right\},$$

关于线性齐次型的 Minkowski 定理（Minkowski theorem on linear homogeneous forms）成立：设 α_{ij}, b_i 是实数，i, $j=1,\cdots,n$，$\beta_i>0$，$|\det(\alpha_{ij})|=\Delta>0$，如果

$$\beta_1\ \cdots\beta_n>\Delta,$$

则存在不全为零的整数 $x_1,\ \ ,x_n$ 满足线性不等式组

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j\right|<\beta_i,\ i=1,\cdots,n.$$

数的几何还研究距离函数在格上的相继最小值 设 F 是距离函数，Λ是格并给定指标 i，$1\leqslant i\leqslant n$．那么使集合 $F(x)<\mu$ 至少包含 Λ 的 i 个线性无关的点的 μ 的下界称为 F 在 Λ 上的第 i 个相继最小值 (successive minimum) $m_i=m_i(F,\Lambda)$．这里 $m_1(F,\Lambda)=m(F,\Lambda)$，$0\leqslant m_1\leqslant \cdots \leqslant m_n<+\infty$．估计式

$$\{m_1(F,\Lambda)\}^n \frac{\Delta(\mathfrak{S}_F)}{d(\Lambda)}\leqslant 1$$

成立 估计

$$\delta(F,\Lambda)=\frac{\Delta(\mathfrak{S}_F)\prod_{i=1}^{n} m_i(F,\Lambda)}{d(\Lambda)}$$

的上界是非常困难的，为了得到它，必须能够给出量

$$\alpha(F)=\sup_{\Lambda}\delta(F,\Lambda)$$

的计算或者上界估计，其中的上确界是在所有 n 维格 Λ 上取的 $\alpha(F)$ 称为距离函数 F 的变态 (anomaly of a distance function)，或者称为集合 $\mathfrak{S}_F$ 的变态 (anomaly of a set) 不等式 $\alpha(F)\geqslant 1$ 是成立的 下面定理 ([4]) 给出 $\alpha(F)$ 的一个上界估计 令 F 是具有变态 $\alpha(F)$ 的 n 维距离函数，那么

$$\alpha(F)\leqslant 2^{(n-1)/2}$$

很多例子已经表明，这个估计一般地说不可能再改进．

如果 F 是凸的对称距离函数，有一个猜想 (关于凸体变态的假设 (hypothesis on the anomaly of a convex body)) 是

$$\alpha(F)=1$$

关于凸体的 Minkowski 第二定理 (Minkowski second theorem) 是成立的，它比第一定理更精确 如果 F 是凸的对称距离函数及 Λ 是格，那么

$$V(\mathfrak{S}_F)\prod_{i=1}^{n} m_i(F,\Lambda)\leqslant 2^n d(\Lambda),$$

其中凸体 $\mathfrak{S}_F$ 由条件 $F(x)<1$ 定义．Minkowski 第二定理是成立的 ([4])，它与凸体变态的猜想无关

相继最小的概念和与它有关的一些基本结果 (除了上面最后的定理)，可以从星体 $\mathfrak{S}_F$ 推广到任意集合 $\mathfrak{M}$ ([9])

下面的命题是一个给定集合的临界行列式的上界估计 对任意测度为 $V(\mathfrak{M})$ 的 Lebesque 可测集合 $\mathfrak{M}$，

$$\Delta(\mathfrak{M})\leqslant V(\mathfrak{M}) \tag{2}$$

如果 $\mathfrak{M}$ 是星体，并且关于原点对称，那么

$$\Delta(\mathfrak{M})\leqslant \frac{V(\mathfrak{M})}{2\zeta(n)}, \tag{3}$$

$$\zeta(n)=1+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

这个定理的所有证明，都涉及到在格空间上某个函数的某种均值 最自然的证明由 Siegel 中值定理 (Siegel mean-value theorem) 给出 (例如，见 [12])．令 f 是 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 上的 Lebesque 可积函数，令 μ 是在行列式为 1 的格空间上的一个不变测度，令 $\mathscr{F}$ 是这个空间的基本区域，那么

$$\frac{1}{\mu(\mathscr{F})}\int\left\{\sum_{\substack{x\in\Lambda\\ x\neq 0}} f(x)\right\}d\mu(\Lambda)=\int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx.$$

不同于下界估计 (1)，估计 (2) 和 (3) 不是最好的情形 (更精确的估计见 [13])

关于给定集合 $\mathfrak{M}$ 的临界行列式 $\Delta(\mathfrak{M})$ 的下界和上界的估计产生了 $\gamma(F)$ 的上界和下界估计，也就是数的几何中齐次问题的解 (按某种意义而言) 因此，对给定的集合 $\mathfrak{M}$ (例如，对给定的代数数域的范体)，知道临界行列式的确切值是非常重要的．如果 $\mathfrak{S}$ 是给定的有界星体，那么原则上有可能找到一个算法，这个算法允许把求 $\mathfrak{S}$ 的所有的临界格问题 (因此，同样是 $\Delta(\mathfrak{S})$) 归结为有限个关于某些多变量函数极值的普通问题 尽管如此，只是对维数 $n\leqslant 4$ 的凸体，这个算法可以实现 (按目前研究的状况，见 [4])．

一般说来，对无界星体 $\mathfrak{S}$，计算 $\Delta(\mathfrak{S})$ 是非常困难的，通过下述关于齐次算术最小的孤立现象 (isolation phenomenon)，容易看清这一点 令 F 是 $\mathbf{R}^n$ 中的距离函数，在全体格 Λ 的集合 $\mathscr{L}$ 上给定泛函

$$\mu(\Lambda)=\mu(F,\Lambda)=\frac{m(F)}{d(\Lambda)^{1/n}}.$$

对所有 $\Lambda\in\mathscr{L}$，由 $\mu(\Lambda)$ 的可能的值组成的集合 $M(F)$ 称为 F 的 Марков 谱 (Markov spectrum)．如果 $M(F)$ 有孤立点，则称 F 有孤立现象 (isolation phenomenon) 集合 $M(F)$ 位在区间 $(0,\gamma(F)]$ 中．如果星体 $\mathfrak{S}_F$ $(F(x)<1)$ 是有界的，那么

$$M(F)=[0,\gamma(F)]$$

因为这个原因，只对无界星体，孤立现象才有可能 (见 [4] 的第 X 章) 最透彻的研究情形是 $n=2$，有

$$F_0(x)=|x_1x_2|^{1/2} \tag{4}$$

А Н Коркин 和 Е И Золотарев ([14]) 首先注意到这种情形的孤立现象 (这也是注意到孤立现象的第一个例子) 1879 年，Марков (见 [14]) 证明了在 $(4/9)^{1/4}$ 右边的谱 $M(F_0)$ 部分是离散的，并有形式

$$\left\{\left[\frac{9}{4}-\frac{1}{Q_k}\right]^{-1/4}\quad k=1,2,\cdots\right\}. \tag{5}$$

这里 Q_K 是具有下述性质的正整数递增序列 对谱(5)的每个点(狭义的 Марков 谱)对应唯一的(除了同构之外,([4]))格 Λ_k,并有可能找到整数 R_k, S_k,使得

$$Q_k^2+R_k^2+S_k^2=3Q_k R_k S_k$$

成立.不定形式 $\varphi_k=x_1x_2((x_1,x_2)\in\Lambda_k)$ 有时称为 Марков 型 (Markov form),序列 $\varphi_1,\varphi_2,$ 称为 Марков 链 (Markov chain) 还知道在某个数 $\mu_0=\mu_0(F_0)$ 左边的谱 $M(F_0)$ 与线段 $[0,\mu_0]$ 完全一致.孤立现象还可以用容许格描述(见 [9]),这略微推广了这个概念.

非齐次问题 (inhomogeneous problem) 包含了在数论中起重要作用的非齐次 Diophantus 问题,它构成数的几何的重要分支

设 F 是 $\mathbf{R}^n$ 中的距离函数,Λ 是 $\mathbf{R}^n$ 中行列式为 $d(\Lambda)$ 的格而 x_0 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点 考虑一组量

$$l(x_0)=l(F,\Lambda,x_0)=\inf_{x\equiv x_0(\Lambda)}F(x),$$

$$l=l(F,\Lambda)=\sup_{x_0\in\mathbf{R}^n}l(F,\Lambda,x_0),$$

其中下确界是关于所有形式为 $x_0+a\,(a\in\Lambda)$ 的点取的,而上确界是关于所有点 $x_0\in\mathbf{R}^n$ 取的.量 $l(F,\Lambda)$ 称为 F 在 Λ 上的非齐次算术最小值 (inhomogeneous arithmetical minimum),这个"最小值"不需要达到.$l(F,\Lambda)$ 是具有下述性质的实数 $\lambda>0$ 的最大下界 集合 $\lambda\mathfrak{G}_F$,其中 $\mathfrak{G}_F$ 满足条件 $F(x)<1$,在格 Λ 上的排列 $\{\lambda\mathfrak{G}_F,\Lambda\}$ 是一个**覆盖** (covering),即

$$\bigcup_{a\in\Lambda}(\lambda\mathfrak{G}_F+a)=\mathbf{R}^n$$

对距离函数 F,考虑下面的 Hermite 常数的类似

$$\sigma(F)=\inf_{\Lambda}\frac{l(F,\Lambda)}{d(\Lambda)^{1/n}},$$

$$\sum(F)=\sup_{\Lambda}\frac{l(F,\Lambda)}{d(\Lambda)^{1/n}},$$

其中下确界(上确界)是关于所有 n 维格 Λ 取的 量 $\sum(F)$ 通常是平凡的(见 [4]),如果集合 $\mathfrak{G}_F(F(x)<1)$ 具有有限的体积,那么

$$\sum(F)=+\infty$$

因此,与 $\sum(F)$ 相联系的非齐次问题 (inhomogeneous problem) 只有在函数 F 为特殊情形时才是有意义的

关于非齐次线性型积的假设 (hypothesis on the product of inhomogeneous linear forms) 可以描述如下,令

$$F_n(x)=|x_1\quad x_n|^{1/n},$$

那么

$$\sum(F_n)=\frac{1}{2}.$$

研究这个假设和它的类似,在数的几何中非齐次问题的所有研究中占一半以上(见 **Minkowski 假设** (Minkowski hypothesis)).

在一般情形下,$\sigma(F)$ 比 $\sum(F)$ 有更多的结果 它与由体 $\mathfrak{G}_F$ 所最经济覆盖的密度 $\tau(\mathfrak{G}_F)$ 的值有紧密的关系([7],[10]).事实上,如果 F 是距离函数且集合 $\mathfrak{G}_F$ 是有界的,那么

$$\tau(\mathfrak{G}_F)=\{\sigma(F)\}^n V(\mathfrak{G}_F).$$

在数的几何中,对给定的距离函数 F,转移定理 (transference theorem) 构成非齐次问题的一个重要内容,它们是一些不等式,把非齐次最小 $l(F,\Lambda)$ 同齐次相继最小 $m_i(F,\Lambda)$(或者同关于互反格 Λ^* 的互反函数 F^* 的最小,等等,见[4])联系在一起.例如,令 F 是凸的对称距离函数及 $F(x)>0$,对 $x\neq 0$.那么,对任意格 Λ 则有

$$\frac{1}{2}m_n(F,\Lambda)\leqslant l(F,\Lambda)\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}m_k(F,\Lambda),$$

对比 $\mathbf{R}^n$ 更一般的空间和比 Λ 更一般的离散集合,存在一些数的几何的推广(见[15],[10]).

参考文献

[1] Minkowski, H, Geometrie der Zahlen, Chelsea, reprint, 1953

[2] Minkowski, H, Diophantische Approximationen, Chelsea, reprint, 1957

[3] Hancock, H, Development of the Minkowski geometry of numbers, MacMillan, 1939

[4] Cassels, J W S, An introduction to the geometry of numbers, Springer, 1959.

[5] Lekkerkerker, C G and Gruber, P M, Geometry of numbers, Noth-Holland, 1987, Updated reprint

[6] Fejes Toth, L, Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, Springer, 1972.

[7] Rogers, C A, Packing and covering, Cambridge Univ Press, 1964

[8] Keller, O-H, Geometrie der Zahlen, in Enzyklopadie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Vol 12, 1954 Heft 11, Teil III

[9] Hlawka, E, Grundbegriffe der Geometrie der Zahlen, *Jahresber Deutsch Math-Verein*, **57** (1954), 37–55

[10] Барановский, Е П, в кн Итоги науки Алгебра Топология Геометрия, 1967, М, 1969, 189–225

[11] Koksma, J F, Diophantische Approximationen, Springer, 1936

[12] Macbeath, A M and Rogers, C A, Siegel's mean value theorem in the geometry of numbers, *Proc Cambridge Philos Soc* (2), **54** (1958), 139–151.

[13] Schmidt, W, On the Minkowski-Hlawka theorem, *Illinois J Math*, **7** (1963), 18–23, 714

[14] Марков, A A, 《Успехи матем наук》, 3(1948), 5, 7 - 51

[15] Rogers, K and Swinnerton-Dyer, H P F, The geometry of numbers over algebraic number fields, *Trans Amer Math Soc*, **88**(1958), 227 - 242

A B Малышев 撰

【补注】 n维 Euclid 空间上的距离函数(distance function) F是非负实值函数，并满足 $F(tx)=tF(x)$，$t\geqslant 0$ 如果 $F(x)=F(-x)$，则称为对称的(symmetric)．如果 $F(x+y)\leqslant F(x)+F(y)$，则称为凸的(convex)．如果 F是凸的，还要求它满足 $F(x)=0$，仅当 $x=0$时

格临界行列式也称为格常数(lattice constant) 排列也称为集格(set lattice)．不等式(3)通常称为 Minkowski-Hlawka 定理(Minkoski-Hlawka theorem)

近年来，数的几何变得非常几何化，**覆盖与填装**(covering and packing)问题已经被深入地研究，特别是球的存放问题，以及同它有很多关系的其它领域，例如编码、数字转换、生物学、冶金学 "铺砖"理论，同样有很多值得研究的有趣问题，特别是 Dirichlet-Вороной(和 Делоне)"铺砖"是非常有趣的，例如在地理学、晶体学和计算几何中的应用．$\mathbf{R}^n$的一个"铺砖"(tiling)或"嵌装图案"(tesselation)是指这样一组集合(称为"砖"(tiles))，它们的和覆盖 $\mathbf{R}^n$，且内部互不相交 Dirichlet-Вороной "铺砖"(Dirichlet-Voronoï tiling)是具有下面形式的"砖"集合的"铺砖"

$\Gamma(\Lambda,z)=\{y \ |y-z|\leqslant|y-x|$，对所有 $x\in\Lambda\}$，$z\in\Lambda$，其中 Λ是 $\mathbf{R}^n$中一个离散点集 见[5]

数的几何的另一个近代领域是格上的 ζ函数理论及二次型与格的(可计算的)约化理论．

参考文献

[A1] Gruber, P M, Geometry of numbers, in J M Wills and J Tolke (eds), contributions to geometry, Birkhauser, 1979, 186 - 225

[A2] Conway, J H and Sloane, N J A, Sphere packing, lattices and groups, Springer, 1987

[A3] Erdos, P, Gruber, P M and Hammer, J, Lattice points, Longman, 将出版

[A4] Ryskov, S S, The geometry of positive quadratic forms, Amer Math Soc, 1982

[A5] Malyshev, A B and Teterina, Yu G, Investigations in number theory, 9, Leningrad, 1986 (译自俄文)

[A6] Thompson, T M, From error-correcting codes through sphere packing to simple groups, Math Assoc Amer, 1983

[A7] Fejes Toth, G, New results in the theory of packing and covering, in P M Gruber and J M Wills (eds), Convexity and its applications, Birkhauser, 1983, 318 - 359

[A8] Voronoï, G F, Collected works, 1-3, Kiev, 1952 (译自俄文)

[A9] Chalk, J H H, Algebraic lattices, in P M Gruber and J M Wills (eds), Convexity and its applications, Birkhauser, 1983, 97 - 110

[A10] Minkowski, H, Gesammelte Abhandlungen, Teubner, 1911

徐广善 译 潘承彪 校

地球物理学中的数学问题[geophysics, mathematical problems in, геофизики математические задачи]

研究地球结构时，对物理现象的分析中所出现的问题．依赖于所涉及物理现象的本质，人们区别下列类型地球物理现象 重力勘探，基于引力场的研究，磁力勘探，基于静磁场的研究，地震勘探，基于弹性波传播的研究，电磁勘探，基于恒定电流所产生的场或交变电磁场的研究，放射性勘探，基于岩石的天然或感生放射性的辐射强度变化 场的测定可以在地面进行(地面法)，在大气中进行(航空勘探)，以及在钻井中进行 (测井法)(见[1])

重力勘探和磁力勘探中出现类似数学问题 在两者情况下，首要问题包括求解 **Poisson方程** (Poisson equation)

$$\Delta U=\rho(M),$$

其中 $U(M)$是引力势或磁场势，$\rho(M)$是逾质量体密度或与岩石磁化有关的等效磁荷 实验上要确定的量是 grad $U(M)$，它或者确定自由落体加速度的变化 $\Delta\bar{g}$，或者确定地球静磁场中的改变．测量是在地球表面上各点进行的 于是这些实验数据用于获得地球内部函数 $\rho(M)$的分布．直接任务是简单的，问题的解通过求积分而获得 主要困难在于求解逆问题．这里广泛应用谐波场理论和解析延拓 (见[2])

对恒定电流的电磁勘探中出现的问题具有稍微不同的性质 虽然在这个情况下场是无旋的，即，电场 $\bar{E}$是用标量电势 U 表达的，但势方程具有更加复杂一些的形式

$$\operatorname{div}[\sigma(M)\operatorname{grad}U]=-\operatorname{div}\bar{j}_0,$$

其中 $\bar{j}_0$是电流的体源密度，而 $\sigma(M)$是地球中电导率的分布 直接问题是要确定地球表面上介质各种结构模型($\sigma(M)$的分布)的电场．逆问题是根据地球表面不同点电场的实验值来寻求电导率 $\sigma(M)$的分布

在涉及应用交变电磁场的方法中，电磁勘探的理论中出现甚至更加复杂的问题 这种方法中实验上确定的量是这些场的分量，它们的计算涉及不均匀介质中 Maxwell 方程的求解，即当方程的系数是分段连续函数时的求解 逆任务在于由已知电磁场求方程的系数 在这种情况下，可能有几种不同的实验确定方法．

被测量的量可能是在单一点作为时间函数的非定态场(介质的时域探测)，或者是给定频率的定态场作为频率的函数（频域探测）以及作为观察点的函数(阵列探测）([3])

在地震勘探中，问题的完全提法可描述为在点激发条件下，具有与空间有关的系数时，弹性波传播方程的求解 这个问题仅对于介质结构的最简单模型已经解出 然而，在许多情况下，地震勘探中由实验确定的主要量是反射信号的时距 于是采用几何光学近似，求解**程函方程**（eikonal equation）以确定射线轨迹，然后计算信号的时距 信号的时距在地球表面不同点予以确定．逆问题在于根据信号时距对观察点坐标的已知依存关系，用以确定反射体界面（见[4]）

全部地球物理学研究的主要目标是逆问题的求解，即，根据场量的实验值确定介质的结构 用以确定介质结构的参量是场所满足的偏微分方程的系数或者该方程的右边．寻求一个方程的系数或者方程的右边的问题，其解仅在空间一定部分为已知，是一个不适定问题 为此，А Н Тихонов 的**正则化方法**（regularization method）([5]）可以很有益地用来求解地球物理学中的逆问题

地球物理学中逆问题解的正则化包括选择充分窄的一类解，在其中问题变成正确的 这个选择通过建立介质结构的一组数学模型而实现，它们一方面充分精确地描述实际情况，另一方面又是由不太多模型参量来确定

地球物理学中求解逆问题所涉及的主要数学问题事实上在于建立这样一类数学模型，它们在考虑到特殊研究目的外，还同时考虑到地球物理学研究各种方法的具体实现，以及还在于对这些模型直接问题求解的有效算法的发展

一旦一族数学模型已经建立，并且求解直接问题的算法为已知，则该逆问题可一般表述如下．令 $\mathbf{p}=\{p_1, \quad, p_n\}$ 为模型的参量，并令 $\mathbf{p}\in P$，其中 P 是模型参量的可容许值集合 场特性 $U(x, \mathbf{p})$ 作为变量 x 和参量 $\mathbf{p}$ 的函数，这里 $x\in D$，其中 D 是观测域，而 $\mathbf{p}$ 是实验确定的量，该函数 $U(x, \mathbf{p})$ 可借助于直接问题的已知算法予以计算

$$U(x, \mathbf{p})=A_x[\mathbf{p}],$$

其中 A_x 一般是非线性算子，依赖于 x 作为一个参数．如果 $U_e(x)$ 是实验上确定的场特性，逆问题的解将是 $\mathbf{p}=\mathbf{p}_{\min}$，在此值处实现 $U(x, \mathbf{p})$ 与 $U_e(x)$ 之间的最小偏差，即，

$$\min_{\mathbf{p}\in P}\|U(x, \mathbf{p})-U_e(x)\|_U,$$

其中 U 是场特性的空间．通常采取均方范数（见[6]）

地球物理学研究中所应用的两种简单类型介质结构模型是 具有局域不均匀性的半空间，它用于地球物理勘探所提供的结果的分析，勘探的目的是寻求地壳中的不均匀性，分层半空间，其中介质参量随深度变化，用于求解地球物理学中的层理问题．

数学模型的随后发展在于使上述两类模型精致化，为的是使对实际情况的描述更完全．例如，研究了以下各种情况 分层半空间中的局域不均匀性，具有可变分层厚度的分层介质，等等 涉及这种复杂结构的模型，即使对于正问题的求解也只有借助于计算机才有可能 为此目的，广泛应用有限差分法，有限元法，积分方程法，以及投影法

对于求解地球物理学中正问题的有效算法的发展，使定量实验结果的解释更精确．对各种各样数学模型进行了大量系列计算 这些用作场特性的图集汇编，可借助于它们利用尝试法求解逆问题（见[7]）在利用计算机对实验数据进行自动处理和解释的系统方面，有很大的发展（见[11]，[12]）

参考文献

[1] Федынский, В В, Разведочная геофизика, М, 1964

[2] Маловичко, А К, Методы аналитического продолжения аномалий силы тяжести и их приложения к задачам гравиразведки, М, 1956

[3] Дмитриев, В И, Электромагнитные поля в неоднородных средах, М, 1969

[4] Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, сб 3, [Л], 1959

[5] Тихонов, А В, 《Докл АН СССР》, **153** (1963), 1, 49 – 52

[6] Лаврентьев, М М О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосиб, 1962 (英译本 Lavrentiev, M M, Some improperly posed problems of mathematical physics, Springer, 1967)

[7] Тихонов, А Н, 《Докл АН СССР》, **39** (1943), 5, 195 – 198

[8] Новиков П С, 《Докл АН СССР》, **18** (1938), 165 – 168

[9] Тихонов, А Н, 《Докл АН СССР》, **69** (1949), 6, 797 – 800

[10] Тихонов, А Н, 《Ж вычисл матем и матем физики》, **5** (1965) 3, 545 – 548

[11] Tikhonov, A N, Arsenine, V I, Solutions of ill-posed problems Halted Press, 1977 (译自俄文)

[12] Tikhonov, A N, Goncharskii, A V (eds), Ill-posed problems in the natural sciences, Moscow, 1987 (in Russian)

В И Дмитриев 撰

【补注】 在[A1]中有俄国人对不适定问题的贡献的概述，包括 Тихонов 的正则化方法 [A2]论述地球物理学中逆问题的计算方法．逆散射法（inverse scatter-

ing method）这个强有力方法在地震学中也找到用处，见[A3]

参考文献

[A1] Morozov, V A, Methods for solving incorrectly posed problems, Springer, 1984（译自俄文）

[A2] Tarantola, A, Inverse problem theory Methods for data fitting and model parameter estimation, Elsevier, 1987

[A3] Weglein, A B, The inverse scattering concept and its seismic application, in A A Fitch (ed), Developments in geophysical exploration, Vol 6, Elsevier, 1985, 111－138

[A4] Aki, K and Richards, P G, Quantitative seismology, I－II, Freeman, 1980

[A5] Achenbach, J D, Wave propagation in elastic solids, North-Holland, 1973

[A6] Hyden, J H M T, van der, Propagation of transient elastic waves in stratified anisotropic media, North-Holland, 1987

徐锡申 译

地热学中的数学问题［geothermics, mathematical problems in, геотермики математические задачи］

与发生在地球内部热运动过程有关的数学问题．人们将地热学研究划分为地表现象，即由太阳辐射产生的地球上层的温度波动，和深层现象，即与辐射热源有关的温度分布

地热学中的数学问题，主要是求解拟线性抛物型方程组，其系数随地表以下的深度变化，并依赖于温度．在研究地表的冰冻或地球深层的熔化过程中，允许有相变，即介质物理状态的改变 这就导致了所谓的 **Stefan 问题**（Stefan problem），或称之为相变问题．解决这些问题最有效的数值方法是有限差分计算法，它被广泛地应用在实际中

在地热学中，许多问题都关系到温度场和其他物理现象之间的相互作用 在分析具有水渗入的土壤冻结问题时，热传导方程和水渗透方程要联立求解 研究含水物体的温度分布，需要联解热传导方程和热对流方程 通过联立求解热传导方程和重力场中的弹性平衡方程，可以分析地球中的热弹性应力及地球变形和膨胀的有关效应

在这个领域中存在着几个特殊的问题 例如，决定地球在历史上的气候时，就提出了热传导方程数学问题的逆问题．其中，根据时刻 $t=t_0$ 时沿地球深度方向的温度分布，要求出时刻 $t<t_0$ 的温度 如果解 u 对 x 至少有一个导数均匀有界，即 $|\partial^n u/\partial x^n|<M$，那么在区域 $x>0$，$-\infty<t<t_0$ 中热传导方程的解 $u(x,t)$ 就能由给定值 $u(x,t_0)=\varphi(x)$ 唯一地确定（[1]）

太阳对地球和其他天体的辐射对它们的温度条件产生影响，此种研究导致了边界条件为非线性的热传导方程，特别是对遵循 **Stefan-Boltzmann 定理**（Stefan-Boltzmann law）的辐射问题 这些问题可以减化为 Volterra 型的非线性积分方程（[1]）

参考文献

[1] Тихонов, А Н, 《Докл АН СССР》, **1**(1935), 5, 294－300

[2] Тихонов, А Н, 《Изв АН СССР》, Отд матем и естеств наук Сер геогр, 1937, 3, 461－479

[3] Тихонов, А Н, 《Матем сб》, 1950, 26(68), 35－56

[4] Любимова, Е А, Термика Земли и Луны, М, 1968

В И Дмитриев 撰

【补注】

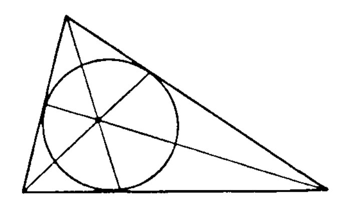
参考文献

[A1] Carslaw, H S and Jaeger, J C, Conduction of heat in solids, Clarendon Press, 1959

韩耀新、赵金平 译

Gergonne 点［Gergonne point, Жергонна точка］

连接三角形的顶点与这些顶点的对边同内切圆的切点的三条直线的交点．因 G Gergonne（19 世纪）而得名



А Б Иванов 撰 张鸿林 译

芽［germ, росток］

表明各种数学对象"逐点局部化"的一个名词（函数芽，映射芽，解析集芽，等等）．例如，设 x 是拓扑空间中的一个点，F 是定义于 x 的一个邻域中的函数的某个族（每个函数有其独自的邻域）．两个函数 f,g 称为（在 x 处）等价，如果它们在 x 的某邻域内相同 由这个关系生成的等价类称为族 F 在 x 处的**函数芽**（germ of functions） 用这种方式可定义连续函数芽，在微分流形的给定点处的可微函数芽，复流形的给定点处的全纯函数芽，等等．如果族 F 具有某种代数结构，则族 F 的函数芽的集合承袭这种结构（在类的代表元素上施行运算） 特别是，点 z 处全纯函数芽构成一个环．这个环的商域的元素称为 z 处的**亚纯函数芽**（germ of meromorphic functions）．

可类似地定义拓扑空间的一个子集族的芽．例如，在解析流形的给定点处有解析集芽（等价类由在给定点的一个邻域中重合来定义）．在子集族的芽上可自然地定义集合论运算与关系 在定义于拓扑空间的开

子集上的其他对象的情形，芽的概念也是有意义的．

亦见**解析函数**（analytic function），**亚纯函数**（meromorphic function），**层**（sheaf）

参考文献

[1] Gunning, R C, Rossi, H, Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965

E M Чирка 撰

【补注】 解析空间或解析概形的芽由其结构层的茎所刻画，它们是局部环．

可微映射芽的研究是奇点理论（singularity theory）的对象（见可微映射的奇点（singularities of differentiable mappings））．

对于解析集芽论，Weierstrass 预备定理是一条重要定理（见 Weierstrass 定理（Weierstrass theorem）），亦见[A1]．

参考文献

[A1] Hervé, M, Several complex variables local theory, Oxford Univ Press, 1967

沈永欢 译

Gibbs 分布 [Gibbs distribution，Гиббса распределение]

在统计系统的定态微观态的任何一个中找出平衡统计系统的概率分布 此种微观状态通常是由定常 **Schrödinger 方程**（Schrodinger equation）

$$\hat{H}\psi_n(x)=E_n\psi_n(x)$$

的解 ψ_n 所定义的纯量子力学状态给出 其中 n 是决定每一个此种状态的所有量子数的总合．将每一状态 n 与发现系统处于此状态的几率 w_n 相对应（对于量 n 的连续谱，这将是几率密度），就与函数集合 ψ_n 一起完全决定了所谓混合量子力学状态．对于这种状态，观测到的量定义为每一纯状态 n 的量子力学平均值的分布 w_n 的平均．混合状态完全由统计 Neumann 算子（密度矩阵）所表征，此算子在位置空间的表达为

$$(x|\rho|x')\sum_n w_n\psi_n^*(x')\psi_n(x).$$

观测到的平均值定义为

$$<F>=\sum_n w_n(\psi_n^*,\hat{F}\psi_n)=\mathrm{Sp}\,\hat{\rho}\hat{F}.$$

在 Gibbs 分布的情况下，混合态相应于系统的热力学平衡态，由于 Gibbs 分布的结构为 $w_n=w(E_n,A)$，其中 A 是确定系统微观态的热力学参数的总合，则与之相应的算子 $\hat{\rho}$ 可通过 Hamilton 算子直接表达，$\hat{\rho}=w(\hat{H},A)$，$\mathrm{Sp}\,\hat{\rho}=1$．依参数 A 的选择，Gibbs 分布可以有不同的形式，其中最为广泛应用的有以下几种

微正则 Gibbs 分布．参数 A 表征孤立系统的状态，并包括能量 $\mathscr{E}$，体积 V，外力场 a 以及粒子数 N（在多组元系统的情况下，则是数 N_i 的集合）．这时 Gibbs 分布的形式为

$$w_n(\mathscr{E},V,a,N)=\Delta(\mathscr{E}-E_n)/\Gamma(\mathscr{E},V,a,N),$$

其中 Γ 为统计权（statistical weight），它定义分布的归一化，并等于

$$\Gamma(\mathscr{E},V,a,N)=\sum_n\Delta(\mathscr{E}-E_n)$$

求和（或求积分）是对系统的所有不同状态进行，而不管它们对 E_n 的简并．函数 $\Delta(\mathscr{E}-E_n)$ 等于 1，如果 E_n 之值落在 $\mathscr{E}$ 值附近的能量在 $\delta\mathscr{E}$ 之内，反之为零．宽度 $\delta\mathscr{E}$ 应比能量的宏观无穷小变化 $d\mathscr{E}$ 小得多，但不小于能级间的间距 ΔE_n 统计权重 Γ 决定这样的微观态数目，借助这些态可以实现给定的宏观态，并且这些态全都假设是等概率的．它与系统的熵由下式相联系，

$$S(\mathscr{E},V,a,N)=\ln\Gamma(\mathscr{E},V,a,N)$$

正则 Gibbs 分布（canonical Gibbs distribution）．系统的宏观的状态由温度 θ 及量 V，a，N 确定（"在恒温器中"的系统）．从应用的角度看来，这是给出热力学状态的最方便的方法．正则 Gibbs 分布具有如下形式

$$w_n(\theta,V,a,N)=e^{-E_n/\theta}/Z,$$

其中 Z 为配分函数（partition function）（或状态和 sum-over-states）

$$Z(\theta,V,a,N)=\sum_n e^{-E_n/\theta},$$

它与系统的自由能由下式直接联系·

$$F(\theta,V,a,N)=-\theta\ln Z.$$

巨正则 Gibbs 分布．参数 A 确定处于恒温器中的系统的状态，恒温器是由假想的可以允许粒子自由通过的器壁所环绕．这些参数是 θ，V，a 以及化学势 μ（在多组元系统的情况下是几个化学势）．由粒子数 N 和由 N 物体的系统的量子数 $n=n(N)$ 所定义的微观态的 Gibbs 分布，具有如下形式

$$w_{Nn}(\theta,V,a,\mu)=\frac{e^{-(E_n-\mu N)/\theta}}{Z_g},$$

其中 Z_g 为巨配分函数

$$Z_g(\theta,V,a,\mu)=\sum_{Nn}e^{-(E_n-\mu N)/\theta}=$$

$$=\sum_{N=0}^{\infty}e^{\mu N/\theta}Z(\theta,V,a,N),$$

它决定了分布的归一化，并与热力学势 $\Omega=-pV$（其中 p 为压强）有如下关系：

$$\Omega(\theta, V, a, \mu) = -\theta \ln Z_{\theta}.$$

利用某一个给定的 Gibbs 分布，使得有可能从系统的一个给定的微观统计状态出发来计算系统的特征宏观平均量，色散等等，且利用归一化的 Γ, Z 或 Z_{θ} 决定平衡系统的所有的热力学特性．选择这种或那种 Gibbs 分布，完全是从方便出发．在 $N\to\infty$，V/N = 常数的统计极限，由所有 Gibbs 分布得到的结果通过相同变量表达时）是全同的．由于 Gibbs 方法只是在这一极限下成立，所以所有 Gibbs 分布是全同的．微正则 Gibbs 分布主要适用于统计力学的一般问题（参数 A 不包括 θ，μ 等这类特定的热力学量）；正则 Gibbs 分布主要适用于经典系统，而巨正则 Gibbs 分布适用于量子系统的研究，这时由于技术的原因给出准确的数 N 是不方便的．

当参数 A 取某些值时，通常与 θ 增加（其他参数保持不变）到高于简并温度（对于每一微观状态具有不同值）相关，一般 Gibbs 分布变为准经典的（相对于这样的变量，对于它们与其相关的运动是非简并的）．对于 N 个粒子的非简并系统的情况，当微观运动表达为 N 个质点的经典运动时，微观状态则由一相点 $n=(q,p)=(\mathbf{r}_1,\cdots,\mathbf{r}_N,\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_N)$ 决定，能量由经典 Hamilton 函数 $H=H(q,p)$ 决定，而正则 Gibbs 分布具有如下形式：

$$w_{qp}(\theta, V, a, N)\,dp\,dq = \frac{e^{-H(q,p)/\theta}}{Z}\,\frac{dpdq}{N!(2\pi\hbar)^{3N}},$$

其中经典配分函数（状态和的准经典极限）为

$$Z = \frac{1}{N!}\int \frac{e^{-H(p,q)/\theta}}{(2\pi\hbar)^{3N}}\,dpdq.$$

Gibbs 分布是 J. W. Gibbs 于 1902 年引入的．

参考文献

[1] Gibbs, J W , Elementary principles in statistical mechanics, Dover, 1960.

[2] Huang, K , Statistical mechanics, Wiley, 1963

[3] Hill, T L , Statistical mechanics, McGraw-Hill, 1956

И А Квасников 撰

【补注】"Gibbs 分布"一词最常用来代表正则分布．

参考文献

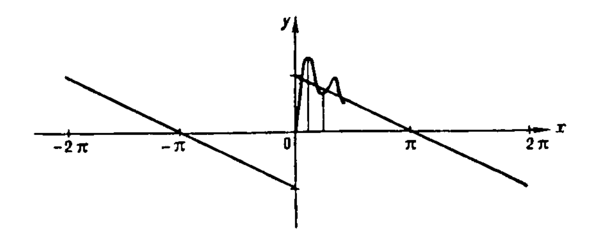
[A1] Ruelle, D , Statistical mechanics, rigorous results, Benjamin, 1974

[A2] Л Д Ландау и Е М Лифшиц, Статистическая физика, курс теоретической физики, том 5, 《Наука》, М 1964

沈 青 译

Gibbs 现象 [Gibbs phenomenon, Гиббса явление]

Fourier 级数（Fourier series）的部分和（或部分和的平均值）的性态的一个特征 由 H Wilbraham（[1]）



首先揭示且过了很久才又被 J W. Gibbs（[2]）重新发现．设函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和 $S_n(x)$ 在满足

$$a\equiv f(x_0-)\leqslant f(x_0+)\equiv b$$

的 x_0 点的某个邻域 $\{x\ 0<|x-x_0|<h\}$ 中收敛到 $f(x)$ 如果 $A<a\leqslant b<B$，其中

$$A=\varliminf_{\substack{x\to\infty\\ x\uparrow x_0}} s_n(x),$$

$$B=\varlimsup_{\substack{n\to\infty\\ x\downarrow x_0}} s_n(x),$$

则 $s_n(x)$ 在 x_0 点有 Gibbs 现象发生．它的几何意义是 部分和 $s_n(x)$ 的图象（见图）当 $x\to x_0$ 及 $n\to\infty$ 时并不逼近竖直线 $x=x_0$ 上的"期望"区间 $[a,b]$，而是逼近严格大一些的区间 $[A,B]$，当按某种给定的方法对 Fourier 级数求和时，对于 Fourier 级数的部分和的平均值可类似地定义 Gibbs 现象．

例如，下面的定理对以 2π 为周期且在 $[-\pi,\pi]$ 上有有界变差的函数 f 成立（[3]）

1）在不可去间断点且只在这种点上，$s_n(x)$ 有 Gibbs 现象发生 特别地，如果 $f(x)=(\pi-x)/2$ $(0<x<2\pi)$，则对于点 $x=0$，区间 $[a,b]=[-\pi/2,\pi/2]$，而区间 $[A,B]=[-l,l]$，其中

$$l=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt\approx 1.85\quad>\frac{\pi}{2}.$$

2）存在一个绝对常数 α_0，$0<\alpha_0<1$，使得 Cesàro 平均值 $\sigma_n^{\alpha}(x)$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时没有 Gibbs 现象，而当 $\alpha<\alpha_0$ 时在 f 的每个不可去间断点处都可观察到 Gibbs 现象．

参考文献

[1] Wilbraham, H , *Cambridge and Dublin Math J*, 3 (1848), 198 – 201

[2] Gibbs, J W , *Nature*, 59 (1898), 200

[3] Zygmund, A , *Trigonometrical series*, 1 – 2, Cambridge Univ Press, 1988

П Л Ульянов 撰

【补注】上文中常数 A 和 B 的定义的更明确的形式是．

$$A = \lim_{x \uparrow x_0} \lim_{n \to \infty} \inf_{x < y < x_0} s_n(y),$$

$$B = \lim_{x \downarrow x_0} \lim_{n \to \infty} \sup_{x_0 < y < x} s_n(y)$$

在 f 的孤立跳跃间断点处，比值 $(B-A)/(b-a)$ 等于 $(2/\pi)l = 1\ 17898$　这意味着 Fourier 级数的近似值在跳跃区间的每一个端点处有一个大约等于跳跃长度 8 95% 的超越量

事实上，只是在给 *Nature* 的第二封信中（[A1]），Gibbs 才正确地叙述了这一现象，不过没有给出任何证明．这方面的细节见 [A2]

参考文献

[A1] Gibbs, J W , *Nature*, **59** (1899), 606

[A2] Carslaw, H S , Introduction to the theory of Fourier's series and integrals, Dover, reprint, 1930

朱学贤 译　潘文杰 校

Gibbs 统计系综 [Gibbs statistical aggregate , Gibbs statistical ensemble ; Гиббса статистический ансамбль]

由相同热力学参数值所表征的但可能处于不同微观状态的大量相同的统计系统的集合　这一形式上的构造允许把按统计系统微观状态的分布函数解释为系综中的系统数按这些状态的分布　例如，在经典系统的统计力学中，系综的状态由相空间（即 n 个粒子系统的动量和坐标的 $6n$ 维空间）的点的密度所决定，其中的每一个点确定系统的一个微观状态．依赖于如何定义系综中系统的宏观状态而可以区分出：微正则 Gibbs 统计系综，这是当规定了系统的能量值及其外部参数（体积、外力场等等）和其中的粒子数时的孤立系统的系综；正则 Gibbs 统计系综，这是当规定的不是系统的能量而是其温度时具有固定粒子数并处于恒温器中的系统的系综，以及巨正则 Gibbs 统计系综，这是当给定系统的温度、体积、外力场和化学势时处于一共同恒温器但粒子数不固定的系统的系综．还可能有其他一些方案．不同 Gibbs 统计系综中按微观状态的分布由相应的 **Gibbs 分布**（Gibbs distribution）所决定．

Gibbs 统计系综的概念用来研究从一正则分布向另一正则分布过渡（见 **Darwin-Fowler 法**（Darwin-Fowler method））等的统计力学中的一般问题

И А. Квасников 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gibbs, J W , Elementary principles in statistical mechanics, Dover, 1960

沈 青 译

Gini 平均差 [Gini average difference, Джини средняя разность]

刻画随机变量 X 的散布（dispersion）的一个量．它由 C Gini 在 1912 年引入，定义如下

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |x-y|\, dF(x)\, dF(y),$$

此处 $F(\cdot)$ 是该随机变量的分布函数．有时也用另一个量，称为 Gini 散布系数（Gini dispersion coefficient）

$$G = \frac{\Delta}{2\mu},$$

其中 μ 是随机变量 X 的**数学期望**（mathematical expectation）

参考文献

[1] Kendall, M G and Stuart, A The advanced theory of statistics Distribution theory, Griffin, 1969

К П Латышев 撰　陶 波 译　李国英 校

Giraud 条件 [Giraud conditions, Жиро условия]

二阶线性椭圆型方程的基本边值问题在古典意义下的可解性条件．设在一有界的 $N(N \geqslant 2)$ 维具有边界为 Γ 的区域 D 中已给出椭圆型方程

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x) . \qquad (*)$$

要求这样的函数 $u(x)$ 1) 属于类 $C^{(2)}(D) \cap C^{(0)}(D+\Gamma)$，2) 在区域 D 中满足方程 (*)，3) 在边界 Γ 上满足条件 $u(x) = \varphi(x)$（第一边值问题，或 **Dirichlet 问题**（Dirichlet problem）），或条件

$$\frac{\partial u(x)^+}{\partial \nu} + \beta(x) u(x) = \varphi(x)$$

（第二边值问题，或 **Neumann 问题**（Neumann problem）），或条件

$$\frac{\partial u(x)^+}{\partial l} + \beta(x) u(x) = \varphi(x)$$

（第三边值问题）．这里 ν 是余法线方向，它的方向余弦等于

$$\cos(\nu, x_i) = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x) \cos(n, x_j),\ i = 1, \quad , N,$$

$$a = \left[\sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij} \cos(n, x_j) \right)^2 \right]^{1/2},$$

n 是边界 Γ 的外法线，l 是对所有 $x \in \Gamma$ 满足 $\cos(l, n) \geqslant \delta > 0$ 的任意方向，符号 + 表示极限值从区域 D 的内部取得．

关于这些边值问题的可解性的 Giraud 条件（Giraud conditions）如下所述．如果算子 L 的系数 $a_{ij}(x)$，

$b_i(x)$, $c(x)$在区域$(D+\Gamma)$中属于类$C^{(0,\mu)}$, 方程右端项$f(x)\in C^{(0,\mu)}(D)\cap C^{(0)}(D+\Gamma)$, 边界函数$\varphi(x)\in C^{(0)}(\Gamma)$, 且$\beta(x)\in C^{(0)}(\Gamma)$(对第二和第三边值问题), $\cos(l,x_i)\in C^{(0,\mu)}(\Gamma)$(对第三边值问题), 而区域$D$的边界$\Gamma$属于类$A^{(1,\mu)}$, 那么对第一, 第二和第三边值问题成立 Fredholm 抉择定理 (Fredholm alternative), 即或者对应的齐次问题只有平凡解, 此时非齐次问题对任意的f和φ有唯一解, 或者齐次问题有$p(0<p<\infty)$个线性无关解$u_1, \ldots, u_p$, 此时非齐次问题仅当f和φ的p个确定的线性泛函等于零时才是可解的, 而且在满足这最后的条件时非齐次问题有无穷多个解, 如果u_0是这些解中的一个, 那么一般解可表为$u_0+\sum_{i=1}^{p}c_iu_i$, 这里c_i是任意常数. 在算子L的系数更加光滑$(a_{ij}\in C^{(2,\mu)}$, $b_i\in C^{(1,\mu)})$以致可以考虑伴随算子L^*的情形下, f和φ的线性泛函等于零的要求就转化为f和φ与齐次伴随问题的所有p个线性无关解的正交性. Giraud 条件由 G Giraud [1] – [3] 得到

参考文献

[1] Giraud, G, Existence de certaines derivees des functions de Green, consequences pour les problèmes du type de Dirichlet, *C R Acad Sci Paris*, **202** (1936), 380 – 382

[2] Giraud, G, Généralisation des problèmes sur les operateurs du type elliptique, *Bull Sci Math*, **56** (1932), 248 – 272, 281 – 312, 316 – 352

[3] Giraud, G, Nouvelle méthode pour traité certains problèmes relatifs aux equations du type elliptique, *J Math Pures Appl*, **18** (1939), 111 – 143

[4] Miranda, C, Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970 (译自意大利文)

И А Шишмарев 撰 孙和生 译 陆柱家 校

整体域 [global field, глобальное поле]

一个域, 或者是常数域为有限域的单变量有理函数域的有限扩张, 或者是有理数域的有限扩张.

参考文献

[1] Cassels, J W S and Frohlich, A (eds) Algebraic number theory, Acad Press, 1986

В Л Попов 撰 冯绪宁 译 裴定一 校

轨道的整体结构 [global structure of trajectories, глобальная структура траекторий], 二次微分的

紧有向 **Riemann 曲面** (Riemann surface) 上正二次微分 (quadratic differential) 的轨道的整体性态的描述 (关于所涉及的轨道的定义, 见**二次微分** (quadratic differential)). 设R是紧有向 Riemann 曲面, $Q(z)dz^2$是R上的正二次微分, C是$Q(z)dz^2$的所有零点和单极点组成的集合, H是$Q(z)dz^2$的阶≥ 2的极点组成的集合. $Q(z)dz^2$的轨道构成一个族F, 它具有正则曲线族的许多性质 除集合$C\cup H$中的点外, 曲线族F覆盖R, 即对于$R\setminus(C\cup H)$的每个点, 有F中唯一的元素通过该点 $Q(z)dz^2$的一条轨道在R的任一点的邻域中的性态由二次微分的**轨道局部结构** (local structure of trajectories) 来描述. 在考虑F中诸曲线在$R\setminus H$的点处的整体结构时, 下述的轨道并起着重要作用. 令Φ是$Q(z)dz^2$的在C的某个点具有极限端点的所有轨道之并, Λ是Φ的子集, 它是$Q(z)dz^2$的在C的一个点处具有一个极限端点且在$C\cup H$的一个点处具有第二个极限端点的所有轨道之并

R上的集合K称为关于$Q(z)dz^2$的F集, 如果$Q(z)dz^2$的每条与K相交的轨道都完全包含于K中. 集合K的内部闭包定义为闭包$\overline{K}$的内部, 记作$\hat{K}$. F集的内部闭包也是F集. 关于$Q(z)dz^2$的终端域 (terminal domain) E是R上具有下列性质的最大连通开F集 1) E不含有$C\cup H$的点, 2) C为$Q(z)dz^2$的一些轨道填满, 这些轨道中每一条在给定点$A\in H$的两个可能的方向上各有一个极限端点, 3) E由函数

$$\zeta=\int[Q(z)]^{1/2}dz$$

共形映射到ζ平面的左半平面或右半平面上 (取决于根号分支的选取). 由$Q(z)dz^2$轨道的局部结构可知点A应是微分$Q(z)dz^2$的至少3阶的极点.

关于$Q(z)dz^2$的拟带形域 (strip-like domain) S是R上具有下列性质的最大连通开F集 1) S不含有$C\cup H$的点, 2) S为$Q(z)dz^2$的一些轨道填满, 这些轨道中每一条在一个点$A\in H$沿一个方向有极限端点而在另一点$B\in H$(它可能与A重合) 沿另一方向有极限端点, 3) S由函数

$$\zeta=\int[Q(z)]^{1/2}dz$$

共形映射到带域$a<\operatorname{Im}\zeta<b$上, 这里$a$和$b$是有限实数且$a<b$ 点A, B可以是$Q(z)dz^2$的2阶或更高阶极点

关于$Q(z)dz^2$的圆形域 (circular domain) $\mathscr{C}$是R上具有下列性质的最大连通开F集 1) $\mathscr{C}$含有$Q(z)dz^2$的唯一的一个双极点A, 2) $\mathscr{C}\setminus A$为$Q(z)dz^2$的一些轨道填满, 这些轨道中每一条都是把A与$\mathscr{C}$的边界分隔开的闭 Jordan 曲线, 3) 如果适当选取纯虚常数c, 则函数

$$w=\exp\left\{c\int[Q(z)]^{1/2}dz\right\}$$

(规定它在点A处取值为零) 把$\mathscr{C}$共形映射到圆盘$|w|<R$上, 且A映为点$w=0$.

关于$Q(z)dz^2$的环形域 (annular domain) D是R上具有下列性质的最大连通开F集 1) D不含有$C\cup H$的点, 2) D为$Q(z)dz^2$的一些轨道填满, 这些轨道都是闭 Jordan 曲线, 3) 如果适当选取纯虚常数c, 则函数

$$w=\exp\{c\int[Q(z)]^{1/2}dz\}$$

把 D 共形映射到圆环域 $r_1<|w|<r_2\ (0<r_1<r_2)$ 上．

关于 $Q(z)dz^2$ 的稠密域（dense domain）$\mathscr{S}$ 是 R 上具有下列性质的最大连通开 F 集 1) $\mathscr{S}$ 不含有 H 的点，2) $\mathscr{S}\setminus C$ 为 $Q(z)dz^2$ 的一些轨道填满，这些轨道中每一条都在 $\mathscr{S}$ 中处处稠密

下述基本结构定理（basic structure theorem）成立（见[2]） 设 R 是紧有向 Riemann 曲面，$Q(z)dz^2$ 是 R 上的一个正二次微分，如果除去下列各种可能的情形以及所有通过**共形映射**（conformal mapping）从这些情形所能得到的结构 Ⅰ R 是 z 球面，$Q(z)dz^2=dz^2$，Ⅱ．R 是 z 球面，$Q(z)dz^2=Ke^{i\alpha}dz/z^2$，其中 K 是正数，α 是实数，Ⅲ．R 是环面，$Q(z)dz^2$ 在 R 上正则，则有 1) $R\setminus\overline{\Lambda}$ 由有限个终端域、拟带形域、圆环域、圆形域和稠密域组成；2) 每个前述的区域由有限条轨道连同其交点围成，除圆形域和环形域外，这些区域的每个边界分支含有 C 的一个点，而圆形域和环形域的边界分支可能与 R 的一个边界分支相同，对于拟带形域，从集合 H 的点出发的两个边界元把边界划分为两部分，每部分都含有集合 C 的一个点；3) $Q(z)dz^2$ 的每个阶 $m>2$ 的极点都有一个邻域，此邻域可被 $m-2$ 个终端域与有限个（可以是零个）拟带形域的并的内部闭包所覆盖，4) $Q(z)dz^2$ 的每个阶 $m=2$ 的极点或者都有一个可被有限个拟带形域的并的内部闭包所覆盖的邻域，或者都有一个包含于某个圆形域中的邻域．

J A Jenkins 在 [1] 中最初表述的基本结构定理可由下述定理直接推出· 在上述定理的条件下，集 $R\setminus\overline{\Phi}$ 由有限个终端域、拟带形域、圆形域和环形域组成．在单叶函数论的许多研究中，重点在于证明，对于所考虑的二次微分 $Q(z)dz^2$，集合 $\hat{\Phi}$ 是空的．研究在何种条件下 $\hat{\Phi}$ 是空集这一问题本身也是有意义的 下述三极点定理（three-pole theorem）提供了 z 球面上集合 $\hat{\Phi}$ 为空的二次微分 $Q(z)dz^2$ 的例子 如果 R 是 z 球面，$Q(z)dz^2$ 是 R 上至多只有 3 个不同极点的二次微分，则 $\hat{\Phi}$ 是空集．

参考文献

[1] Jenkins, J A, Univalent functions and conformal mappings, Springer, 1958

[2] Jenkins, J A, On the globale structure of the trajectories of a positive quadratic differential, *Illinois J Math*, **4** (1960), 3, 405 – 412

Г В Кузьмина 撰 沈永欢 译

整体对称 Riemann 空间 [globally symmetric Riemannian space; глобально симметрическое Риманово пространство]

一种 Riemann 流形 M，其上每点 p 都是 M 的某个对合等距 S_p 的一个孤立不动点（即 S_q^2 是恒等变换）．设 G 是空间 M 的等距群中恒等元的连通分支，K 是在点 p 处的迷向子群，则 M 是**齐性空间**（homogeneous space）G/K，且映射 Φ $g\to S_pgS_p$ 为 G 的一个对合自同构，进而，K 被包含在 Φ 的所有不动点的闭子群 G^{Φ} 中，且包含了 G^{Φ} 中单位元的连通分支．

设 g 是一个实 Lie 代数，令 φ 是它的一个对合自同构，令 k 是 g 中所有 φ 不动的元素的子代数．考虑相伴群 $\mathrm{Int}(g)$ 的相应于子代数 k 的连通子群 K 如果群 K 是紧的，则 k 称为 g 的紧嵌入子代数，且对 (g,φ) 称为正交对称 Lie 代数（orthogonal symmetric Lie algebra） 令 $g=k+m$ 是 φ 的相应于本征值 1 和 -1 的本征子空间的分解．对 (g,φ) 称为· a) 紧型代数（algebra of compact type），如果 g 为紧的、半单纯的，b) 非紧型代数（algebra of non-compact type），如果 $g=k+m$ 是一个 **Cartan 分解**（Cartan decomposition），及 c) Euclid 型代数（algebra of Euclidean type），如果 m 是 g 中一个 Abel 理想 设 (g,φ) 是一个正交对称 Lie 代数，且令 $g=k+m$ 为上述分解．记 g^* 为 g 的复包 g^c 的子集 $k+im$．映射

$$\varphi^*\quad T+iX\to T-iX,\ T\in k,\ X\in m,$$

是代数 g^* 的一个对合自同构，(g^*,φ^*) 是一个正交对称 Lie 代数，称为 (g,φ) 的对偶．如果 (g,φ) 为紧型代数，则 (g^*,φ^*) 为非紧型代数，反之亦然．

每一个整体对称 Riemann 空间 G/K 生成了一个正交对称 Lie 代数 (g,φ)，这里 g 是群 G 的 Lie 代数，$\varphi=(d\Phi)_e$（e 是群中的恒等元） G/K 按照它所生成的对 (g,φ) 的类型而被称为紧型或非紧型的空间．所有单连通整体对称 Riemann 空间 M 乃是直积· $M=M_0\times M_-\times M_+$，这里 M_0 是 Euclid 空间，M_- 和 M_+ 分别是紧型和非紧型的整体对称 Riemann 空间．对任意非紧型的空间，曲率在任何二维方向上为非正的，对紧型空间而言，曲率处处非负．任何非紧型的空间微分同胚于 Euclid 空间

设 $M=G/K$ 是紧或非紧型的整体对称 Riemann 空间．M 的秩（rank）l 是指 M 中平坦全测地子流形的最大维数．设 A 和 A' 为 M 的两个 l 维的平坦全测地子流形，设 $q\in A$，$q'\in A'$，且令 X 为 M 在点 q 处的切向量．在这样的情况下 1) 存在元素 $x\in G$，使得 $xA=A'$，$xq=q'$，2) 存在元素 $y\in G$，使得 $yq=q$ 以及 $dy(X)$ 是在 q 处切于 A 的向量．

设 (g,φ) 是正交对称 Lie 代数，且令 k 和 m 是 φ 的相应于本征值 1 和 -1 的本征子空间．代数 (g,φ) 称为是不可约的（irreducible），如果下列条件满足 1) g 是半单纯代数且 k 不含 g 的非零理想，2) 代数 $\mathrm{ad}_g(k)$ 不可约地作用在 m 上．整体对称 Riemann 空间

称为不可约的，如果由 G/K 生成的正交对称 Lie 代数 (g,φ) 是不可约的．两个正交对称 Lie 代数 (g,φ) 和 (g',φ') 称为是同构的，如果存在代数 g 到 g' 上的同构 ψ，使得 $\psi\circ\varphi=\varphi'\circ\psi$　单连通不可约整体对称 Riemann 空间的分类（允许差一个等距）是等价于不可约正交对称 Lie 代数的分类（允许差一个同构）．

紧型不可约正交对称 Lie 代数是　Ⅰ．(g,φ)，这里 g 是紧单纯 Lie 代数以及 φ 是其任一对合自同构，Ⅱ．(g,φ)，这里紧致代数 g 是两个通过自同构 φ 互相共轭的单纯理想的直和

非紧型不可约正交对称 Lie 代数是　Ⅲ　(g,φ)，这里 g 是 $\mathbf{R}$ 上的单纯非紧 Lie 代数　且其复包 $g^{\mathbf{C}}$ 是 $\mathbf{C}$ 上的单纯 Lie 代数，φ 是 g 的一个对合自同构，使得其不动点构成了一个最大紧嵌入的子代数，Ⅳ．(g,φ)，这里 g 是 $\mathbf{C}$ 上的一个单纯 Lie 代数，它被看成是一个实的 Lie 代数，而 φ 是 g 关于最大紧嵌入子代数 k 的共轭，即为映射 $X+iY\to X-iY$，$X,Y\in k$．进而，如果 (g^*,φ^*) 表示对偶于 (g,φ) 的代数，则如果 (g^*,φ^*) 分别为Ⅰ型或Ⅱ型，则 (g,φ) 为Ⅲ型或Ⅳ型，反之亦然

对每个非紧型不可约正交对称代数只有一个单连通的整体对称 Riemann 空间与之相联系，而且这个空间是单连通的．至于紧代数，相应问题的解答将远为复杂只须考虑Ⅰ型和与Ⅱ型 Lie 代数相联系的Ⅱ型的整体对称 Riemann 空间——事实上这些空间是连通紧单 Lie 群，并在其上赋以在左和右推移下不变的 Riemann 结构　与Ⅰ型代数相联系的整体对称 Riemann 空间的分类问题（可允许差一个局部等距）等价于单紧 Lie 代数的对合自同构的分类问题．与给定的紧型正交对称代数 (g,φ) 相联系的对称 Riemann 空间的整体分类是用下列定理来解决的．

设 (g,φ) 是一个紧型正交对称代数，φ 的不动点的子代数 k 不包含 g 的非零理想．设 $\widetilde{G}$ 是具有 Lie 代数 g 的单连通 Lie 群，设 $\widetilde{Z}$ 为 $\widetilde{G}$ 的中心，设 $\widetilde{\Phi}$ 为 $\widetilde{G}$ 的使 $d\widetilde{\Phi}=\varphi$ 的自同构，且令 $\widetilde{K}$ 为 Φ 的不动点集合．对 $\widetilde{Z}$ 的任意子群 S，置 $K_S=\{g\in\widetilde{G}\ \ g^{-1}\Phi(g)\in S\}$．与 (g,φ) 相联系的整体对称 Riemann 空间 M 与形如 G/K 的且其上配有任意的 G 不变度量的空间一致，这里 $G=\widetilde{G}/S$，$K=K^*/(K^*\cap S)$　S 遍及 $\widetilde{Z}$ 的所有子群，而 K^* 遍及 G 的所有使 $K\subset K^*\subset K_S$ 的子群

参考文献

[1] Helgason, S , Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Acad Press, 1978

[2] Loos, O , Symmetric spaces, 1－2, Benjamin, 1969

A C Феденко 撰　沈纯理 译

粘合 [glueing, склеивание]

【补注】 粘合在微分拓扑、代数和解析几何等中是从某个局部模型范畴（category of local models）的局部片段与粘合资料一起频繁地用来构造诸如簇、概形、微分流形、向量丛、层，　，整体对象的方法．

例如，考虑维数为 n 的微分流形的情形．在此情形中，局部模型范畴由 $\mathbf{R}^n$ 中的开集和微分映射组成．这时，n 维微分流形 M 的局部片段和粘合资料的描述（local - pieces - and - glueing - data description）组成如下

i) $\mathbf{R}^n$ 中一族加下标 $\alpha\in A$ 的开子集 (U_α)，

ii) 对每个 α 和 β，开子集 $U_{\alpha\beta}\subset U_\alpha$ 和 $U_{\beta\alpha}\subset U_\beta$ 连同微分同胚 $\varphi_{\alpha\beta}\ \ U_{\alpha\beta}\to U_{\beta\alpha}$

粘合资料 $\varphi_{\alpha\beta}$ 服从以下的相容条件．

iii) $U_{\alpha\alpha}=U_\alpha$，$\varphi_{\alpha\alpha}=\mathrm{id}$，

iv) $\varphi_{\alpha\beta}=\varphi_{\beta\alpha}^{-1}$，

v) 在 $U_{\alpha\gamma}\cap U_{\alpha\beta}$ 上，$\varphi_{\beta\gamma}\varphi_{\alpha\beta}=\varphi_{\alpha\gamma}$

从这些资料出发，通过取 U_α 的不交并 $\coprod U_\alpha$ 模等价关系 $x\sim y$，构造一个局部 Euclid 空间 M，这里，对某个 α,β，如果 $x\in U_{\alpha\beta}$，$y\in U_{\beta\alpha}$，且 $\varphi_{\alpha\beta}(x)=y$，则 $x\sim y$　如果导致的拓扑空间 $M=\coprod U_\alpha/\sim$ 是 Hausdorff 和仿紧的，则得到微分流形．这两种性质都不从结构推出．从自然映射 $U_\alpha\to\coprod U_\alpha\to M$（之逆）得到局部坐标系．

对（预）概形，局部模型范畴是仿射概形 Spec(A) 和它们之间的概形的态射．见**概形**（scheme）这里，为得到概形，还必须附加整体分离性．对向量丛，局部模型范畴是平凡向量丛 $U\times\mathbf{R}^m\to U$，$U\subset\mathbf{R}^n$ 和这样的平凡向量丛之间的向量丛态射，即形如 $(x,v)\mapsto(\varphi(x),A(x)v)$ 的微分映射 $U\times\mathbf{R}^m\to V\times\mathbf{R}^m$，其中 $A(x)$ 是光滑地依赖于 x 的 $m\times m$ 阶矩阵．见**向量丛**（vector bundle）．

如果 M 是一个**微分流形**（differentiable manifold），有坐标邻域的覆盖 (V_α) 和相应的坐标系 $\psi_\alpha.V_\alpha\to\mathbf{R}^n$，则 M 的相应的局部片段和粘合资料的描述如下　局部片段是 $U_\alpha=\psi_\alpha(V_\alpha)$，开子集 $U_{\alpha\beta}$ 等于 $\psi_\alpha(V_\alpha\cap V_\beta)$ 且粘合资料 $\varphi_{\alpha\beta}\ \ U_{\alpha\beta}\to U_{\beta\alpha}$ 是映射 $\psi_\beta\psi_\alpha^{-1}$ 限制在 $\psi_\alpha(V_\alpha\cap V_\beta)$ 上．因此，用图册对流形的描述与用局部片断和粘合资料的描述是彼此很接近的．

参考文献

[A1] Grothendieck, A , Elements de geometrie algebrique 1, IHES, 1960, Sect 0 4 1 7

[A2] Hazewinkel, M , A tutorial introduction to differentiable manifolds and calculus on differentiable manifolds, in W Schiehlen and W Wedig (eds) Analysis and estimation of stochastic mechanical systems, Springer (Wien), 1988, 316－340

徐森林 译　薛春华 校

粘合法 [glueing method ; склеивания метод]，曲面论中的

构造一个与给定曲面等距的曲面的一种方法 粘合方法在证明用抽象方式定义的凸度量的可实现性，凸曲面的弯曲问题及可弯程度的定量估计等方面有所应用．其有力之处在于它能在微分方程无效的情况下发挥作用．

Александров 定理 设 G_1, , G_n 是具有正曲率的内蕴度量的流形中的闭区域，它们由有限条具有有界旋度变分的曲线所围成．设 G 是由区域 G_i，并将它们的边界按如下方式进行恒同后所构成的流形．

1) G_i 和 G_j 的边界的恒同线段具有相同的长度，

2) G_i 和 G_j 的边界的恒同线段的旋度（在这些区域的一侧算出的）之和是非负的，

3) 由区域 G_k 的恒同点处的扇形所作出的角度（在这些区域的一侧算出的）之和不超过 2π

于是 G 具有一个正曲率的内蕴度量，它与相应点的邻域中区域的度量一致

参考文献

[1] Александров, А Д , Залгаллер, В А , Двумерные многообразия ограниченной кривизны, М -Л , 1962

[2] Погорелов, А В , Изгибание выпуклых поверхностей, М -Л , 1951

М И Войцеховский 撰 沈纯理 译

粘合定理 [glueing theorems , склеивания теоремы]

确定在区域边界上满足特定关系的解析函数的存在性的定理

Лаврентьев 粘合定理 (Lavrent'ev glueing theorem) ([1]) 在 $[-1,1]$ 中给定任一解析函数 $x_1=\varphi(x)$，满足 $\varphi(\pm1)=\pm1$，且 $\varphi'(x)>0$，则可构造出两个解析函数 $f_1(z,h)$ 和 $f_2(z,h)$，此处 $z=x+iy$，$h=\text{const}$，分别把矩形 $|x|<1$，$-h<y<0$ 和 $|x|<1$，$0<y<h$ 单叶共形地映射成不相交区域 D_1 和 D_2，使得 $f_1(x,h)=f_2(\varphi(x),h)$．这个定理曾被用来证明满足下述条件的函数 $w=f(z)$ 的存在性 (见[6])．$f(0)=0$，$f(1)=1$，把圆盘 $|z|\leqslant1$ 拟共形映射为圆盘 $|w|\leqslant1$，且几乎处处具有给定的特征 $h(z)$，即

$$h(z)=\frac{w_{\bar z}}{w_z}, \quad |h(z)|\leqslant h_0<1,$$

且 $h(z)$ 是对几乎所有的 $z=x+iy$，$|z|\leqslant1$ 有定义的可测函数．Лаврентьев 定理的一种改进形式亦曾用来求解单连通 Riemann 曲面到圆盘的共形映射问题 ([5])

其余的粘合定理（对型函数 $x_1=\varphi(x)$ 的限制较弱，见[2]) 在 Riemann 曲面理论中起主要的作用．另一例子如下 (见[3],[5]) 假定在圆周 $|z|=1$ 上给定一段弧 γ_1，具有端点 a 和 b，$a\neq b$，设 γ_1 上的函数 $g(z)$ 具有下列性质 1) 在 γ 的所有内点处 $g(z)$ 正则，且 $g'(z)\neq0$; 2) 函数 $z_1=g(z)$ 建立了 γ_1 到它在 $|z|=1$ 上的补弧 γ_2 的一一映射，保持 a 和 b 不变，则存在函数

$$w=F(z)=\frac{1}{z}+a_1z+ \quad ,$$

在 $|z|\leqslant1$ 上除 0，a,b 外正则，使得在 γ_1 的内点有 $F(z)=F(g(z))$

亦已证明存在具有这些性质的单叶函数 $F(z)$（见[4]，第 2 章）

参考文献

[1] Лаврентьев, М А , 《Матем сб》, **42** (1935), 4, 407–424

[2] Волковыский, Л И , 《Матем сб》, **18** (1946), 2, 185–212

[3] Schaeffer, A C and Spencer, D C , Variational methods in conformal mapping, *Duke Math J* , **14** (1947), 4, 949–966

[4] Schaeffer, A C and Spencer, D C , Coefficient regions for schlicht functions, Amer Math Soc Coll Publ , 35, Amer Math Soc , 1950

[5] Голузин, Г М , Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд , М , 1966, гл 11, §1–2 (中译本 Г М 戈鲁辛，复变函数的几何理论，科学出版社，1956)

[6] Белинский, П П , Общие свойства квазиконформных отображений, новосиб , 1974, гл 2, §1

Е Г Голузина 撰 杨维奇 译

Godel 完全性定理 [Godel completeness theorem, Гёделя теорема о полоноте]

关于经典谓词演算的完全性的下列命题．任意一个在所有模型中皆真的谓词公式都可以（用经典谓词演算的形式规则）推演出来．这个定理表明在某种意义下经典谓词演算可推演出的公式集合是极大的 它包含了集合论数学的所有纯逻辑定律．K Godel ([1]) 的证明给出了构造任一公式 A 的反模型 (countermodel)（即 A 的否定的模型）的方法，其中 A 是在没有割规则的 **Gentzen 形式系统** (Gentzen formal system) 中不能推演出的公式．该定理还有基于把公式系统扩充为一个极大系统的证明，也还有一些使用代数方法的证明．Godel 完全性定理及其证明已经推广到含有等号的谓词演算中 另一方面是推广到任意公式集 任一相容的公式集合都具有模型（一个公式集 M 称为相容的 (consistent)，如果对任意 A_1, , $A_k\in M$，都不能推演出 $\neg(A_1\wedge \quad \wedge A_k)$) 对于一个相容的公式集合，Godel 的证明给出了一个以项为元素的模型．上述模型构成关于集合论的很多元数学研究的出发点 项模型的另一个应用是 Lowenheim-Skolem 定理 (Lowenheim-Skolem theorem)．如果一个可数公式集合有模型，那么它就有可数模型．Godel 的证明本身可以在

没有无限公理的集合论中实现，即用算术方法实现．这样就可得到Godel完全性定理的一种构造性形式(Bernay引理(Bernay lemma)) 对每一个谓词公式A，可以找到一个对谓词变量的算术谓词替换ξ使得$\xi A \to \mathrm{Pr}(A)$在形式算术中可以推演出来 此处的$\mathrm{Pr}(A)$是一个算术公式，它表示A可以推演出来．于是只要A在由ξ定义的模型内真，那么它就可以推演出来．如果形式系统S在系统S'内已经证明是相容的，那么用Bernay引理就可以在系统S'内构造形式系统S的模型．

由Godel完全性定理可以推出割削定理(见**Gentzen形式系统**(Gentzen formal system))以及各种分离性定理，例如 如果一个不包含等号的公式可以在包含等号的谓词演算中推演出来，那么它也可以在纯谓词演算中推演出来，如果一个谓词公式可以在具有自由谓词变量的算术中推演出来，那么它在谓词演算中也可推演出来

Godel完全性定理可以推广到非经典演算中(如果模型的概念也适当推广) 如像直觉主义逻辑，模态逻辑等等，同样也可推广到无限语言的逻辑．

参考文献

[1] Godel, K, Die Vollstandigkeit der Axiomen des logischen Funktionalkalkuls, *Monatsh Math Physik*, **37** (1930), 349－360

[2] Новиков, П С, Элементы математической логики М, 1959(英译本 Novikov, P S, Elements of mathematical logic, Oliver and Boyd & Acad Press, 1964)

[3] Kleene, S C, Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951(中译本 S C 克林，元数学导论，科学出版社，1984，1985)

Г Е Минц 撰 卢景波 译

Godel构造集[Godel constructive set, конструктивное по Гёделю множество]，可构造集 (constructible set)

以下描述构造集合过程中产生的集合．设X为一集合，且$R\subseteq X\times X$ 考虑一阶语言$L(R,X)$，其中含一个二元谓词符来指称R和一些个体常元来指称集合X的元素（对于每个$x\in X$，它对应的常元是$\underline{x}$） 陈述句"语言$L(R,X)$的公式φ在模型$M=(X,R)$中为真"，被写成

$$M\models\varphi$$

一个集合$Y\subseteq X$称为在模型$M=(X,R)$中可定义的 (definable)（或M可定义的 (M-definable)），若存在$L(R,X)$的只带一个自由变元v的公式$\varphi(v)$，使得

$$\forall x\in X(x\in Y\longleftrightarrow M\models\varphi(\underline{x}))$$

设Def M表示所有M可定义集的全体 对每个序数α，集合L_α由以下关系来递归定义

$$L_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{Def}\,(L_\beta,\ \in|L_\beta),$$

其中$\in|L_\beta$为限制于集合L_β的隶属关系．因此，有

$$L_0=\varphi,\ L_1=\{\varphi\},\ L_2=\{\varphi,\{\varphi\}\},\cdots,$$
$$\cdots,L_{\omega_0}=\bigcup_{n<\omega_0}L_n,\cdots$$

集合z称为可构造的 (constructible)，若存在序数α，使得$z\in L_\alpha$ 所有可构造集的类由L表示．在1938年K. Gödel定义了L并引入以下的可构造性公理 (axiom of constractibility) 每个集合都是可构造的 他证明在L中所有ZF公理都成立，且可构造性公理亦然，他还证明选择公理和广义连续统假设 (generalized continuum hypothesis)（即"对每个序数α，有$2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$"）在ZF中可由构造性公理导出

类L也可刻画为这样的最小类 它是ZF的模型且含所有序数，还有其他定义L的方法（见[2]－[4]） 关系$x\in L_\alpha$能由语言ZF中的一个公式来表示，这个公式还具有简单的语法结构（所谓的Δ_1^{ZF}公式，见[1]）

一些关于可构造集的结果．**构造实数** (constructive real number) 的集合即集合$R\cap L$是Σ_2^1集合，这里R是所有实数（即0和1的序列）的集合（见[5]）．已证明 可构造性公理蕴含类型Σ_2^1的实数的Lebesgue不可测集的存在性（见[6]）、**Суслин假设** (Suslin hypothesis) 的否定以及可测基数的不存在性（见[2]）．

参考文献

[1A] Godel, K, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis, *Proc Nat Acad Sci USA*, **24** (1938), 556－557

[1B] Godel, K, Consistency proof for the generalized continuum hypothesis, *Proc Nat Acad Sci USA*, **25** (1939), 220－224

[2] Jech, T J, Lectures in set theory with particular emphasis on the method of forcing, Springer, 1971

[3] Mostowski, A, Constructible sets with applications, North-Holland, 1969

[4] Karp, C, A proof of the relative consistency of the continuum hypothesis, in J crossley (ed) sets, models and recursion theory, North-Holland, 1967, 1－32

[5] Addison, J W, Some consequences of the axiom of constructibility, *Fund Math*, **46** (1959), 337－357

[6] Новиков, П С, 《Тр матем ин-та АН СССР》, **38** (1951), 279－316

[7] Felgner, U, Models of ZF-set theory, Springer, 1971

В Н Гришин 撰

【补注】 有关概念Σ_2^1见**描述集合论** (descriptive set theory)．

作为Godel发现的推论，若ZF公理是不矛盾的，

则在这些公理上加入选择公理和广义连续统假设之后仍然不矛盾，这是关于 ZF 理论的第一个算是重要的相对相容性结果，只在四分之一世纪之后的 1963 年才被 P Cohen 的**力迫法** (forcıng method) 超越．由力迫法可知，ZF 不能证明可构造性公理（除非 ZF 是矛盾的）．大多数集合论学者认为，没有充分的理由相信它是真的．当然，L 是集合论领域的一个重要子类，它是值得研究的．

新结果可在 [A1] 中找到，这本书是关于可构造性的良好引论，文献 [A2] 包含本条目中提到的（大多数）材料

参考文献

[A1] Devlın, K J, Contructıbılıty, Sprınger, 1984

[A2] Jech, T, Set theory, Acad Press, 1978

[A3] Kunen, K, Set theory, An ıntroductıon to ındependence proofs, North-Holland, 1980

[A4] Godel, K, The consıstency of the axıom of choıce and of the generalızed contınuum hypothesıs wıth the axıoms of set theory, Prınceton Unıv Press, 1940

[A5] Devlın, K, Constructıbılıty, ın J Barwıse (ed) Handbook of mathematıcal logıc, North-Holland, 1977, 453-490

宋方敏 译 莫绍揆 校

Godel 不完全性定理 [Godel incompleteness theorem, Гёделя теорема о неполноте]

Godel ([1]) 中给出的两个定理的共用的名称．Godel **第一不完全性定理** (Godel first ıncompleteness theorem) 断言，在包含某种（由 +，·，符号 ∀，∃，以及通常的规则构成的）最少量算术的任何一个相容的**形式系统** (formal system) 中都可以找到一个**形式不可判定的命题** (formally-undecıdable proposıtıon)，即可以找到一个闭公式 A，使 A 和 $\neg A$ 都不能在这个系统中被推演出来 Godel **第二不完全性定理** (Godel second ıncompleteness theorem) 是说如果满足某些自然的完全性条件，则上述公式 A 可以取为这样一个公式，它表示这个系统是协调的 这两个定理标志了数学基础中 Hılbert 计划的失败．Hılbert 计划原本指望把所有已存在的数学形式化，或至少形式化其中相当大的一部分（Godel 第一不完全性定理证明这是不可能的），还试图通过有限性的证明来断定所得形式系统的相容性（Godel 第二不完全性定理表明，即令把形式算术的所有方法都看作是有限性的，用它们仍然不足以证明算术的相容性）．

形式不可判定的命题是用算术化（或 Godel 配数）方法构造的，这种方法已成为证明论（元数学）的主要方法之一．下面来描述这种方法．

选定一种方法用自然数把基本形式对象（公式，公式的有限序列，等等）数字化（编码），使这些对象的主要性质（是一条**公理** (axıom)，或是符合本系统的规则的一个**逻辑推导** (derıvatıon, logıcal) 等等）能用简单的数字来表示 从初始资料的编码经过复合变换得到最终结果的编码所需的计算（例如，用一个项代换一个公式中的自由变元）也同样简便．用这种方法，可以写出一个 $f(a, b)=0$ 形式的算术公式 $B(a, b)$（其中 f 是一个原始递归函数），这个公式表示下列条件 b 是一个公式的编码，这个公式是由编码为 a 的公式经用自然数 a 代换其中变元 x 而得到的．如果 p 是公式 $\forall b \neg B(x, b)$ 的编码，公式 $\forall b \neg B(p, b)$ 就表示它自身的不可推演性，这个公式便是形式不可判定的 这就得出· 任何一个含有潜在最小算术的相容系统中都包含一个这种类型的命题，它是真的，而又是不可判定的．

把 Godel 第一不完全性定理的证明形式化就得到 Godel 第二不完全性定理 这个证明用到了把所考虑系统的语法算术化的一些性质，表示下列命题的公式一定是可推演的 1) 系统对**分离法则** (modus ponens) 封闭，2) 系统对用项代换个体变元封闭，3) 当 N 是一个自然数并且 f 是一个原始递归函数时，形如 $f(N)=0$ 的公式真值蕴涵这个公式的可推演性．这些条件在普通的算术化中都是满足的，但也有可能，在不改变算术化的算法特性（所有函数和谓词保持原始递归）的同时，改变这些条件使得（对新的算术化而言）表示这个系统的相容性的那个公式变成可推演的．而在新的算术化中，条件 1) 不再成立．

Gödel 第二不完全性定理给出一个判别法对形式系统加以比较．如果能在系统 S 中证明系统 T 的和谐性，则前一系统不能在后一系统中加以解释．这就可以证明**形式数学分析** (formal mathematıcal analysıs) 在算术中不能解释，类型论不能在分析中解释（见**类型论** (type, theory of)），以及集合论 Z 不能在类型论中解释．

参考文献

[1] Godel, K, Ueber formal unentscheıdbare Satze der Prıncıpıa Mathematıca und verwandter Systeme I, Monatsh Math Physık, **38** (1931), 178-198

[2] Hılbert, D and Bernays, P, Grundlagen der Mathematık, 1-2, Sprınger, 1968-1970

[3] Kleene, S C, Introductıon to metamathematıcs, North-Holland, 1951 (中译本 S C 克林，元数学导论，科学出版社，1984)

Г Е Минц 撰 沈复兴 译

Godel 解释 [Godel interpretation, Гёделя интерпретация]，直觉主义算术的

将直觉主义算术的公式变为形如 $\exists x \forall y A(x, y, z)$ 的公式的变换．其中 x，y 和 z 是各种有限型变

元．算术可证公式可变换为有限型无量词理论的可证公式．这样，这种变换将直觉主义算术（因而经典算术）的协调性转化为这种有限型理论的协调论，这正是 Godel 原先的目的．

这种型论，称为 T，对每个型 t 有无穷多个型为 t 的变量 1) 型 0(自然数型)，2) 如果 t_0， ，t_k 是型，则 $(t_0,\ ,t_k)$ 也是型（将 k 个型分别为 t_1， ，t_k 的变量映射到型为 t_0 的值的函数型）．语言 T 包含各种型的项 型 t 的一个变量 x^t 是型 t 的一个项，0 是型 0 的一个项，并且符号 s，表示自然数加 1 的函数，它是型 (0, 0) 的一个项 其余的项是由一般规则形成的 任意型函数的 **Church λ 抽取**（Church λ-abstraction）和原始递归 T 的原子公式是等式（$t=r$） 其中 t, r 是型 0 的项 T 的公式是由原子公式经命题演算的逻辑联结词 ∧，∨，⊃，¬ 而得到的．T 的公设是直觉主义命题演算的公理和推演规则，相等公理，0 和 s 的 **Peano 公理**（Peano axioms），原始递归等式，λ 抽取定义的函数应用公理，以及作为不用量词的推导规则的数学归纳原理 T^+ 表示由含有任意型变量的量词以及相应的量词逻辑公理和推导规则完全化的理论 T

Godel 解释将 T^* 的任何公式 F(即任意直觉主义算术公式）变换为形为

$$\exists x \forall y A(x, y, z)$$

的公式，其中 $A(x, y, z)$ 是无量词公式，x, y, z 是不同型的变量，z 是公式 F 的所有自由变量的集合

设 F 是一个直觉主义算术公式，且设 $\exists x \forall y A(x, y, z)$ 是它的 Godel 解释．如果 F 在形式直觉主义算术中是可推导的，则可以构造 T 的一个项 $t(z)$，使得公式 $A(t(z), y, z)$ 在 T 中是可推导的．这样，算术的协调性归结为无量词理论 T 的协调性

基于 Godel 解释的直觉主义语义（intuitionistic semantics）定义如下 公式 F 是真的，如果可以找到一个可计算项 $t(z)$ 使得无量词公式 $A(t(z), y, z)$ 对每个可计算的 z 是真的

参考文献

[1] Godel, K , Ueber eine bisher noch nicht benutzte Erweiterung des finiten Standpunktes, *Dialectica*, **12** (1958), 280 − 287

А Г Драгалин 撰

【补注】 在西方这种解释通常称为辩证解释（dialectica interpretation）

参考文献

[A1] Bishop, E , Mathematics as a numerical language, in A Kino, J Myhill and R E Vesley (eds) Intuitionism and proof theory, North-Holland, 1970, 53 − 71

[A2] Troelsta, A S , Metamathematical investigations, Springer, 1973, 230

眭跃飞 译

Goldbach 问题 [Goldbach problem，Гольдбаха проблема]

著名的数论问题之一 证明每个等于或大于 7 的奇数都能写成三个素数之和 它是 Ch Goldbach 在 1742 年致 L Euler 的一封信中提出的．Euler 在回信中指出，为了解决这个问题，只须证明每个等于或大于 6 的偶数都是两个素数之和．许多数学家为此做了长期的努力，均告失败 G H Hardy 和 J. E Littlewood 在 1923 年成功地证明，如果某些关于 **Dirichlet L 级数**（Dirichlet L-series）的定理（至今仍未证明）成立，那么任何充分大的奇数都是三个素数之和．И. М Виноградов 在 1937 年发现了一种新的解析数论方法，即素变数三角和估计方法，并应用这种方法证明了一个把奇数表示为三素数之和的解数的渐近公式 (见 **Виноградов 法**（Vinogradov method），**三角和法**（trigonometric sums, method of）） 这个公式蕴涵每个充分大的奇数都是三个素数之和．这是现代数学的重大成就之一．应用 Виноградов 的方法可以解决一系列更为一般的问题．把每个偶数写成两个素数之和的问题至今（1994）仍未解决．

参考文献

[1] Виноградов, И М , Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М , 1971 (英译本 Vinogradov, I M , The method of trigonometric sums in the theory of numbers, Interscience, 1954)

[2] Карацуба, А А , Основы аналитической теории чисел, М , 1975

А А Карацуба 撰

【补注】 在 [A1] 中给出了关于三项的 Goldbach 问题的 Виноградов 的结果的一个简洁证明．1973 年，陈景润证明了每个充分大的偶数都是一个素数与一个不超过两个素数的乘积之和．其证明，见 [A2]，第 11 章．

在 [3] 中从数值观点研究了形式为 $2n=p+q$ ($p \leqslant q$) 的 Goldbach 猜想 特别注意的是使 $2n=p+q$ 成立的最小的 p 发现在 $2n \leqslant 2 \cdot 10^{10}$ 范围内 12 703 943 222 是“最坏的”情况，也就是说，这个数可以写成 $2029+q$，而其他所有不超过 $2 \cdot 10^{10}$ 的偶数 $2n$ 具有表示式 $2n=p+q$，其中 $p<2029$

参考文献

[A1] Vaughan, R C , The Hardy-Littlewood method, Cambridge Univ Press, 1981

[A2] Halberstam, H and Richert, H E , Sieve methods, Acad Press, 1974

[A3] Granville, A , Lune, J van der and Riele, H J J te, Checking the Goldbach conjecture on a vector computer, in R Mollin (ed), Number Theory and Applications, Proc First Conf Canadian Number

Theory Assoc, Banff, April 1988, Kluwer, 1989 (亦见 Mathematical Centre Report NM R8812 (1988))

[A4] Yuan, Wang (ed), Goldbach conjecture, World Scientific, 1984 (中译本 王元，哥德巴赫猜想研究，黑龙江教育出版社，1987)

【译注】

参考文献

[B1] 陈景润，大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和，科学通报，**17** (1966), 385－386

[B2] Chen Jing-run, On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes, *Sci Sin*, **16** (1973), 157－176, II, *Sci Sin*, **21** (1978), 421－430

[B3] 潘承洞、潘承彪，哥德巴赫猜想，科学出版社，1981

张鸿林 译

Goldbach-Waring 问题 [**Goldbach-Waring problem**, **Гольдбаха-Варинга проблема**]

关于方程

$$p_1^n + \cdots + p_k^n = N$$

的解数 $I_k(N)$ 的性质的一个问题，其中 $p_1, \cdots, p_k$ 是素数，$n \geqslant 1$ (见 **Waring 问题** (Waring problem), **Goldbach 问题** (Goldbach problem)) 对此问题所得结果 (至 1977 年) 与 Waring 问题中所得结果大致相同. 已经证明，如果 $k = O(n\log n)$，则此方程可解 (即 $I_k(N)>0$)，而对于 $k = O(n^2\log n)$，得到了 $I_k(N)$ 的一个渐近公式. 这些结果是用 **Виноградов 法** (Vinogradov method) 得到的.

参考文献

[1] Виноградов, И М, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М, 1971 (英译本 Vinogradov, I M, The method of trigonometric sums in the theory of numbers, Interscience, 1954)

[2] Hua, L-K (华罗庚), Abschatzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, in Enzyklopaedie der Mathematische Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Vol 1, 1959 Heft 13, Teil 1

A A Карацуба 撰

黄金分割 [**golden ratio**, golden section, sectio aurea, sectio divina, divina proportio, golden mean, harmonic division, division in extreme, mean ratio, **золотое сечение**]

把线段 a 分成两部分，使得其中较长的部分 x 是整个线段 a 和较短的部分 $a-x$ 的比例中项，即

$$a : x = x : (a-x) \qquad (*)$$

为了求 x，必须解二次方程

$$x^2 + ax - a^2 = 0,$$

它的正根是

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot a \approx 0.62a$$

条件 (*) 也可写成

$$\frac{x}{a}\left[1+\frac{x}{a}\right]=1 \text{ 或 } x=\frac{a}{1+\dfrac{x}{a}},$$

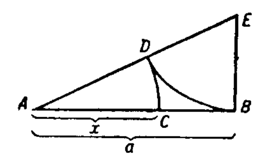
或

$$x = a\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

即把 x 表示成一个连分数，它的渐近分数是

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \text{等等},$$

其中 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … 是 **Fibonacci 数** (Fibonacci numbers)



可以用几何作图法求线段 AB 的黄金分割 (见图). 过点 B 作 AB 的垂线，在此垂线上截取线段 $BE = AB/2$，然后，连接 A 和 E，截取 $ED = EB$，最后截取 $AC = AD$. 这时，

$$AB : AC = AC : CB.$$

在古代人们就已经知道黄金分割. 在现存的古典文献中，最早出现黄金分割的是 Euclid 的《几何原本》(Elements, 卷 II, 11) (公元前三世纪).

黄金分割原理和与其相近的一些比例关系是许多艺术作品 (主要是古代和文艺复兴时期的建筑艺术品) 的构造设计的根据.

【补注】 在自然界许多地方也常出现黄金分割. 据信，Pythagoras 学派 (公元前 500 年) 已经知道并且使用这个比例关系.

"divina proportio" (sectio divana, divine section) 一词是 Fra Luca Pacioli 在他的《神妙的比例》(De Divina Proportione, 1509) 一书中引入的. 而后，他和 Leonardo de Vinci 合作研究了这个问题. "golden section" (sectio aurea) 一词是后来 (大约 18 世纪) 才使用的.

张鸿林 译

Голубев-Привалов 定理 [**Golubev-Privalov theorem**,

Голубева-Привалова теорема]

下述定理· 如果 $f(z)$ 是复 z 平面上闭可求长 Jordan 曲线 L 上的复可积函数，则为使存在在 L 所围的区域 D 的内部正则且在 L 上的角边界值几乎处处与 $f(z)$ 相同的函数 $F(z)$，其必要充分条件是

$$\int_L z^n f(z)\,dz=0,\quad n=0,1,\qquad (1)$$

这些条件称为 Голубев-Привалов 条件 (Golubev-Privalov conditions). 条件的充分性由 В В Голубев 在 [1] 中证明，而必要性则由 И И Привалов 在 [2] 中证明 换言之，条件 (1) 是对于函数 $f(z)$ 和曲线 L 构造的 Cauchy-Lebesgue 型积分 (见 **Cauchy 积分** (Cauchy integral))

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}\qquad (z\in D)$$

为 Cauchy-Lebesgue 积分的必要充分条件．

在更广泛的表述中，令 μ 为 L 上的一个复 **Borel 测度** (Borel measure)，于是 Cauchy-Stieltjes 型积分 (见 **Cauchy 积分** (Cauchy integral))

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta-z}\ (z\in D)$$

为 Cauchy-Stieltjes 积分，当且仅当广义 Голубев-Привалов 条件 (generalized Golubev-Privalov conditions)

$$\int z^n d\mu(z)=0\qquad (n=0,1,\ \ )\qquad (2)$$

满足

换言之，对于存在 D 内的正则函数 $F(z)$，使得它在 L 上的角边界值 (关于 Lebesgue 测度) 几乎处处与 $e^{-i\varphi(z)}\mu'(z)$ 相同，其中 $\varphi(z)$ 是横轴正向与 L 在点 $z\in L$ 处的切线之间的夹角，$\mu'(z)$ 是 μ 关于 L 上 Lebesgue 测度 (弧长) 的导数，条件 (2) 是必要且充分的．

在**解析函数的边界性质** (boundary properties of analytic functions) 理论中，Голубев-Привалов 定理有重要作用．

参考文献

[1] Голубев, В В , Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек, М , 1916 (亦见同一作者的 Однозначные аналитические функции Автоморфные функции, М , 1961)

[2] Привалов, И И , Интеграл Cauchy, Саратов, 1918 .

[3] Привалов, И И , Граничные свойства аналитических функций, 2 изд , М —Л , 1950 (中译本 И И 普里瓦洛夫，解析函数的边界性质，科学出版社，1956) .

Е Д Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

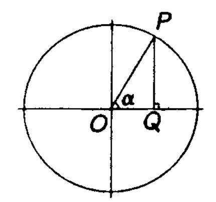
[A1] Голузин, Г М , Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд , М , 1966 (中译本 Г М 戈鲁辛，复变函数的几何理论，科学出版社，1956)

沈永欢 译

测角术 [goniometry , гониометрия]

由**三角函数** (trigonometric functions) 以及它们之间的关系所确定的**三角学** (trigonometry) 部分．

【补注】 测角术是研究所谓测角函数 (goniometric functions) 的数学分支，在这些函数中最重要的是：正弦、余弦和正切 它们可按纯几何方式定义如下



$$\sin\alpha=\frac{PQ}{OP},\ \cos\alpha=\frac{OQ}{OP},\ \tan\alpha=\frac{PQ}{OQ}$$

可以证明，对于任何 x，下列级数展开式成立：

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ \ ,$$

$$\mathrm{con}\,x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+$$

因为这些级数对于任意复数也收敛，所以上述函数能够扩展到整个复平面，并且就其本身进行研究，而不涉及任何几何应用

测角术的两个重要部分是平面三角学和球面三角学 在**平面三角学** (plane trigonometry) 中，主要的问题是：当已知一个平面三角形六个要素 (三个边和三个角) 中的三个要素时，计算其余三个要素．**球面三角学** (spherical trigonometry) 的研究对象是球面三角形的性质 这些学科可应用于测量学和航行学．

亦见**反三角函数** (inverse trigonometric functions).

张鸿林 译

拟合优度检验 [goodness-of-fit test, согласия критерий]

对拟合优度的统计检验．这种检验的实质如下 设 $X_1,\ \ ,X_n$ 是独立同分布的随机变量，其分布函数 F 未知．对某一给定的分布函数 F_0，关于假设 $H_0: F\equiv F_0$ 的统计检验问题称为拟合优度检验问题 (problem of testing goodness of fit) 例如，如果 F_0 是一个连续分布函数，则可以用 **Колмогоров 检验** (Kolmogorov test) 作为对 H_0 的一个拟合优度检验

亦见**统计学中的非参数方法** (non-parametric methods in statistics)

М С Никулин 撰 陶 波 译 李国英 校

Goppa 码 [Goppa code, Гоппа код]

【补注】 设$g(z)$是有限域 $\mathbf{F}_{q^m}$ 上的首 1 多项式，又设 $L=\{\gamma_0, \cdot, \gamma_{n-1}\}$ 为 $\mathbf{F}_{q^m}$ 中 n 个元素的集合，且 $g(\gamma_i)\neq 0$, $0\leqslant i<n$，这时，由 Goppa 多项式 (Goppa polynomial) $g(z)$ 决定的经典 Goppa 码 (classical Goppa code) $\Gamma(L,g)$ 为 F_q^n 上满足条件 $\sum_{i=0}^{n-1}(z-\gamma_i)^{-1}c_i\equiv 0(\bmod g(z))$ 的所有码字 $(c_0, \cdot\cdot, c_{n-1})$ 的集合 式中 $(z-\gamma)^{-1}$ 应理解为 $-g(\gamma)^{-1}f(z)$，其中 $f(z)$ 是阶次低于 $g(z)$ 且满足 $(z-\gamma)f(z)\equiv 1(\bmod g(z))$ 的唯一多项式．

这种结构的基本思想可概括如下 设 X 为定义在有限域 F_q 上的非奇异投影曲线（在代数几何意义下），又设 $P_1, \cdot, P_n$ 为 X 的一组有理点，$D=P_1+\ \ +P_n$ 为因子，G 为另一保持与 D 不相交的因子，$L(G)$ 是与因子 G 相关的线性系统，即 $L(G)=\{f\in k(X)^*\ (f)+D\geqslant 0\}\cup\{0\}$，式中 $k(X)^*$ 是关于 X 的非零有理函数集，(f) 是由 $f\in k(X)^*$ 定义的零、极点因子，则与因子对 (D,G) 相关联的，长为 n 的几何 Goppa 码 (geometric Goppa code) 是由 $f_{\mapsto}(f(P_1),\ \ ,f(P_n))$ 定义的线性映射 α. $L(G)\to F_q^n$ 的象．如果因子 D 和 G 是支集相交，则仍存在一个与因子对 (D,G) 相对应的码，但这个码是非标准的，然而，这样得到的所有码在相应的意义上都是等效的．与因子对 (D,G) 对应的第二种码如下 设 $\Omega(D)$ 为 ω 对 X 的有理微分形式的向量空间，$(\omega)\geqslant D$，且具有附加零形式，这时，与因子对 (D,G) 对应的第二种线性码 $C^*(D,G)$ 是 $\omega\mapsto(\mathrm{res}_{P_1}(\omega),\ \ ,\mathrm{res}_{P_n}(\omega))$ 定义的线性映射 $\alpha^*\cdot\Omega(G-D)\to F_q^n$ 的象．这是对上述经典Goppa码构造更直接的概括 码 $C^*(D,G)$ 和 $C(D,G)$ 互为对偶码. 当给定 D 而变化 G 时，码 $C^*(D,G)$ 和 $C(D,G)$ 生成同样的族

当时 (1989)，寻找好码的一种方法是求出与其亏格相比具有更多有理点的曲线，这就要引入高等代数几何学．现在，应用 Shimura 曲线（模曲线）人们能够找到一系列在 $q\geqslant 49$ 时超过 Gilbert-Варшамов 界的码．其细节见[A4], [A7], [A9]

参考文献

[A1] Lint, J H, van, Introduction to coding theory, Springer, 1982

[A2] Tietavainen, A, On the non-existence of perfect codes over finite field, *SIAM J Appl Math*, **24** (1973), 88-96

[A3] McEliece, R J, Rodemich, E R, Rumsey, H and Welch, L R, New upper bounds on the rate of a code via the Delsarte-MacWilliams inequalities, *IEEE Trans inform Theory*, **23** (1977), 157-166

[A4] Tsfasman, M A., Vladuts, S G and Zink, T, Modular curves, shimura curves and Goppa codes, better than Varshamov-Gilbert bound, *Math Nachr*, **109** (1982), 21-28

[A5] Lekkerkerker, C G and Gruber, P M, Geometry of numbers, North-Holland, 1987

[A6] Hill, R, A first course in coding theory, clarendon Press, 1986

[A7] Lint, J H van and Geer, G van der, introduction to coding theory and algebraic geometry, Birkhauser, 1988

[A8] Goppa, V D, Geometry and codes, Kluwer, 1988

[A9] Tsfasman, M A. and Vladuts, S G, Algebraic geometric codes, Kluwer, 1989

周荫清 译

Gorenstein 环 [Gorenstein ring; Горенштейна кольцо]

具有有限内射维数的局部交换 **Noetherian 环** (Noetherian ring)（见**同调维数** (homological dimension)）当且仅当下述等价的条件之一成立时，一个以 m 为极大理想，k 为剩余类域，维数为 n 的局部环 A 为 Gorenstein 环

1) $i\neq n$ 时，$\mathrm{Ext}_A^i(k,A)=0$，而 $\mathrm{Ext}_A^n(k,A)\simeq k$

2) 对任一极大 A 序列 $x_1, \cdot, x_n$（见**模的深度** (depth of a module)），理想 $(x_1,\ \cdot,x_n)$ 是不可约的．

3) 定义在有限长 A 模范畴上的函子 $M\mapsto\mathrm{Ext}_A^n(M,A)$ 与函子 $M\mapsto\mathrm{Hom}_A(M,I)$ 同构，其中 I 是 k 的内射包．

4) 环 A 是 **Cohen-Macaulay 环** (Cohen-Macaulay ring)（特别地，当 $i\neq n$ 时，所有局部上同调群 $H_m^i(A)=0$），且 $H_m^n(A)$ 与 k 的内射包一致

5) 对任一有限型 A 模 M，存在一个典范同构

$$H_m^i(M)\simeq\mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^{n-i}(M,A),\ H_m^n(A))$$

（局部对偶性 (local duality)）．

正则环以及它们关于由元素的正则序列生成的理想的商环（完全交 (complete intersections)）是 Gorenstein 环的例子．

若 Gorenstein 环 A 是一维**整环** (integral domain)，则它有下述数值特征．设 $\bar{A}$ 为 A 在其分式域中的整闭包，F 为 A 在 $\bar{A}$ 中的导子（见**整闭包的导子** (conductor of an integral closure)）．设 $C=\dim_k\bar{A}/F$ 及 $\delta=\dim_k\bar{A}/A$. 当且仅当 $C=2\delta$ 时，环 A 为 Gorenstein 环．这个等式是由 D Gorenstein ([1]) 首先对不可约平面代数曲线的局部环建立起来的．Gorenstein 环的局部化仍是 Gorenstein 环 由此提出了广义 Gorenstein 环的概念．一个 Noetherian 环（或概形）是 Gorenstein 环（概形）(Gorenstein ring (scheme))，如果此环关于所有素理想的局部化（相应地，该概形的所有局部环）都是（在原先定义下的）局部 Gorenstein 环．

参考文献

[1] Gorenstein, D, An arithmetic theory of adjoint plane curves, *Trans Amer Math Soc*, **72** (1952), 414-436

[2] Serre, J-P, Groupes algébrique et corps des classes, Hermann, 1959

[3] Аврамов, Л Л, Голод, Е С, 《Матем заметки》, 9 (1971), 1, 53-58
[4] Grothendieck, A, Géometrie formelle et geometrie algébrique, *Sem Bourbaki*, **11** (1958-1959)
[5] Hartshorne, R, Local cohomology, a seminar given by A Grothendieck, Springer, 1967
[6] Hartshorne, R, Residues and duality, Springer, 1966
[7] Bass, H, On the ubiquity of Gorenstein rings, *Math Z*, **82** (1963), 8-28

В Н Данилов, И В Долгачев 撰
裴定一 译 赵春来 校

腰椭圆[gorge ellipse; горловой эллипс]

作为一个单叶**双曲面**(hyperboloid)与垂直于其轴的平面的交线而得到的最小面积的椭圆.

Е В Шикин 撰 张鸿林 译

Goursat 线汇[Goursat congruence, Гурса конгруэнция]

直线的一种线汇，使得一个焦曲面(M_1)的焦网的第一点不变量等于第二个焦曲面(M_2)的第二点不变量. 设(M_3),(M_4)是焦曲面(M_1)和(M_2)的 Laplace 变换(见 **Lapace 变换(几何学中的)**(Laplace transformation (in geometry))), 则对 Goursat 线汇的每一条直线 M_1M_2, 存在着一个通过点 M_i ($i=1, 2, 3, 4$), 且与(M_3)上的直线 u 及(M_4)上的直线 v 之间具有三阶密切的二阶曲面([1]) 如果 **Laplace 序列**(Laplace sequence)中两个相邻线汇是 Goursat 线汇，则整个序列是由 Goursat 线汇所构成的.

由于 E Goursat 研究了这一类型的线汇，所以用其姓名来命名.

参考文献

[1] Tzitzeica, G, Sur certaines congruences de droites, *J Math Pures Appl* (9), 7 (1928), 189-208
[2] Фиников, С П, Проективно-дифференциальная геометрия М-Л, 1937

В Т Базылев 撰

【补注】 并不常用到的 Goursat 线汇也能用下列性质来定义. 在其 Laplace 序列中，两相邻线汇具有相同的 Laplace 不变量([A1])

参考文献

[A1] Bol, G, Projektive Differential Geometrie, 2, Vandenhoeck & Ruprecht, 1954

沈纯理 译

Goursat 问题[Goursat problem, Гурса задача]

求解两个自变量的二阶**双曲型偏微分方程**(hyperbolic partial differential equation)或偏微分方程组的问题，在从一点引出的两条特征线上解取给定的值.

例如，对于给出于区域 $\Omega=\{(x, y)\ 0<x<y<1\}$ 中的双曲型方程

$$u_{xy}=F(x, y, u, p, q),\quad p=u_x,\ q=u_y,\quad (1)$$

提出 Goursat 问题如下 求方程(1)在区域 Ω 中正则的解 $u(x, y)$, 它在闭包 $\bar{\Omega}$ 中连续，并满足边界条件

$$u(0, t)=\varphi(t),\ u(t, 1)=\psi(t),\ \varphi(1)=\psi(0),\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\quad (2)$$

其中 φ 和 ψ 是给定的连续可微函数. 如果对于所有的 $(x, y)\in\bar{\Omega}$ 和所有的实变量 u, p 和 q, 函数 F 是连续的，并且诸导数 F_u, F_p 和 F_q 的绝对值小于某个常数，那么在 Ω 中问题(1),(2)的解存在、唯一，并且稳定.

在线性方程

$$Lu\equiv u_{xy}+au_x+bu_y+cu=f\quad (3)$$

的 Goursat 问题的研究中，**Riemann 函数**(Riemann function) $R(x, y, \xi, \eta)$ 起着重要的作用，它作为方程

$$R_{xy}-(aR)_x-(bR)_y+cR=0$$

在两条特征线 $x=\xi$ 和 $y=\eta$ 上满足条件

$$R(\xi, y; \xi, \eta)=\exp\int_\eta^y a(\xi, t)\,dt,$$

$$R(x, \eta, \xi, \eta)=\exp\int_\xi^x b(t, \eta)\,dt$$

的解而被唯一确定，这里 (ξ, η) 是方程(3)的定义域 Ω 中的一个任意点. 如果函数 a_x, b_y 和 c 是连续的，那么 Riemann 函数存在，并且，关于变量 ξ 和 η, 它是方程 $LR=0$ 的解.

方程(3)的 Goursat 问题(2)的解由所谓的 Riemann 公式(Riemann formula)给出. 当 $\varphi=\psi\equiv 0$ 时，它有形式

$$u(x, y)=\int_0^x d\xi\int_1^y R(\xi, \eta, x, y)f(\xi, \eta)\,d\eta.$$

从 Riemann 公式即得，Goursat 问题的解在点 $(x_0, y_0)\in\Omega$ 处的值 $u(x_0, y_0)$ 仅依赖于给定的诸函数在特征四边形 $0\leqslant x\leqslant x_0$, $y_0\leqslant y\leqslant 1$ 中的值. 当 $f\equiv 0$ 时，这个值仅依赖于 $\psi(x)$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant x_0$ 中的值以及 $\varphi(y)$ 在区间 $y_0\leqslant y\leqslant 1$ 中的值，而当 $a=b=c=f\equiv 0$ 时，解有形式

$$u(x_0, y_0)=\varphi(y_0)+\psi(x_0)-\varphi(1).$$

用 Riemann 函数来得到 Goursat 问题解的显式公式的方法称为 **Riemann 法**(Riemann method). 这个方法已推广到相当广泛的一类一阶和二阶双曲型组，特别是形如(3)的方程的组，其中 a, b 和 c 是 n 阶对称方阵，而 f 和 u 是有 n 个分量的向量函数.

Goursat 问题的一个直接的推广是 Darboux-Picard 问题(Darboux-Picard problem) 求两个自变量的二

阶双曲型方程或方程组的解，它在从同一点A出发并位于以A为顶点的特征角之内的两条光滑单调曲线γ和δ上取给定的值．特别地，γ和δ可以部分地或全部地与这个角的两边一致．对于形如(1)的方程研究了这个问题．

有时，Goursat 问题也称为Darboux 问题(Darboux problem)．多个自变量的二阶双曲型方程的 Goursat 问题经常被理解为特征问题，即求在特征角面上取给定值的解(见**偏微分方程，在特征上给数据的问题**(differential equation, partial, date on characteristics))．

在E．Goursat 的详尽研究之后，Goursat 问题被冠以 Goursat 的名字．

参考文献

[1] Goursat, E., Cours d'analyse mathematique, 3, Part, 1, Gauthier-Villars, 1923

[2] Бицадзе, А. В., Уравнения смешанного, типа, М., 1959 (英译本 Bitsadze, A. V., Equations of the mixed type, Pergamon, 1964)

[3] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics. Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (中译本：R．柯朗，D．希尔伯特，数学物理方法，卷Ⅱ，科学出版社，1977)

[4] Tricomi, E. G., Integral equations, Interscience, 1957

A. M. Нахушев 撰　陆柱家 译

分次代数 [graded algebra, градуированная алгебра]

一个代数A，其加法群可表示为群$A_i (i=0,1,\dots)$的一个(弱)直和，其中$A_iA_j \subseteq A_{i+j}$对任意i，j成立．因此，一个分次代数的加法群(看成整数环上一个模)是一个正**分次模**(graded module)．作为分次代数的一个例子我们取域F上多项式代数$A=F[x]$，其中A_i是由次数为i的单项式生成的子空间($A_0=F$)．我们也能更一般地定义一个分次代数A，它作为代数，其加法群可表成群A_α的一个直和，其中α取遍某个交换半群G并且对任意α，$\beta\in G$，$A_\alpha A_\beta \subseteq A_{\alpha+\beta}$．**滤过代数**(filtered algebra)概念与分次代数概念有密切联系．事实上，对每个分次代数$A=\Sigma_{i\geq 0}A_i$，我们可以自然地定义一个升滤过

$$A=\bigcup_{k\geq 0}\mathfrak{A}_k,\ \mathfrak{A}_0\subset\mathfrak{A}_1\cdots,\ \mathfrak{A}_k=\sum_{i=0}^{k}A_i,$$

反之，如果$A=\bigcup_{k\geq 0}\mathfrak{A}_k$是一个滤过代数($\mathfrak{A}_0\subset\mathfrak{A}_1\subset\cdots,\mathfrak{A}_i\mathfrak{A}_j\subset\mathfrak{A}_{i+j}$)，那么我们可以定义一个分次代数$\mathrm{gr}\,A=GA=\Sigma_{i\geq 0}A_i$(其中$A_i=\mathfrak{A}_i/\mathfrak{A}_{i-1}, A_0=\mathfrak{A}_0$)，并称此代数为伴随$A$的分次代数．我们可以用类似方式定义分次环(graded ring)．　　E. H. Кузьмин 撰

【补注】对于任意群G我们可以定义代数A上的一个型G的分次(gradation)，这就是$A=\oplus_{\sigma\in G}A_\sigma$，其中每个$A_\sigma$是$A$的一个加法子群，并且对所有$\sigma$，$\tau\in G$有$A_\sigma A_\tau\subset A_{\sigma+\tau}$．域$k$上的**群代数**(group algebra)$kG$以及由群同态$\Phi: G\to \mathrm{Aut}(k)$和一个2上圈$c\in H^2(G,k^*)$所定义的**叉积**(crossed product)$k*G$都是G分次代数的例子，可用不必是正分次的$\mathbf{Z}$分次去考虑环R上的I进滤过所伴随的分次环，对于R的一个理想I，此I进滤过(I-adic filtration)由一个升链$R\supset I\supset I^2\supset\cdots\supset I^n\supset\cdots$所给出，于是$G(R)=\oplus_{n\in N}I^n/I^{n+1}$，这里$G(R)_{-n}=I^n/I^{n+1}$是负分次的．

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Algébre commutative, Hermann, 1961, Chapt. 3. Graduation, filtrations et topologies

[A2] Nâstâsescu, C. and Oystaeyen, F. van, Graded ring theory, North-Holland, 1982

许永华、张印火 译

分次模 [graded module, градуированный модуль]

一个模A，它可以表示成它的子模A_n的直和(足标n取遍所有整数，某些子模A_n可以是平凡的)．如果对所有$n<0$，$A_n=0$，那么A称为正分次的(positively graded)，如果对所有$n>0$，$A_n=0$，那么A称为负分次的(negatively graded)．A_n中的非零元素称为次数n的齐次元(homogeneous elements)．分次模A的一个子模B称为齐次的(homogeneous)，如果它能分解成子模B_n的一个直和，其中$B_n\subseteq A_n$对所有整数n成立，因此B是一个分次模．如果B是分次模A的一个齐次子模，那么商模$\bar{A}=A/B$也是一个分次模，即$\bar{A}=\Sigma\bar{A}_n$，其中$\bar{A}_n$是子模A_n在自然同态$A\to A/B$下的象，$\bar{A}_n\simeq A_n/B_n$．分次模在同调代数中被广泛应用．

参考文献

[1] Cartan, H. and Eilenberg, S., Homological algebra, Princeton Univ Press, 1956

【补注】分次模之间的一个线性映射是分次态射(graded morphism)，如果它保持齐次元的次数．分次模及分次同态构成的范畴是一个 **Grothendieck 范畴**(Grothendieck category)．任意群的分次可以类似方式引进．整数的分次在投射代数簇理论或概型理论中起着重要作用．

参考文献

[A1] Nâstâsescu, C. and Oystaeyen, F. van, Graded ring theory, North-Holland, 1982

许永华、张印火 译

梯度 [gradient, градиент]

向量分析与非线性映射理论中基本概念之一．

以 Euclid 空间E^n中向量$t=(t^1,\cdots,t^n)$作变元的标量函数f的梯度(gradient of a scalar function)是f关于向量变元t的导数，即n维向量$(\partial f/\partial t^1,\cdots,\partial f/\partial t^n)$．$f$在$t_0$的梯度常用记号有

$$\operatorname{grad} f(t_0),\ \nabla f(t_0),\ \partial f(t_0)/\partial t,\ f'(t_0),\ \partial f/\partial t|_{t_0}.$$

梯度为**共变向量**（covariant vector） 用两个不同坐标系 $t=(t^1, \quad, t^n)$ 与 $\tau=(\tau^1, \quad, \tau^n)$ 计算梯度分量时遵从下列关系

$$\frac{\partial f}{\partial t^i}(\tau(t))=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau^j}\ \frac{\partial \tau^j}{\partial t^i}$$

向量 $f'(t_0)$ 以 t_0 作始点指向 f 的最速增加方向，并垂直于过 t_0 的 f 的水平线或水平曲面

函数在 t_0 依任一单位向量 $\mathbf{N}=(N^1, \quad, N^n)$ 方向的导数等于函数梯度到此方向上的投影

$$\frac{\partial f(t_0)}{\partial \mathbf{N}}=(f'(t_0),\mathbf{N})\equiv\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(t_0)}{\partial t^j}N^j=|f'(t_0)|\cos\varphi, \quad (1)$$

φ 为 $\mathbf{N}$ 与 $f(t_0)$ 之间的夹角 极大方向导数在 $\varphi=0$ 达到，即在梯度方向达到，且此极大值等于梯度的长.

梯度概念与函数的**微分**（differential）概念密切相关．若 f 在 t_0 可微，则在 t_0 的邻域，

$$f(t)=f(t_0)+(f'(t_0),\ t-t_0)+o(|t-t_0|), \qquad (2)$$

即 $df=(f'(t_0), dt)$ f 在 t_0 的梯度的存在性不能保证 (2) 成立．

满足 $f'(t_0)=0$ 的点 t_0 称为 f 的平稳点（临界点或极值点）. 函数 f 的局部极值点便是这种点的例子，并且方程组 $\partial f(t_0)/\partial t^i=0\,(1\leqslant i\leqslant n)$ 可用来寻找极值点 t_0.

下列公式可用来计算梯度的值

$$\operatorname{grad}(\lambda f)=\lambda\operatorname{grad} f,\ \lambda\text{为常数},$$
$$\operatorname{grad}(f+g)=\operatorname{grad} f+\operatorname{grad} g,$$
$$\operatorname{grad}(fg)=g\operatorname{grad} f+f\operatorname{grad} g,$$
$$\operatorname{grad}(f/g)=g^{-2}(g\operatorname{grad} f-f\operatorname{grad} g)$$

梯度 $f'(t_0)$ 为由

$$\Phi(E)=\int_{t\in\partial E} f(t)\mathbf{M}\,ds$$

给出的向量函数关于体积在 t_0 的导数，这里 E 是具边界 ∂E 的一个区域，$t_0\in E$, ds 为 ∂E 的面积元，且 $\mathbf{M}$ 是 ∂E 的外法线上单位向量．换句话说，

$$f'(t_0)=\lim\frac{\Phi(E)}{\operatorname{vol} E}, \quad \text{当 } E\to t_0$$

公式 (1)，(2) 与上面列举的梯度性质表明梯度概念关于坐标系的选择是不变的

引用曲线坐标系 $x=(x^1, \quad, x^n)$ 时，线素平方为

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\,dx^i dx^j,$$

f 的梯度关于与 x 处坐标线相切的单位向量的分量为

$$\sum_{j=1}^{n} g^{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x^j}, \quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

其中矩阵 $\|g^{ij}\|$ 是矩阵 $\|g_{ij}\|$ 的逆．

对向量变元的更一般向量函数的梯度概念可用方程 (2) 引进 这样，梯度是一个线性算子，作用于变元增量 $t-t_0$ 上的效果是，产生向量函数 f 的增量 $f(t)-f(t_0)$ 的主线性部分 例如，若 $f=(f^1, \cdot, f^m)$ 为变元 $t=(t^1, \quad, t^n)$ 的 m 维向量函数，则它在点 t_0 的梯度是具有分量 $(\partial f^i/\partial t^j)\ (t_0)\ (1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n)$ 的 **Jacobi 矩阵**（Jacobi matrix） $J=J(t_0)$，且

$$f(t)=f(t_0)+J(t-t_0)+o(t-t_0),$$

其中 $o(t-t_0)$ 是长度为 $o(|t-t_0|)$ 的 m 维向量 矩阵 J 可通过下面的极限过程定义 对任何固定的 n 维向量 τ，

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(t_0+\rho\tau)-f(t_0)}{\rho}=J\tau \qquad (3)$$

在无穷维 Hilbert 空间中，定义 (3) 等价于依 Fréchet 意义可微性定义，从而梯度与 **Fréchet 导数**（Fréchet derivative）恒同

若 f 的值属于无穷维向量空间，(3) 中各种类型的极限过程是可能的（例如，见 **Gâteaux 导数**（Gâteaux derivative））

在具有联络的 n 维仿射空间的区域上张量场理论中，梯度用来描述在与联络对应的平移下张量分量增量的主线性部分 (p,q) 型张量场

$$f(t)=\{f_{j_1\ \ j_q}^{i_1\ \ i_p}(t)\quad 1\leqslant i_\alpha, j_\beta\leqslant n\}$$

的梯度为具有分量

$$\{\nabla_k f_{j_1\ \ j_q}^{i_1\ \ i_p}(t)\quad 1\leqslant k,\ i_\alpha, j_\beta\leqslant n\}$$

的 $(p,q+1)$ 型张量，其中 ∇_k 为绝对（共变）微分算子（见**共变微分法**（covariant differentiation））.

梯度概念广泛地用于数学、力学与物理学的许多问题中 很多物理场可看成梯度场（见**位势场**（potential field））

参考文献

[1] Кочин, Н Е, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, 9 изд, М, 1965（中译本 Н Е 科钦 向量计算与张量计算初步，高等教育出版社，1960）

[2] Рашевский, П К, Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд, М, 1967

Л П Купцов 撰

【补注】

[A1] Fleming, W, Functions of several variables, Addison-Wesley, 1965

郑维行 译

梯度动力系统 [**gradient dynamical system**；**градиентная динамическая система**]

由光滑流形上光滑函数的梯度所确定的**流**（flow）(**连续时间动力系统**（continuous-time dynamical sys-

tem)) f的直接微分生成一个**共变向量**(covariant vector)(例如,在有限维情形以 x^1, , x^n 为局部坐标的坐标邻域 U 中,此共变向量就是以 $\partial f/\partial x^1$, ·, $\partial f/\partial x^n$ 为分量的向量),而相速度向量为**反变向量**(contravariant vector) 由其一到另一个的过渡是借助于 Riemann 度量来实现的,且梯度动力系统的定义依赖于这一度量(以及 f)的选取,相速度向量常取相反的符号 在所给例子中区域 U上梯度动力系统是用常微分方程组

$$\frac{dx^i}{dt} = \pm\sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}\ , i = 1, \quad , n$$

来描述的,其中系数 g^{ij} 构成的矩阵是度量张量的系数矩阵 (g_{ij}) 的逆,n个方程右边的符号应理解为同取正号或同取负号 梯度动力系统往往理解为稍许更一般类型的方程组[1]

参考文献

[1] Smale, S , On gradient dynamical systems, *Ann of Math* (2), **74** (1961), 1, 199 - 206

Д В Аносов 撰 郑维行 译 陈一元 校

梯度场[gradient field; градиентное поле]

同位势场 (potential field)

梯度法[gradient method, градиентный метод]

一个使多元函数极小化的方法.它以下列事实为基础 函数 F的每一步逼近是由其前一步经函数的梯度方向位移而得

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n - \delta_n \operatorname{grad} F(\mathbf{x}^n)$$

参数 δ_n 可以,例如,由量 $F(\mathbf{x}^n - \delta_n \operatorname{grad} F(\mathbf{x}^n))$ 极小化条件求得.

参看**下降法**(descent, method of),**最速下降法**(steepest descent, method of).

【补注】

参考文献

[A1] Dennis, J E and Schnabel, R B , Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations, Prentice - Hall, 1983

[A2] Fletcher, R , Practical methods of optimization, Wiley, 1980

[A3] Luenberger, D G , Linear and nonlinear programming, Addison - Wesley, 1984

郑维行 译

梯度变换[gradient transform, градиентное преобразование]

见 **Gauge 变换** (Gauge transformation).

Gram - Charlier 级数 [Gram - Charlier series; Грама-Шарлье ряд]

由下列表达式定义的级数

$$f_A(x) = f(x) + \sum_{k=3}^{n} a_k f^{(k)}(x) \qquad (1)$$

或

$$f_B(x) = \psi(x) \sum_{m=0}^{n} b_m g_m(x), \qquad (2)$$

其中 x 是随机变量的正规值

级数(1)称为 A 型 Gram - Charlier 级数;其中

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

$f^{(k)}(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 阶导数,它可以表示为

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k H_k(x) f(x),$$

其中 $H_k(x)$ 是 Чебышев - Hermite 多项式. 导数 $f^{(k)}(x)$ 和多项式 $H_k(x)$ 具有正交性,因此系数 a_k 能够由给定的分布级数的基本矩 r_k 来确定.如果只取级数(1)的前几项,则得到

$$f_A(x) = f(x) + \frac{r_3}{3!} f^{(3)}(x) + \frac{r_4 - 3}{4!} f^{(4)}(x) -$$

$$- \frac{r_5 - 10r_3}{5!} f^{(3)}(x) + \frac{r_6 - 15r_4 + 30}{6!} f^{(6)}(x).$$

级数(2)称为 B 型 Gram -Charlier 级数,其中

$$\psi(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda},\ x = 0, 1, 2, \quad ,$$

而 $g_m(x)$ 是与多项式 $H_k(x)$ 类似的多项式.

如果只取级数(2)的前几项,则得到

$$f_B(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \left\{ 1 + \frac{\mu_2 - \lambda}{\lambda^2} \left[\frac{x^{[2]}}{2} - \lambda x^{[1]} + \frac{\lambda^2}{2} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_3 - 3\mu_2 + 2\lambda}{\lambda^3} \left[\frac{x^{[3]}}{6} - \frac{\lambda}{2} x^{[2]} + \frac{\lambda^2}{2} x^{[1]} - \frac{\lambda^3}{6} \right] \right\},$$

其中 μ_i 是分布的中心矩,而 $x^{[i]} = x(x-1) \quad (x - i + 1)$

Graw - Charlier 级数是 J P. Gram([1])和 C. V L Charlier ([2]) 在研究形如

$$B_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

的函数时得到的,这些函数可用于数值 $B(m) = (n!/m!(n-m)!) p^m q^{n-m}$ —— **二项分布**(binomial distribution)的通项之间的插值,其中

$$\varphi(t) = (pe^{it} + q)^n = \sum_{m=0}^{n} B(m) e^{itm}$$

是二项分布的特征函数,$\ln \varphi(x)$ 按 t 的幂的展开给出对于 $B_0(x)$ 的 A 型 Gram - Charlier 级数,而 $\ln \varphi(x)$

按 p 的幂的展开给出 B 型 Gram - Charlier 级数

参考文献

[1] Gram, J P, Ueber die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadraten, *J Reine Angew Math*, **94** (1883), 41 - 73

[2] Charlier, C V L, Frequency curves of type *A* is heterograde statistics, *Ark Astr Fysik*, **9** (1914), 25, 1 - 17

[3] Митропольский, А К, Кривые распределения, Л, 1960

А К Митропольский 撰

【补注】 亦见 **Edgeworth 级数** (Edgeworth series).

参考文献

[A1] Cramér, H, Mathematical methods of statistics, Princeton Univ Press, 1946

张鸿林 译

Gram 行列式 [Gram determinant; Грама определитель]

一个形如

$$\Gamma=\Gamma(a_1,\cdot\ ,a_n)=\det|(a_i,a_k)|,\quad i,k=1,\cdot\cdot,n$$

的行列式，这里 $a_1,\cdot\ ,a_n$ 是一个（准）Hilbert 空间里的元素，(a_i,a_k) 是它们的标量积 Gram 行列式等于在 $a_1,\cdot\cdot,a_n$ 上构造的**超平行体**（parallelotope）的 n 维体积的平方.

一个 Gram 行列式是一个非负 Hermite 型

$$\sum_{i,k=1}^{n}(a_i,a_k)\xi_i\overline{\xi}_k=\|\sum_{i=1}^{n}a_i\xi_i\|^2$$

的行列式. 这个型确定了 Gram 行列式的基本性质

1) Gram 行列式是非负的，即 $\Gamma\geqslant 0$ 等式 $\Gamma=0$ 成立当且仅当这些向量线性相关 这个性质可以看成 **Cauchy 不等式** (Cauchy inequality)

$$\Gamma(a_1,a_2)\geqslant 0$$

或

$$(a_1,a_1)(a_2,a_2)\geqslant(a_1,a_2)(a_2,a_1)=|(a_1,a_2)|^2$$

的推广，特别地，如果一个 Gram 行列式的任意一个主子式（也是一个 Gram 行列式）都等于零，则该行列式等于零.

2) $\Gamma(a_1,\ \ ,a_n)\leqslant\Gamma(a_1,\ \ ,a_p)\ \Gamma(a_{p+1},\ \ ,a_n)$，等号成立当且仅当子空间 $L(a_1,\ \ ,a_p)$ 与 $L(a_{p+1},\ \ ,a_n)$ 是正交的或者行列式 $\Gamma(a_1,\ \ ,a_p)$ 与 $\Gamma(a_{p+1},\cdot\ ,a_n)$ 之中有一个是零. 这个不等式的几何意义是超平行体的体积不能大于互补的面的体积的乘积，特别有

$$\Gamma(a_1,\cdot\ ,a_n)\leqslant\Gamma(a_1)\quad\Gamma(a_n)$$

3) $\Gamma(a_1,\cdot\ ,a_n)=\Gamma(a_1,\ \ ,a_{n-1})h^2$，这里

$$h=\min_{x^1\quad x^{n-1}}\|a_n-\sum_{i=1}^{n-1}x^i a_i\|$$

是由元素 a_n 到子空间 $L(a_1,\ \ ,a_{n-1})$ 的距离，即用形如 $\sum_{i=1}^{n-1}x^i a_i$ 的多项式对元素 a_n 的最佳二次逼近（见**最佳逼近**（best approximation））.

如果 $a_1,\ \ ,a_n$ 是 n 维向量，$a_i=(a_i^1,\ \ ,a_i^n)$，则

$$\Gamma(a_1,\ \ ,a_n)=(\det|a_i^j|)^2,\ i,j=1,\cdot\ \ ,n.$$

Gram 行列式是由 J P Gram ([1]) 和 K A Андреев ([2]) 在将函数展开成正交级数和函数的最佳二次逼近问题中彼此独立地引入的

Gram 行列式在线性代数和函数论的许多问题里都被用到 向量或函数组的线性相关性，函数组的正交化，投影的构造等的研究中，也用于研究函数组的性质. 亦见 **Gram 矩阵**（Gram matrix）.

Gram 行列式是以下类型的行列式的一个特殊情形

$$\Gamma\begin{pmatrix}a_1, & ,a_n\\ b_1, & \cdot,b_n\end{pmatrix}=\det|(a_i,b_j)|,\ i,j=1,\ \ ,n,$$

它关于向量 a_i 和 b_j 是 Hermite 的和双线性的. 如果 a_i 属于类 $L_2(E)$，则以下公式成立

$$\det(a_i,b_j)=\frac{1}{n!}\int_E\cdot\int_E\det|a_i(x_j)|\det|\overline{b}_i(x_j)|dx_1\cdot\cdot dx_n$$

参考文献

[1] Gram, J P, On Raekkeudviklinger bestemmte ved Hjaelp of de mindste Kvadraters Methode, Copenhagen, 1879

[2] Андреев, К А, Избр работы, Харьков, 1955

[3] Гантмахер, Ф Р, Теория матриц, 3 изд, М, 1967 (中译本 矩阵论，高等教育出版社，1955)

Л П Купцов 撰

【补注】 利用 Gram 行列式和它们的性质可证 Hadamard 行列式定理（见 **Hadamard 定理**（Hadamard theorem））

参考文献

[A1] Davis, P J, Interpolation and approximation, Dover, reprint, 1975

郝锅新 译

Gram 矩阵 [Gram matrix, Грама матрица]

由一个（准）Hilbert 空间的元素（向量）$a_1,\cdot,a_k$ 的两两标量积 $g_{\alpha\beta}=(a_\alpha,a_\beta)$ 所构成的方阵

$$G(a_1,\ \ ,a_k)=\|g_{\alpha\beta}\|$$

所有 Gram 矩阵都是非负定的. 如果 $a_1,\cdot\cdot,a_k$ 线性无关，则这个矩阵是正定的 反过来也成立 任意非负（正）定 $(k\times k)$ 矩阵都是一个（具有线性无关的定义向量的）Gram 矩阵.

如果 $a_1,\ \ ,a_k$ 是带有通常标量积

$$(a,b)=\sum_{i=1}^{n}a^i b^i\quad(=\sum_{i=1}^{n}a^i\overline{b}^i)$$

的 n 维 Euclid (Hermite)空间的 n 维向量（列），则

$$G(a_1, \quad, a_k)=\bar{A}^T A,$$

这里 A 是由列 $a_1, \cdot, a_k$ 所组成的（$n \times k$）矩阵．符号 ^{T} 表示矩阵的转置运算，短横线表示变量的复共轭　亦见 **Gram 行列式**（Gram determinant）.

【补注】　Л П Купцов 撰

参考文献

[A1] Schwerdtfeger, H, Introduction to linear algebra and the theory of matrices, Noordhoff, 1950(译自德文)

郝钢新 译

自动文法 [grammar, automatic, грамматика автоматная]

同**正则文法**（grammer, regular)

范畴文法 [grammar, categorial, грамматика категориальная]

一种**形式文法**(grammar, formal)　它可被定义为一个有序四元组 $G=\langle V, W, \Phi_0, f\rangle$，其中 V 和 W 是有限集，它们的元素分别称为终结符(terminal symbols)与初等范畴(elementary categories)，Φ_0 是 W 中一个元素，称为主范畴(principal category)，f 是赋值函数(assigning function)，它使每一个终结符对应一个范畴(categories)的有限集，类型可由初等范畴与语法符号 [,], \ , / 按如下规则表示　1)所有的初等范畴都是范畴，2)如果 Φ 与 Ψ 是范畴，那么 $[\Phi\backslash\Psi]$(Ψ 下 Φ)和 $[\Phi/\Psi]$(Ψ 上 Φ)是范畴，3)一个范畴文法要么是 1)意义下的，要么是 2)意义下的．

如果 $x=a_1, \quad, a_k$，其中 $a_i\in V$，$\Phi_i\in f(a_i)$，$i=1, \cdot, k$，那么称文法 G 使得序列 $\Phi_1 \quad \Phi_k$ 与字符串 x 对应．可以对一个范畴序列施加收缩(contraction)运算(一般说来，不是单值的)　这个运算通过一连串的替换实现，以 Ψ 替换形如 $\Phi[\Phi\backslash\Psi]$ 或 $[\Psi/\Phi]\Phi$ 的子串．如果一个对应于字符串 x 的范畴序列 ξ 可以被收缩到一个范畴 Θ，而且 $\xi=\Theta$，则称 G 对 x 赋值(assigns)范畴 Θ．由文法 G 定义的语言(记作 $L(G)$)是 G 赋值主范畴的所有的终结符串组成的集合．类型 $[\Phi\backslash\Psi]$ (或，相应地，$[\Psi/\Phi]$)可以看作从右边(从左边)施加到 Φ 上的一个运算，运算结果是 Ψ．在语言学中使用范畴文法就是以这个原理为基础的．这样，如果初等范畴是 C(从句)和 N(名词)，范畴 $[N/N]$ 可看作"形容词"(这意味着形容词可以被认为是一个从左边施加到名词上的运算，仍生成一个名词，或更确切地讲，一个名词词组)，$[N\backslash C]$ 被看作是一个"不及物动词"，等等．这里如果 C 是主范畴，如此定义的文法语言由"正规从句"组成

一个范畴文法可以变换成一个**上下文无关文法**(grammar, context-free)，其要求如下· a)编辑一个非终结字典 W'，组成它的范畴是赋值函数 f 值的元素或部分元素；b)令 Φ_0 为初始符，c)作为一个规则，所有的可能的表达式取形式 $\Psi\to\Phi[\Phi\backslash\Psi]$ 和 $\Psi\to[\Psi/\Phi]\Phi$，其中 $[\Phi\backslash\Psi]\in W'$(相应地，$[\Psi/\Phi]\in W'$)，或 $\Phi\to a$，其中 $\Phi\in f(a)$　这使得用一种标准方式把文法定义的语言中的串对应于分量系统成为可能(见**上下文相关文法**(grammar, context-sensitive))．如此得到的上下文无关文法集的子集从语言学上得到刻画，即它的所有"文法信息"都包含在字典里　对任一上下文无关文法 Γ 可以构造一个范畴文法 G 与之等价(即使得 $L(G)=L(\Gamma)$)，而且在构造中可以使得赋值函数的值仅包含形如 A，$[A\backslash B]$ 及 $[A\backslash[B\backslash C]]$ 的范畴，这里 A, B, C 是初等范畴．亦有简单且本质自然的方法从一个范畴文法得到一个**支配文法**(grammar, dominating)

参考文献

[1] Bar-Hillel, Y, Gaifman, H and Shamir, E, Finite-state languages formal representations and adequacy problems, *Bull Res Council Israel* **9**, **sec F**(1960), 1, 155－166

[2] Белецкий, М И, Кибернетика, **5**(1969), 4, 129－135, 5, 10－14

[3] Гладкий, А В, Формальные грамматики и языки, М, 1973.

А В Гладкий 撰

【补注】 最近几年对范畴文法方面的兴趣有明显提高　在范畴文法与对自然语言的形式化语句分类之间存在很强的联系．为处理范畴文法所提出的诸演算中 λ 演算是非常出色的系统之一．这个体系很有趣，它类似于直觉蕴涵逻辑．

亦见**形式语言与自动机**(formal languages and automata)．

参考文献

[A1] Thomason, R H (ed), Formal philosophy, selected papers from Richard Montague, Yale Univ Press, 1974

[A2] Benthem, J F A K van, Essay in logical semantics, Reidel, 1986.

鲍　丰 译　李　廉 校

上下文无关文法 [grammar, context-free, грамматика бесконтекстная]，CF 文法(CF-grammar)

一种**上下文相关文法**(grammar, context-sensitive)，它的所有的法则具有形式 $A\to\theta$，其中 A 是一个非终结符，θ 是一个非空字符串(所谓的上下文无关法则(context-free rules))．由这种文法生成的语言称为上下文无关语言(context-free languages)．具有规则 $I\to aIb$，$I\to ab$ 的上下文无关文法生成的语言是 $\{a^n b^n \quad n=1,2,\cdots\}$，这里 I 是初始符．

把 θ 不能是空字这个条件从上下文无关语言定义中去掉，并不会本质地改变这个语言族(所增加的语

言仅是那些加进了空字的上下文无关语言）．上下文无关文法构成了最常用到的**形式文法**（grammar，formal）族，它们被广泛地用于构造自然语言的**数学模型**（见**数理语言学**（mathematical linguistics））及描述程序设计语言，上下文无关语言族是上下文相关语言族的真子类（例如，上下文相关语言 $\{a^nb^nc^n \quad n=1, 2, \quad \}$ 就不是上下文无关的，见**上下文相关文法**（grammer, context-sensitive）），且等同于下推自动机所接受的语言族

任何一个上下文无关文法可以等价地变换为Chomsky范式（Chomsky normal form）——一种所有的规则均形如 $A \to BC$ 和 $A \to a$ 的上下文无关文法，亦可变换为Greibach范式（Greibach normal form），其所有的规则都形如 $A \to aBC$，$A \to aB$ 及 $A \to a$（上述两种情况 A，B，C 均为非终结符，a 为终结符）．上下文无关语言亦可由**范畴文法**（grammar, categorial），**支配文法**（grammar, dominating）及相关文法来定义．上下文无关语言有时亦可由语言等式的形式系统来定义，这是上下文无关文法的另一种形式的记法 上下文无关语言族在并、联接、置换及截叠代闭包运算下封闭（如果允许右侧为空字的规则存在，在叠代闭包下亦封闭），但不封闭于交、补运算 上下文无关文法 Γ 称为非歧义的（unambiguous），如果语言 $L(\Gamma)$ 的任一字符串在 Γ 中有唯一推导树 如果一个上下文无关语言可由某个非歧义上下文无关文法生成，则称这个语言是非歧义的（unambiguous），否则称其为歧义的（ambiguous）或固有歧义的（inherently ambiguous）．下例是一个歧义的上下文无关语言

$$\{a^nb^nc^m \quad n, m=1, 2, \quad \} \cup \{a^mb^nc^n \quad n, m=1, 2, \cdot\}$$

如果对一上下文无关文法产生的语言 L 以及对任一自然数 n，存在 L 中一字符串，使得其在文法中具有多于 n 的推导树，则称 L 具有无穷级歧义性（ambiguousness），语言

$$\{x\hat{x}y\hat{y} \quad x, y \in \{a_1, a_2\}^+\}$$

就是一个例子，其中 ^ 表示反序（reversal）（即如果 $x = a_{i_1}, \cdot, a_{i_k}$，则 $\hat{x} = a_{i_k} \quad a_{i_1}$）

如果一个上下文无关语言可被某个确定的下推自动机所接受，则称其为确定性的（deterministic） 任何确定的语言都是非歧义的，反之则不然，例如，非歧义语言 $\{xx \quad \hat{x} \in \{a_1, a_2\}^+\}$ 就不是确定的

推导复杂度 对任一上下文无关文法，推导的时间复杂度（基本推导步数）及空间复杂度（推导中最大中介语句长度）（见**生成文法**（grammar, generative））均被线性函数上下限住．因此，在划分上下文无关文法时引进其他特征的推导复杂度．这些特征分为两类 其中一些（树形特征）是以树的形式表示结果（见**上下文相关文法**（grammar, context-sensitive）），另一些（链形特征）则是从每一步推导中非终结符出现的次数与分布为基础的，在一些重要的情况下，“树形”特征与“链形”特征同阶增长．在“树形”特征中最好的划分就是稠密度（thickness），其定义如下 1)对一个有限树的每一个结点 α 配给一个 α 的密度，这是一个数 $\mu(\alpha)$，使得 如果 α 是终结结点，则 $\mu(\alpha)=0$，如果 $\beta_1, \quad, \beta_s$ 是所有的自 α 有弧进入的结点，又如果 $s>0$，而且 $m=\max\{\mu(\beta_1), \quad, \mu(\beta_s)\}$，那么 a) 如果只有一个 $i=1, \quad, s$，使得 $m=\mu(\beta_i)$，则 $\mu(\alpha)=m$，b) 否则 $\mu(\alpha)=m+1$ 2) 这个树的根的稠密度就称为树的稠密度 3) 如果 Γ 是一个上下文无关文法，其稠密度 $\mu_\Gamma(n)$ 的定义类似于时间复杂度，以推导树的稠密度代替推导的长度 活动容量（active capacity）$I_\Gamma(n)$ 展示了与稠密度（对一个上下文无关文法）同阶增长，活动容量的定义类似于容量，以 ω_i 中终结符出现的次数代替 ω_i 的长度 所有上下文无关文法的稠密度都是对数函数上有界的 存在这样的上下文无关语言，所有的生成它们的上下文无关文法都有对数阶稠密度，比如像所有可能的“正规括号串”（即以数学表达式中可接受的方式分布的左右圆括号组成的串）的集合．同时，稠密度有常数界的上下文无关文法所生成的语言，组成了一个广泛的类，相对置换来说，对等于线性语言类的闭包（见**线性文法**（grammar, linear））．存在无穷序列的函数，它们的阶介于常数和对数之间，使得对于这个序列任意的相邻两项，可以找到一个上下文无关语言，使生成它的上下文无关文法的稠密度最低阶在这两个函数之间．上下文无关文法的推导的其他复杂度特征也被用到．

上下文无关文法的另一个深入研究的题目是控制推导（controlling derivations） 关于上下文无关文法的控制推导的许多不同概念已被提出（其中大部分也适用于更广泛的文法类）．如果规定了文法规有限序列的某个集合——矩阵，并且被认为可允许的推导是那些使得应用的规则序列分解为矩阵的推导（即规则只能被一组一组地应用），则可得到矩阵文法（matrix grammar） 在一个有序文法（ordered grammar）中，对规则的集合规定一个偏序，并且在每一步都决定使用那些规则，在规则序列中所有在它们之前的规则都不适用于当前所得的字符串．在一个程序文法（programmed grammar）中，对每个规则有两个规则集合是毗连的 “成功”与“不成功”集，并且每个规则在两个阶段应用 第一个阶段是检查规则的左边是否形成当前串的一部分，如果是，第二阶段就把规则的左边替换成规则的右边，并从“成功”集中选出下一步要用的规则，如果不是，第二阶段就从“不成功”集中

选出下一步要用的规则 没有右边为空字规则的程序上下文无关文法生成的语言类，是上下文相关语言类的一个真子类，并包含上下文无关矩阵文法和有序上下文无关文法所生成的语言类，而这两个语言类较上下文无关语言类更广．如果允许右边为空的规则存在，程序上下文无关文法可生成任意的递归可枚举语言．

算法问题 存在这样的算法，用它们可以判别上下文无关文法生成的语言是否为空或有限 但是，对上下文无关文法类来说，下列的语言性质以及不同语言之间的关系是不可判定的 补是否为空的，有穷的，或补是否为上下文无关的，语言是否歧义的，确定的，线性的，或正规的，$L_1=L_2$，$L_1\subseteq L_2$ 存在这样的上下文无关文法 Γ_1 和 Γ_2，不存在算法，使得对 Γ_1 的基础字母表 V_1（或 Γ_2 的基础字母表 V_2）上的任意字符串 x 和 y，识别是否可以 y 替换 x，相对于 V_1 和 $L(\Gamma_1)$（或相对于 V_2 和 $L(\Gamma_2)$，x 和 y 是否可交换的，见**语言的解析模型**（analytic model of a language））．

识别复杂性 可以识别一个字符串属于一个给定的上下文无关文法所生成的语言，这只要借助于 Cook 算法（Cook algorithm），这个算法可以在单带单头的 Turing 机上执行，执行时间是字符串长度的 4 次方（或 3 次方，如果增加到 3 个带或头）

亦见**正则文法**（grammar, regular），**线性文法**（grammar, linear）

参考文献

[1] Ginsburg, S, The mathematical theory of context-free languages, McGraw-Hill, 1966

A B Гладкий 撰

【补注】 活动容量亦称指标（index）（见 [A9]）．带有推导控制的上下文无关文法最常见形式就是 D E Knuth 引进的属性文法（attribute grammar） 关于控制文法的进一步信息，见 [A9]

关于确定的上下文无关文法中的字符串的识别复杂性，近十年的主要成果就是 Cook 设计的识别算法，可以在多项式时间同时 $O(\log^2(n))$ 空间运行．J Earley, T Kasami 以及 D.H Younger 描述了对上下文无关语言的分析算法，其执行时间是 $O(n^3)$ L G Valiant 证明了识别上下文无关语言的时间复杂度可能减小到 $O(n^\gamma)$，其中 γ 表示著名的矩阵乘法指数（matrix-multiplication exponent）（目前，$\gamma=2\ 38$ ）

亦见**形式语言与自动机**（formal languages and automata）

参考文献

[A1] Hopcroft, J E and Ullman, J D, Introduction to automata theory, languages and computation, Addison-Wesley, 1979

[A2] Knuth, D E, Semantics of context-free languages, *Math Syst Theory*, **2** (1968), 127 – 145.

[A3] Aho, A V and Ullman, J D, The theory of parsing, translation and compiling, 1 – 2, Prentice-Hall, 1973

[A4] Lewis, H R and Papadimitriou, C H, Elements of the theory of computation, Prentice-Hall, 1981

[A5] Earley, J, An effective context-free parsing algorithm, *Commun ACM*, **13** (1970), 94 – 102

[A6] Kasami, T, An effective recognition and syntax algorithm for context-free languages, Report AFCRL-65-758, Air Force Cambridge Research Lab, 1965

[A7] Younger, D H, Recognition and parsing context-free languages in time n^3, *Inf and Control*, **10** (1967), 189 – 208

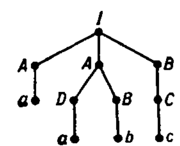
[A8] Valiant, L G, General context-free recognition in less than cubic time, *J Comput System Sci*, **10** (1975), 308 – 315

[A9] Salomaa, A, Formal languages, Acad, Press, 1973

鲍 丰 译 李 廉 校

上下文相关文法 [**grammar, context-sensitive, грамматика составляющих**]，直接分量文法（grammar of direct components），上下文文法（context grammar），分量文法（grammar of components），

一种特别情形的**生成文法**（grammar, generative）$\Gamma=\langle V, W, I, R\rangle$，其每条规则都形如 $\xi_1 A\xi_2\to\xi_1\theta\xi_2$，其中 ξ_1，ξ_2，θ 是字母表 $V\cup W$ 上的字符串，$A\in W$，而 θ 是非空字 上下文相关文法中的每一步推导都是把符号 A 替换成字符串 θ，这样的替换是否可能要视"上下文" ξ_1 和 ξ_2 来定 θ 中出现的符号可以进一步被替换，等等 这样下去，一个符号被"扩张"成某一段字符串作为推导的结果 可以借助一个树（推导树（derivation tree））表示上下文相关文法中的一个推导．例如，如果文法的规则是 $I\to AAB$, $AB\to DBB$, $aBB\to abB$, $A\to a$, $D\to a$, $B\to C$, $C\to c$（其中 a, b, c, d 是终结符，I, A, B, C, D 是非终结符，而 I 是初始符），那么推导（I, AAB, aAB, $aDBB$, $aaBB$, $aabB$, $aabC$, $aabc$）具有如图所示的树



推导的最后字符串的所有的段组成的集合，靠"扩充"非终结符所得到的——或换一种说法，从树的（非终结）结点引出的——在加上所有的独点段后形成了这个字符串的分量系统（见**语法结构**（syntactic structure）），因此，也叫"分量文法"．如果所有的独点段也由替换非终结符得到，那么可以得到一个标记分量系统，对每一个分量标记一个从它"引出"的非终结符．这样，在上面的例子中，可以得到如下标记分量系统

$$((a)A((a)D(b)B)A(c)B, C)I$$

(这里括号表示分量的界，而标记跟在右括号之后)把分量指派给标记系统的字符串形成了上下文相关文法在语言学上应用的基础 这样，一个文法其规则含有(在其中)

$$\text{STAT} \to N_{\text{male no case}} \widetilde{V}^3,$$

$$\widetilde{V}_3 \to V'^3 N_{\text{fem no acc}}, N_{\text{male no case}} \to \text{"ellipse"},$$

$$N_{\text{fem no acc}} \to \text{"parabola"}, V'^3 \to \text{"intersects"},$$

其中STAT，N_{xyz}，$\widetilde{V}^3$，V'^3是非终结符，分别代表"陈述句"，"性为x，数为y，格为z的名词"，"第三人称动词组"以及"第三人称及物动词"，而STAT是初始符，这个文法指派给陈述句"Ellipse intersects parabola"的标记分量系统是

$$((\text{Ellipse})N_{\text{male no,case}}((\text{intersects})V'^3$$
$$(\text{parabola})S_{\text{fem no acc}})\widetilde{V}^3)\text{STAT}$$

上下文相关文法的数学意义，首先而且最主要体现于它们所生成的语言(即所谓的上下文相关语言(context-sensitive languages))组成了原始递归集类的一个简单的子类 上下文相关语言类对等于单带单头的线性界Turing机(Turing machine)所能识别的语言类．当使用通常的对自然数编码的方法时，具体的数的集合常常就是上下文相关语言 (例如，这包括完全平方数集合，素数集合，逼近$\sqrt{2}$ 的数字集合，等等)

对任一上下文相关文法可以构造一个与之等价的左上下文(left-context)(或右上下文(right-context))相关文法，即一个其所有规则都形如$\xi A \to \xi\theta$(或相应地，$A\xi \to \theta\xi$)的上下文相关文法 任何一个其所有的规则都形如$xAy \to x\theta y$而x, y又是终结字母表上字符串的上下文相关文法，必等价于一个**上下文无关文法**(grammar, context-free)

上下文相关语言类在并、交、联结、截叠代闭包以及置换下封闭，目前还不知它对补是否封闭

推导的复杂性 在上下文相关文法中，一个推导的时间复杂度(基本推导的步数)被一个指数函数从上限制住．存在由时间复杂为n^2阶的上下文相关文法所生成的语言，而它不可能被更低阶的时间复杂度的上下文相关文法生成(语言$\{xbx \quad x\in\{a_1, a_2\}^*\}$就是一个例子)，还没有自下更高估价的时间复杂度 任何上下文相关文法的空间复杂度(推导过程中的最长中间语句的长度)显然是n，对任一空间复杂度自上被一线性函数

$$f(n)=kn$$

限制住的生成文法，存在一上下文相关文法与之等价．如果已知k，则可有效地构造出它．

算法问题 如果某个特定的语言类包含一个上下文相关语言，并且对至少一个上下文相关语言L_0仅包含有限个语言"几乎等于"L_0(两个语言L_1和L_2是"几乎等于"，如果它们的对称差$(L_1-L_2)\cup(L_2-L_1)$是有限集)，那么在上下文相关文法集合中，属于这已知集合的性质不是可判定的．特别地，这些不可判定性质包括为空、有限、正规、线性以及上下文无关语言，有空或有限补，等价于某个(任何)固定的上下文相关语言 上下文相关文法集合的可判定性质的一个例子是 判定一个给出的字符串是否属于生成的语言．

亦见**上下文无关文法**(grammar, context-free)

А В Гладкий 撰

【补注】 亦见**形式语言与自动机**(formal languages and automata)．

一个无工作带Turing机识别语言$\{xbx \quad x\in\{a_1,a_2\}^*\}$(亦见上)需$n^2$时间，而一个工作带的Turing机则显然只需$2n$时间．对由多工作带识别上下文相关语言，已知有更好的时间下界

相对于上下文无关语言，近十年的主要成果就是解决了关于上下文相关语对补封闭的问题．N Immerman([A3])与R Szelepcsényi([A4])(独立地)证明了上下文相关语言的补仍是上下文相关的 事实上，这个结果对空间界限非确定Turing机识别的语言类成立，作为线性界非确定自动机所识别的语言类的上下文相关语言，只是一个特例而已

参考文献

[A1] Hopcroft, J E and Ullman, J D, Introduction to automata theory, languages and computation, Addison-Wesley, 1979

[A2] Lewis, H R and Papadimitriou, C H, Elements of the theory of computation, Prentice Hall, 1981

[A3] Immerman, N, Nondeterministic space is closed under complementation, in *Proc 3rd IEEE Conf Structure in Complexity Theory Georgetown June, IEEE*, 1988, 112 – 115

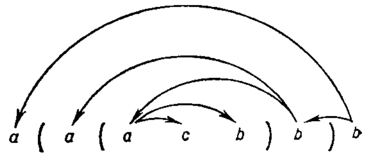
[A4] Szelepcsényi, R, The method of forcing for nondeterministic automata, *EATCS Bulletin*, **33** (1987), 96 – 100

鲍 丰 译 李 廉 校

支配文法[grammar, dominating, грамматика доминационная]

一种用于产生字符串与推导树的**形式文法**(grammar, formal)(见**语法结构**(syntactic structure))．从形式上讲，一个支配文法可以定义为一个**上下文无关文法**(grammar, context-free)，它的规则右边出现的符号之一带有一个特殊记号，但对形如$I \to a$的规则例

外，这里I是初始符，a是终结符 每一个这种规则的右边至少出现两个符号 如果由规则的右边出现的带记号的符号所导出的分量被考虑作终结分量，那么对应于这样的文法推导的上下文相关系统就是分层的(见**上下文相关文法**(grammar, context-sensitive)). 文法生成的语言中的每一个字都可由一个推导树代表，它是与这个分层的上下文无关系统相关的（通常它不是唯一的） 下图所示为一个代表字符串 $aaacbbb$ 的树，其文法的规则为 $I \to a'Ib$, $I \to aIb'$, $I \to c$(I是初始符，撇表示记号)，这个树对应于推导 (I, aIb', $aaIb'b'$, $aaa'Ibb'b'$, $aaa'cbb'b'$)，括号用于分开非平凡分量



支配文法的最重要部分是所谓简单支配文法（simple dominating grammars），其规则的右边仅出现终结符. 故而，如上所示文法例子是简单的 对任何的简单支配文法存在一个自然数 k，使得在代表这个文法的某个字符串的推导树中从任何结点引出不超过 k 条弧. 反过来，每个满足这个性质的支配文法都有一个等价的简单支配文法，使得对任何字符串由这两个文法所得到的推导树的集合是等同的

一个简单支配文法，亦称为一个相关文法（dependency grammar）

参考文献

[1] Белецкий, М И , Кибернетика, 1967, 4, 90－97

[2] Гладкий, А В , Формальные грамматики и языки, М , 1973

А В Гладкий 撰

【补注】 相关文法是东欧的最杰出语言学理论. 亦见**形式语言与自动机**（formal languages and automata）

参考文献

[A1] Melčuk, I , Dependency syntax Theory and practice, State Univ New York Press, 1988 (译自俄文)

鲍 丰译 李 廉校

形式文法 [grammar, formal, грамматика формальная]

一个用于**数理语言学**（mathematical linguistics）中的某种**演算**（calculus）的名称，描述自然（及某些人工的，特别是程序设计）语言的结构 见**生成文法**（grammar, generative），**支配文法**（grammar, dominating），**范畴文法**（grammar, categorial），**变换文法**（grammar, transformational）.

А В Гладкий 撰

【补注】 亦见**形式语言与自动机**（formal languages and automata）.

参考文献

[A1] Hopcroft, J E and Ullman, J D , Introduction to automata theory, languages and computation, Addison-Wesley, 1979

鲍 丰译 李 廉校

生成文法 [grammar, generative, грамматика порождающая]，Chomsky 文法（Chomsky grammer）

一种**形式文法**（grammar, formal），事实上是一个 Post 演算的特殊情形（见 **Post 标准系统**（Post canonical system）） N Chomsky 在 20 世纪 50 年代开始对这种文法进行系统的研究，并指出它在语言学上的应用，对有最重要应用价值的生成文法进行划分——**上下文相关文法**（grammar, context-sensitive），**上下文无关文法**（grammar, context-free），**正则文法**（grammar, regular）. 从数学角度看，这些类型特别令人感兴趣

一个生成文法就是一个四元组 $\Gamma=\langle V, W, I, R\rangle$，其中 V 与 W 是不相交的有限集，分别被认为是终结字母表与非终结字母表，或字典（dictionaries）（其元素分别称为终止（terminal）或基本（basic）以及非终止（non-terminal）或辅助（auxiliary）符（symbols）），I 是 W 中的一个元素，称为初始符（initial symbol），R 是一个由形如 $\varphi \to \psi$ 的规则组成的有限集，这里的 φ 与 ψ 都是字母表 $V \cup W$ 上的串（字（word）），$\to$ 与 $V \cup W$ 无关，R 称为是文法的概形（scheme） 如果两个字符串 ξ 与 η 可以分别表示为 $\xi=x_1\varphi x_2$，$\eta=x_1\psi x_2$，而 $\varphi \to \psi$ 又是 Γ 的一个规则，则可认为在 Γ 中可从 ξ 直接导出 η（记为 $\xi \Rightarrow_\Gamma \eta$ 或 $\xi \Rightarrow \eta$） 一个字符串的序列（ω_0, …, ω_n）称为一个 Γ 中自 ω_0 的 ω_n 的推导（derivation），如果对所有的 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 有 $\omega_{i-1} \Rightarrow_\Gamma \omega_i$，$n$ 是推导的长度（length） 一个推导称为完全的（complete），如果 $\omega_0=I$，ω_n 不包含非终结符. 如果 Γ 中存在自字符串 ξ 到 η 的一个推导，则称在 Γ 中 η 是可从 ξ 导出的 在 Γ 中所有的可从 I 导出的终结符号串组成的集合被称作是文法 Γ 生成的语言（记作 $L(\Gamma)$） 如果两个文法生成同样的语言，则称它们是等价的（equivalent）. 所有可能的生成文法所生成的语言类对等于递归可枚举集合的类

对于所谓的复杂性函数（complexity functions），最重要的是时间复杂性和空间复杂性，用于估计生成文法中推导的复杂性 文法 Γ 的时间复杂性（time complexity）是一个自然变元的函数 $\tau_\Gamma(n)$，对每个 n 来讲，函数值等于最小的满足下列性质的数 k：对任何满足 $|x| \leqslant n$（这里 $|x|$ 是 x 的长度）的字符串 $x \in L(\Gamma)$，存在一个 Γ 中自初始符到 x 的推导 D，其长度不超过 k，如果不存在 $x \in L(\Gamma)$，且 $|x| \leqslant n$，则 $T_\Gamma(n)=0$. 文法 Γ 的空间复杂性（space complexity）$\sigma_\Gamma(n)$ 的定义类似，只是从最长字符串 ω_i（$i=0$, …, s）的长度代替推导 $D=(\omega_0, \ldots, \omega_s)$ 的长度

令 M' 是文法 Γ 中完全推导的某个集合，而 L' 是 M' 推导的终结符串的集合，则有 $L' \subseteq L(\Gamma)$．如果 M' 是有效给出的，则称给出了 Γ 中控制一个推导的某种确定方式 研究控制推导的方法对应用是基本的，因为用确定的推导，而不是用随机的导出这种可能性恰对应于自然语言出现的情况 控制一个推导是可以实现的，特别是靠对推导中使用的规则序列加以限制(例如，“可允许的”规则序列集合本身可由某个生成文法 Γ' 生成，在这种情况下，语言由生成文法的有序对 (Γ, Γ') 定义，这个有序对称为广义文法（generalized grammar)），或对组成推导的串上加以限制或以某种更复杂的方式（例如，在后阶段使用的规则依赖于前阶段所得字符串的类型）

对生成文法的研究必然涉及算法问题 如果 α 是一个语言性质，$\mathscr{A}$ 是一个可判定文法集合，而且如果存在一个算法可以判定，对任何文法 $\Gamma \in \mathscr{A}$，语言 $L(\Gamma)$ 是否有性质 α，则称在集合 $\mathscr{A}$ 中 α 是可判定的（decidable)．在所有的生成文法集合中没有非平凡的（即使得对应的语言集合既包含满足这条性质的语言，也包含不满足这条性质的语言）可判定性质 同样地，也可以谈论在某一文法集合中可判定的关系 还有不同类型的问题，例如，对给定的文法 Γ，从终止符字母表中任意 n 个串 $x_1, \ldots, x_n$ 寻找一个给定谓词 $P(L, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ 的值的算法的存在性，其中 $L=L(\Gamma)$，$\omega_1=x_1, \ldots, \omega_n=x_n$．特别地，如果 $P(L, \omega)$ 表示 $\omega \in L$，则要寻找一个算法来识别一个任给的串是否为语言 $L(\Gamma)$ 的一个串．如果对文法 Γ 这样的算法确实存在，那么这个算法的复杂性问题——或换一种说法，语言 $L(\Gamma)$ 的识别复杂性问题——是重要的

亦见**上下文相关文法**（grammar, context-sensitive)，**上下文无关文法**（grammar, context-free)，**线性文法**（grammar, linear)，**正则文法**（grammar, regular)，**数理语言学**（mathematical linguistics)．

参考文献

[1] Gross, M and Lentin, A, Introduction to formal grammars, Springer, 1970（译自法文）

[2] Гладкий, А В, Формальные грамматики и языки, М, 1973

[3] Hopcroft, J E and Ullman, J D, Formal languages and their relation to automata, Addison-Wesley, 1969

[4] Гладкий, А В, Диковский, А Я, в кн Итоги науки и техники Теория вероятностей Математическая статистика Теоретическая кибернетика, **10** (1972), 42－107

[5] Маслов, А Н, Стоцкий, Э Д, в кн Итоги науки и техники Теория вероятностей Математическая статистика Теоретическая кибернетика, **12** (1975), 155－187

[6] Стоцкий, Э Д, ≪Проблемы передачи информации≫, 7 (1971), 1, 87－101, 3, 87－102

А В Гладкий 撰

【补注】 亦见**形式语言与自动机**（formal languages and automata)

关于“控制推导”问题，见[A1]第五章

参考文献

[A1] Salomaa, A Formal languages, Acad Press, 1973

[A2] Hopcroft, J E and Ullmann, J D, Introduction to automata theory, languages and computation, Addison-Wesley, 1979

鲍 丰 译 李 廉 校

线性文法 [grammar, linear, грамматика линейная]

一种**上下文无关文法**（grammar, context-free)，其中每个规则的右边至多出现一个非终结符 由这种文法产生的语言族是上下文无关语言族的一个真子集(例如，上下文无关语言 $\{a^n b^n a^m b^m \mid n, m=1, 2, \ldots\}$ 不是线性的） 亦见**正则文法**（grammar, regular)

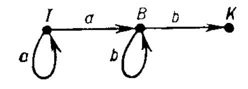
А В Гладкий 撰 鲍丰 译 李廉 校

正则文法 [grammar, regular, грамматика автоматная]

有限状态文法（finite-state grammar)，自动文法（automatic grammar)，左（右）线性文法（left-(right-) linear grammar)

一种**上下文无关文法**（grammar, context-free)，它的每一条规则都具有形式 $A \to aB$ 或 $A \to a$，其中 A 与 B 均为非终结符，而 a 为一个终结符．(有时，对于空字符串 Λ，形如 $A \to \Lambda$ 的规则，也是允许的，这样，所生成的语言的集合便被扩充到包含添加了 Λ 的语言的集合 ）对任一正则文法可构造一个与之等价的**有限自动机**（automaton, finite)．由正则文法所生成的语言（正则语言（regular language)）的集合对等于正则集所组成的集合，如果允许形如 $A \to \Lambda$ 的规则．正则语言集是**线性文法**（grammar, linear) 集的一个真子集．线性语言 $\{a^n b^n \mid n=1,2\}$ 不是正则的 正则语言的集合在并、交、毗连、代入、截迭代闭包的运算下是封闭的 （如允许右边为空的规则，在迭代闭包下亦封闭．）正则语言与上下文无关语言的交仍为上下文无关语言．

一个正则文法通常由一个转移图（transition diagram) 来表达——一个结点为非终结符的有向图，其中如果 $A \to aB$ 是文法的一个规则，那么从结点 A 到结点 B 由一条标记为 a (终结符)的弧连接，另外，迁移图还含有一个终结结点，如果在文法中包含规则 $A \to a$，则它由一条标记为 a 的弧与非终结符 A 连接．(如果存在形如 $A \to \Lambda$ 的规则，那么所有的这样的 A 被认为是终结结点 ）



一个基本词汇表中的字符串是在文法中从非终结符 A

可导出的，当且仅当它是沿着图中的某一条从 A 到终结结点的路径“写下来的” 上图就是具有规则 $I \to aI$，$I \to aB$，$B \to bB$，$B \to b$ 的正则文法的迁移图（I是初始符，K是终结结点)，它所生成的语言是 $\{a^n b^m \ n, m=1, 2, \ \}$.

参考文献

[1] Гладкий, А В, Формальные грамматики и языки, М, 1973

[2] Трахтенброт, Б А, Барздинь, Я М, Конечные автоматы (Поведение и синтез), М, 1970 (英译本 Trakhtenbrot, B A and Barzdın, Ya M, Fınite automata Behavıour and synthesıs, North-Holland, 1973)

A B Гладкий 撰

【补注】 亦见**形式语言与自动机**(formal languages and automata)

参考文献

[A1] Gınsburg, A, Algebraıc theory of automata, Acad Press, 1968

[A2] Hartmanıs, J and Stearns, R E, Algebraıc structure theory of sequentıal machınes, Prentıce Hall, 1966.

[A3] Hopcrapt, J E and Ullman, J D, Introductıon to automata theory, languages and computatıon, Addıson-Wesley, 1979

[A4] Gınsburg, S, The mathematıcal theory of context-free languages, McGraw-Hıll, 1966

[A5] Salomaa, A, Formal languages, Acad Press, 1975

鲍 丰 译 李 廉 校

变换文法 [grammar, transformational, грамматика трансформационная]

一种**形式文法**(grammar, formal). 变换文法适用于变换**语法结构**(syntactıc structure)，由于把语言单元之间的语法关系和线性关系分开来考虑同语言的属性更为一致，因此变换文法比仅从“字符串”的生成(识别)来产生或识别语法结构的其他形式文法更适合于自然语言的描述.

变换文法比变换“字符串”的文法要麻烦得多，因此直到20世纪60年代后期变换文法的形式概念才发展起来，虽然N Chomsky早在十年以前就为它打下了基础. 有好几种变换文法的概念，其中有些是为了处理分量系统，而其他的则是为了处理分层树 作为一个例子，可以考虑所谓 Δ 文法，它是形如 $t_1 \Rightarrow t_2 | f$ 的基本变换的有限系统，其中 t_1 和 t_2 是具有赋值结点和弧的（有限）有向树，f 是一个从 t_1 的结点集合到 t_2 的结点集合的映射. 把这样的一个变换作用到一个具有赋值结点和弧的树 T(解释为一个分层树)，意味着用其中一个与 t_2 同构的子树替代某个与 t_1 同构的子树，同时把被替换子树的每个结点 A 的“外部连接”“挂到”替换以后的子树的相应结点 $f(A)$ 上. Δ 文法是用来实现从一级语法结构到另一级语法结构的转变（是**数理语言学**(mathematıcal lınguıstıcs)以及深层语法结构的同义变换).

参考文献

[1] Хомский, Н, в кн Новое в лингвистике, 1962, 2, 412-527

[2] Gınsburg, S and Partee, B, A mathematıcal model of transformatıonal grammars, *Inform and Control*, **15** (1969), 4, 297-334

[3] Гладкий, А В, Мельчук, И А, в кн Информационные вопросы семиотики, лингвистики и автоматического перевода, М, 1971, 1, 16-41.

A B Гладкий 撰

【补注】 变换文法的另一种数学模型可以在[A1]中找到. Chomsky关于变换文法的基本著作是[A2] 当前Chomsky学派所追寻的文法模型已不再是变换文法，而是所谓的支配与约束理论，见[A3]. 虽然它与变换文法具有某些共性，但它甚至连**生成文法**(grammar, generatıve)都不是.

亦见**形式语言与自动机**(formal languages and automata)

参考文献

[A1] Peters, P S and Rıtchıe, R W, On the generatıve power of transformatıonal grammars, *Informatıon Scıences*, **6** (1973), 49-83.

[A2] Chomsky, N, Aspects of the theory of syntax, M I T, 1965

[A3] Chomsky, N, Lectures on government and bındıng, Forıs, Dordrecht, 1981

[A4] Bach, E, An ıntroductıon to transformatıonal grammars, Holt, Rınehart, Wınston, 1964

鲍 丰 译 李 廉 校

图 [graph, граф]

一个顶点集 V 与一个无序的和有序的顶点对的集合 E，记为 $G(V, E)$ 无序的顶点对称为边(edge)，而有序的顶点对称为弧(arc) 只含边的图称为非定向的(non-orıented)或无向的(undırected)，只含弧的图称为定向的(orıented)或有向的(dırected) 一对顶点可以由两边或更多边（同向的弧）连接，这样的边(弧)称为多重的 一条弧(边)可以起始和终止于同一顶点，这时它就称为自环(loop)（有时，“图”是指无自环、无多重边的图，这时，有多重边的图就称为多重图(multı-graph)，而既包含多重边又包含自环的图称为伪图(pseudo-graph))

由一边或一自环连接的顶点称为相邻顶点(adjacent vertıces) 有公共顶点的边称为相邻边(adjacent edges) 一条边(弧)和它的每一顶点称为关联的(ıncıdent) 一条边 (u, v) 连接两顶点 u 和 v，而弧 (u, v) 以顶

点 u 为起点，并以顶点 v 为终点，每个图可以在 Euclid 空间内表示，一个点集对应于顶点集，顶点间用线连接对应于图的边（或弧）．在 3 维空间内，任何图都可以用边不交于内点的方式表示．

指明一个图有多种方法．令 u_1，…，u_n 为图 $G(V, E)$ 的顶点，e_1，…，e_m 为它的边．对应于 G 的邻接矩阵（adjacency matrix）是矩阵 $A=\|a_{ij}\|$，其中元素 a_{ij} 等于连接顶点 u_i 和 u_j 的边（由 u_i 到 u_j 的弧）数，如果 u_i 和 u_j 不相邻，则 $a_{ij}=0$．在 G 的关联矩阵（incidence matrix）$B=\|b_{ij}\|$ 中，元素 $b_{ij}=1$，如果顶点 u_i 与边 e_j 关联，$b_{ij}=0$，如果顶点 u_i 与边 e_j 不关联．图可以用表指明，例如，列举由边（弧）连接的顶点对，或列举与每个顶点相邻的顶点集．两个图 $G(V, E)$ 与 $H(W, I)$ 称为同构的（isomorphic），如果在它们的顶点集 V，W 之间，和边集 E，I 之间有保持关联关系的一一对应关系（亦见**图的同构**（graph isomorphism））．

定义图 $G(V, E)$ 的子图（subgraph）$G'(V', E')$ 为具有顶点集 $V'\subseteq V$，边集 $E'\subseteq E$，而且 E' 的边仅与 V' 的顶点关联的图．一个子图 $G'(V', E')$ 称为由子集 $V'\subseteq V$ 的产生子图（generated subgraph）或导出子图（induced subgrap），如果它具有顶点集 V' 和边（弧）集 E'，且 E' 由 G 中所有连接 V' 的顶点的边构成．一个生成子图（skeleton subgraph 或 spanning subgraph）$G'(V, E')$ 包含 G 的所有顶点和它的边（弧）集的某个子集 $E'\subseteq E$．边的序列 (u_0, u_1)，…，(u_{i-1}, u_i)，…，(u_{r-1}, u_r) 称为连接顶点 u_0 和 u_r 的一条通道（walk）．一条通道称为链（chain）或迹（trail），如果它的边都是相异的，而称为一条简单链（simple chain）或路（path），如果它的所有顶点也相异．一个闭（简单）链也称为一个（简单）圈（cycle）．一个图称为连通的（connected），如果它的任意一对顶点可由一通道连接．图 G 的一个极大连通子图称为它的一连通分支（connected component）．一个不连通图至少有 2 个连通分支（亦见**图的连通度**（graph, connectivity of a））．

一条通道（链或简单链）的长度等于顺序经过的边数．G 中连接顶点 u_i 和 u_j 的最短简单链的长度称为两点 u_i 和 u_j 之间的距离（distance）$d(u_i, u_j)$．在一个连通无向图中，距离满足度量公理．量 $\min_{u_i}\max_{u_j} d(u_i, u_j)$ 称为直径（diameter），而如果在一个顶点 u_0 处 $\max_{u_j} d(u_i, u_j)$ 取极小值，这个顶点 u_0 称为 G 的中心（centre）．一个图可以有多于一个中心，或者没有中心．

图 G 的一个顶点 u_i 的度（degree of a vertex），记为 d_i，是与该顶点关联的边数．如果一个（无自环）图 G 有 n 个顶点和 m 个边，则 $\sum_{i=1}^{n} d_i=2m$．一个顶点 u_i 称为孤立顶点（isolated vertex），如果 $d_i=0$，又顶点 u_i 称为悬挂顶点（在 terminal vertex 或 pendant vertex），如果 $d_i=1$．所有顶点的度相等（等于 k）的图称为 k 度正则图（regular graph）．一个完全图（complete graph）没有自环，且每对顶点都恰有一边相连接．设图 $G(V, E)$ 没有自环，也没有多重边，则 G 的补图（complementary graph）是图 $\bar{G}(\bar{V}, \bar{E})$，其中 $\bar{V}=V$，且 $\bar{G}$ 中两顶点相邻，当且仅当它们在 G 中不相邻．一个完全图的补图仅由孤立顶点构成，就称为空图（empty graph）．图 G 与它的补图 $\bar{G}$ 有许多特征是相关的．在有向图 G 上，对于每个顶点 u_i，分别定义出度（output (semi-) degree 或 out degree）和入度（input (semi-) degree 或 in degree）为从该顶点起始和终止的弧数．一个定向的完全图称为**竞赛图**（tournament）．每个图 G 可以导出多种图．如 G 的边图（edge graph）$L(G)$ 是一个图，它的顶点对应于 G 的边，且两顶点在 $L(G)$ 中相邻，当且仅当其对应于 G 中的边相邻．G 的全图（total graph）$T(G)$ 的顶点对应于 G 的顶点和边，且 $T(G)$ 的两顶点相邻，当且仅当 G 中对应的顶点和边相邻或相关联．G 的许多特性可以转到 $L(G)$ 和 $T(G)$．已经知道图的概念的许多推广，其中包括**超图**（hypergraph）和**网络图**（network graph）．

借助于合适的运算，可以从较简单的图构造出别的图，从一个图得出较简单的图，把一个图分解为较简单的图，从一个图得出属于已知图类的图等．最简单的一位运算包括去掉一边（边的顶点保留），在图的两顶点间添加一边，去掉一顶点连同与它关联的边（图 G 去掉一顶点 v 后所得的图常记为 $G-v$），添加一顶点（此顶点可以与图的某些顶点连结成边），收缩一边——使一对相邻顶点重合，即去掉一对相邻顶点，再添加一顶点使它与已去掉的两顶点之一相邻的顶点相邻，以及一边的细分，就是去掉一边并添加一顶点使它与所去掉的边的两个顶点分别连接成边．

图的二位运算应用于图论的许多问题．令 $G_1=G(V_1, E_1)$ 和 $G_2=G(V_2, E_2)$ 是图，其中 $V_1\cap V_2=\emptyset$，$E_1\cap E_2=\emptyset$．两图 G_1 和 G_2 的并是图 $G=G_1\cup G_2$，其顶点集 $V=V_1\cup V_2$ 与边集 $E=E_1\cup E_2$．图 G_1 和 G_2 的积是图 $G=G_1\times G_2$，它的顶点集是卡氏积 $V=V_1\times V_2$，两顶点 (u_1, u_2) 和 (v_1, v_2) 相邻，当且仅当 $u_1=v_1$ 而 u_2 与 v_2 相邻，或者 $u_2=v_2$，而 u_1 与 v_1 相邻．例如，任一图是它的连通分支的并，一个所谓 n 维单位立方体的图 Q_n，可以由积运算

$$Q_n=K_2\times Q_{n-2}$$

递归地定义，式中 $Q_1=K_2$ 是一个图，由两点及连结它们的一边构成．也可以定义交图运算，特别是给定图的子图．两图 G_1 和 G_2 的模 2 加法（addition mo-

dulo 2 of two graphs）定义为图 G，它有顶点集 $V=V_1\cup V_2$，与边集 $E=(E_1\cup E_2)\setminus(E_1\cap E_2)$，图的其他多位运算也已使用.

对于某些图类，可能找到简单运算，使得重复应用它可以从给定类中的任一图变为同一类中的任一其他图. 借助于图1所示的运算，可以在有相同的度集的图类中从任一图变为另一图

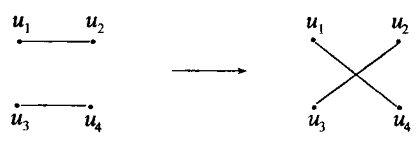


图1

图2所示的运算使得有可能从任一三角剖分变到另一三角剖分，它们都属于平面图的三角剖分的图类（见**可平面图**（graph，planar））

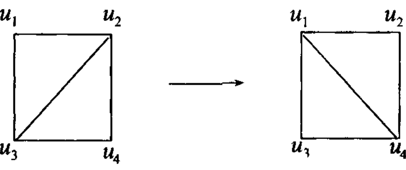


图2

对某些图类的描述和研究牵涉到图的集合和运算，使得有可能得到给定类中的任一图. 图的运算也用于构造具有给定性质的图，计算图的数值特征等（见**图的数值特征**（graph，numerical characteristics of a））.

图的概念应用于定义某些数学思想，如控制系统、算法与语法的某些定义等. 许多数学理论的阐述，如果使用图的几何表示的话，会更容易理解，例如 Markov 链理论. 在经济学、生物学等学科中图的概念已广泛地用于各种数学模型的表达和描述.

参考文献

[1] Berge，C，The theory of graphs and their applications，Wiley，1962（译自法文）

[2] Ore，O，Theory of graphs，Amer Math Soc，1962

[3] Зыков，А А，Теория конечных графов，[В 1]，новосиб，1969

[4] Harary，F，Graph theory，Addison-Welsey，1969（中译本 F 哈拉里，图论，上海科学技术出版社，1980）

В П Козырев 撰

【补注】 图论的术语至今尚未能统一. 在英文文献中，基本上有三派术语，法国派以 Berge 的书（[1]）和[A1]为代表，加拿大派以[A2]和[A3]为代表，而美国派（特别是密执安派）以[4]和[A4]为代表. 本条目所用的术语中，有的与上述三派都相异.

参考文献

[A1] Berge，C，Graphs and hypergraphs，North-Holland，1973（译自法文）.

[A2] Bondy，J A and Murthy，U. S R，Graph theory with applications，Macmillan，1976

[A3] Tutte，W T，Graph theory，Addison-Wesley，1984

[A4] Behzad，M，Chartrand，G and Foster，L L，Graphs and digraphs，Prindle，Weber & Schmidt，1979

[A5] Wilson，R J，Introduction to graph theory，Longman，1985

锺集 译 李乔 校

图的自同构 [graph automorphism，графа автоморфизм]

一个图到本身的同构映射（见**图的同构**（graph isomorphism））一给定图的所有自同构的集合关于自同构的合成构成一个群. 图 G 的自同构生成了顶点的置换的一个群 $\Gamma(G)$，称为 G 的（顶点）群，又生成了边的置换的一个群 $\Gamma_1(G)$，称为 G 的边群. 无环无多重边的图的顶点群和边群是同构的，当且仅当 G 至多有一个孤立顶点，且它的连通分支中没有一个是孤立边 对于每个有限群 F，必存在一图，其自同构群同构于 F 还存在 n 元集的一个置换群，它不是任何有 n 顶点的图的顶点群. 图的对称性的各种类型和度量与它的自同构有关. 除恒等自同构外别无其他自同构的图称为非对称的（asymmetric） 当 $n\to\infty$ 时，几乎所有具有 n 顶点的图都是非对称的

参考文献

[1] Harary，F，Graph theory，Addison-Wesley，1969（中译本 F 哈拉里，图论，上海科学技术出版社，1980）

В Б Алексеев 撰

【补注】 对于一个有限群 F，必存在一个图，它的自同构群就是 F，这个事实是 R Frucht（[A3]）得出的. 图论中关于这一方面和其他代数方面的文献是[A1]，另一有关的文献是[A2]

参考文献

[A1] Biggs，N，Algebraic graph theory，Cambridge Univ Press，1974

[A2] Biggs，N，Finite groups of automorphisms，Cambridge Univ Press，1971

[A3] Frucht，R，Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe，*Compos Math*，6（1938），239－250

锺集 译 李乔 校

二部图 [graph，bipartite，граф двудольный]，双色图（bichromatic graph）

一个图，它的顶点集 V 可以分拆为两个不相交集 V' 和 V''（即 $V=V'\cup V''$，$V'\cap V''=\emptyset$），使它的每一边都连结 V' 的一顶点与 V'' 的一顶点. 一个图是二部图，当且仅当它的简单圈都有偶数长. 二部图的另一常用的定义是图中两个顶点子集 V' 和 V''（部分（part））已先给出 二部图适合于表示两种不同类型元素间的二元关系. 例如，一个给定集合的元素与它的子

集之间有元素属于子集的"成员关系"，对于执行者和工种有"某执行者能实施某工种"的关系等

关于二部图的一个重要问题是研究匹配（matching），即两两不邻接的边的族．这样的问题出现在例如排时间表的理论（把二部图的边分拆成最少个数的不相交匹配），分派问题（求一匹配中元素的最大数）等之中．二部图中最大匹配的基数是

$$|V'| - \max_{A \subseteq V} (|A'| - |V''(A')|),$$

式中 $V''(A')$ 是 V'' 中至少与 A' 的一个顶点相邻的顶点数　完全二部图（complete bipartite graph）是分属不同子集的任意两个顶点恒有边相连的二部图（如图 $K_{3,3}$，见**可平面图**（graph，planar），图 1）　二部图概念的一个推广是 k 部图（k-partite graph）概念，即一个图的顶点集分拆为 k 个子集，使得每边所连接的两顶点分属不同子集．

参考文献

[1] Ore，O，Theory of graphs，Amer Math Soc，1962

【补注】　　В Б Алексеев 撰

参考文献

[A1] Harary，F，Graph theory，Addison-Wesley，1969（中译本　F　哈拉里，图论，上海科学技术出版社，1980）

[A2] Wilson，R J，Introduction to graph theory，Longman．1985

【译注】

参考文献

[B1] Lovasz，L，Plummer，M D，Matching Theory，Elsevier Science Publishing Comp，1986

钟集译　李乔校

图的回路 [graph circuit，графа обход]

包含一个图的所有顶点或边且具有某些性质的边序列．最著名的回路是 Euler 和 Hamilton 链和圈．一个边序列（闭边序列）称为一个 Euler 链（Euler chain）（Euler 圈（Euler cycle）），如果它包含图的所有边且只通过每边一次　对于 Euler 圈的存在性有一有效的判定准则（Euler 定理（Euler theorem））　一个连通图具有 Euler 圈，当且仅当它的每个顶点（除了其中两个以外）都有偶数度．

一个边序列（闭边序列）称为一个 Hamilton 链（Hamilton chain）或 Hamilton 圈（Hamilton cycle），如果它包含了图的所有顶点并且只通过每个顶点一次　已知 Hamilton 圈存在的若干充分条件，如　图没有环或多重边，且对于任意两不相邻顶点，它们的度数和不小于图的顶点数，图是可平面的，而且是 4 连通的，图无环或无多重边，且顶点数 n 与边数 m 满足 $n \geqslant 3$ 和 $m \geqslant (n^2 - 3n + 6)/2$　一个图称为 Hamilton 图（Hamilton graph）（Euler 图（Euler graph）），如果它有一个 Hamilton（Euler）圈　一个图称为 Hamilton 连通的（Hamilton-connected），如果它的任意两个顶点可由一 Hamilton 链连接，一个图称为 k-Hamilton 的，如果任一长为 k 的简单链构成某个 Hamilton 圈的一部分　著名的旅行售货员问题是在一个各边分别标以非负数（边长）的图中求边长的和达到最小的 Hamilton 圈　这个问题以及其他关于图的回路的问题都有各种技术上的和经济学上的应用

参考文献

[1] Harary，A F，Graph theory，Addison-Wesley，1969（中译本　图论，上海科学技术出版社，1980）

[2] Зыков，А А，Теория конечных грофов，[в 1]，Новосиб，1969

В П Козырев 撰

【补注】　找到 Hamilton 图的一个好的特征描述，和求出一个图的一个 Hamilton 圈的好算法，是一个困难的尚未解决的问题．后者已经知道是一个 $\mathcal{NP}$ 完全问题．关于 Euler 图的综述见 [A1]，关于 Hamilton 图的综述见 [A2]

一个边序列（edge sequence）（或通道）（edge progression 或 walk）是点和边的一个交错序列 $v_0 e_0 v_1 \cdots e_{n-1} v_n$，使得 e_i 是 v_{i-1} 与 v_i 之间的边（在研究定向图时，e_n 应该是由 v_{i-1} 到 v_i）　所有边相异的边序列称为路（path），所有顶点相异的路（除了可能有 $v_0 = v_n$ v_n 之外）称为链（chain）　有 $v_0 = v_n$ 的链称为回路（circuit）

参考文献

[A1] Lesniak，L and Oellerman，O R，An Eulerian exposition，*J Graph Theory*，**10**（1986），277－297

[A2] Bermond，J C，Hamiltonian graphs，in L W Beineke and R J Wilson（eds），Selected Topics in Graph Theory，Acad Press，chapt 6

[A3] Walther，H-J，Ten applications of graph theory，Reidel，1984

[A4] Chen，W K，Applied graph theory，North-Holland，1971

钟集译　李乔校

【译注】【补注】中定义的术语已不使用

图的着色 [graph colouring，графа раскраска]

对一个图的顶点和（或）边指定颜色，使其展现出某些性质．一个图的正则顶点（边）着色（regular vertex（edge）colouring）是指这样的着色：其中任何两个相邻顶点（边）都具有不同的颜色．一个正则顶点着色常简称为图的着色（graph colouring）．一个图称为可着 k 色的，如果它有一个用 k 种颜色的正则顶点着色．足以使图 G 有正则顶点着色的最小颜色数称为 G 的色数（chromatic number）$\chi(G)$　若 $\chi(G)=k$，则 G 称为 k 色的（k-chromatic）．一个图是 2 色的，当且仅当它不包含奇数长的简单圈．如

果 G 的顶点的最大度是 r，则除下面两种情形外，G 总是可着 r 色的· 1） $r=2$，且 G 有一连通分支是一个奇数长的圈，2） $r>2$，且 G 有一个连通分支是有 $r+1$ 个顶点的完全图

对于图 G_1 和 G_2 的并成立下述不等式

$$\chi(G_1 \cup G_2) \leqslant \chi(G_1)\chi(G_2),$$

其中等号有时可以成立 而且，如果 G 满足 $\chi(G)=k=ab$，则存在子图 G_1 和 G_2，使 $G=G_1 \cup G_2$，$\chi(G_1)=a$，$\chi(G_2)=b$ 如果 G 是有 n 顶点的图，且 $\overline{G}$ 是 G 的补图，则

$$2\sqrt{n} \leqslant \chi(G)+\chi(\overline{G}) \leqslant n+1,$$

$$n \leqslant \chi(G)\chi(\overline{G}) \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]^2,$$

其中全部上下界都是可达到的 一个二维曲面 S 的色数（chromatic number of a two-dimensional surface） $\chi(S)$ 是能嵌入到 S 的图的最大色数（见**图的嵌入**（graph imbedding）） 不等式

$$\chi(S_\gamma)=\left[\frac{7+\sqrt{1+48\gamma}}{2}\right]$$

对于亏格 $\gamma>0$ 的定向曲面 S_γ 成立. 如果 $\gamma=0$，上式成为 $\chi(S_0)=4$，这是**四色问题**（four-colour problem）的一种陈述 令 $f(G,t)$ 为一个顶点已标定图 G 用至多 t 种颜色作出的不同正则着色的个数，则对于任何图 G，$f(G,t)$ 是 t 的一个多项式，称为 G 的色多项式（chromatic polynomial） 于是，n 个顶点的任一树的色多项式形如 $f(G,t)=t(t-1)^{n-1}$

图 G 的边色数（色类（chromatic class）） $X'(G)$ 是足以使 G 的边有正则边着色的最小颜色数. 如果 G 的顶点的最大度是 k（许可有多重边），则

$$k \leqslant \chi'(G) \leqslant \left[\frac{3}{2}k\right]$$

如果每边的重数至多是 r，则 $\chi'(G) \leqslant k+r$ 特别地，对于无环无多重边的图，$k \leqslant \chi'(G) \leqslant k+1$.

涉及图着色的问题产生于通讯设计，无线电电子学，试验设计以及其他领域.

参考文献

[1] Harary, F , Graph theory, Addison-Wesley, 1969（中译本 F 哈拉里，图论，上海科学技术出版社，1980）

[2] Ore, O , Theory of graphs, Amer Math Soc , 1962

[3] Shannon, C E., A theorem on colouring the lines of a network, J Math Phys , **28** (1949), 148 -151

В Б Алексеев 撰

【补注】 在顶点着色和边着色之外，平面图的区域（面）着色也曾予以研究. 上面提到的四色问题（现在是四色定理）原来就属于这个范畴（见**可平面图**（graph, planar）） [A1] 和 [A2] 提供了关于边着色的近期综述.

参考文献

[A1] Fiorini, S and Wilson, R J , Edge-colourings of graphs, Pitman, 1977

[A2] Fiorini, S and Wilson, R J , Edge-colourings of graphs, in L W Beineke and R J Wilson (eds), Selected Topics in Graph Theory, Acad Press, 1978, chapt 5

[A3] Wilson, R J , Introduction to graph theory, Longman, 1985

[A4] Read, R C , An introduction to chromatic polynomials, J Comb Theory, **4** (1968), 52 - 71

锺 集 译 李 乔 校

图的连通度 [graph, connectivity of a, графа связность]

图的一种拓扑性质. 一个图称为连通的（connected），如果对它的任意两个顶点 u 和 v 必有一链连接它们. 图 G 的顶点连通度数（vertex connectivity number）（记为 $\kappa(G)$）是 G 的最小顶点数，使得去掉这些顶点之后，得到一个不连通图或只有一孤立顶点的图. 图 G 的边连通度数（edge connectivity number）（记为 $\lambda(G)$）是 G 的最小边数，使得去掉这些边的结果得到一个不连通图 图 G 称为 k 连通的（k-connected），如果 $\kappa(G) \geqslant k$，又称为 k 边连通的（k-edge-connected），如果 $\lambda(G) \geqslant k$ G 的一个极大的 k 连通子图称为它的 k 连通分支（k-connected component），1 连通分支称为连通分支（connected component）. 在通讯网络和逻辑网络的研究中，对应的图的连通度可以解释为这些网络的可靠性程度

图论研究了确定图的连通度的方法，图是 k 连通或 k 边连通的条件，不同类型连通度之间的关系，连通度与图的其他参数的关系等. 例如，若 $\delta(G)$ 表为图 G 的顶点最小度，则下面不等式成立. $\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$

对于任意整数 a，b，c（$0<a \leqslant b \leqslant c$），存在一个图 G 使 $\kappa(G)=a$，$\lambda(G)=b$，$\delta(G)=c$ 如果 G 有 n 个顶点，且 $\delta(G) \geqslant [n/2]$，则 $\lambda(G)=\delta(G)$ G 的一个顶点集、边集或顶点和边的集 S 称为分离（separate）两顶点 u 和 v，如果 G 去掉 S 之后，u 和 v 分别属于图 $G-S$ 不同的连通分支 以下陈述成立

分离两不相邻顶点 u 和 v 的最小顶点数等于连接 u 和 v 的两两无公共顶点的简单链的最大个数. 图 G 是 k 连通的，当且仅当它的任一对顶点至少为 k 条两两无公共顶点的链连接. 对于边连通性也有类似的定理 图 G 是 k 边连通的，当且仅当它的任一对顶点至少为 k 条两两无公共边的链连接 一个边集称为一个割（cut），如果去掉它之后会得到不连通图. 在每个图中

分离两顶点 u 和 v 且两两无公共边的割的最大个数等于连接 u 和 v 的简单链的最小边数，即 u 和 v 间的距离 $d(u, v)$

参考文献

[1] Harary, F , Graph theory, Addison-Wesley, 1969 (中译本 F 哈拉里，图论，上海科学技术出版社，1980)

[2] Ford, L and Fulkerson, D , Flows in networks, Princeton Univ Press, 1962

A A Сапоженко 撰

【补注】 末段的断言可以由 L Ford 和 D Fulkerson (见[2])的最大流最小割定理推导出来 而前面两断言是 Menger 定理 (见[1])的顶点形式的另一种说法.

最大流最小割定理 (maximum-flow-minimum-cut)，或 Ford-Fulkerson 定理 (Ford-Fulkerson theorem)，研究的是有向图 G，其中对每条弧 e 指定了一个容量 (capacity) c_e，$0 \leqslant c_e < \infty$ 另外还有两个特别的顶点，记为 Q 和 S，分别称为源点和收点，没有弧进入 Q，也没有弧从 S 出发. 图上的流 (flow) 是由每条弧 (即有定向的边) 上指定一个数 $0 \leqslant f_e \leqslant c_e$ 并使对于每个 $P \neq Q, S$ 都有

$$\sum_{a(e)=P} f_e = \sum_{b(e)=P} f_e \qquad (*)$$

给出，式 (*) 中 $a(e)$ 和 $b(e)$ 分别表示弧 e 的起点和终点，最大流问题 (maximum flow problem) 要求的是使得

$$\sum_{a(e)=Q} f_e$$

达到最大的流. 在这个背景中，一个割是弧的集合，使得去掉它之后得出一个不连通图，且 Q 和 S 分别属不同分支 一个割的容量是割的元素的容量 c_e 的总和 最大流最小割定理指出，可得到的最大流等于一个割的可得到的最小容量. 最大流问题可以表述为一个线性规划问题，因而最大流最小割定理就是线性规划的对偶定理的一个实例.

记得无向图中由 v_0 到 v_n 的一个路是一个序列 $v_0 e_0 v_1$, , $e_{n-1} v_n$，其中顶点和边交错，使得 e_i 是边 $v_i v_{i+1}$，而且所有 e_j 和所有 v_k，除可能的 v_0 和 v_n 以外，都是相异的. 设 v 和 w 是两个顶点，则一个 vw 不连通集或割 (vw-disconnecting set 或 cut) 是这样的一个边集. 去掉它后会得出一个不连通图，而且 v 和 w 分属不同分支. Menger 定理的边形式 (edge form of Menger's theorem) 指出在连通图中从 v 到 w 的边不相交路的最大个数等于一个 vw 不连通集中的最小边数. 事实上，这个定理是 Ford 和 Fulkerson (1955) 首先证明的. 一个 vw 分离集 (vw-separating set) 是一个顶点集 S (S 不包含 v 和 w)，使得从 v 到 w 的任一路都要通过 S Menger 定理的点形式 (vertex form of Menger's theorem) (Menger, 1928) 指出，连接两不相邻顶点 v 和 w 的不于顶点相交的路的最大个数等于一个 vw 分离集的顶点的最小个数. Menger 定理与 P Hall 的匹配定理密切相关，后一定理见**组合分析** (Combinatorial analysis)

参考文献

[A1] Tutte, W T , Connectivity in graphs, Oxford Univ Press, 1966

[A2] Wilson, R J , Introduction to graph theory, Longman, 1985

[A3] Walther, H J , Ten applications of graph theory, Reidel, 1984

鍾 集 译 李 乔 校

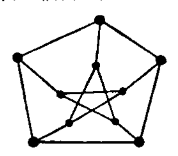
极图 [graph, extremal, граф экстремальный]

某一数值特征在其上达到极大或极小的图 通常是在对别的数值特征和特性加以约束的条件下求某个数值特征的极值 问题经常在于描述相应的极图的集合. 例如，对于给出的正整数 n 和 k，求不含 $k+1$ 个顶点的完全图作为子图的 n 顶点图的最大可能边数. 这个数已求得为

$$\frac{k-1}{2k}(n^2 - r^2) + \frac{r}{2}(r-1),$$

式中 $n = k\left[\frac{n}{k}\right] + r$ 一个完全 k 部图，其各部的顶点数至多相差 1，是在同构意义下唯一的极图 ([3])

所研究的数值特征在极图上达到整体极值. 所谓临界图 (critical graph) 可以视为局部优化. 设给定图的某性质 A 与图上选出的一位运算 O_1, , O_s. 具有性质 A 的图 G 称为对于 A 以及运算 O_1, , O_s 是临界的，如果施行任一上述运算后所得的图不复具有性质 A 这里假设不具有性质 A 的图的集合对于这些运算是封闭的 例如，性质 A 可以是连通的，可平面的，或 k 着色的，而运算则可以是去掉或添加一个顶点或一条边，收缩一条边等. 因而 Peterson 图 (见图) 关于边 4 着色和去掉边的运算是临界的. 完全 5 顶点图 K_5 和每部各有 3 顶点的完全二部图 $K_{3,3}$ (见**可平面图** (graph, planar)，图 1)，对于非可平面性以及去掉边，收缩边和去掉顶点的运算是临界的.



在图的性质和特征的研究中，研究它们的临界子图 (critical subgraphs)，即具有某些性质且对于包含关系来说是极小 (或极大) 的子图是有用的. 这种子图的例子有连通 (k 连通) 分支和生成树. 极图和临界图可用于描述具有给定性质和数值特征的图，建立各种性质与数值特征的联系，以及确定一个图是否具有给定性质等

参考文献

[1] Harary, F , Graph theory, Addison-Wesley, 1969(中译本 F 哈拉里，图论，上海科学技术出版社，1980)

[2] Зыков, А А , Теория конечных графов , [в 1], Новосиб , 1969

[3] Turán, P , An extremal problem in graph theory, *Mat Fiz Lapok*, 48 (1941), 436 - 452

А А Сапоженко 撰

【补注】 P. Turán 和 P. Erdos 为极图理论奠定了基础 关于图论的这个观点的全面论述可见 [A1]

参考文献

[A1] Bollobas, B , Extremal graph theory, Acad Press, 1978

锺集译 李乔校

图的同胚 [graph homeomorphism, графов гомеоморфизм]

图的集合上的一种等价关系，它表征了图的几何性质. 图的同胚概念定义如下 一个图 G 的一条边 (a, b) 的细分(subdivision)是添加一个新顶点 v，去掉边 (a, b) 并添加两条新边 (a, v) 与 (v, b) 的操作. 用几何的话来说，这个操作就是在边 (a, b) 上增加一个内点，然后使这个点成为新的顶点. 如果一个图 G' 可以通过图 G 的重复若干次边的细分得到，G' 就称为 G 的一个细分. 两个图 G_1 和 G_2 称为同胚的(homeomorphic)，如果它们有同构的细分(见**图的同构**(graph isomorphism))

В Б Алексеев 撰 锺集译 李乔校

图的嵌入 [graph imbedding, графа укладка]

把一个图的所有顶点和边分别映射到一个给定空间的点和连续曲线的一个映射，使得一条边所关联的顶点映射成对应曲线的端点 一个正则嵌入(regular imbedding)是一个嵌入，它使得相异点对应于相异顶点，而对应于边的曲线不通过对应于顶点的点(除了边的端点之外)，而且不相交 任一图可以正则嵌入到 3 维空间内. 一个图可以正则嵌入到一个平面内就称为可平面图. 存在非可平面图，例如图 K_5 和 $K_{3,3}$ (见**可平面图**(graph, planar)，图 1) 一个图 G 可以正则嵌入的 2 维定向曲面的最小亏格称为 G 的亏格(genus)$\gamma(G)$ 特别地，已证明

$$\gamma(K_n) = \left]\frac{(n-3)(n-4)}{12}\right[,$$

式中 K_n 是具有 n 个顶点的完全图，且 $]a[$ 是不小于 a 的最小整数，

$$\gamma(K_{m,n}) = \left]\frac{(m-2)(n-2)}{4}\right[,$$

式中 $K_{m,n}$ 是完全二部图(见**二部图**(graph, bipartite))

$$\gamma(Q_n) = 1 + (n-4)\cdot 2^{n-3},$$

式中 Q_n 是 n 维立方体 一个图 G 的厚度(thickness) $\theta(G)$ 是当 G 表示为可平面子图的并图时这些可平面子图的最小个数 G 特别地，已证明

$$\theta(K_p) = \left[\frac{p+7}{6}\right], \text{若 } p \neq 9, 10,$$

$$\theta(K_9) = \theta(K_{10}) = 3,$$

$$\theta(Q_n) = \left]\frac{n+1}{4}\right[,$$

$$\theta(K_{m,n}) = \left]\frac{mn}{2(m+n-2)}\right[$$

(可能有一些例外情形). 与图的嵌入有关的其他数值特征也已曾研究过. 这些数值特征包括 交叉数(number of crossings)—— 一个图嵌入到一个给定曲面时，它的边相交的最小次数，糙度(coarseness)——一给定图的无公共边的非可平面子图的最大个数等. 非定向曲面上的嵌入也曾研究过 一个图到一个 n 维整点格的嵌入是到这种格的一个映射，它使得顶点映射为相异格点，而边映射为格边

图到曲面上与格上的嵌入问题，在自动计算机设计、通讯设计等领域出现

参考文献

[1] Harary, F , Graph theory, Addison-Wesley 1969 (中译本 F 哈拉里，图论，上海科学技术出版社，1980)

[2] Теория графов Покрытия, укладки, турниры, М 1974, 82 - 159 (译文集).

В Б Алексеев 撰

【补注】 对于这里所讨论的参数的新近综述，见 [A1] 和 [A2] 有关的两篇重要文献是 [A3] 和 [A4]

参考文献

[A1] White, A T and Beineke, L W , Topological graph theory, in L W Beineka and R J Wilson (eds), Selected topics in graph theory, Acad Press, 1978, chapt 2

[A2] White, A T , The proof of the Heawood conjecture, in L W Beineke and R J Wilson (eds), Selected topics in graph theory, Acad Press, 1978, chapt 3

[A3] White, A T , Graphs, groups and surfaces, North-Holland, 1973

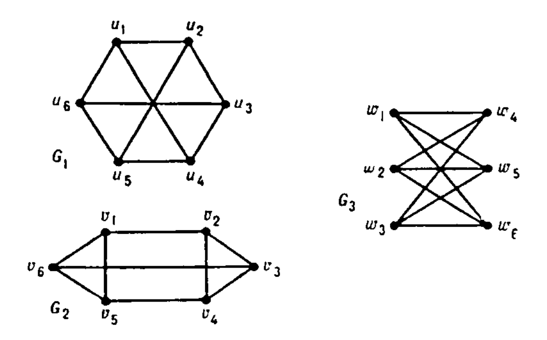
[A4] Ringel, G , Map colour theorem, Springer, 1974

锺集译 李乔校

图的同构 [graph isomorphism, графов изоморфизм]

图集上的一种等价关系 一个无向图到另一个无向图的一个同构映射(isomorphic mapping)，是一个图的顶点和边分别到另一个图的顶点和边上的保持关联关系的一一映射. 两个图称为同构的(isomorphic),

如果存在一个同构映射把其中一个映射为另一个．附图中图 G_1 和 G_2 不同构，而图 G_1 与 G_3 同构．同构的图通常不加区别．具有给定顶点数和边数的互不同构的图的个数是有限的．定向图的同构，超图的同构和网络的同构都可以用类似方式定义



判明诸图之间的同构关系的问题在图论中是一个重要问题．对于某些图类，存在一些算法可以有效地判明同构关系（例如**树**（tree），或可平面图，[1]）已经证明，某些 n 个顶点的图类可以由它的所有子图 $G-v$ 的集合唯一地重构（在同构的意义下），这种子图有 $n-1$ 个顶点，且通过用所有可能的方式去掉顶点 v 得到．特别地，对于树和竞赛图已证明这一结论（当 $n \neq 5, 6$ 时，见**竞赛图**（tournament））

参考文献

[1] Хопкрофт, Д Ж, Тарьян, Р, 《Кибернетический сборник》, 1975, в 12, с 39 - 61

[2] Kelly, P J, A congruence theorem for trees, Pacific J *Math*, 7 (1957), 961 - 968

В Б Алексеев 撰

【补注】 图的同构问题属于 $\mathcal{NP}$ 类，但尚未证明它是属于 $\mathcal{NPC}$ 抑或是 $\mathcal{P}$ 类，它在计算的复杂性的研究上非常有意义。见综述 [A1] 和 [A2]，亦见**复杂性理论**（complexity theory）

图的重构问题通常也称为 Kelly-Ulam 猜想（Kelly-Ulam conjecture） 最早的文献是 [A3] 许多图类已经证明是可重构的．新近的概述见 [A4] 和 [A5]

参考文献

[A1] Read, R C, and Corneil, D G, The graph isomorphism disease, *J Graph Theory*, 1 (1977), 339 - 363

[A2] Gati, G, Further annotated bibliography on the isomorphism disease, *J Graph Theory*, 3 (1979), 95 - 109

[A3] Ulam, S M, A collection of mathematical problems, Wiley, 1960

[A4] Bondy, J A, and Hemminger, R L, Graph reconstruction-a survey, J Graph Theory, 1 (1977), 227 - 268

[A5] Nash-Williams, C St J A, The reconstruction problem, in L W, Beineke and R J Wilson (eds), selected topics in graph theory, Acad. Press, 1978, chapt 8

[A6] Hopcroft, J E and Tarjan, R E, Complexity of computer computations, Plenum, 1972, 131 - 152, 187 - 212

[A7] Hopcroft, J E, and Tarjan, R E, Efficient planarity testing, J, *ACM*, **21** (1974), 549 - 568

锺 集 译 李 乔 校

图的数值特征 [**graph, numerical characteristics of a, графов числовые характеристики**]

在图集上给定而在某个数集中取值的函数．若干这样的函数和它们的最常用的记号列举如下 图的最简单的数值特征是它的顶点数和边（弧）数．图 G 的秩数（cyclomatic number）$\nu(G)$ 是使 G 变为无圈图所应去掉的最小边数，

$$\nu(G) = m - n + k,$$

式中 m 是边数，n 是顶点数，k 是 G 的连通分支数 G 的顶点连通度数（vertex-connectivity number）$\kappa(G)$（边连通度数 （edge-connectivity number）$\lambda(G)$）是使 G 变为不连通图或平凡图（即只含一个顶点的图）所应去掉的最小顶点（边）数 G 的密度（density）$\varphi(G)$ 是 G 的完全子图的最大顶点数．G 的独立数（independence number）或内稳定数（number of internal stability）$\varepsilon(G)$ 是 G 的两两互不相邻的顶点的最大一个数（G 的这些两两互不相邻的顶点构成 G 的内稳定集（internally stable set）） 图的色数（chromatic number）$\chi(G)$（边色数（edge chromatic number）$\chi'(G)$）是 G 的顶点（边）着色中使相邻顶点颜色不同所需的最小颜色数．（亦见**图的着色**（graph colouring）） 图 G 的外稳定数（number of external stability）$\beta(G)$ 是 G 的子集 W 中顶点的最小数，W 是 G 中满足任一不属于 W 的顶点必与 W 中至少一点相邻的子集 G 的荫度（arborescence）$\psi(G)$ 是 G 的边不相交且其并为 G 的生成林的最小分支数 G 的糙度（coarseness）$\xi(G)$ 是 G 的边不相交且其并为 G 的不可平面子图的最大个数．G 的厚度（thickness）$\theta(G)$ 是 G 的并为 G 的可平面子图的最小个数．G 的交叉数（crossing number）是将 G 画在平面上时相交边对的最小对数．G 的亏格（genus）$\gamma(G)$ 是可把 G 画在其上并使 G 的边不相交的 2 维可定向曲面的最小亏格（见**图的嵌入**（graph imbedding））

某些数值特征关系到给出的某种图类子图的个数，例如生成树数，Hamilton 圈数等．有些特征依赖于一个参数 $f(G)$（例如具有 k 个顶点的完全子图数），可将这些特征的总体用一个多项式 $\sum_k f_k(G) x^k$ 列出——类似于生成函数 许多这样的多项式可以

通过应用图的运算递归地求出——去掉一个顶点或一条边，把一边收缩等．在解图的理论问题时，往往需要研究不同数值特征之间的关系 这就得出了在某些集合上达到极值，而这样的极值往往可以用以描述达到这些值的图．在这样的情形下，求极值的问题转化成对这种图的探究 在研究所考察的特征数的值的图时，研究临界图的性质可能很有用（见**极图**（graph，extremal））．

参考文献

[1] Зыков，А А，Теория конечных графов，[в 1]，Новосиб，1969

[2] Козырев，В П，в кн，Итоги науки и техники Сер Теория вероятностей Математическая статистика，Теоретическая кибернетика，т 10，М，1972，25－75

[3] Harary，F，Graph theory，Addison-Wesley，1969

В П Козырев 撰

【补注】 图的数值特征也称为图的参数（graph parameters） 同构图具有相同的参数值 一个参数集称为完全的（complete），如果对于参数集中选取的任一组参数值仅有唯一的图（在同构的意义下） 求一个完全参数集的问题至今尚未解决

参考文献

[A1] Wilson，R J，Introduction to graph theory，Longman，1985

鍾 集 译 李 乔 校

映射图象 [graph of a mapping，график отображения]，由集合 X 到集合 Y 中的映射 f $X \to Y$ 的

积空间 $X \times Y$ 中的由点 $(x, f(x))$ $(x \in X)$ 组成的子集 Γ 如果 X，Y 是拓扑空间，f 是连续映射，p $X \times Y \to X$ 是拓扑积 $X \times Y$ 到因子 X 上的投影，那么映射 p 是子空间 Γ 到 X 上的同胚．如果 Y 是 Hausdorff **空间**（Hausdorff space），那么集合 Γ 在积空间 $X \times Y$ 中闭．

Б А Пасынков 撰

在 f 是 n 个实变元 x_1， ，x_n 的实值函数且定义域为 E^n 的情形，其图象（graph）是所有有序对（$(x_1$， ，$x_n)$，$f(x_1$， ，$x_n)$）的集合，其中 $(x_1$，·，$x_n)$ 是 E^n 中任一点，换句话说，它是 $E^n \times \mathbf{R}$ 中所有点 $(x_1$， ，x_n，$f(x_1$， ，$x_n))$ 的集合 选定坐标系（Descartes 坐标，极坐标或任何其他坐标）后，数值点 $(x, f(x))$，$(x, y, f(x, y))$ 可以用平面或空间的点表示．对有导数 f' 和 f'' 的实变元实值函数 f，在复杂性不同的例子中，可由对 f' 和 f'' 符号的研究大致画出 f 的图象．f' 的符号是 f 单调性的指征，而 f'' 的符号刻画函数图象凸性（convexity）的方向．为得到两个实变元的实值函数 z 的图象大致形状，可以使用截面法 用一定的平面，特别是，用平面 $z = c$，来研究图的截口，这些截口到 xy 平面的投影称为 z 的水平集 类似地，对定义在区域 E^m 中的函数 f，f 在水平 c 处的水平集（其中 c 是任意数）是方程 $c = f(x_1$， ，$x_n)$ 的全体解之集合 解 $(x_1$， ，$x_n)$ 应在 E^n 中来求 水平集可以是空集 如果水平集是曲线或曲面，则被称为函数的水平线或水平曲面

А А Конюшков 撰

【补注】 泛函分析中一个非常重要的定理是所谓**闭图象定理**（closed-graph theorem） 如果 X 和 Y 是 **Fréchet 空间**（Fréchet space）而 f $X \to Y$ 是具有闭图象的线性映射，那么 f 连续．已知这个结果有很多推广（见 [A1]）

参考文献

[A1] De Wilde，M，Closed graph theorems and webbed spaces，Pitman，1978

[A2] Schaefer，H H，Topological vector spaces，Macmillan，1966

余庆余 译

定向图 [graph，oriented，граф ориентированный]，有向图（directed graph）

每边都指定了方向的图．一个定向图 G 可以由一顶点集 V 和顶点的有序对（称为弧）的集合 E 表明 弧 (u, v) 出发于顶点 u 且终止于顶点 v 由顶点 v 出发的弧数称为 v 的出度（output semi-degree），而终止于顶点 v 的弧数称为 v 的入度（input semi-degree） 顶点和弧的一个交错序列 v_0，e_1，v_1， ，e_n，v_n，其中 $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ $(i = 1$， ，$n)$ 称为一（定向）序列（seguence） 序列是闭合的，如果它的第一顶点和最后顶点重合 一条路（path）是一个序列，其中所有顶点都相异．一个围道（contour）是一个非平凡闭序列（至少包含一弧），其所有顶点，除首尾两顶点外，都是相异的 如果从顶点 u 至顶点 v 的路存在，则可以说 v 是由 u 可到达的（reachable）

一个有已标号的顶点 v_1， ，v_n 和弧 e_1， ，e_m 的定向图，可以用一个关联矩阵（incidence matrix），即用一个 $m \times n$ 矩阵 $\| b_{ij} \|$ 表明，其中

$$b_{ij} = \begin{cases} +1，如果 e_j 是由 v_i 出发的， \\ -1，如果 e_j 是终止于 v_i 的， \\ 0，如果 e_j 与 v_i 不关联． \end{cases}$$

定向图 G 的顶点的邻接矩阵（adjacency matrix）$A(G)$ 是 $n \times n$ 矩阵 $\| a_{ij} \|$，其中元 a_{ij} 等于从 v_i 到 v_j 的弧数 $A(G)$ 的行和等于定向图的顶点的出度，而列和等于入度 矩阵 $A^k(G)$（即 G 的相邻矩阵的 k 次幂）的 (i, j) 位的元等于由 v_i 至 v_j 的长为 k 的通道数

在定向图中可以定义几种形式的连通性（见**图的连通度**（graph，connectivity of a）） 一个定向图称为强连通的（strongly connected 或 strong），如果它的任意两个顶点中的一个可以到达另一个．定向图称为单

侧连通的(unilaterally connected),如果它的任意两个顶点中至少有一个可以从另一个到达,定向图称为弱连通的(weakly connected 或 weak),如果它的任意两个顶点可由图中的一条链连接,这条链由原定向图中把每段弧换为边(不定向)得到.

定向图可用于 概率论中表示**Марков 链**(Markov chain),对策论中描述对策情况集和竞争的结果,数理经济学中解运输问题,自动机理论中构造传递图解等.在图论本身,可以引入一种定向以解决关于不定向图的某些问题,从而把原题化为一个定向图的问题.定向图与不定向图的基本区别表现在一些概念的定义上,如路、连通性、可到达性、距离等.最令人感兴趣的定向图类型是**竞赛图**(tournament)、可迁图、偏序的图、生长树、单值映射图和无围道图.

参考文献

[1] Зыков, A A, Теория конечных графов, [в 1], Новосиб, 1969

[2] Harary, F, Graph theory, Addison-Wesley, 1969

[3] Picard, C F, Graphs and questionnaires, North-Holland, 1980 (译自法文) A A Сапоженко 撰

【补注】 图论的术语亦见**图**(graph) 围道常称为有向圈(directed cycle).关于定向图的综述见[A1]

参考文献

[A1] Harary F, Norman, R Z and Cartwright, D, Structural models An introduction to the theory of directed graphs, Wiley, 1965

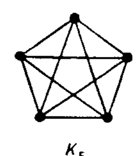
[A2] Wilson, R J, Introduction to graph theory, Longman 1985 鍾 集 译 李 乔 校

可平面图 [graph, planar, граф плоский]

可以正则地嵌入平面的图(见**图的嵌入**(graph imbedding)) 换句话说,图 G 称为可平面的(planar),如果它可以表示在一个平面上,使得图的顶点对应于平面上不同的点,而且平面上对应于图的边的线不通过对应于顶点的点(端点除外)并互不相交 一些问题,如地图的着色、通讯设计、以及电子学中的一些牵涉到借助于平面印刷子电路来实现电路等问题,都可以化归到可平面图的研究.任何连通可平面图的正则嵌入(有不相交边)都牵涉到把平面剖分成若干区域(面) 这样的平面剖分称为平面地图 (planar map) Euler 公式(Euler formula)

$$n - m + r = 2,$$

其中 n 是顶点数,m 是边数,且 r 是地图的面数(包括在外部的一面),可应用于任何平面地图 因此,图 K_5($n = 5$ 的完全图)与 $K_{3,3}$(每部都有3个顶点的完全二部图,亦见**二部图**(graph, bipartite)) 都不是可平面的(图1)



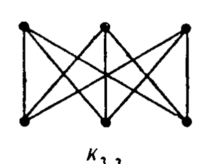


图 1

在某种意义下,这两种图是最小的不可平面图,根据 Понтрягин-Kuratowski 定理(Pontryagin-Kuratowski theorem) 一个图是可平面的,当且仅当它不包含一个同胚于 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图(见**图的同胚**(graph homeomorphism))

还有别的可平面性(即一个图是否可平面)的判别准则.特别地,一个图是可平面的,当且仅当它的每个非平凡双连通分支有一个圈基 Z_1, , Z_m, 与一个附加圈 Z_0,使得 G 的任一边恰好属于这 $m+1$ 个圈中的2个圈的一部分(一个圈基(cycle basis)是一给定图的所有圈的集合的一个子集,它在图的所有圈的集合中关于模2的加法运算是独立的和完全的,见**图**(graph)).

任一可平面图可以在一平面上表示,使它的所有边都是直线段.任一3连通图(见**图的连通度**(graph, connectivity of a))可以唯一地嵌入一个球面(在球面同胚的意义下) 一个可平面图在平面上的每一个嵌入,因而每一个平面地图,可以与它的几何对偶图(dual graph)构成一一对应关系,这种关系可以建立如下 在地图的每个面内取一点作为对偶图的顶点,如果两面有一公共边 e,则将这两面所包含的两点用边 e^* 相连,且 e^* 仅与 e 相交一次(图2中嵌入的图用实线表示,而它的对偶图用虚线表示)

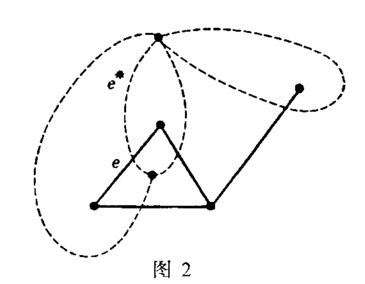


图 2

每个面都由三边围成的平面地图称为平面三角剖分(planar triangulation) 有 n 个顶点的平面三角剖分的边数是 $3n-6$

在图论中广泛研究的一个课题是可平面图的着色(见**图的着色**(graph colouring)),对于不可平面图,研究了以反映它的不可平面性的程度的各种数值特征,这些数值特征包括亏格、图的厚度和糙度、交叉数等(见**图的嵌入**(graph imbedding))

参考文献

[1] Harary, F, Graph theory, Addison-Wesley, 1969 (中译本 F 哈拉里, 图论, 上海科学技术出版社, 1980)

В Б Алексеев 撰

【补注】 关于可平面图和著名四色猜想 (four-colour conjecture) 的一个综述报导由 O Ore 给出 [A1] 所谓四色猜想是每一个可平面图可用四种颜色顶点着色 最近这个猜想已为 K. Appel 和 W Haken 证明, 见**四色问题** (four-colour problem) 他们的工作的一个好的摘要见 [A2]

参考文献

[A1] Ore, O, The four-color problem, Acad Press, 1967

[A2] Woodall, D R, and Wilson, R J, The Appel-Haken proof of the four-color theorem, in L W Beineke and R J Wilson (eds), Selected Topics in Graph Theory, Acad Press, 1978, Chapt 4

[A3] Wilson, R J, Introduction to graph theory, Longman, 1985

锺 集 译 李 乔 校

随机图 [graph, random, граф случайный]

研究各种图参数的频率特征的一个概率模型. 一个随机图通常理解为某类图的集 $\mathscr{G}=\{G\}$, 具有一给定的概率分布 $\mathscr{G}$ 的任一图 G 称为该随机图的一个实现 图的任何数值特征 (参数) (见**图的数值特征** (graph, numerical characteristics of a)) 可视为随机变量 随机图的概念在以下各种问题中是大有用处的, 建立某种随机变动的联络网络或其元件会出故障的逻辑网络模型, 在统计物理中考察位相变换的图像, 研究各种生物过程的问题, 以及 **Boole 函数** (Boolean function) 极小化的问题. 在一些情形下, 随机图的概念使得有可能利用概率论作为工具以求计数问题的渐近解

在随机图的典型的构造过程中, 所有实现可以通过对一个非随机图 (最常用的是完全图) 施行某个去掉边的过程, 通常假定去掉不同的边是独立事件, 以及去掉边 e 出现的概率为 $q(e)$ 这样构造出的随机图记为 $\mathscr{G}_G(\{q(e)\})$ 最令人感兴趣的是随机图 $\mathscr{G}_G(\{q(e)\})$ 的各种连通性数值特征的研究, 如连通分支数、直径、半径、连通度等, 它们可以解释为各个联络网络或逻辑网络的可靠性特征 在此情形下, $1-q(e)$ 表征一个联络 e 的可靠性, 而 $q(e)$ 是去掉 e 的概率

令 G 是有 n 个顶点的完全图, 并令 $q(e)\equiv q$, $0<q<1$ 随机图 $\mathscr{G}_G(\{q(e)\})$ 是连通的, 其直径和半径都等于 2, 且包含一个 Hamilton 圈 (见**图的回路** (graph circuit)), 其概率当 n 趋于无穷大时趋于极限 1 设 $q(e)$ 是顶点数 n 的函数, 则随机图 $\mathscr{G}_n(q)=\mathscr{G}_n(\{q(e)\})$ 连通的概率依赖于 $1-q(e)$ 到 $(\ln n)/n$ 的接近程度. 更精确地, 令

$$x_n = n(1-q(e)) - \ln n,$$

则 $\mathscr{G}_n(q)$ 趋于 1, 如果 $\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$, 它趋于 0、如果 $\lim_{n\to\infty} x_n=0$, 它趋于 $e^{-e^{-c}}$, 如果 $\lim_{n\to\infty} x_n=c$, 式中 c 为常数. 在上面的最后情形下, 随机图的边数渐近于 $(n\ln n)/2$

同一随机图 $\mathscr{G}_n(q)$ 亦可视为由非随机的 n 个顶点的空图, 通过任意地用边连接顶点, 使任一对顶点独立地被连接的概率为 $p=1-q$ 图 $\mathscr{G}_n(q)$ 的构成方式可以看成是动态的, 如果取 $q=e^{-t}$, $t>0$, t 被指定表示时间 那么情况是会这样的 在初始时刻 $t=0$, 有 n 个分离顶点 然后, 当 t 值增加, 出现了非平凡的连通分支和少数顶点, 这些连通分支都表成树或具有一个圈的连通图. 再次, 出现一"主"分支, 其顶点数渐近于 n (对于很大的 n) 这个过程随之以主分支的增长和小分支的减少而区别出来. 最后, 到某一时刻, 图变成连通的 随机图的这个渐近过程可以看作位相变换的图像的模型, 这里主分支扮演了液相的角色, 而稀薄相部分则由含有少数顶点的分支扮演.

存在着许多其他类型的随机图, 例如, 关于树 (随机树 (random tree))、关于一有限集映射到本身的单值映射 (随机映射 (random mappings)), 以及关于 n 维单位立方体的子图 (随机 Boole 函数 (random Boolean function)) 等

参考文献

[1] Moore, E F, and Shannon, C E, Reliable circuits using less reliable relays, Ⅰ, Ⅱ, *J Franklin Inst*, **1** (1960), 109 – 148

[2] Степанов, В Е, в кн, Вопросы кибернетики Тауды семинара по комбинаторной математике, М 1973, 164 – 85

[3] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т 1, М, 1974

[4] Сапоженко, А А, 《Проблемы кибернетики》, 1975, в 30, с 227 – 261

А А Сапоженко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Erdos, P and Renyi, A, On random graphs, 1, *Publ Math Debrecen*, **6** (1959), 290 – 297

[A2] Erdos, P and Renyi, A, On the evolution of random graphs, *Publ Math Inst Hung Acad Sci*, **5** (1965), 17 – 61

[A3] Bollobas, B (ed), Graph theory and combinatorics, Acad Press, 1984

【译注】

参考文献

[B1] Bollobas, B Random Graphs, Acad Press, 1985

锺 集 译 李 乔 校

图论 [graph theory, графов теория]

离散数学的一个分支，其特色在于对所研究的对象进行几何的探讨 图论的主要对象是图和它的推广 图论的最早的一些问题是解一些数学趣味难题（哥尼斯堡七桥问题，棋盘上后的放置问题，旅行售货员问题等等） 图论中的最早结果之一是走遍一个图的所有边而没有一边通过两次的可能性的判定准则，这个准则由 L Euler 于 1736 年在解哥尼斯堡七桥问题中得出 **四色问题**（four-colour problem）是在 19 世纪中叶明确提出的，虽然初时仅作为一个趣味性的难题，却导致了理论的和应用的图论研究 19 世纪中叶的某些研究包含了通过解一些实际问题而得出的图论上的重要结果．例如，G Kirchhoff 的关于一个电路中的电流和电压的完全方程组（[2]）实际上相当于通过具有骨架树的一个图表示电路，借此之助得出了线性独立的电路系．A Cayley（[3]）由计算饱和碳氢化合物的异构体的总数开始，得出了列举和描述具有某些特性的树的问题，并解决了其中的一些问题．在 20 世纪，涉及图论的许多问题开始产生，不仅出自于物理学、化学、电工程学、生物学、经济学、社会学等，而且也出自于数学本身——拓扑学、代数．概率论和数论 20 世纪初，图被用于表示某些数学对象，以及形式地表述不同的离散问题，除了“图”的名称之外，其他名称如地图、复形、图解、网络、迷宫等也被使用 随着 D Konig 的专著（[4]）于 1936 年的出版，术语“图”的使用超过了其他名称．这部专著概述了当时已经知道的事实．起初的一些结果出现于 19 世纪的 20 年代和 30 年代，如关于连通性、可平面性、和图的对称性等，为图论研究的新方向铺平道路．图论研究的范围在 19 世纪 40 年代后期至 50 年代初期显著地扩展，主要是**控制论**（cybernetics）和计算技术的发展的结果 对图论的兴趣增加了，同时图论所研究的问题的领域显著地拓广．电子计算机的使用使它可能解决那些牵涉到大量计算的实际问题，而这些问题以前是不能解的．为解图论的许多极值问题的方法发展起来了，这类问题之一是构造出通过一个网络（见**网络中的流**（flow in a network））的最大流 已经证明，对于某些图类（树、平面图等），某些问题的解比任意图的情形更为简单（如求具有某些性质的图的存在条件，建立图的同构等）

图论中的一些问题实质上更具组合性，而别的实质上却是几何性的．前者包括，例如，具有规定性质的图的计算和列举，以及构造这些图 许多类型的问题，如关于**图的回路**（graph circuit）和**图的嵌入**（graph imbedding），则是属于几何性的（拓扑性的） 某些问题关系到图的分类的方式，如依照它们的分拆性质的分类 关于具有某些性质的图的存在性的结果，可以用一组数作为某个已知图的各个顶点的度数的实现准则为例 一组整数 $0\leqslant d_1\leqslant\ \ \leqslant d_n$，其和为偶数，可以实现为一个无环和无多重边的图的顶点度数，当且仅当条件

$$\sum_{i=1}^{r} d_i \leqslant r(r-1)+\sum_{i=r+1}^{n}\min(r, d_i)$$

对于任何 $r(1\leqslant r\leqslant n-1)$ 都满足．

具有规定特性的图的计数问题，可以用求具有相同顶点数与（或）边数的不同构的图的总数的问题为例．具有 n 个顶点的不同构的树数由渐近公式

$$t_n = C\frac{\theta^n}{n^{\frac{5}{2}}}+O\left[\frac{\theta^n}{n^{7/2}}\right]$$

给出，式中 $C=0\ 534948$ ，$\theta=2\ 95576\cdot$ 具有 n 个顶点的无环和无多重边的不同构图数 g_n 由公式

$$g_n=\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}\left[1+\frac{2n(n-1)}{2n}+\right.$$

$$\left.+\frac{8(3n-7)n!}{3(n-3)!\cdot 2^{2n}}+O\left[\frac{n^5}{2^{5n/2}}\right]\right]$$

给出．

图论研究特殊类型的问题，以及一般性的问题．一类这样的特殊问题是图的连通度，和基于连通度的图的结构（见**图的连通度**（graph, connectivity of a））在电路或通讯网络的可靠性的分析中产生了求图的连接不同顶点的不相交链的个数的问题．这方面已得出了许多结果．例如，分离图中两不相邻顶点的最少顶点数，等于连接这两个顶点的两两无公共顶点的简单链的最大个数．已经找到确定图的连通度（最小点数或边数，如果去掉它们，就会破坏图的连通性）的判定准则和有效算法

图论的另一个研究方向是关于途径（边的序列）的研究，这种途径包含图的全部顶点或全部边（见**图的回路**（graph circuit）） 关于图的包含全部边的途径的存在性的一个简单准则是有用的· 在一个连通图中，包含全部边而且每边仅通过一次的圈存在，当且仅当图的全部顶点的度数都是偶数．若要走遍图的顶点集，则对于通过每个顶点仅一次的圈的存在性，只有一些充分条件．

图论所研究的一类独特问题是关于图的着色问题 这些问题牵涉到把顶点（边）集按某些条件作分拆，例如使相邻顶点（边）属于不同集（属于同一集的顶点或边着以相同颜色，见**图的着色**（graph colouring））已经证明，任一无环且最大度数为 σ 的图的边着色所需的最少颜色数是 $[3\sigma/2]$，而任一无环无多重

边的图的顶点着色只要 $\sigma+1$ 种颜色就够了.

还有其他类型的问题(见**复盖与填装**(covering and packing),**图的嵌入**(graph imbedding),**图的数值特征**(graph, numerical characteristics of a)),其中的一些问题是数学的其他分支提出来的 例如,拓扑学开始了一个图嵌入到不同曲面的研究. 作为一个例子,一个图可嵌入一个平面的充要条件(Понтрягин - Куратовский 准则(Pontryagin - Kuratowski criterion))如下所述 一个图是可平面的(见**可平面图**(graph, planar)),当且仅当它不含有从 5 顶点的完全图或每部分各有 3 顶点的完全二部图经边的细分所得到的子图. 代数开始了**图的自同构**(graph automorphism)的研究 特别地,已经证明任一有限群必同构于某个图的自同构群. 概率论激发了**随机图**(graph, random))的研究 对于"几乎所有"的图,许多性质已经研究得出,例如,几乎所有具有 n 个顶点的图都是连通的,它们的直径都是 2,而且有一个 Hamilton 圈(Hamilton cycle)(一个圈通过图的每个顶点一次).

图论中有解极值问题的特殊方法. 其中一个方法是根据最大流最小截定理,这个定理可陈述为,在一网络中从顶点 u 到顶点 v 的最大流等于分离顶点 u 和 v 的最小割的容量(见**网络中的流**(flow in a network)). 求最大流的一些有效算法已经得到.

算法问题在图论中很重要. 对于有限图,即具有有限个顶点和边的图,有关问题的解的算法通常是存在的,这些问题包括了极值问题在内. 有关有限图的许多问题可以通过对所有许可的不同情形的完全检查解决 不过,这样的方法仅限于解只有少数顶点和边的图的问题. 因而构造有效算法以求出精确解或近似解在图论中是极其重要的. 事实上,这样的算法对于某些问题已经构造出来,如图的可平面性的确立,树的同构的确定,或求最大流等.

图论的结果和方法被用于解决运输问题,求分派问题的最优解,在发展方案的编制和管理中认定薄弱环节,物资供应中的最优路径的确定,以及用于复杂的技术过程的建模,构造不同的离散机制,与规划和程序设计等等.

参考文献

[1] Euler, L, Commentationes Arithmetica Collectae, St Petersburg, 1766, 66 – 70

[2] Kirchhoff, G, Poggendorff Annalen, **72** (1847), 497 – 508

[3] Cayley, A, On the theory of the analytical forms called trees, in Collected mathematical Papers, Vol 3, Cambridge Univ Press, 1854, 242

[4] Konig, D, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Teubner, reprint, 1986

[5] Berge, C, The theory of graphs and their applications, Wiley, 1962 (译自法文)

[6] Зыков, А А, Теория конечных графов, [в 1], Новосиб, 1969

[7] Harary, F, Graph theory, Addison - Wesley, 1969

[8] Козырев, В П, в кн, Итоги науки и техники Теория вероятностей Метематическая статистика Теоретическая кибернетика, **10** (1972), 25 – 74

[9] Harary, F and Palmer, E, Graphical enumeration, Acad Press, 1973

В Б Алексеев, В П Козырев, А А Сапоженко 撰

【补注】 关于图论的术语亦见**图**(graph) 图论的一本历史记述见[A1] Понтрягин - Куратовский 准则通常称为 Куратовский 定理(Kyratowski theorem)

参考文献

[A1] Biggs, N L, Lloyd, E K and Wilson, R J, Graph theory, 1736 – 1936, Clarendon Press, 1976

[A2] Wilson, R J, Introduction to graph theory, Longman, 1985

[A3] Walther, H, Ten applications of graph theory, Reidel, 1984

钟集 译 李乔 校

图等价 [graphic equality, графическое равенство]

构造对象(constructive object)之间的一种关系,它表明这些对象是由同样的基本元素以同样的方式构造出来的 两个**字**(word)的图等价表明,这两个字是由同样的字母以同样的顺序构成的. 字的图等价可以更精确地陈述于下 a) 空字与且仅与本身图等价,b) 两个非空字 $P\xi$ 与 $Q\eta$(ξ 与 η 表示这两个字的最后一个字母)图等价,当且仅当 P 与 Q 图等价,且 ξ 与 η 是同一字母. 图等价通常以符号 $=$, $\overline{\underline{\text{⊥}}}$ 来表示

参考文献

[1] Марков, А А, Теория алгорифмов, М, 1954 (Тр матем ин-та АН СССР, т 42), 13 – 14

[2] Markov, A A and Nagorny, N M, The theory of algorithms, Kluwer Acad Publ, 1988 (译自俄文)

Н М Нагорный 撰 鲍丰 译 李廉 校

Grassmann 流形 [Grassmann manifold, Грассмана многообразие]

除环 k 上 n 维向量空间 V 的所有 m 维子空间的集合 $G_{n,m}(k)$, $m\leq n$ 当 k 是域时,可利用 Grassmann 坐标(见**外代数**(exterior algebra))将 $G_{n,m}(k)$ 嵌入 k 上的一个 $\binom{n}{m}-1$ 维射影空间中,使得其象是一紧代数簇. 在 Grassmann 流形的几何性质的研究中如下定义的 Schubert 簇(Schubert variety)$S_{a_0\ldots a_m}$ $(0\leq a_0<\cdots<a_m\leq n)$ 具有重要的作用. 设 $0=V_0\subset V_1\subset\cdots\subset V_n=V$ 是子空间的一个**旗**(flag),即一条使得 $\dim V_k=k$ 的子空间链,则

$$S_{a_0\ldots a_m}=\{W\in G_{n,m}(k)\ \dim(W\cap V_{a_r})\geq r,\ 0\leq r\leq m\}$$

Grassmann 流形中任一 ρ 维代数子簇等价于那些使得 $\sum_{i=0}^{m} a_i - \frac{m(m+1)}{2} = \rho$ 的簇 $S_{a_0 \cdots a_m}$ 的唯一的整组合（见[1]）

如果 k 是实数域 $\mathbf{R}$，复数域 $\mathbf{C}$ 或者四元数体 $\mathbf{H}$，那么 k 上的 Grassmann 流形均可看作一个紧解析流形（实的，如果 $k=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{H}$，复的，如果 $k=\mathbf{C}$）．这些流形由于分别是**典型群**（classical group）$O(m)$, $U(m)$ 和 $\mathrm{Sp}(m)$ 的分类空间这一事实而引人注意 更精确地说 当 c 分别等于 1,2,4 时，对任何维数 $\leqslant c(n+1)-2$ 的 **CW 复形**（CW-complex）X，以 X 为底的 k 上 m 维向量丛的同构类的集合与连续映射 $X \to G_{m+n,m}(k)$ 的同伦类的集合自然地一一对应（[2]） 而与群 $\mathrm{SO}(m)$ 和 $\mathrm{SU}(m)$ 相关的一个类似理论导致对 k^n 中 m 维定向空间的 Grassmann 流形 $G^0_{n,m}(k)$ ($k=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$) 的研究 特别地，上述这些流形与**示性类**（characteristic class）理论紧密相关

Grassmann 流形在拓扑学中的作用使得对其拓扑不变量的仔细研究成为必需 最早的研究方法是基于 Schubert 簇的，利用这个簇很容易构造 $G_{n,m}(k)$ ($k=\mathbf{R},\mathbf{C},\mathbf{H}$) 的胞腔分解．特别地，研究表明闭链 $S_{a_0 \cdots a_m}$ 构成同调群 $H_*(G_{n,m}(\mathbf{C}),\mathbf{Z})$，$H_*(G_{n,m}(\mathbf{R}), \mathbf{Z}_2)$，$H_*(G_{n,m}(\mathbf{H}),\mathbf{Z})$ 的一组基 Grassmann 流形的上同调代数和 Steenrod 幂在其上的作用也已得到了详尽的研究（[3]）

Grassmann 流形理论的另一方面是指它们是对应除环上的线性群的齐性空间，而且是不可约**对称空间**（symmetric space）的基本例子

从无限维向量空间的子空间也能构造与 Grassmann 流形相类似的流形．特别地，Banach 解析流形 G_B 在解析结构的形变理论中有重大作用，这里 G_B 的元素是 $\mathbf{C}$ 上 Banach 空间 B 的具有闭直补集的闭子空间

参考文献

[1] Hodge, W V D and Pedoe, D , Methods of algebraic geometry, 2, Cambridge Univ Press, 1952

[2] Husemoller, D , Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966

[3A] Borel, A , Sur la cohomogie des espaces fibres principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, *Ann of Math* , **57** (1953), 115−207

[3B] Borel, A , La cohomologie mod 2 de certains espaces homogènes, *Comm Math Helv* , **27** (1953), 165−197

[3C] Borel, A and Serre, J -P , Groupes de Lie et puissances reduites de Steenrod, *Amer J Math* , **75** (1953), 409−448

[4] Chern, S S , Complex manifolds without potential theory, Springer, 1979

А Л Онищик 撰

【补注】 选定 k^n 的一组基，对每一 $x \in G_{n,m}(k)$ 选取生成 x 的 m 个向量，那么这些向量构成一个 $(n \times m)$ 矩阵 A 现在将 x 映到射影空间 $\mathbf{P}^{N-1}(k)$ $(N=\binom{n}{m})$ 中其齐次坐标是 A 的所有 $(m \times m)$ 子矩阵的行列式值的那一点，则这点与上述的选取无关，且这样定义了一个嵌入 $G_{n,m}(k) \to \mathbf{P}^{N-1}(k)$，称之为 Plucker 嵌入（Plucker imbedding） 相应的坐标称为 **Plücker 坐标**（Plucker coordinates），也称为 Grassmann 坐标（Grassmann coordinates）（见**外代数**（exterior algebra）及前文）．作为 $\mathbf{P}^{N-1}(k)$ 的子簇，Grassmann 流形 $G_{n,m}(k)$ 由一些称为 Plucker 关系（Plucker relation）的二次关系所给出，见 [A1] 1.5 节．

有很多不同的符号在使用着，如 k^n 中 m 平面的 Grassmann 流形被记为 $G_{n,m}(k)$（如这里），$G_{m,n}(k)$，$G(m,n;k)$ 及 $G_m(k^n)$，最后的这种表示可推广到带向量空间 V 时的 $G_m(V)$

代数几何学中定义了 $\mathbf{Z}$ 上的射影概形 $G_{n,m}$ 使得其 k 点是 $G_{n,m}(k)$

参考文献

[A1] Griffiths, P A and Harris, J E , Principlex of algebraic geometry, 1−2, Wiley, 1978

[A2] Wells, R O jr , Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980

刘先仿 译

引力 [**gravitation** 或 gravity, **гравитация** 或 **тяготение**]

所有物理物体之间相互吸引的普适性质．引力的研究是 Newton 经典力学的奠基工作．例如，G Galilei 研究了地球表面处的准均匀引力场，表述了惯性定律（law of inertia）并发现了作用于一个物体的力可通过其加速度予以测量，J Kepler 和 I Newton 研究了具有大质量的一质点对质量小得很多的另一质点的引力效应 Kepler 的研究导致 Newton 对万有引力定律（law of universal gravitation）的发现

$$\mathbf{f}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}_{12}, \tag{1}$$

其中 $\mathbf{f}_{12}$ 是作用于具有质量为 m_1 的质点的引力，$\mathbf{r}_{12}$ 是从具有质量为 m_2 的质点向这个质点所作出的径向量，$r=|\mathbf{r}_{12}|$ 是两质点间的距离，γ 是引力常量（$\gamma \approx 6\,67259 \times 10^{-11} \mathrm{m}^3/\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2$），还有 $\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}$ 因而，引力向量的绝对值 f 等于 $\gamma m_1 m_2 / r^2$

当从点质量过渡到体积质量时，Newton 引力定律导致 **Newton 位势**（Newton potential）的理论，它用经典非相对论性物理学描述引力现象．这个理论的基本原理用公式（1）描述，表述成下列形式

$$\mathbf{f}_{12} = -m_1 \operatorname{grad} \varphi, \ \varphi = -\frac{\gamma m_2}{r},$$

其中 φ 是质量为 m_2 的质点所产生的引力场的位势，所以可以认为 $-\operatorname{grad} \varphi$ 是引力场的场强．因此，如果满足某些条件，可以得出以密度 $\rho(\mathbf{r})$ 分布的质量产生的场，由 **Poisson 方程**（Poisson equation）

$$\Delta\varphi = 4\pi\gamma\rho$$

确定．中心对称分布的外部质量的位势，与位于中心的质点，其质量等于所有质量之和的位势一致（Newton 定理（Newton theorem）） Newton 位势的场方程，它描述引力，假定超距作用原理（principle of action at a distance），引力作用以无穷速度传播，以及假定绝对空间和绝对时间的存在，然而，这仅是对现实的一个很好近似 天体力学，天体物理学中的许多问题，引力测量学，航空学，以及宇航学，都是以 Newton 位势的理论为基础的

在给定引力场中的物体具有加速度

$$\frac{dv}{dt} = -\operatorname{grad}\varphi,$$

即，给定引力场中的所有物体以相同的加速度运动

经典引力理论的 Poisson 方程并不解释引力的内部结构机理．关于引力的本质有许多非相对论性假设 第一个试图解释为什么物体降落地面的原因，可远追溯到古代（Plato，Aristoteles），继续探寻的有 Leonardo da Vinci，N Copernicus，G Roberval，和 R. Hooke 在 Newton 时代之后的下列人员研究了引力的本质 I Kant（两个物质力——吸引和排斥的理论），R Bošcović（他试图将所有相互作用力归结为单一普适力），M B Ломоносов 和 G L Lesage（他们假设存在特殊"引力物质"）．关于引力的本质所提出的假设，包括"以太激波"假设，"动理学"假设，以及"波的"，"激波的"，"流体力学的"等等假设（[8]） 所有这些理论现在仅具有历史意义，问题的近代解涉及**量子场论**（quantum field theory）的构造——对近代物理学所提出来的一个问题，但尚未解决．

Newton 的引力理论．尽管与试验结果很好地一致，但具有下列缺点 Newton 位势的场与短程作用原理并不一致，即，与引力扰动的传播速率为有限这个事实不一致，它不像，例如，电磁场那样，不是 Lorentz 不变的（见 **Lorentz 变换**（Lorentz transformation）)，这里至少有两个天文效应（水星近日点的移动和太阳邻近的光线偏离），对此它不能提供定量解释．这些和某些其他考虑，导致 Einstein 引力理论（Einstein gravitational theory）的产生，一个广义相对论性理论，它历史上是从等效原理（equivalence principle）（区分引力场与非惯性坐标系的不可能性）和广义协方差原理（principle of general covariance）（在坐标系的连续可微非退化变换群下，空间的几何学是不变的）导出的．然而，近代工作表明，对于构造这种理论，需要更加复杂的公理系统．

广义相对论是最主要的引力理论．数学上这个理论是基于下列假设．物理时空（space-time）的几何学是四维的．它是具有度规正负标数为（−−−+）的空间 V_4 的 **Riemann 几何学**（Riemannian geometry） 没有（作为四维向量的）引力，而试验物体在引力场中的运动方程是由 V_4 中测地线确定的 对具有非零静质量的试验物，这些测地线是非各向同性曲线，而对光子类型的粒子则是各向同性的．运动方程是 Newton 惯性定律的四维协变类似物，而对引力的 Newton 第二定律没有任何协变类似物．度规张量的分量 $g_{\alpha\beta}(x)$ 起引力场"位势"的部分的作用，对此，引力场的方程假设为

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$$

这里 $R_{\alpha\beta}$ 是缩并 **Riemann 张量**（Riemann tensor）的分量，R 是其线性不变量而 $T_{\alpha\beta}$ 是能量动量张量的分量 广义相对论中，与所有其他物理理论不同，试验物体的运动方程是由场方程推出的．

广义相对论理论很精确地预测，水星近日点的移动效应，太阳邻近光线偏离效应，以及还有宇宙学红移效应 当新试验数据变得可资用时，可以有效地着手处理各种物理问题．尤其是，引力波的问题（[13]，[14]）大部分可予以阐明，构造量子引力理论的试图正在进行中，各种天文对象可以用广义相对论描述

其他近代引力理论现今也曾经提出过 它们以更加普遍的形式体系（仿射联络空间，等等）为基础 还有平直空间的相对论性引力理论，类似于经典电动力学．

参考文献

[1] Сретенский, Л Н, Теория ньютоновского потенциала М - Л, 1946

[2] Дубошин, Г Н, Теория притяжения, М, 1961

[3] Эйнштейн, А Собр научных трудов, т 1－2, М, 1966

[4] Фок, В А, Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд, М, 1961（英译本 Fock, V A, The theory of space, time and gravitation, Macmillan, 1954）

[5] Weber, J, General relativity and gravitational waves, Interscience, 1961

[6] Synge, J L, Relativity the general theory, North-Holland & Interscience, 1960

[7] Петров, А З, Новые методы в общей теории относительности, М, 1966

[8] Кагальникова, И И, История развития нерелятивистских представлений о природе гравитации, 《Уч зап Ярославского пед ин-та Кафедра астрономии и теоретической физики》, 1963, в 56

[9] Зельдович, Я Б, Новиков, И Д, Релятивистская астрофизика, М, 1967

[10] Петров, А З, Общая теория относительности, в сб Развитие физики В СССР, кн 1, М, 1967

[11] Зельдович, Я Б, Новиков, И Д, Теория тяготения и эволюция звезд, М, 1971 (英译本 Zeldovich, Ya B, Novikov, I D, Relativistic astrophysics, 1, Stars and relativity, Chicago, 1971)
[12] Зельдович, Я Б, Новиков, И Д, Строение и эволюция Вселенной, М, 1975 (英译本 Zeldovich, Ya, B, Novikov, I D, Relativistic astrophysics, 2, Structure and evolution of the universe, Chicago, 1983)
[13] Isaacson, R A, *Phys Rev*, **166** (1968), 1263
[14] Isaacson, R A, *Phys Rev*, **166** (1968), 1272

【补注】 A 3 Петров 撰

参考文献

[A1] McMillan, W D, The theory of the potential, McGraw-Hill, 1930
[A2] Jammer, M, Concepts of force, Harvard Univ Press, 1957 尤其是第 10 章
[A3] Cohen, I B, The "principia", universal gravitation, and the "Newtonian style" in relation to the Newtonian revolution in science, in Z Bechler (ed) Contemporary Newtonian research, Reidel, 1982, 21–108
[A4] Westfall, R S, Force in Newtonian Physics, Macdonald, 1971
[A5] Hulse, R A and Taylor, J H, *Astrophysics J Lett*, **195** (1975), L51
[A6] Shapiro, S L and Teukolsky, S A, Black holes, white dwarfs and neutron stars, Wiley, 1983, p 479
[A7] DeWitt, C and DeWitt, B (eds), Relativity, groups and topology, Gordon & Breach, 1964
[A8] Weyl, H, Space-Time-Matter, Dover, reprint, 1950

(译自德文) 徐锡申 译

引力理论 [gravitation, theory of, тяготения теория]

理论物理和数学物理中场论的广泛应用数学研究方法的一个分支．引力论的传统主题是研究在物质对象的运动和结构上显示出来的物质对象间的引力的相互作用（见**引力**(gravitation)） 引力论的课题除分析引力场本身外，还包括了更普遍意义上的**时空**(space-time)结构，引力的量子化和它与基本粒子理论的关系的问题 相应地，引力论中应用的数学工具也由二阶常微分方程和偏微分方程扩展至微分（伪 Riemann)几何、多复变函数和复流形理论、拓扑学、群论以及旋量和纽线演算 越来越频繁地运用计算机进行计算(包括符号运算)

引力论的基础是从16 世纪末直至18 世纪初在 G Galilei 和 I Newton 的工作中奠定的 Newton 经典引力论中引力场势 φ 的方程具有 **Poisson 方程**(Poisson equation)的形式

$$\Delta\varphi = 4\pi\gamma\rho$$

这里，γ 是 Newton 引力常数，ρ 是场源的质量密度 场强定义为 $\mathbf{g} = -\nabla\varphi$，而场作用于给定试验点质量 m 的力 $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$（试验质量本身不扰动场） 于是，Newton 第二定律给出试验质量的运动方程．在具体提法中，Newton 引力论应用于一系列问题，例如弹道力学和天体力学中的问题．直至今天，Newton 引力论仍足以精确地描绘几乎全部天体力学．作为一个势理论，Newton 引力论是（后来）建立静电学理论的样板，而在 Maxwell 电动力学中提出的物理场概念又转过来影响了 Einstein 相对引力论的产生．

A Einstein 通过引入相互作用（包括引力相互作用）传播速度有限性的原理和等价原理开始了新引力论的创建 1907 年他在这方向迈出了第一步，而在与 M. Grossmann (1913) 共同发表的文章中确定了建立作为将物理几何学化的相对引力论（**广义相对论**(relativity theory)) 的方法．非 Euclid 几何学应是现实的这一想法是 C F Gauss 和 Н И. Лобачевский 提出的 它也曾被 B Riemann 和 W Clifford 以相当概括的形式所阐述，然而是 Einstein 首先将引力与不是三维空间的而是四维 - 时空的几何学联系起来，这起了决定性作用．引力场方程的最终形式是由 D Hilbert (1915) 和 Einstein (1916，在此之前他仅对于真空中的场给出了正确描述）给出的

相对引力论中空间 - 时间流形的几何特性还同时起着描述引力场的变量的作用．在量度空间 - 时间的平方线元 $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ 中，不定度量张量（这里为符号差 $+---$）起了多组元引力势的作用．光锥方程 $ds^2 = 0$ 被用于广义相对论因果律原理的公式化 确定平行位移和共变微分法（$g_{\mu\nu\ \alpha} = 0$）的关联系数起着场强的作用 Riemann 曲率张量（见 **Riemann 张量**(Riemann tensor)) 能表示成这些场强微商的组合，亦即它表征该场的非均匀性．**Ricci 张量**(Ricci tensor) $R_{\mu\nu}$（短缩曲率张量，经典势论中的"场强散度"）能代数地表示成引力场源的，亦即物质和场（除引力场本身外）的能量 - 动量（应力 - 能量）张量 $T_{\mu\nu}$，由此给出 Einstein 方程 (Einstein equations)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi\gamma}{c^4} T_{\mu\nu} \qquad (1)$$

这些方程的左边按照度量张量及其一次微商是非线性的，但在弱引力场的情况下，非线性项可被分离成一单个张量，将它移至右边后，就能与源项合并（因此引力场非线性的处理如同其自相互作用的表达）．外引力场中试验点质量的运动方程可写成短程线方程

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0, \qquad (2)$$

且不包含粒子质量(即在所有其他等同条件下,不同质量的试验点粒子同样地运动) 这表达了等价原理.这里相应于惯性质量与引力质量等价(事实上,这原理曾以 1 10^{12} 的精度由实验得到验证,这工作是由R Eótvos, R Dicke 做的,所述精度由 В Б. Брагинский 获得) 在按照 Einstein 第一篇论文而知名的另一种提法是,这原理阐明了引力与加速度局部等价 在一个占一小空间的没有旋转的自由落体实验室中,在一短时期内,不管进行什么样的物理实验,都不能觉察到引力的存在 方程(2)是对非试验物体系统问题的一阶近似.在 1938-1939 年间,Einstein, L Infeld, B. Hoffmann 和 Ф А Фок 同时发现了获得高阶近似(广义相对论中的 n 体问题)的方法 其他(非引力的)场的方程,例如电磁场的方程,是由平面时空中相应场的通常理论在广义协方差条件下得到的.所有的场方程,包括(1)和运动方程(2)都是在相应给出 Lagrange 函数时由最小作用原理得出.在广义理论中,需要验证方程组的自洽性,但常常由于它们的复杂性而将某些或全部非引力场假设为试验场(对它们求解一个具有外引力场的非自洽问题).

由于 Einstein 方程的非线性,发展了一些精确求解该方程的特殊方法(近似解不能反映问题的特性).选择合适的基(四元组)特别重要.**Cartan 外形式法**(Cartan method of exterior forms)经常用到.在十分有效的 Newman - Penrose 形式体系中(见([3])),采用复零(似光)四元组.作为 Einstein 方程的应用,已发展了散射理论逆问题的 Bäcklund 变换型的新方法(孤立子理论,见**孤立子**(soliton)) 现已有了大量 Einstein 方程的精确解(见([3])) 其中第一个是 1916年 Schwarzschild 的解,

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2\gamma m}{c^2 r}\right] dt^2 - \left[1 - \frac{2\gamma m}{c^2 r}\right]^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) \qquad (3)$$

(在常用的曲线坐标系中),它具有球对称点质量引力场的意义.从物理观点来看,Einstein 方程的解可分解成局域源外部的真空场,物质分布的引力场和其他场,Einstein - Maxwell 场,引力波场,宇宙论解等.现已发展了对伪 Riemann 空间的各种分类方法,它们有助于构造具有所需性质的 Einstein 方程的解和解释已知的解 这些分类是 1)按 Weyl 保角曲率张量(三个 Петров 型——Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ和二个退化子型 D 和 N 以及平凡情况——型 0,它对应于保形平面空间,通常取 N 和Ⅲ对应于引力波场)性质的代数分类,2)按 Ricci 张量(或能量 - 动量张量)性质的代数分类,和 3)按运动的群分类(等度量 不改变度量、利用 Lie 位移将空间 - 时间对本身的映射) 在三维空间中,假定它是均匀的,最后一个分类导至 9 个 Bianchi 型,它们在均匀宇宙模型理论中起重要作用 为了获得,特别是为了研究 Einstein 方程的解,越来越经常利用计算机;符号计算被成功地应用于这一领域.据报道,在不同坐标系中写出的度量的等同化问题已借助计算机得到解决 为了比较由 Einstein 引力论及其各种修正和推广得到的论断,曾试图发展一种描述度量张量和引力效应的现象论方法("参数化了的 Newton 以后的引力论").

在分析 Einstein 方程具体解时,起重要作用的有给定流形图集的完全性问题(由此有延拓方法的发展),奇点的寻找和研究(由于度量不确定性,它们的定义有原则上的困难),和岛形系统情况中解的渐近的(包括拓扑学的)性质的阐明.Einstein 引力论问题导至形成伪 Riemann 几何中一个重要的新概念——地平线的概念.虽然地平线(区分为事件地平线,粒子地平线,Cauchy 地平线,因果律地平线和表观地平线)不是一个奇点集,它在空间 - 时间中可不变地区分 这样,事件地平线在一个渐近平面的时空中定义为事件集的亦即 4 维点的极限,由这些点可走向无穷远,而同时仍留在光锥内 假如有事件地平线存在,则在空间 - 时间中由它包围的区域(从这里不穿越光锥,不可能走向无穷)称为黑洞(black hole),其最简单例子由推广 Schwarzschild 度量(3)所描绘.黑洞内有奇点(特别是,当 $r \to 0$ 时,(3)的 Riemann 曲率的若干不变量发散(趋向无穷)).此外,Schwarzschild 奇点是似空间的($ds^2 < 0$),而对另外的黑洞(一般情况是 Kerr - Newman 度量([3])),它也可能是似时间的($ds^2 > 0$) 广义相对论在天体物理学的应用表明,由于巨星的引力坍缩,黑洞能够形成,在已观察到的天体中认为有一些起着黑洞的作用,这些天体由在其引力很强的外区中发生的过程而被发现 一般认为,在所谓的能量条件(事实上是关于物质能量 - 动量张量的自然条件)下,物质系统进化时,奇异状态在过去和将来都是不可避免的(R Penrose, S Hawking 等的奇异性定理).然而,要求奇异性被地平线所隐藏("宇宙考察船"假设) 量子引力理论(在引力场量子化和在非平面经典几何背景下的其他场量子化两种意义上)的基础已得到发展.结果之一是,黑洞造成的粒子(光子等)生成并导至它们"汽化"的 Hawking 效应 在宇宙膨胀的早期阶段,引力的量子效应是重要的.在描述引力量子理论时,应用场论标准形式体系,及 Feynman 路程积分等,与此有关,发展了 Euclid 场论(在符号意义上),研究了 Einstein 方程的快速解和发展了 Penrose 纽线演算,它在结果上接近具有自对偶或反自对偶 Weyl 保形曲率张量(E Newman 的 H 空间)的复化

空间理论．引力论的其他推广包括 有曲率和挠率的 Einstein-Cartan 理论；仿射引力论，具有二次曲率 Lagrange的引力论，双度量引力论等（见（[6]））

与 Newton 理论相比，Einstein 引力论导至新的效应，然而这些效应却难于用实验发现 除此而外，这两个理论是互相一致的．至今，下列效应已得到证实 引力红移，光线偏转，行星轨道近日点的移动，宇宙的非定态性（膨胀） 引力辐射效应已被间接证明（根据一绕共同质心旋转的两体系统的能量损失）．尚未发现一个与 Einstein 引力论相矛盾的事实 处于今日实验研究可能性边缘的是 接收来自宇宙源的引力波和旋转体的引力场中的带动效应（陀螺仪轴的岁差及其他）．

参考文献

[1] Эйнштейн, A , Собрание научных трудов, т 1－4, M , 1965 －1967

[2] Misner, C W , Thorne, K S and Wheeler, J A , Gravitation, Freeman, 1973

[3] Kramer, D , Stephani, H , MacCallum, M and Herlt, E , Exact solutions of Einstein's field equations, Cambridge Univ Press, 1980

[4] Петров, A З , Новые методы в общей теории относительности, M. , 1966（英译本 Petrov, A Z , Einstein spaces, Pergamon, 1969）

[5] Hawking, S W and Ellis, G F R , The large-scale structure of space-time, Cambridge Univ Press, 1973

[6] Held, A (ed), General relativity and gravitation One hundred years after the birth of Albert Einstein, 1－2, Plenum, 1980

H B Мицкевич 撰

【补注】 正如上面所提到的，**孤立子**（soliton）理论（完全可积系统理论）的许多特性也出现于 Einstein 方程的理论中 他们包括 Bäcklund 变换（[A1]），修整变换（dressing transformations）（在这方面常常称为 Kinnersley-Chitre 变换，Hauser-Ernst 变换，Hoenselaers-Kinnersley-Xanthopoulos 变换（HKX 变换））（[A2]），叠加原理（[A3]），（[A4]），适当的 Riemann-Hilbert 问题的应用（[A2]），（[A5]），系谱的出现和基于对称性思想的进一步考虑（[A6]），（[A7]）．

参考文献

[A1] Kramer, D and Neugebauer, G , Bäcklund transformations in general relativity, Lect notes in physics, 205, Springer, 1984, 1－25

[A2] Hauser, I , On the homogeneous Hilbert problem for effecting Kinnersley-Chitre transformations, Lect notes in physics, 205, Springer, 1984, 128－175

[A3] Xanthopoulos, B C , Superposition of solutions in general relativity, Lect notes in physics, 239, Springer, 1985, 109－117

[A4] Chinea, F J , Vector Bäcklund transformations and associated superposition principle, Lect notes in physics, 205, Springer, 1984, 55－67

[A5] Ernst, F J , The homogeneous Hilbert problem practical application, Lect notes in physics, 205, Springer, 1984, 176－185

[A6] Xanthopoulos, B C , Symmetries and solutions of the Einstein equations, Lect notes in physics, 239, Springer, 1985, 77－108

[A7] Schmidt, B G , The Geroch group is a Banach Lie group, Lect notes in physics, 205, Springer, 1984, 113 － 127

唐福林 译

最大公因数 [**greatest common divisor, наибольший общий делитель**]，亦最大公约数

一组整数（或特别地，一组自然数 $a_1, \ldots, a_n$）的公共因数中的最大者 一组不全为零的整数一定存在最大公因数 $a_1, \ldots, a_n$ 的最大公因数通常用 $(a_1, \cdots, a_n)$ 表示．

最大公因数的性质是·

1) $a_1, \ldots, a_n$ 的最大公因数可被它们的任一公因数整除．

2) $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) = ((a_1, \ldots, a_n), a_{n+1})$

3) 若 $a_1, \ldots, a_n$ 被表为

$$a_1 = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}, \quad \ldots, \quad a_n = p_1^{\nu_1} \cdots p_s^{\nu_s},$$

其中 $p_1, \cdots, p_s$ 是不同的素数，$\alpha_i \geq 0, \ldots, \nu_i \geq 0$, $i=1, \cdots, s$，以及 $\delta_i = \min\{\alpha_i, \ldots, \nu_i\}$，则

$$(a_1, \ldots, a_n) = p_1^{\delta_1} \cdots p_s^{\delta_s}.$$

两个自然数的最大公因数可用 **Euclid 算法**（Euclidean algorithm）求出 为求得最大公因数所必须作的运算的次数，不超过这两个数中的小的一个的十进位表示的位数的五倍

整环（integral domain）中的一组元素的最大公因元定义为这些元素的这样一个公因元，它可以被其他的任一公因元整除 因而，给定域上的两个多项式的最大公因式是这样一个公因式，它可被这两个多项式的任一其它公因式所整除 如果一个整环中的两个元素的最大公因元存在，那么它唯一确定到乘以一个可逆元素．一个环中的两个理想 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 的最大公因元是由集合 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 的并集生成的理想 $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$（见**唯一分解环**（factorial ring））

参考文献

[1] Виноградов, И M , Основы теории чисел, 9 изд M , 1981（中译本 维诺格拉陀夫，数论基础，第五版，商务印书馆，1952）

[2] Бухштаб, A A , Теория чисел, 2 изд , M , 1966.

[3] Маркушевич A И , Деление с остатком в арифметике и алгебре, M － Л , 1949

[4] Faure, R , Kaufman, A and Denis-Papin, M , Mathé-

matique nouvelle, Dunod, 1964

[5] Lang, S, Algebra, Addison-Wesley, 1974

[6] Ireland, K and Rosen, M, A classical introduction to modern number theory, Springer, 1982

А А Бухштаб, В И Нечаев 撰

【补注】 更一般地，若 R 是整环，集合 $S\subset R$ 且不是所有的 $x\in S$ 均为零，那么 S 的最大公因元 d 由这样的事实来刻画 所有 $x\in S$ 的任一公因元一定整除 d 如果对任一不是全由零元素组成的集合 $S\subset R$，这样的 d 一定存在，那么 R 就称为是主理想整环(principal ideal domain)(见**主理想环**(principal ideal ring))．这种整环的例子有有理整数环 **Z** 或多项式环 $R[X]$，其中 R 是一个**域**(field)(例如，**C**, **R** 或 **Q**)．已经知道，主理想整环也是唯一分解整环(unique factorization domain)

参考文献

[A1] Waerden, B L van der, Algebra, 1, Springer 1967 (中译本 B L 范德瓦尔登，代数学，科学出版社，1964)

潘承彪 译 戚鸣皋 校

Green 等价关系 [Green equivalence relations, Грина отношения эквивалентности]，半群上的

如下定义的二元关系 $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{H}$, $x\mathscr{L}y$ 意味着 x 与 y 生成恒等左**主理想**(principal ideal)，$x\mathscr{R}y$ 和 $x\mathscr{J}y$ 的意义类似，只需把“左”分别换成“右”和“双边”，$\mathscr{D}=\mathscr{L}\vee\mathscr{R}$（在等价关系格内的并），$\mathscr{H}=\mathscr{L}\cap\mathscr{R}$ 关系 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{R}$ 在二元关系的乘法意义下是交换的，所以 $\mathscr{D}$ 与它们的乘积一致．关系 $\mathscr{L}$ 是一个右同余(right congruence)，即从右边稳定 若 $a\mathscr{L}b$，则对一切 c 来说，$ac\mathscr{L}bc$，关系 $\mathscr{R}$ 是一个左同余(left congruence)(从左边稳定)．一个 $\mathscr{L}$ 类和一个 $\mathscr{R}$ 类当且仅当它们包含在同一 $\mathscr{D}$ 类时才相交．在同一个 $\mathscr{R}$ 类内所有 $\mathscr{H}$ 类都是对等的．如果一个 $\mathscr{D}$ 类 D 含有一个**正则元**(regular element)，则 D 中一切元素都是正则的 并且 D 在包含某一个元素的同时，也包含它的所有逆元素，这样一个 $\mathscr{D}$ 类称为正则的(regular)．在一个正则 $\mathscr{D}$ 类里，每一个 $\mathscr{L}$ 类和每一个 $\mathscr{R}$ 类都含有一个幂等元．令 H 是任意一个 $\mathscr{H}$ 类；那么或者 H 是一个群(当且仅当 H 是所给的半群的一个极大子群时才是这种情况)，或者 $H\cap H^2=\emptyset$ 同一 $\mathscr{D}$ 类的所有群 $\mathscr{H}$ 类都是同构的群 在一般情况下，$\mathscr{D}\neq\mathscr{J}$，然而，例如，当这个半群 S 的每一个元素的某个幂都属于一个子群时（特别，当 S 是一个**周期半群**(periodic semi-group)时)，则 $\mathscr{D}=\mathscr{J}$ 左主理想的包含关系自然地在 $\mathscr{L}$ 类的集合上定义了一个偏序关系，类似的考虑对于 $\mathscr{R}$ 类和 $\mathscr{J}$ 类来说也成立．这些关系是由 J Green 引入的([1])．

参考文献

[1] Green, J, On the structure of semigroups, *Ann of Math*, **54** (1951), 163-172

[2] Ляпин, Е С, Полугруппы, М, 1960 (英译本 Lyapin, E S, Semigroups, Amer Math Soc, 1974)

[3] Clifford, A H and Preston, G B, The algebraic theory of semigroups, 1-2, Amer Math Soc, 1961-1967

[4] The algebraic theory of automata, languages and semigroups, Moscow, 1975 (俄文，译自英文)

[5] Hofmann, K H and Mostert, P, Elemeuts of compact semi-groups, C E Merrill, Columbus, Ohio, 1966

Л Н Шеврин 撰 郝钢新 译

Green 公式 [Green formulas, Грина формулы]

多变量函数积分学的一些公式，它们把在 n 维 Euclid 空间 E^n 中的区域 D 上的 n 重积分的值同沿着这个区域的逐段光滑的边界 $\partial D=\Gamma$ 的 $(n-1)$ 重积分的值联系起来．对在 $\bar{D}=D+\Gamma$ 内连续、在 D 内连续可微的一个向量场的散度的积分进行分部积分，便得到 Green 公式．

在最简单的 Green 公式

$$\int_\Gamma [Pdx+Qdy]=\iint_D\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy \quad (1)$$

中，沿周线 Γ 的曲线积分被表示为在区域 $D\subset E^2$ 上的二重积分．这里，区域 D 按自然方式定向，而沿边界 Γ 所取的诱导方向呈反时针绕行．公式(1)具有简单的流体动力学意义 在平面上以速度 $\mathbf{V}=(Q,-P)$ 流动着的流体通过边界 Γ 的流量，等于在 D 上分布的源和汇的强度(散度) $\operatorname{div}\mathbf{v}=(\partial Q/\partial x)-(\partial P/\partial y)$ 在 D 上的积分．在这种意义下，Green 公式(1)类似于 Остроградский 公式(Ostrogradski formula)(亦见 **Stokes 公式**(Stokes formula))

有时把公式(1)归功于 C F Gauss 和 B Riemann，但是它通常采用的名称都不符合历史事实，事实上，早在 18 世纪，在 L Euler 等人的分析学研究中就曾出现这个公式

下列**位势论**(potential theory)中的两个公式必须归功于 G Green([1])

$$\int_D\left[v\Delta v+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial x^i}\right]dx=\int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial N}ds, \quad (2)$$

—— Green 预备公式(preparatory Green formula)，和

$$\int_D[u\Delta v-v\Delta u]dx=\int_\Gamma\left[u\frac{\partial v}{\partial N}-v\frac{\partial u}{\partial N}\right]ds \quad (3)$$

这里，D 是 E^3 中的一个区域，$x=(x^1,x^2,x^3)$，$dx=dx^1dx^2dx^3$ 是 D 的体积元素，ds 是 Γ 的面积元素，$N=(N_1,N_2,N_3)$ 是 Γ 的单位外(余)法线，

$$\frac{\partial}{\partial N}=\sum_{i=1}^{3}N_i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

是(余)向量 N 方向上的微分算子，而

$$\Delta=\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right]^2$$

是 **Laplace 算子** (Laplace operator)

在下述情况下公式(2)和(3)也成立 D 是 E^n 中的一个区域，$x=(x^1,\cdots,x^n)$，$dx=dx^1\cdots dx^n$ 是 D 的体积元素，ds 是 Γ 的 $(n-1)$ 维体积元素，而

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right]^2$$

是 n 个自变量的 Laplace 算子

Green 公式(2)和(3)对带有足够光滑的系数的线性偏微分算子的推广，具有下列形式

1) 如果

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[a^{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x^j}\right]+\sum_{i=1}^{n}b^i(x)\frac{\partial u}{\partial x^i}+c(x)u,$$

$$L^*v=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[a^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^j}\right]-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}[b^i(x)v]+$$

$$+c(x)v$$

是(实)伴随二阶微分算子，$a^{ij}=a^{ji}$，则

$$\int_D\left[vLu+\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial x^j}-\left[\sum_{i=1}^{n}b^i\frac{\partial u}{\partial x^i}+cu\right]v\right]dx=$$

$$=\int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial M}ds,$$

$$\int_D[uL^*v-vLu]dx=\int_\Gamma\left[u\frac{\partial v}{\partial M}-v\frac{\partial u}{\partial M}-Buv\right]ds,$$

其中 $N=(N_1,\cdots,N_n)$ 是 Γ 的外法线的单位(余)向量

$$B=\sum_{i=1}^{n}N_ib^i,\quad\frac{\partial}{\partial M}=\sum_{i,j=1}a^{ij}N_j\frac{\partial}{\partial x^i}$$

是算子 L 的所谓余法线

$$M=\left[\sum_{j=1}^{n}a^{1j}N_j,\cdots,\sum_{j=1}^{n}a^{nj}N_j\right]$$

方向上的微分算子.

2) 如果

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x)\frac{\partial^2u}{\partial x^i\partial x^j}+\sum_{i=1}^{n}b^i(x)\frac{\partial u}{\partial x^i}+c(x)u,$$

$$L^*v=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}[a^{ij}(x)v]-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}[b^i(x)v]+$$

$$+c(x)v,$$

则

$$\int_D\left[vLu+\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial x^j}-\left[\sum_{i=1}^{n}b^i\frac{\partial u}{\partial x^i}+cu\right]v\right]=$$

$$=\int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial M}ds,$$

$$\int_D[uL^*v-vLu]dx=\int_\Gamma\left[u\frac{\partial v}{\partial M}-v\frac{\partial v}{\partial M}-Cuv\right]ds,$$

其中 M 是 L 的余法线，而

$$C=\sum_{i=1}^{n}\left[b^i-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a^{ij}}{\partial x^j}\right]N_i$$

3) 如果

$$Lu=\sum_{p=1}^{m}\sum_{|\alpha|=p}a^\alpha(x)D_\alpha u+a(x)u,$$

$$L^*v=\sum_{p=1}^{m}(-1)^pD_\alpha[a^\alpha(x)v]+a(x)v$$

是 m 阶(实)伴随微分算子，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)$ 是长度为 $|\alpha|=p$ 的整数多重指标，$1\leqslant\alpha_i\leqslant n$，$D_\alpha=\partial_{\alpha_1}\cdots\partial_{\alpha_p}$，而 $\partial_i=\partial/\partial x^i$，则

$$\int_D[uL^*v-vLu]dx=\tag{4}$$

$$=\sum_{p=1}^{m}\sum_{|\alpha|=p}\sum_{k=1}^{p}\int_\Gamma(-1)^k[\partial_{\alpha_1}\cdots\partial_{\alpha_{k-1}}(a^\alpha v)]\times$$

$$\times N_{\alpha_k}[\partial_{\alpha_{k+1}}\cdots\partial_{\alpha_p}u]ds$$

这里边界积分可以写成双线性和

$$\sum_{i,j}\int_\Gamma B^{ij}(S_iu)(T_jv)ds,$$

其中 S_i，T_j 是某些阶数为 s_i，t_j $(0\leqslant s_i+t_j\leqslant m-1)$ 的线性微分算子

Green 公式在数学分析中，特别是二阶或高阶微分算子(常微分算子和偏微分算子)边值问题理论中，起着重要作用. 对于在 $\bar{D}$ 中足够光滑的函数 u，v，从 Green 公式(2)和(4)可以得到在边值问题解的研究、边值问题的分类、求显式解等方面很有用的各种关系式. 例如，当 $v(x)\equiv1$ 时，从(2)得到的在 D 内调和的函数 $u(x)$ 满足 **Gauss 定理** (Gauss theorem)

$$\int_{\partial G}\frac{\partial u}{\partial N}ds=0$$

对于在 $\bar{D}$ 内足够光滑的函数 u，w，以及函数

$$v(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n-2}|x-y|^{2-n}+w(x),\text{ 如果 }n\geqslant3,\\-\ln|x-y|+w(x),\text{ 如果 }n=2,\end{cases}$$

当 $x=y$ 时，$v(x)$ 与 Laplace 算子的基本解具有同样的奇异性，下列 Green 公式成立·

$$\int_D \left[u\Delta w + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial v}{\partial x^i} \right] dx = cu(y) + + \int_D u \frac{\partial v}{\partial N} ds, \quad (5)$$

$$\int_D [u\Delta w - v\Delta u] dx = cu(y) + \int_D \left[u\frac{\partial v}{\partial N} - v\frac{\partial u}{\partial N} \right] ds, \quad (6)$$

这里，

$$c = \begin{cases} \omega_n, & 如果\ y \in D, \\ \frac{1}{2}\omega_n, & 如果\ y \in \Gamma, \\ 0, & 如果\ y \notin \bar{D}, \end{cases}$$

其中 $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ 是 E^n 中的 $(n-1)$ 维单位球的面积．这里，对于 $y \in \Gamma$，假设边界 Γ 在 y 的某一邻域内具有连续的切平面

公式(5)和(6)可以用来得到**位势论**(potential theory)中基本边值问题的解的积分表示式(见**调和函数**(harmonic function)，**Green 函数**(Green function)，**Poisson 公式**(Poisson formula))例如，可以利用它们求得 Green 公式(Green formula)即 Green 积分(Green integral)

$$u(y) = \frac{1}{c}\int_\Gamma \left[v(x)\frac{\partial u}{\partial N} - u(x)\frac{\partial v}{\partial N} \right] ds, \quad (7)$$

其中函数 $u(x)$ 在 D 中是调和的．这个积分在**调和函数**(harmonic function)论中起着重要的作用．

与公式(5)和(6)类似的、给出 Cauchy 问题或混合问题的解的积分表示式的一些公式，对于二阶正规双曲算子也成立　见 **Kirchhoff 公式**(Kirchhoff formula)，**Riemann 法**(Riemann method)，**Riemann 函数**(Riemann function)　关于边值问题理论中的 Green 公式，亦见[4]－[9]

参考文献

[1] Green, G , An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism, Nottingham, 1828, reprint Mathematical papers, Chelsea, reprint, 1970, 1－82

[2] Максвелл, Д , Избранные сочинения по теории электромагнитного поля, М , 1954(译自英文)

[3] Смирнов, В И , Курс высшей математики, т 2, 20 изд , М , 1966(中译本 В И 斯米尔诺夫，高等数学教程，第二卷，高等教育出版社，1956)

[4] Courant, R and Hilbert, D , Methods of mathematical physics Partial differential equations, 2, Interscience, 1965(中译本 R 柯朗，D 希尔伯特，数学物理方法，Ⅱ，科学出版社，1977)

[5] Владимиров, В С , Уравнения математической физики, 2 изд , М , 1971(英译本 Vladimirov, V S , Equations of mathematical physics, Mir, 1984)

[6] Соболев, С Л , Уравнения математической физики, 4 изд , М , 1966(中译本 С Л ，索伯列夫，数学物理方程，高等教育出版社，1958)

[7] Miranda, C , Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970(译自意大利文)

[8] Dunford, N and Schwartz, J T , Linear operators Spectral theory, 2, Interscience, 1963

[9] Lions, J L and Magenes, E , Nonhomogenous boundary value problems and applications, 1－2, Springer, 1972(译自法文)．

张鸿林 译

Green 函数 [Green function, Грина функция]

一个与微分方程边值问题的解的积分表达式有关的函数．

线性微分方程边值问题的 Green 函数是这个方程的满足齐次边界条件的**基本解**(fundamental solution) Green 函数是由给定的微分方程和齐次边界条件所生成的微分算子之逆——**积分算子的核**(kernel of an integral operator)．Green 函数生成非齐次方程的满足齐次边界条件的解　求 Green 函数将微分算子性质的研究化为对应的积分算子的类似性质的研究

常微分方程的 Green 函数．令 L 是由微分多项式

$$l[y] = \sum_{k=0}^{n} p_k(x)\frac{d^k y}{dx^k}, \quad a<x<b,$$

和边界条件 $U_j[y]=0\ (j=1, \quad , n)$ 生成的**微分算子**(differential operator)，其中

$$U_j[y] = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{jk} y^{(k)}(a) + \beta_{jk} y^{(k)}(b)$$

满足下列条件的函数 $G(x,\xi)$ 称为算子 L 的 Green 函数

1) 对区间 $[a,b]$ 中所有的 x 和 ξ 的值，$G(x,\xi)$ 是连续的，且对 x 有直到 $n-2$ 阶的连续导数．

2) 对区间 (a,b) 中任意给定的 ξ，函数 $G(x,\xi)$ 在半区间 $[a,\xi)$ 和 $(\xi,b]$ 的每一个中关于 x 有 n 阶一致连续导数，且 $n-1$ 阶导数当 $x=\xi$ 时满足条件

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi+,\xi) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi-,\xi) = \frac{1}{p_n(\xi)}$$

3) 在半区间 $[a,\xi)$ 和 $(\xi,b]$ 的每一个中，函数 $G(x,\xi)$ 看作是 x 的函数时，满足方程 $l[G]=0$ 和边界条件 $U_j[G]=0\ (j=1, \quad , n)$

如果边值问题 $Ly=0$ 只有平凡解，那么 L 有且只有一个 Green 函数([1])．这时对 $[a,b]$ 上任一连续函数 f，边值问题 $Ly=f$ 存在一个解，它可以用下面的公式表示

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi)\, d\xi$$

如果算子 L 有 Green 函数 $G(x,\xi)$，那么**伴随算子** (adjoint operator) L^* 也有 Green 函数，它等于 $\overline{G(\xi,x)}$. 特别地，如果 L 是自伴的 ($L=L^*$)，那么 $G(x,\xi)=\overline{G(\xi,x)}$，即在此情形下 Green 函数是 **Hermite 核** (Hermitian kernel) . 例如，由实系数微分算子

$$l[y]=\frac{d}{dx}\left[p\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y,\quad a<x<b$$

和边界条件 $y(a)=0$，$y(b)=0$ 所生成的自伴二阶算子 L 的 Green 函数有下面的形式

$$G(x,\xi)=\begin{cases} Cy_1(x)y_2(\xi), & \text{当 } x\leqslant\xi \text{ 时}, \\ Cy_1(\xi)y_2(x), & \text{当 } x>\xi \text{ 时} \end{cases}$$

这里 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 分别是方程 $l[y]=0$ 满足边界条件 $y_1(a)=0$，$y_2(b)=0$ 的任意无关解，$C=[p(\xi)W(\xi)]^{-1}$，其中 W 是解 y_1 和 y_2 的 **Wronski 行列式** (Wronskian)，并且可以证明 C 不依赖于 ξ .

如果算子 L 有 Green 函数，那么对本征值的边值问题 $Ly=\lambda y$ 等价于积分方程 $y(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)y(\xi)d\xi$，对它可应用 **Fredholm 定理** (Fredholm theorems) . 因此，边值问题 $Ly=\lambda y$ 可以有至多可数个本征值 $\lambda_1,\lambda_2,$ ，它们没有有限的极限点　它的共轭问题有相同重数的复共轭本征值　对每个不是 L 的本征值的 λ，有可能构造算子 $L-\lambda I$ 的 Green 函数 $G(x,\xi,\lambda)$，其中 I 是恒等算子　函数 $G(x,\xi,\lambda)$ 是参数 λ 的亚纯函数，它的极点只可能是 L 的本征值 . 如果本征值 λ_0 的重数是 1，那么

$$G(x,\xi,\lambda)=\frac{u_0(x)\ \overline{v_0(\xi)}}{\lambda-\lambda_0}+G_1(x,\xi,\lambda),$$

其中 $G_1(x,\xi,\lambda)$ 在点 λ_0 的邻域中是正则的，而 $u_0(x)$ 和 $v_0(x)$ 分别是算子 L 和 L^* 的对应于本征值 λ_0 和 $\overline{\lambda_0}$ 的本征函数，且由下式正规化

$$\int_a^b u_0(x)\overline{v_0(x)}\,dx=1$$

如果 $G(x,\xi,\lambda)$ 有有限多个极点，且如果这些极点只是一阶的，那么存在 L 和 L^* 的本征函数的一完全**双正交系** (biorthogonal system)

$$u_1(x),\ u_2(x),\qquad,\ v_1(x),\ v_2(x),$$

如果本征值用它们的绝对值的增加序列排列，那么积分

$$I_R(x,f)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=R}d\lambda\int_a^b G(x,\xi,\lambda)f(\xi)\,d\xi$$

等于 f 关于 L 的本征函数展开的部分和

$$S_k(x,f)=\sum_{|\lambda_n|<R}u_n(x)\int_a^b f(\xi)\overline{v_n(\xi)}\,d\xi$$

正数 R 这样来选择，使得函数 $G(x,\xi,\lambda)$ 关于圆 $|\lambda|=R$ 上的 λ 是正则的　对正则的边值问题和区间 $a<x<b$ 中的任一分段光滑函数 f，等式

$$\lim_{R\to\infty}I_R(x,f)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$$

成立，即可以展开成收敛级数 ([1]) .

如果算子 $L-\lambda I$ 的 Green 函数 $G(x,\xi,\lambda)$ 有多重极点，那么它的主部可以用算子 L 和 L^* 的标准本征函数系和标准伴随函数系来表示 ([2]) .

在上面所考虑的情形中边值问题 $Ly=0$ 没有非平凡解　另一方面，如果这样的非平凡解存在，那么引进所谓的广义 Green 函数 (generalized Green function)　例如，假设问题 $Ly=0$ 正好存在 m 个线性无关解 . 于是，广义 Green 函数 $\widetilde{G}(x,\xi)$ 存在，它具有通常的 Green 函数的性质 1) 和 2)，当 $a<\xi<b$ 时作为 x 的函数满足边界条件，而且是方程

$$l_x[y]=-\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(x)\overline{v_k(\xi)}$$

的解，这里 $\{v_k(x)\}_{k=1}^m$ 是伴随问题 $L^*y=0$ 的线性无关解系，而 $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^m$ 是任一和它双正交的连续函数系 . 于是，若函数 f 连续，且满足可解性准则，即它与所有的 v_k 正交，则

$$y(x)=\int_a^b\widetilde{G}(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

是边值问题 $Ly=f$ 的解 .

如果 $\widetilde{G}_0$ 是 L 的一个广义 Green 函数，那么它的任一其他的广义 Green 函数可表为

$$\widetilde{G}(x,\xi)=\widetilde{G}_0(x,\xi)+\sum_{k=1}^{m}u_k(x)\psi_k(\xi),$$

其中 $\{u_k(x)\}$ 是问题 $Ly=0$ 的线性无关解的完全系，而 $\psi_k(\xi)$ 是任意的连续函数 ([3])

偏微分方程的 Green 函数 .

1) 椭圆型方程 (elliptic equations)　令 A 是 m 阶椭圆微分算子，它由有界域 $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ 中的微分多项式

$$a(x,D)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)D^\alpha$$

和齐次边界条件 $B_ju=0$ 所生成，其中 B_j 是边界算子，它的系数定义在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上，后者假定充分光滑 . 函数 $G(x,y)$ 称作是 A 的一个 Green 函数，如果对任意固定的 $y\in\Omega$，它满足齐次边界条件 $B_jG(x,y)=0$，且如果把它看作广义函数，那么它满足方程

$$a(x,D)G(x,y)=\delta(x-y)\ .$$

在算子具有光滑系数和正规边界条件的情形下，保证

了齐次边值问题的解的唯一性，Green 函数存在，且边值问题 $Au=f$ 的解可以表为形式（见[4]），

$$u(x)=\int_\Omega G(x,y)f(y)\,dy.$$

在此情形下，Green 函数对 $x, y\in\overline{\Omega}$ 满足一致估计

$$|G(x,y)|\leqslant C|x-y|^{m-n},\ 当\ m<n\ 时,$$

$$|G(x,y)|\leqslant C+C|\ln|x-y||,\ 当\ m=n\ 时,$$

且当 $m>n$ 时 Green 函数是一致有界的

对本征值的边值问题 $Au=\lambda u$ 等价于积分方程

$$u(x)=\lambda\int_\Omega G(x,y)u(y)\,dy,$$

对它可应用 Fredholm 理论（见[5]）（见 **Fredholm 定理**（Fredholm theorems）） 这里，伴随边值问题的 Green 函数是 $\overline{G(y,x)}$ 特别地，由此导出本征值的个数至多是可数的，且它们没有有限的极限点，伴随边值问题有同样重数的复共轭本征值

对二阶方程，Green 函数已研究得比较透彻，因为**基本解**（fundamental solution）的奇异性质可以明显地写出来 这样，对 **Laplace 算子**（Laplace operator），Green 函数有形式

$$G(x,y)=-\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)}|x-y|^{2-n}+\gamma(x,y),\ 当\ n>2\ 时,$$

$$G(x,y)=\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|+\gamma(x,y),\ 当\ n=2\ 时,$$

其中 $\gamma(x,y)$ 是 Ω 上的调和函数，这样来选取它，使得 Green 函数满足边界条件

对一具有 Ляпунов 型边界 $\partial\Omega$ 的区域 Ω 中具有光滑系数的二阶椭圆算子 $a(x,D)$ 的第一边值问题，可用 Green 函数 $G(x,y)$ 将问题

$$a(x,D)u(x)=f(x)\ 当\ x\in\Omega,\ u|_{\partial\Omega}=\varphi$$

的解表为下面的形式

$$u(x)=\int_\Omega G(x,y)f(y)dy+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial\nu_y}G(x,y)\varphi(y)\,d\sigma y,$$

其中 $\partial/\partial\nu_y$ 是沿算子 $a(x,D)$ 的外余法线方向的导数，而 $d\sigma y$ 是 $\partial\Omega$ 上的曲面元．

如果齐次边界问题 $Au=0$ 有非平凡解，那么可以像对常微分方程那样引进广义 Green 函数 这样，例如在 Laplace 算子第二边值问题的情形存在的广义 Green 函数称作 **Neumann 函数**（Neumann function）（[3]）．

2）抛物型方程（parabolic equations）．令 P 是 m 阶抛物微分算子，它由微分多项式

$$p(x,t,D_x,\frac{\partial}{\partial t})=\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x,t)D_x^\alpha,$$

$$x\in\Omega,\ t>0,$$

和齐次初边界条件

$$u(x,0)=0,\ B_ju(x,t)=0$$

所生成，其中 B_j 是边界算子，其系数对 $x\in\partial\Omega$ 和 $t\geqslant0$ 定义 算子 P 的 Green 函数是一个函数 $G(x,t,y,\tau)$，它对任意适合 $t>\tau\geqslant0$ 和 $y\in\Omega$ 的固定的 (y,τ)，关于 x 满足齐次边界条件 $B_j=0$，当 $(x,t)\neq(y,\tau)$ 时它是方程

$$p(x,t,D_x,\frac{\partial}{\partial t})G(x,t,y,\tau)=\delta(x-y,t-\tau)$$

的解，并且对任意连续函数 $\varphi(x)$ 满足关系式

$$\lim_{t\to\tau+0}\int_\Omega G(x,t,y,\tau)\varphi(y)dy=\varphi(x)$$

在算子具有光滑系数和正规边界条件的情形这保证了问题 $pu=0$ 的解的唯一性，Green 函数存在，且方程

$$p\left(x,t,D_x,\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=f(x,t)$$

的满足齐次边界条件和初始条件 $u(x,0)=\varphi(x)$ 的解有形式

$$u(x,t)=\int_0^t d\tau\int_\Omega G(x,t,y,\tau)f(y,\tau)dy+\int_\Omega G(x,t,y,0)\varphi(y)dy$$

在椭圆组或抛物组的研究中，Green 函数被 Green 矩阵的概念所代替，利用它，这些方程组的齐次边值问题的解表为 Green 矩阵与右端项向量及初始条件向量的乘积的积分（[7]）

Green 函数以 G Green 的名字命名，是因为他在关于位势理论的研究中（1828）第一个研究了这样函数的一个特殊情形

参考文献

[1] Наймарк, M A, Линейные дифференциальные операторы, 2 изд, M, 1969（中译本 M A 纳依玛克，线性微分算子，科学出版社，1964)

[2] Келдыш, M B,《Докл AH CCCP》, **77** (1951), 1, 11－14

[3] Соболев, C Л, Уравнения математической физики, 4 изд, M, 1966（中译本 C Л 索波列夫，数学物理方程，人民教育出版社，1961)

[4] Bers, L, John, F and Schechter, M, Partial differential equations, Interscience, 1964

[5] Gårding, L, Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, *Math Scand*, **1** (1953), 1, 55－72

[6] Friedman, A, Partial differential equations of parabolic

type, Prentice-Hall, 1964 (中译本 A 弗里德曼，抛物型偏微分方程，科学出版社，1984)

[7] Эйдельман, С Д, Параболические системы, М, 1964 (英译本 Eidel'man, S D, Parabolic systems, North-Holland, 1969) Ш А Алимов, В А Ильин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hale, J K, Ordinary differential equations, Wiley, 1980

[A2] Garabedian, P R, Partial differential equations, Wiley, 1964

函数论中的 Green 函数 在复变函数论中，(实的) Green 函数理解为 **Laplace 算子** (Laplace operator) 的第一边值问题的 Green 函数，即如下类型的函数

$$G(z, z_0)=\ln \frac{1}{|z-z_0|}+\gamma(z, z_0),\ z\in\Omega, \qquad (1)$$

其中 $z=x+iy$ 是复变量，$z_0=x_0+iy_0$ 是 Green 函数的极点，$z_0\in\Omega$，而 $\gamma(z, z_0)$ 是 z 的调和函数，它在区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上取值 $-\ln(1/|z-z_0|)$ 设区域 Ω 是单连通的，且设 $w=f(z, z_0)$ 是解析函数，它实现区域 Ω 到 w 平面的单位圆盘上的共形映射，使得 z_0 映射到圆心，且使得 $f(z_0, z_0)=0$，$f'(z_0, z_0)>0$

于是

$$G(z, z_0)=\ln \frac{1}{|f(z, z_0)|}. \qquad (2)$$

如果 $H(z, z_0)$ 是 $G(z, z_0)$ 的共轭调和函数，$H(z_0, z_0)=0$，那么解析函数 $F(z, z_0)=G(z, z_0)+iH(z, z_0)$ 称作区域 Ω 的具有极点 z_0 的复 Green 函数 (complex Green function)．公式 (2) 的逆是

$$f(z, z_0)=e^{-F(z, z_0)} \qquad (3)$$

公式 (2) 和 (3) 表明，构造一个区域 Ω 到圆盘中的共形映射的问题和求 Green 函数的问题是等价的．Green 函数 $G(z, z_0)$，$F(z, z_0)$ 在共形映射下是不变的，有时这便于它们的求得 (见**映射法** (mapping method))．

在 Riemann 曲面论中利用对函数 (1) 成立的极小性质来更方便地定义 Green 函数 在点 z_0 的邻域中具有形式

$$U(z, z_0)=\ln \frac{1}{|z-z_0|}+\gamma(z, z_0) \qquad (4)$$

的 Riemann 曲面 Ω 上所有 ($z\neq z_0$ 时) 的正调和函数 $U(z, z_0)$ 中 ((4) 中 $\gamma(z, z_0)$ 是在整个 Ω 上正则的调和函数)，Green 函数 $G(z, z_0)$ (如果它存在) 是最小的，即 $G(z, z_0)\leqslant U(z, z_0)$．同时，Green 函数的存在是可作为双曲型 Riemann 曲面的特征的 一般而言，在 **Riemann 曲面** (Riemann surface) 的 (理想) 边界上这样定义的 Green 函数不会处处为零．在**位势论** (potential theory) 中的情形是类似的 (亦见**抽象位势论** (potential theory, abstract))．对任一开集 Ω，例如，在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ ($n\geqslant 2$) 中的开集 Ω，Green 函数 $G(x, x_0)$ 也可利用上面讨论过的极小性质来定义，但是对 $n\geqslant 3$，公式 (4) 中的 $\ln(1/|x-x_0|)$ 应该代之以 $|x-x_0|^{2-n}$．一般而言，当趋近边界 $\partial\Omega$ 时，这样的 Green 函数不一定趋于零 对抛物型 Riemann 曲面或对 $\mathbf{R}^2$ 中某些区域 (例如，对 $\Omega=\mathbf{R}^2$)，Green 函数并不存在

参考文献

[1] Стоилов, С, Теория функций комплексного переменного, т 2, М, 1962 (译自罗马尼亚文)

[2] Nevanlinna, R, Uniformisierung, Springer, 1953.

[3] Brélot, M, Eléments de la théorie classique du potentiel, Centre Docum Univ Paris, 1959

Е Д Соломенцев 撰

【补注】 对古典位势论中的 Green 函数，亦见 [A1] 和 [A3]，对公理位势论中的 Green 函数，见 [A2]．

在多复变函数论中，更特殊地在多重位势论中 (亦见**位势论** (potential theory))，对复 Monge-Ampère 方程引进了 Green 函数 这样的 Green 函数理想地应该是具有零边界值的复 Monge-Ampère 算子 (complex Monge-Ampère operator) $MA=\det(\partial^2/\partial z_i\partial\bar{z}_j)$ 的基本解，而且是多重下调和的 (亦见**多重下调和函数** (plurisubharmonic function)) 这仅仅可能去获得伪凸域 (见**伪凸与伪凹** (pseudo-convex and pseudo-concave)) 的经典一维理论的相当类似 提出了 Green 函数的几个不等价的定义．其中之一如下 令 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个区域，$w\in\Omega$ 令 $\mathrm{PSH}(\Omega)$ 表示 Ω 上的**多重次调和函数** (plurisubharmonic function) 的全体．Ω 的以 w 为极点的 Green 函数是

$$G(z, w)=\sup\{u(z)\ u\in\mathrm{PSH}(\Omega),\ u\leqslant 0,$$
$$u(\zeta)-\log|\zeta-w|<C_u\},$$

其中 C_u 是依赖于 u 的一个常数．这样，对每一个固定的 w，$G(\cdot, w)$ 是多重下调和的．对 $n=1$，$-G$ 等于通常的 Green 函数 当然希望 $G(\cdot, w)|_{\partial\Omega}=0$，而且 $G(\cdot, w)$ 是一到 $[-\infty, 0]$ 的连续函数，但是这等价于 Ω 是一超凸域 (hyper-convex domain) (即是一容纳连续有界多重下调和穷举函数的伪凸域)．如果是这情形，则还可有

1) $MA(G(\cdot, w))=(2\pi)^n\delta_w$，其中 δ_w 是在 w 处的 Dirac 测度，

2) 当 $z\to w$ 时，$G(z, w)\sim\log|z-w|$，且 G 在 $\bar{\Omega}\times\Omega$ 上是连续的．

如果 Ω 是严格凸的，那么 G 是对称的：$G(z, w)=G(w, z)$，且在 $\Omega\setminus\{w\}$ 上是 C^∞ 的．如果 Ω 只是严格伪凸的，那么 G 不一定是对称的，且甚至不是 C^2 的

可以引进一类具有对称性的 Green 函数，见 [A5]，但是也许要放宽 1) 和 2) 对严格伪凸域 Ω，下列不等式成立 (L Lempert)

$$\log\tanh C(z,w)\leqslant G(z,w)<\log\tanh K(z,w),$$

等号对凸域成立 这里 C 和 K 分别是 Carathéodory 距离和小林 (Kobayashi) 距离．

如果 E 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个有界集，那么 E 的以 ∞ 为极点的 Green 函数是

$$L_E(z)=\sup\{u(z)\ u\in\mathrm{PSH}(\Omega),\ 在\ E\ 上\ u\leqslant 0,$$
$$u(\zeta)-\log(1+|\zeta|)<C_u\},$$

且类似于单变量情形，存在一个 Robin 函数 (Robin function)

$$R_E(z)=\lim_{\substack{\lambda\in\mathbf{C}\\ \lambda\to\infty}}\sup(L_E(\lambda z)-\log|\lambda z|),$$

和一个**对数容量** (logarithmic capacity)

$$\mathrm{Cap}(E)=\exp\{-\sup R_E\}.$$

对一般集合 E，$\mathrm{Cap}(E)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Cap}(E\cap\{|z|<n\})$．这个容量有这样的性质：容量为零的集合的全体正好就是多重极集 (pluri-polar sets) 的全体．

参考文献

[A1] Helms, L L, Introduction to potential theory, Wiley (Interscience), 1969

[A2] Janssen, K, On the existence of a Green function for harmonic spaces, *Math Annalen*, **208** (1974), 295 - 303

[A3] Landkof, N S [N S Landkov], Foundations of modern potential theory, Springer, 1972 (译自俄文)

[A4] Bedford, E, Survey of pluri-potential theory, forthcoming.

[A5] Cegrell, U, Capacities in complex analysis, Vieweg, 1988

[A6] Demailly, J P, Mesures de Monge-Ampère et mesures pluriharmoniques, *Math Z*, **194** (1987), 519 - 564.

统计力学中的Green 函数 关联函数 (见**关联函数(统计力学中的)** (correlation function in statistical mechanics)) 的一个时序线性组合，它在计算大量的相互作用的质点的物理特征组时是方便的中间量．

1) 统计量子力学中的 Green 函数．最常用的是二时交换子温度的 Green 函数 迟后的 (ret, +)，超前的 (adv, -) 和因果的 (c)，它们由下列关系式定义·

$$G_{AB}^{(\mathrm{ret})}(t-t')=\ll A(t)|B(t')\gg^{(\mathrm{ret})}\equiv$$
$$\equiv\theta(t-t')<[A(t),\ B(t')]_\eta>,$$
$$G_{AB}^{(\mathrm{adv})}(t-t')=\ll A(t)|B(t')\gg^{(\mathrm{adv})}\equiv$$
$$\equiv-\theta(t'-t)<[A(t),\ B(t')]_\eta>,$$
$$G_{AB}^{(\mathrm{c})}(t-t')=\ll A(t)|B(t')\gg^{(\mathrm{c})}\equiv$$
$$\equiv<T_\eta A(t)\ B(t')>,$$

其中

$$[A(t),\ B(t')]_\eta=A(t)B(t')-\eta B(t')A(t),$$
$$T_\eta A(t)B(t')=\theta(t-t')A(t)B(t')+\eta\theta(t'-t)B(t')A(t),$$
$$\theta(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x<0\end{cases},\quad \eta=\pm1.$$

这里，$A(t)$ 和 $B(t')$ 是依赖时间的动力学变量 (**Heisenberg 表示** (Heisenberg representation) 中的系统的状态空间上的算子)，< > 表示在 **Gibbs 统计系统** (Gibbs statistical aggregate) 上的平均，$\eta=\pm1$ 的值是为了方便而选择的 使用 Green 函数的有效性，很大程度上依赖于它们的 Fourier 变换 $G_{AB}^{(n)}(E)$ $(n=\mathrm{ret},\mathrm{adv},\mathrm{c})$ 的谱表示的使用 这样，例如在非零温度情形下，对超前的和推迟的 Green 函数下列表示式成立·

$$G_{AB}^{(n)}(E)=\ll A|B\gg_E^{(n)}=$$
$$=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(e^{\omega/\theta}-\eta)J_{AB}(\omega)}{E-\omega+i\varepsilon\alpha_n}\,d\omega,$$
$$\varepsilon\to+0,\quad \alpha_n=\begin{cases}1,\ n=\mathrm{ret},\\ -1,\ n=\mathrm{adv}.\end{cases}$$

这里 $J_{AB}(\omega)$ 是**谱密度** (spectral density)，$\theta=kT$，其中 $T\neq0$ 是绝对温度，k 是 Boltzmann 常数．在单位系统中采用 $\hbar=h/2\pi=1$，其中 h 是 Planck 常数．特别地，下面的公式成立

$$G_{AB}^{(\mathrm{ret})}(\omega)-G_{AB}^{(\mathrm{adv})}(\omega)=[e^{\omega/\theta}-\eta]J_{AB}(\omega).$$

这个公式使得有可能通过 Green 函数去计算谱密度 (因此，还有系统的一些物理特性)．类似的谱公式还对零温度存在 Green 函数的 Fourier 变换的奇性 (在复平面上的极点) 表征了系统中基本扰动的谱和阻尼．计算 Green 函数的主要来源包括．a) 无穷链联接方程的近似解，它直接从 Green 函数的定义用基于物理的考虑来"解开"链的办法导出，b) 扰动理论的级数基于物理观点的"基本"项的求和 (图的求和)，这个方法主要用于计算因果 Green 函数，且它与**量子场论** (guantum field theory) 中计算 Green 函数的方法有许多共同之处．

2) 经典统计力学中的 Green 函数，是将对量子情形 (对 $\eta=\pm1$) 建立的适当的量子公式中的算子 $A(t)$ 和 $B(t')$ 代之以所研究的经典系统的动力状态函数，以及将换位子 $A(t)B(t')-B(t')A(t)$ (量子 Poisson 括号) 代之以经典 (通常) 的 Poisson 括号所得到的二时迟后的

(ret) 和超前的 (adv) Green 函数，< > 相应地表示在 Gibbs 经典集上的平均．引进因果 Green 函数在这里没有意义，因为动力变量的乘积是交换的 与量子情形类似，Green 函数的 Fourier 变换的谱表示存在，且可以有效地使用．计算经典 Green 函数的主要来源，是由对关联函数的某个方程组（如 **Боголюбов 方程系列** (Bogolyubov chain of equations)，流体动力学方程组等等）的 Hamilton 的无穷小变化所得到的方程组．

参考文献

[1] Боголюбов, Н Н , Тябликов, С В ,《Докл АН СССР》, **126** (1959), 53 .

[2] Зубарев, Д Н ,《Успехи физ наук》, **71** (1960), 71 – 116

[3] Боголюбов, Н Н (мл), Садовников, Б И ,《Ж Эксперим и теор физ 》, **43** (1962), 8, 677

[4] Боголюбов, Н Н (мл), Садовников, Б И , Некоторые вопросы статистической механики, М , 1975

[5] Статистическая физика и квантовая теория поля, М , 1973

В Н Плечко 撰

【补注】 在 A 和 B 是场算子，或是**产生算子** (creation operators) 和**零化算子** (annihilation operators) 这些特殊但常用的情形中，对玻色子选择 $\eta=1$，对费密子选择 $\eta=-1$．

孙和生 译 陆柱家 校

Green 线 [Green line , Грина линии]

一族等值面 $G_y(x)=r(0\leqslant r<+\infty)$ 的正交轨线，这里 $G_y(x)=G(x,y)$ 是关于 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ $(n\geqslant 2)$ 的区域 D，具有给定的极点 $y\in D$ 的（关于 Laplace 方程的 Dirichlet 问题的）**Green 函数** (Green function) 换言之，Green 线是梯度场 grad $G_y(x)$ 中的积分曲线 其推广见 [2]

参考文献

[1] Ландкоф, Н С , Основы современной теории потенциала, М , 1966, гл 1 (英译本 Landkof, N S , Foundations of modern potential theory, Springer, 1972 , Chapt 1)

[2] Brelot, M and Choquet, G , Espaces et lignes de Green, *Ann Inst Fourier* , 3 (1952), 199 – 263

Е Д Соломенцев 撰

吴炯圻、高琪仁 译 卫念祖 校

Green 空间 [Green space , Грина пространство]

一个这样的拓扑空间 X 在 X 上定义了**调和函数** (harmonic function) 与上调和函数（见**下调和函数** (subharmonic function)），并且存在（关于调和函数族的 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem) 的）**Green 函数** (Green function)，或者等价地，存在一个非常数的上调和函数．更精确地说，设 X 是一个 E 空间 (E-space)，即满足下面两条件的一个连通的可分拓扑空间 1）每一点 $x\in X$ 有一个开邻域 V_x 同胚于 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$（或者 $\mathbf{R}^n$ 的 **Александров 紧化** (Aleksandrov compactification) $\bar{\mathbf{R}}^n$）的某一个开集 V_x，2) 任意两个邻域的非空交集 $V_x\cap V_y$（关于这两个到 $\mathbf{R}^n$ 或 $\bar{\mathbf{R}}^n$ 的同胚映照）在 V_x 与 V_y' 里的两个象是等距的，而当 $n=2$ 时是保形等价的．E 空间 X 上的调和与上调和函数是通过象 V_x 来局部地定义的．进一步，如果 X 上存在一个非常数的正上调和函数，或等价地，存在一个正位势，则称 X 为一个 Green 空间 (Green space) 于是，Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 及其紧化 $\bar{\mathbf{R}}^n$ $(n\geqslant 2)$ 和 Riemann 曲面都是 E 空间．$\mathbf{R}^n$ $(n\geqslant 3)$ 和双曲型 Riemann 曲面（见 **Riemann 曲面的分类** (Riemann surfaces, classification of)）是 Green 空间，而 $\mathbf{R}^2$ 与抛物型 Riemann 曲面都不是 Green 空间 Green 空间的任意区域也是 Green 空间．

一个有正位势的**调和空间** (harmonic space) X 也可看作是 Green 空间在公理位势论的框架中的推广（见**抽象位势论** (potential theory, abstract)）

参考文献

[1] Brelot , M , On topologies and boundaries in potential theory, Springer, 1971

[2] Brelot, M and Choquet, G , Espaces et lignes de Green, *Ann Inst Fourier*, 3 (1952), 199 – 263

Е Д Соломенцев 撰

吴炯圻、高琪仁 译 卫念祖 校

Gregory 公式 [Gregory formula , Грегори формула]

近似计算函数 f 积分的一种公式．该式为

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)dx=\frac{1}{2}y_0+y_1+\quad+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n+$$

$$+A_2(\Delta^1 y_{n-1}-\Delta^1 y_0)-A_3(\Delta^2 y_{n-2}-\Delta^2 y_0)+$$

$$+A_4(\Delta^3 y_{n-3}-\Delta^3 y_0)-A_5(\Delta^4 y_{n-4}-\Delta^4 y_0)+\quad+R,$$

其中 $y_j=f(a+jh)$，$\Delta^l y_j$ 为函数 y 在点 $a+jh$ 处的 l 阶差分，$l=1,2,\quad,j=0,\quad,n$，而且

$$A_k=\int_0^1 \frac{t(t-1)\quad(t-k+1)}{(k!)}\,dt,\quad k=2,3,$$

特别

$$A_2=-\frac{1}{12},\ A_3=\frac{1}{24},\ A_4=-\frac{19}{720},\ A_5=\frac{3}{160},\cdot\ .$$

Gregory 公式是通过积分结点为 a, $a+h$, , $a+nh$ 的插值多项式得到的，包含直到 n 阶差分的 Gregory 公式可以从闭型 **Newton-Cotes 求积公式** (Newton-Cotes

quadrature formula) 得到（见 **Cotes 公式**（Cotes formulas））. 因此，两个公式的余项是一样的．最简单的 Gregory 公式是由 J Gregory 在 1668 年提出的．

参考文献

[1] Березин, Н С ,Жидков, Н П , Методы вычислений, т 1, 3 изд , М , 1966 (英译本 Berezin, I S and Zhidkov, N P , Computing methods, Pergamon, 1973)

Л Д Кудрявцев 撰

【补注】 在前面的文献 [1] 中，借助于 **Fraser 图**（Fraser diagram）和在每个区间 $[a+jh,\ a+jh+h]$ 上积分所得到的多项式插值公式导出 Gregory 公式 在该文献中还发现，它们也可以从 **Euler-MacLaurin 公式**（Euler-MacLaurin formula），通过对“终点修正”的适当离散化导出，结果表明，这种方法是比较直接了当的，并可以产生用 Stirling 数和 Bernoulli 数表示系数 A_k 的显式表达式（见 [A2]）．用步长 h，从 $x=a$ 到 $x=a+nh$ 数值积分“初值问题” $y'(x)=f(x)$，$y(a)=0$ 是推导 Gregory 公式的另一种途径 令 $Y(nh)$ 表示所得到的对 $y(nh)$ 的数值逼近．因为 $y(nh)$ 等于函数 f 在区间 $[a,a+nh]$ 上的积分，故可以认为 $Y(nh)$ 就是函数 f 在区间 $[a,a+nh]$ 上的近似积分（或求积公式） 如果用于积分 $y'(x)=f(x)$，$y(a)=0$ 的数值积分法是由多项式 ρ 和 σ 生成的线性多步法，那么由 $Y(nh)$ 给定的求积公式称为 (ρ,σ) 可约求积公式（(ρ,σ)-reducible quadrature formula）如果线性多步法 (ρ,σ) 是 Adams-Moulton 方法（见 **Adams 法**（Adams method））并用从插值求积公式导出的起步值，那么 $Y(nh)$ 和某一 Gregory 公式一致．(ρ,σ) 可约求积公式的概念是由 J Matthys ([A4]) 引进的．这些公式的一般理论归功于 P.H M Wolkenfelt ([A6])．在 [A5] 和 [A2] 特别在 [A1] 中讨论了 Gregory 公式的特殊情形．这些文献给出了带有任意阶差分的 Gregory 公式的余项（或求积误差）的表达式．Gregory 公式在数值求解 Volterra 方程中起重要作用（见 [A5]，[A3] 和 [A2]）．

参考文献

[A1] Brass, H , Quadraturverfahren, Vandenhoeck & Ruprecht, 1977

[A2] Brunner, H and Mouwen, P J van der, The numerical solution of Volterra equations, North-Holland, 1986

[A3] Brunner, H and Lambert, J D , Stability of numerical methods for Volterra integrodifferential equations, Computing, **12** (1974), 75 – 89

[A4] Matthys, J , A stable linear multistep method for Volterra integro-differential equations, *Numer Math* , **27** (1976), 85 – 94 .

[A5] Steinberg, J , Numerical solution of Volterra integral equations, *Numer Math* , **19** (1972), 212 – 217

[A6] Wolkenfelt, P H M , The construction of reducible quadrature rules for Volterra integral and integro-differential equations, *IMA J Numer Anal* , **2** (1982), 131 – 152

蔡大用 译 李家楷 校

网格法 [grid method , сеток метод]

微分方程、积分方程和微分 - 积分方程的一类近似解法的总称 在应用于偏微分方程时，“网格法”一词是“有限差分法”或“差分法”的同义词．网格法是求解关于微分方程的问题的应用最广泛的近似方法之一．这是由于网格法具有很大的通用性和在计算机上比较容易实现的缘故．

见**差分格式理论**（difference schemes , theory of）

摘自 БС Э-3 “网格法”一条

【补注】

参考文献

[A1] Lapodus , L and Pinder , G , Numerical solution of partial differential equations in science and engineering , Wiley , 1982

张鸿林 译

Gronwall 求和法 [Gronwall summation method , Гронуолла метод суммирования]

数项级数和函数项级数的求和法之一，由给出满足某些条件的两个函数 $f(w)$ 和 $g(w)$ 来定义．级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 可按 Gronwall 求和法 (f,g) 求和，其和为 s，如果

$$\lim_{n\to\infty} U_n = s,$$

其中 $U_n(n=0,1,2,\ \ )$ 按下列展开式来定义

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \frac{1}{g(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n w^n ,$$

$$z=f(w),\ g(w)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$$

这种求和法是 T H Gronwall ([1]) 作为 **de la Vallée-Poussin 求和法**（de la Vallée-Poussin summation method）的推广而引入的，若取

$$z=f(w)=\frac{1-\sqrt{1-w}}{1+\sqrt{1+w}},\ w=\frac{4z}{(1+z)^2},$$

$$g(w)=\frac{1}{\sqrt{1-w}},$$

则化为后者．如果取

$$f(w)=w,\ g(w)=(1-w)^{-k-1}.$$

则 Gronwall 求和法变成 **Cesàro 求和法**（Cesàro summation methods）之一．

参考文献

[1] Gronwall , T H , Summation of series and conformal mapping , *Ann of Math* , **33** (1932) , 1 , 101 – 117

И И Волков 撰 张鸿林 译

Grothendieck 范畴 [**Grothendieck category, Гротендика категория**]

具有一个生成元集（见**范畴的生成元**（generator of a category））并满足下列公理的 **Abel 范畴**（Abelian category）对任意的一族对象存在着余积（和），并且对一个对象 A 的每一个有向子对象族 U_i, $i\in I$, 与任何子对象 V, 有下列等式

$$(\bigcup_{i\in I} U_i)\cap V=\bigcup_{i\in I}(U_i\cap V)$$

任意有单位元的结合环 Λ 上的左（右）Λ 模的范畴，与任意的拓扑空间上 Λ 模的层的范畴都是 Grothendieck 范畴．左 Λ 模的范畴 $_\Lambda\mathfrak{M}$ 的一个满子范畴 $\mathfrak{S}$ 称为一个局部化子范畴（localizing subcategory），如果它对取上极限是封闭的，而且在一个短正合序列

$$0\to A'\to A\to A''\to 0$$

中，对象 A 属于 $\mathfrak{S}$，当且仅当 A' 与 A'' 都属于 $\mathfrak{S}$ 每一个局部化的子范畴都能构造商范畴 $_\Lambda\mathfrak{M}/\mathfrak{S}$ 一个 Abel 范畴是一个 Grothendieck 范畴，当且仅当它等价于某个型如 $_\Lambda\mathfrak{M}/\mathfrak{S}$ 的商范畴

在一个 Grothendieck 范畴中每一个对象都有一个内射包络，并且由此原因，Grothendieck 范畴在用于同调的应用上是非常适合的

参考文献

[1] Grothendieck, A, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math J* (2), **9** (1957), 119 – 221

[2] Bucur, I and Deleanu, A, Introduction to the theory of categories and functors, Wiley, 1968

[3] Popesco, N and Gabriel, P, Charactensation des catégories abéliennes avec générateurs et limites inductives exactes, *C R Acad Sci*, **258** (1964), 4188 – 4190

М Ш Цаленко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Popescu, N, Abelian categories with applications to rings and modules, Acad Press, 1973

周伯埙 译

Grothendieck 函子 [**Grothendieck functor, Гротендика функтор**]

从一个范畴 C 到范畴 $\hat{C}$ 的一个嵌入函子(见**范畴的嵌入**(imbedding of categories))，这里的 $\hat{C}$ 是定义于 C 上取值于集合范畴 Ens 中的反变函子的范畴．设 X 为范畴 C 中的一个对象，映射 $Y\to \mathrm{Hom}_C(Y, X)$定义了一个从 C 到集合范畴的一个反变函子 h_X. 对于 $\hat{C}$ 的任何对象 F，存在一个自然的一一映射 $F(X)\rightleftarrows \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(h_X, F)$（米田引理（Yoneda lemma））因此，特别有

$$\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(h_X, h_Y)\to \mathrm{Hom}_C(X, Y)$$

所以，映射 $X\to h_X$ 定义了一个满嵌入 h $C\to\hat{C}$，称为 Grothendieck 函子 用这个函子，就可能在一个范畴的对象上定义代数结构 见**群对象**(group object)，**群概形**(group scheme)

参考文献

[1] Bucur, A and Deleanu, A, Introduction to the theory of categories and functors, Wiley, 1968

[2] Grothendieck, A, Technique de descente et theorèmes d existence en géoméfrie algebrique, II, *Sem, Bourbaki Exp*, **195** (1960)

И В Долгачев 撰

【补注】 在英文文献中，Grothendieck 函子通常称为米田嵌入（Yoneda embedding)，或者米田-Grothendieck 嵌入（Yoneda-Grothendieck embedding）

参考文献

[A1] MacLane, S, Categories for the working mathematician, Springer, 1971

[A2] Yoneda, N, On the homology theory of modules, *J Fac Sci Tokyo, Sec*, **17** (1954), 193 – 227

周伯勋 译

Grothendieck 群 [**Grothendieck group, Гротендика группа**]，加性范畴的

一个 Abel 群，它是对一个加性范畴由一个泛加性映射的性质确定的．更准确地说，设 C 为一个小**加性范畴**（additive category）而 G 为一个 Abel 群．映射 φ $C\to G$ 称为加性的（additive)，如果对 C 中对象的任何正合序列 $0\to L\to M\to N\to 0$，总有关系式 $\varphi(L)+\varphi(N)=\varphi(M)$ 存在一个群 $K(C)$，称为 C 的 Grothendieck 群，与一个加性映射 K $C\to K(C)$，称为泛映射（universal mapping)，使对任何加性映射 φ $C\to G$，存在唯一的同态 χ $K(C)\to G$ 满足条件 $\varphi=\chi\cdot K$

这个构造首先是被 A Grothendieck 在证明 Riemann-Roch 定理时对于概形上的凝聚与局部自由层的范畴来研究的 见代数几何学中的 **K 函子**(K-functor) 群 $K(C)$是唯一确定的（同构认为相同)，并且可以由生成元——对每一个对象 $L\in C$，有一个生成元 $[L]$ 与之对应——与对每一个正合序列 $0\to L\to M\to N\to 0$ 由关系式 $[M]-[L]-[N]=0$ 给出．

如果 X 是一个拓扑空间，那么在 X 上的向量丛的加性范畴的 Grothendieck 群是这空间的一个不变式，这已在（拓扑）**K 理论**（K-theory)中研究过 如果 C 是一个域 K 上的线性空间上的非蜕化对称双线性型的范畴，那么 $K(C)$ 就是 K 上的 Witt-Grothendieck 群，见 **Witt 环**（Witt ring).

参考文献

[1] Swan, R, The Grothendieck ring of a finite group, *Topology*, **2** (1963), 85–110

[2] Borel, A and Serre, J P, Le théoréme de Riemann-

Roch, *Bull Soc Math France*, **86** (1958), 97－136
[3] Atiyah, M F, *K*-theory lectures, Benjamin, 1967
[4] Bass, H, Topics to algebraic *K*-theory, Bombay, 1966
[5] Lang, S, Algebra, Addison-Wesley, 1974

В И Данилов 撰

【补注】 也可以对于任何可交换的幺半群 M 得到一个 Grothendieck 群 $K(M)$，作为由 M 到 Abel 群的加性映射所得出的泛问题的解 这是有生成元 $m\in M$ 与关系式 $m-m_1-m_2$ 的 Abel 群，这里 m，m_1，m_2 是 M 中所有能使 $m=m_1+m_2$ 的元素 例如，取一个拓扑空间 X 上的向量丛的同构类所组成的幺半群（加法是由直和引出的)，我们又得到拓扑 K 群 $K(X)$

当所考虑的加性范畴 $\mathfrak{C}$ 中，并非每一个短正合序列都可分裂时，那就有两种可能自然相伴的 Grothendieck 群 两者都是由 $\mathfrak{C}$ 的对象之同构类所生成的 Abel 群 对第一种，有关系式 $[C]-[C_1]-[C_2]$，只要 C 同构于 $C_1\oplus C_2$，而对第二种，有关系式 $[C]-[C_1]-[C_2]$，只要有短正合序列 $0\to C_1\xrightarrow{j} C\xrightarrow{p} C_2\to 0$（这样一个短正合序列可裂，如果有一个态射 s $C_2\to C$ 使 $ps=\mathrm{id}_{C_2}$）两种概念都见于文献

由 A 上有限生成的投射模之加性范畴（其中每一个短正合序列当然都可裂）所定义的 Grothendieck 群 $K_0(A)$ 有时称为环 A 的 Grothendieck 群 （Grothendieck group） 亦见**代数 K 理论** （algebraic K-theory） Grothendieck 群的另一个重要的例子是一个环(或一个概形）的 **Picard 群** （Picard group） Pic (A). 它是 A 上秩为 1 的投射模之同构类，以 A 上的张量积为加法，所得的交换幺半群所对应的 Grothendieck 群．

参考文献

[A1] Bass, H, Algebraic *K*-theory, Benjamin, 1968
[A2] Karoubi, M, *K*-theory, Springer, 1978
[A3] Berrick, J, An approach to algebraic *K*-theory, Pitman, 1982

周伯埙 译

Grothendieck 拓扑 [Grothendieck topology, Гротендика топология]

一个**范畴** （category) 上的“覆盖”结构，使得能够定义**层** (sheaf)的概念 具体定义可见**景** （site).

周伯埙 译

Grötzsch 原理 [Grotzsch principle, Гретша принцип]

共形映射 (conformal mapping) 理论中的一个原理，由 H. Grötzsch 在 1928 年（见[1]）提出，并被用来证明关于某些种类的曲线的长度与它们所围的曲面的面积的一些不等式．其后，Grotzsch 给出定义于有限连通或无限连通域的单叶函数理论的**带形方法（解析函数）** (strip method (analytic functions)) 的大量应用

对 Grötzsch 原理可作如下阐述 设圆环 $K(r,R)=\{z\ \ r<|z|<R\}$ $(0<r<R<\infty)$，包含有限个两两不相交的单连通域 $B_k(k=1,\ \ ,n)$ 具有 Jordan 边界，边界上分别包含圆周 $|z|=r,|z|=R$ 上均不退化为点的弧 γ_k 和 Γ_k（这些 B_k 形成连接 $K(r,R)$ 的边界分支的一些带子)．若 B_k 被映入某个矩形 $\{w\ \ 0<\mathrm{Re}\,w<a_k,\ 0<\mathrm{Im}\,w<b_k\}$，使得 γ_k 和 Γ_k 分别贯穿长度为 a_k 和 b_k 的边，则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}\leqslant\frac{2\pi}{(\ln R-\ln r)},$$

且等号仅当 $B_k=\{z\ \ r<|z|<R,\ \alpha_k<\arg z<\beta_k\}$，$\alpha_k$，$\beta_k$ 是常数，$k=1,\ \ ,n$，且并集 $\bigcup_{k=1}^{n}B_k$ 覆盖 $K(r,R)$ 除去射线 $\arg z=\alpha_k$，$\arg z=\beta_k$ 上属于 $K(r,R)$ 的那些区间的情形达到．

Grötzsch 原理与带形方法是**极值度量法** (extremal metric, method of the) 的组成部分，并且不仅被用于共形映射，而且亦可用于具有更一般性质的映射，例如**拟共形映射** (quasi-conformal mapping)．

参考文献

[1A] Grotzsch, H, Ueber einige Extremalprobleme der konformen Abbildung I, *Ber Verh Sachsisch Akad Wiss Leipzig Math-Naturwiss Kl*, **80** (1928), 367－376
[1B] Grotzsch, H, Ueber einige Extremalprobleme der konformen Abbildung II, *Ber Verh Sachsisch Akad Wiss Leipzig Math-Naturwiss Kl*, **80** (1928), 497－502
[1C] Grotzsch, H, Ueber die Verzerrung bei schlichter konformer Abbildung mehrfach zusammenhangender Bereiche II, *Ber Verh Sachsisch Akad Wiss Leipzig, Math-Naturwiss Kl*, **81** (1929), 217－221
[1D] Grotzsch, H, *Ber Verh Sachsisch Akad Wiss Leipzig, Math-Naturwiss Kl*, **82** (1930), 69－80
[1E] Grotzsch, H, Zum Parallelschlitztheorem der konformen Abbildung schlichter unendlich-vielfach zusammenhangender Bereiche, *Ber Verh Sachsisch Akad Wiss Leipzig, Math-Naturwiss Kl*, **83** (1931), 185－200
[1F] Grotzsch, H, Ueber moglichts konformen Abbildungen von schlichter Bereiche, *Ber Verh Sachsisch Akad Wiss Leipzig, Math-Naturwiss Kl*, **84** (1932), 114－120
[2] Голузин, Г М, Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд, М, 1966(中译本 Г М 戈鲁辛，复变函数的几何理论，科学出版社，1956)
[3] Jenkins, J A, Univalent functions and conformal mappings, Springer, 1958

И А Александров 撰

【补注】 亦可参看 **Grötzsch 定理** (Grötzsch theorem)，**畸变定理** (distortion theorems)

杨维奇 译

Grötzsch 定理 [Grötzsch theorems, Грётша теоремы]

由 H Grotzsch ([1]) 得到的有关共形映射与拟共形映射的各种结果 他发展了带形方法，这是共形模方法的最初的一般形式（见**极值度量法**（extremal metric, method of the），**带形方法**（**解析函数**）（strip method (analytic functions))），并应用于他关于多连通（包括无限连通）域共形映射的大量极值问题的系统研究，包括极值映射的存在性、唯一性及几何性质等问题．下面给出几个较简单的 Grötzsch 定理

对于给定圆环 $K_R=\{z \quad R<|z|<1\}$ 的所有使得单位圆周 $\Gamma=\{z \quad |z|=1\}$ 变为自身的单叶共形映射 $w=f(z)$，圆周 $\Gamma_R=\{z \quad |z|=R\}$ 的象的直径达到最大值，当且仅当边界分支 $f(\Gamma_R)$ 是中心在点 $w=0$ 的一个直线段．对多连通域有类似的结果

对于给定多连通域 $B\ni\infty$ 的所有满足下述条件的单叶共形映射 $w=f(z)$ 在无穷远点具有展开式 $f(z)=z+O(1)$ $(z\to\infty)$，且在给定点 $z_0\in B$ 满足标准化条件 $f(z_0)=0$，$|f'(z_0)|$ 的最大值，以及在给定点 $z_1\in B$，$z_1\neq z_0$，$|f(z_1)|$ 的最大（最小）值，仅仅由下述映射达到 它们把 B 的每个边界分支分别映射为中心在点 $w=0$ 的圆弧或焦点在点 $w=0$ 和 $w=w'=f(z_1)$ 的椭圆（双曲线）弧 每一个这类极值问题的极值映射存在并且唯一．在这类映射中，对于给定的 $z_1\in B$，圆盘

$$\left\{w \;\left|\; \left|w-\frac{1}{2}\ (w'+w'')\right| \leqslant \frac{1}{2}\ |w'-w''|\right.\right\}$$

是函数 $\Phi(f)=\ln(f(z_1)/z_1)$ 的值域．该圆盘的每个边界点是 Φ 在所研究的具有特定几何性质的该类映射中的一个唯一的映射上的值

Grötzsch 最早提出**拟共形映射**（quasi-conformal mapping）的表示形式，并应用这种映射于许多他早先已经得到的关于共形映射的极值结果

参考文献

[1A] Grotzsch, H, Ueber die Verzerrung bei schlichter konformer Abbildung mehrfach zusammenhangender Bereiche Ⅰ, *Ber Verh Sachsisch Akad Wiss Leipzig, Math-Naturwiss Kl*, **81** (1929), 38－47

[1B] Grotzsch, H, Ueber die Verzerrung bei schlichter konformer Abbildung mehrfach zusammenhangender Bereiche Ⅱ, *Ber Verh Sachsisch Akad Wiss Leipzig, Math-Naturwiss Kl*, **81** (1929), 217－221

[1C] Grotzsch, H, *Ber Verh Sachsisch Akad Wiss Leipzig, Math-Naturwiss. Kl*, **82** (1930), 69－80

[1D] Grotzsch, H, Ueber die Verschiebung bei schlichter konformer Abbildung schlichter Bereiche Ⅱ, *Ber Verh Sachsisch Akad Wiss Leipzig Math-Naturwiss Kl* **84** (1932), 269－278

[2] Jenkins, J A, Univalent functions and conformal mappings, Springer, 1958

П М Тамразов 撰

【补注】 Grötzsch 定理属于**畸变定理**（distortion theorems），亦见 **Grotzsch 原理**（Grotzsch principle）．

杨维奇 译

群 [group, группа]

代数系统（algebraic system）的主要类型之一 群论研究在数学及其应用中经常遇到的代数运算的最一般的性质，数的乘法，向量的加法，变换的连续施行（复合）等等都是这种运算的例子．历史上，群的概念是抽象代数系统的最初的例子之一，并且当跨入 20 世纪时，在许多方面为其他数学分支的重新组建提供了一个模型，其结果使一个数学系统（一种结构）的概念成为数学中的基本概念

定义 一个群是一个非空集合 G 带有一个二元运算，满足下列公理（这个运算记作乘法）

1) 运算是结合的，即对于 G 中任意 a, b, c 来说，$(ab)c=a(bc)$，

2) 运算有一个单位，即 G 有一个元素 e，称为单位元（unit element），使得对于 G 中任意元素 a 来说，$ae=ea=a$，

3) 运算有逆元素，即对于 G 中任意元素 a 来说，在 G 中存在一个元素 x，称为 a 的逆（inverse），使得 $ax=xa=e$

公理系统 1)－3) 有时用与它等价的两条公理的系统来代替 1)，4) 运算有左商和右商，即对于 G 中任意两个元素 a，b 来说，在 G 中有 x，y，称为 b 被 a 除的左商（left quotient）和右商（right quotient），使得 $ax=b$，$ya=b$

由这个定义推出，在任意群内，单位元是唯一的，群中任意给定元素的逆元素是唯一的，对于 G 中任意元素 a，b 来说，b 被 a 除的左商和右商是唯一的．

历史注记 群的原始思想来自许多方面．主要的一个方面是用根式解代数方程的理论 为了这个理论的需要，J L Lagrange (1771) 在他的《方程的代数解纪要》(Memoir on the algebraic solution of equations) 中以及在 A. Vandermonde 的一篇文章中（1771），首先使用了置换 前一篇论文在群论中特别重要，因为它用多项式的说法，实际上给出了一个对称**置换群**（permutation group）关于它的子群的（右）陪集分解 置换群的性质与方程的性质之间的深刻联系是由 N H Abel (1824) 和 E Galois (1830) 指出的．在群论中某些具体进展应归功于 Galois 如发现了在用根式解方程问题中**正规子群**（normal subgroup）的作用，发现了阶为 $n\geqslant5$ 的**交错群**（alternating group）是单群，等等．C Jordan 关于置换群的论文（1870）对于这一代数分支的系统化和发展起了重要作用

群的思想也以独立的方式产生于几何学 19世纪中叶，当时仅有的古代几何学被许多其他的“几何学”所代替，而找出它们之间的关系成为一个迫切的问题 这个问题通过在射影几何学的研究中，处理几何图形在各种变换之下的动态而得到解决 在这些研究中的重点逐渐转移到研究这些变换本身和它们的分类上．这种“几何映射的研究”被A Möbius广泛地进行．他研究了全等，相似，仿射性，直射，以及最后，几何图形的“初等类型关系”，这实际上就是它们的拓扑等价性 A. L Cayley (1854和以后）和**不变量理论**（invariants, theory of）的英国学派的其他代表人物给出了关于几何学的一个更为系统的分类 Cayley明确地使用了“群”这个术语，系统地用于现在以他的名字命名的乘法表（见**Cayley表**（Cayley table))上，证明了任何一个**有限群**（finite group）都可以通过置换来表示，并且认为一个群是由它的生成元和定义关系所确定的系统 这个发展的最后阶段是F Klein的**埃尔兰根纲领**（Erlangen program）(1872)，他把几何学的分类建立在**变换群**（transformation group）概念的基础之上

数论是群的概念第三个来源，早在1761年，L Euler在他关于幂除法的剩余的研究中明确地使用了**同余式**（congruence）和它们分成的剩余类，这在群论的语言中就意味着把一个群分解成子群的陪集 C F Gauss在他的《算术研究》(Disquisitiones arithmeticae）中研究了分圆方程（见**分圆多项式**（cyclotomic polynomial)），并且实际上确定了它们的**Galois群**（Galois group）的子群．在这篇论文里，他还研究了“二元二次型的复合”，并且实质上证明了，二次型的等价类对于这个复合来说构成一个有限**Abel群**（Abelian group）

直到19世纪末，人们看出了长久以来应用于数学各个领域中的群论概念在本质上是一样的，群概念的近代抽象想法终于发展起来了 早在1895年，S Lie定义一个群作为变换的集合，它在一个满足结合律的运算之下是封闭的，具有一个单位元以及逆元素．不假定群是有限的并且也不对它们的元素的特性作任何假设来研究群首先于1916年随着О Ю Шмидт的《抽象群论》(Абстрактная теория групп）一书的出版而形成了数学的一个独立分支

群的例子 下面的例子说明群在代数学里，在数学的其他分支里以及在自然科学里所扮演的角色．

a) Galois群（Galois groups） 令K是一个域k的有限可分正规扩张（见**域的扩张**（extension of a field)）．K的使k中元素保持不动的自同构关于复合构成一个群$\mathrm{Gal}(K/k)$，称为扩张K/k的**Galois群**（Galois group）．**Galois理论**（Galois theory）中主要定理说，对于$\mathrm{Gal}(K/k)$的每一个子群令其固定子域（即K中被$\mathrm{Gal}(K/k)$的这个子群固定的元素所构成的子域）与之对应，这个映射是$\mathrm{Gal}(K/k)$的子群格到k与K之间的中间子域的格上的一个反同构．

对于可用根式解方程问题的应用如下．令f是k上关于x的一个多项式，令K是f的一个分裂域（见**多项式的分裂域**（splitting field of a polynomial)） 群$\mathrm{Gal}(K/k)$称为f在k上的Galois群（它的元素自然地由方程$f(x)=0$的根的置换形成） 结果是方程$f(x)=0$可以用根式解当且仅当f的Galois群是**可解群**（solvable group）

在这个例子和其他类似的例子里，群是以数学结构的自同构群（见**自同构**（automorphism)）的形式出现的 这是最重要的表现形式之一，它确保了群在代数学中的特殊地位．用Galois的话来说，任意结构的自同构总可以“群化”，而在一个自同构的集合上引进环结构或其他有用的结构则只在特殊的情况下可行．

b) 同调群（homology groups） 同调论中主要的想法就是利用（Abel）群的理论去研究拓扑空间的一个范畴 对于每一个拓扑空间X，关联着一族Abel群$H_0(X), H_1(X),$ ，同时每一个连续映射f $X \to Y$定义一族同态f_n $H_n(X) \to H_n(Y), n=0,1,$ ．利用群论工具研究**同调群**（homology group）$H_n(X)$和它们的同态常常可以处理一个拓扑问题 一个典型的例子就是扩张问题 是否可以将定义在X的一个子空间A上的映射g $A \to Y$扩张到整个X上，即是否可以将g表示成嵌入映射h $A \to X$与某个连续映射f $X \to Y$的复合? 如果可以的话，那么在同调空间里就有$g_n=f_n \cdot h_n$，这就是说，每一个同态g_n $H_n(A) \to H_n(Y)$都可以通过$H_n(X)$与一个给定的同态h_n而分解 如果这个代数问题不可解，那么原始的拓扑问题也不可解．重要的正面结果可以通过这种方式得到．

同调群说明群的应用的另一种典型方式 对于非代数的对象可以通过能够反映出它们的特性的代数系统来研究 这实际上就是**代数拓扑学**（algebraic topology）的基本方法 类似的方法，特别是同调群，也成功地用于研究代数系统本身——群，环等等（例如，在群扩张理论中）．

c) 对称群（symmetry groups） 群的概念使得它有可能去描写一个给定几何图形的对称性．对于任意一个图形，令将它映到自身的空间变换的集合与之相关联 这个集合在变换的复合之下是一个群．它也刻画了这个图形的对称性 这实际上就是Е С Федоров (1890)处理正则空间点系的分类问题的方法，这是晶体学中基本问题之一（见**数学晶体学**（crystallography, mathematical)） 只有17个平面**晶体群**（crystallograhic group），它们是直接找出的，共有230个三维晶体群，只有用群论才能将它们彻底分类，这是在历史上群论

应用于自然科学的首例．

群论在物理学中起着类似的作用　在量子力学里，一个物理系统的状态是由一个无穷维向量空间的点来表示的　如果这个物理系统从一个状态过渡到另一状态．它的代表点则经历某一线性变换．在这里对称的思想和群表示理论（见**群的表示**（representation of a group））是极为重要的

这些例子说明，当论及对称性时，群论能应用于一切分类　研究对称性实际上相当于研究系统（不一定是数学系统）的自同构，并且由于这个理由，群论在解决这类问题时是必不可少的

群的重要类　群论的"最终目的"是要在同构意义下描述出一切群运算，或者换一句话说，描述出一切群．群论包括许多部分，常通过加在群运算上的特殊条件或者通过在群中引进与运算有某种关联的附加结构而对它们加以区分

群论中最古老的并且至今仍是热门的研究分支是**有限群**（finite group）论　它的重要任务之一就是确定有限单群（见**单有限群**（simple finite group））　这些单群包括许多有限域上矩阵的典型群和"零散"（sporadic）有限单群（**Mathieu 群**（Mathieu group）等）　另一方面，在一些有限**可解群**（solvable group）里，特殊的子群系（**Hall 子群**（Hall subgroup），**Carter 子群**（Carter subgroup）等等）常被加以研究，因为它们在很大程度上决定了这个群本身的结构　有限群常作为置换群或有限域上的矩阵群而出现　有限群论中一个大的独立分支就是研究群通过矩阵和置换的表示

研究无限群的一种典型的方法就是对它们附加一些有限性条件（见**具有有限性条件的群**（group with a finiteness condition））．在这里，主要的兴趣集中于**周期群**（periodic group），**局部有限群**（locally finite group），子群满足极大条件的群（**Noether 群**（Noetherian group）)，子群满足极小条件的群（**Artin 群**（Artinian group）)，**剩余有限群**（residually-finite group），有限秩的群（见**群的秩**（rank of a group）），和**有限生成群**（finitely-generated group）

在 **Abel 群**（Abelian group）的研究中，完全 Abel 群，无挠 Abel 群和周期 Abel 群，以及这些群中的纯子群和准素子群占有重要的地位　对于任意给定的 Abel 群的研究在很大程度上归结为上述那些类的理论并借助于 Abel 群的扩张理论，群的扩张理论主要是由同调方法发展起来的（见**群的扩张**（extension of a group））．

比 Abel 群类更广泛一些的是**幂零群**（nilpotent group）和**可解群**（solvable group）的类，它们的理论也达到了相当发展的地步　幂零性和可解性的最有用的推广就是局部幂零性（见**局部幂零群**（locally nilpotent group）），局部可解性（见**局部可解群**（locally solvable group）），和**正规化子条件**（normalizer condition），以及在一个群里由各种类型的次正规系（见**子群系**（subgroup system））的存在所确定的许多性质．特殊的可解群和幂零群类是重要的　**超可解群**（supersolvable group），**多循环群**（polycyclic group）．

群论的一个重要的分支是变换群理论，包括**置换群**（permutation group）理论和**线性群**（linear group）理论　很多类重要的群是通过引入与群运算相容的附加结构定义的，这包括**拓扑群**（topological group），**Lie 群**（Lie group），**代数群**（algebraic group）和**序群**（ordered group）　关于其他类的群，下面一些是值得提及的　在某一簇中是自由的群（见**自由群**（free group）），**完全群**（complete group），具有某种剩余性质的群（见**剩余有限群**（residually-finite group)），通过对于生成元和定义关系附加条件所定义的群，以及通过在子群格上附加某些条件所定义的群．

参考文献

[1] Каргаполов, М И, Мерзляков, Ю И, Основы теории групп, М, 1972（英译本　Kargapolov, M I and Merzlyakov, Yu I, Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979）

[2] Курош, А Г, Теория групп, 3 изд, М, 1967（中译本　А Г 库洛什，群论，高等教育出版社，上册，1987，下册，1982）

[3] Hall, M, The theory of groups, Chelsea, reprint, 1976（中译本　M 赫尔，群论，科学出版社，1981）

[4] Шмидт, О Ю, Избр тр　Математика, М, 1959, 17－70

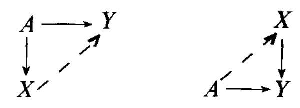
[5] Wussing, H, The genesis of the abstract group concept, M I T, 1984（译自德文）

[6] Федоров, Е С, Симметрия и структура кристаллов, М, 1949, 111－258

[7] Боголюбов, Н Н, Логунов, А А, Тодолов, И Т, основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М, 1969（英译本　Bogolyubov, N N, Logunov, A A and Todorov, I T, Introduction to axiomatic quantum field theory, Benjamin, 1975）

М И Каргаполов, Ю И Мерзляков 撰

【补注】　与（同伦）扩张问题相类似的注记应用于（同伦）提升问题，这里要求补足一个像右下方的图（左边的图是扩张问题的图）．



在上文中没有提到的群论中一个重要方向是组合群论（combinatorial group theory）和通过生成元及关系来研究群（[A3]，[A4]）

当然，抽象群论在 1916 年以前早就被考虑了．W. Burnside 在 1897 年的著作里就引述了 Cayley 的话"群

是由它的符号通过组合规则而定义的”，接着就解释为什么他在书里总的看来没有采用这个观点（[A5]，p viii)，L Kronecker在1870年讨论了抽象有限群的公理，见[A1]（亦见[A10]），而抽象群的概念是Cayley于1849年开始在他的三篇论文[A7]−[A9]里引入的，虽然这些文章当时不大受到重视 这种情况在19世纪90年代确已改变，而关于抽象群的基本定义和一些基本性质的讨论可以在H Weber的名著[A6](1896)中找到．

关于晶体群（的历史）参见**晶体群**（crystallographic group）

参考文献

[A1] Kronecker, L , Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenzahl idealer complexer Zahlen, Monatsber K Preuss Akad Wissenschaft Berlin (1870), 881−889 (亦见 Werke, Vol 1, 271)

[A2] Weyl, H , Symmetry, Princeton Univ Press, 1952（译自德文）

[A3] Magnus, W , Karrass, A and Solitar, D , Combinatorial group theory, Interscience, 1966

[A4] Coxeter, H S M and Moser, W O J , Generators and relations for discrete groups, Springer, 1957

[A5] Burnside, W Theory of groups of finite order, Dover, reprint, 1955

[A6] Weber, H , Lehrbuch der Algebra, Ⅱ, Vieweg, 1899, Buch 1, Abschnitt 1

[A7] Cayley, A , Note on the theory of permutations, Phil Mag (3), **34** (1849), 527−529（亦见 Collected mathematical papers, Vol 1, 432−434)

[A8] Cayley, A , On the theory of groups as depending on the symbolical equation $\theta^n=1$, *Phil Mag* (4), **7** (1854), 40−47 (亦见Collected mathematical papers, Vol Ⅱ, 123−130)

[A9] Cayley, A , On the theory of groups as depending on the symbolical equation $\theta^n=1$ Second part, *Phil Mag* (4), **7** (1854), 408−409 (亦见 Collected mathematical papers, Vol Ⅱ, 131−132)

[A10] Frobenius, G F , Neuer Beweis des Sylowschen Satzes, *J Reine Angew Math* , **100** (1887), 179−181

郝钢新 译

群代数 [group algebra，групповая алгебра]，域 K **上的群** G **的**

K上结合代数（见**结合环与结合代数**（associative rings and algebras)），它们的元素是所有形如 $\sum_{g\in G}a_g g$，$a_g\in K$，$g\in G$的有限和，其运算由下面公式定义

$$\sum_{g\in G}a_g g+\sum_{g\in G}b_g g=\sum_{g\in G}(a_g+b_g)g$$

$$(\sum_{g\in G}a_g g)(\sum_{g\in G}b_g g)=\sum_{h\in G}(\sum_{\substack{xy\in h\\ x\ y\in G}}a_x b_y)h)$$

（第二个公式之右边仍为有限和） 这个代数记作 KG，而 G之元素构成 KG的一组基，又群代数中的基元素的乘法是由群的乘法所诱导而得．代数 KG 同构于定义在 G上，取值于 K中且只有有限个非零值的函数构成的函数代数，在这个代数中乘法为这些函数的卷积．

当 K是结合环时，也能考虑同样的结构．所以我们也能给出环 K上群 G的群环（group ring)，若 K是具有幺元的交换环，这类群环也常称为环 K上群 G的群代数（group algebra)

群代数是由G Frobenius和I Schur（[1]）引进的，其目的在于研究群的表示，这是由于研究域 K上的群 G的表示等价于研究群代数 KG上的模，比如 Maschke定理（Maschke theorem）可用群代数的语言叙述如下 设 G为有限群，K为域，则群代数 KG是半单的当且仅当 G的阶不能被 K的特征所除尽

二十世纪五十年代初期，在代数拓扑的整群代数的背景下，为了研究群的结构而研究了无限群的群代数，也提出了群代数方面的一系列问题，其中最熟悉的问题是 Kaplansky 问题（Kaplansky problem） 无挠群的群代数是否包含零因子？

群环和群代数的研究中的某些方向

根性（radicality）和半单性（semi-simplicity)．群环有非零幂零理想，当且仅当 K有非零幂零理想或者在 G中某个有限正规子群的阶能被环 K的加法群的一个元素的阶所除尽 如果 K是无诣零理想的环且如果 G的每个元素的阶都不能被 K的加法群的任意元素的阶所除尽，则 KG无诣零理想，特征零的域上群代数 KG是半单的，即若 K包含有理数域上一个超越元，它的 **Jacobson** 根（Jacobson radical）为零．

群代数到体的嵌入 有序群的群代数能嵌入到体中（Мальцев-von Neumann 定理（Mal'tsev-von Neumann theorem)）．人们相信这对右序群也是对的．

具有群 G的结构的群环 KG 和环 K的环论性质间的关系．例如 KG是准素的当且仅当环 K是准素的且群 G没有有限正规子群

同构问题 若群环 KG和 KH作为 K代数是同构的，群 G和群 H的结构间有什么关系？特别何时 G和 H同构？可以得到如下结果．类2的可解挠群由它的整数环上的群环唯一决定，可数 Abel p-群由它的特征 p的环上的群环唯一决定．

人们也考虑过群代数概念的其他推广．一个例子是群和环的**叉积**（cross product）的概念，它保持了群环的许多性质

参考文献

[1] Schur, I , Sitzungsber, Preuss Akad Wiss, (1905), 406−432

[2] Curtis, C W and Reiner, I, Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962
[3] Passman, D S, The algebraic structure of group rings, Wiley, 1977
[4] Contemporary Problems in Mathematics, Vol 2, Moscow, 1973, 5-118
[5] Бовди, А А, Групповые кольца, Ужгород, 1974
[6] Sehgal, S K, Topics in group rings, M Dekker, 1978
亦见**群的表示**（representation of group）

A A Бовди 撰

【补注】

参考文献

[A1] Sandling, R, The isomorphism problem for group rings, Lecture notes in Math, Springer, 1985, 256-288

许以超 译 石生明 校

群代数（局部紧群的）[group algebra (of a locally compact group), групповая алгебра (локально бикомпактной группы)]

群上某些函数以卷积为乘法构成的具有**对合**（involution）的拓扑代数 设 Banach 空间 $L_1(G)$ 是局部紧拓扑群 G 上用左不变 **Haar 测度**（Haar measure）dg 所构造的，设 $L_1(G)$ 中之乘法由卷积 $(f_1,f_2)\to f_1*f_2$ 所定义，又设对合 $f\to f^*$ 由公式 $f^*(g)=\overline{f(g^{-1})}\,\Delta(g)$ 所定义，其中 Δ 为 G 的模函数，所得到的具有对合的 **Banach 代数**（Banach algebra）称为 G 的群代数（group algebra），仍用 $L_1(G)$ 记之．若 G 为有限群，则群代数的定义和通常复数域上**群代数**（group algebra）的代数定义是一致的

群代数的概念使得在群论的问题中，特别是在抽象调和分析中，能够使用 Banach 代数理论的一般方法．群代数作为 Banach 代数，它的性质反映了拓扑群的性质，比如群代数包含单位元素，当且仅当此群为离散的，群代数为它的有限维极小双边理想之直接(拓扑)和，当且仅当此群是紧的 特别，在群的**酉表示**（unitary representation）论中群代数概念具有特别重要的地位 在拓扑群 G 的连续酉表示和群代数 $L_1(G)$ 的非退化对称表示（见**对合表示**（involution representation））之间存在一个一一对应，这个对应将 G 在 Hilbert 空间 H 上之连续酉表示 π 对应于 $L_1(G)$ 的按照

$$f\to\int_G f(g)\pi(g)\,dg,\quad \forall f\in L_1(G)$$

定义的表示

局部紧群的群代数有一批性质是共同的．事实上，任何群代数包含一个近似单位元（见 **Banach 代数**（Banach algebra）），它由在单位元素的邻域上的特征函数族构成这些函数并按照包含（降序）排序．为此，关于群代数可以建立其上正函数和它的对称表示间的对应关系．任一群代数为半单代数，有一个对称的**忠实表示**（faithful representation） 特别地，由群的**正则表示**（regular representation）决定的群代数的表示是忠实的．$L_1(G)$ 的闭左理想是 $L_1(G)$ 中闭向量子空间，且在左平移下不变

群代数这一名称有时也用于从群代数 $L_1(G)$ 用一个单位的伴随所得到的具有对合的 Banach 代数．有几个别的具有对合的代数也称为群代数．特别地这些包括按照卷积乘法的测度代数 $M(G)$，以及具有通常乘法的代数，如本质有界函数代数 $L_\infty(G)$，它在 Haar 测度下可测，及由复正定函数集生成的代数 $P(G)$ 集合 $P_1(G)=P(G)\cap L_1(G)$ 及具有紧支集的连续函数集 $K(G)$，既对卷积乘法也对普通乘法构成代数．我们有下表，箭头表示包含

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & \to & P & \to & L_\infty \\ \downarrow & & & & \\ K & \to & L_1 & \to & M \end{array}$$

参考文献

[1] Наймарк, М А, Нормированные кольца, 2 изд, М, 1968（英译本 Naimark, M A, Normed rings, Reidel, 1984）
[2] Guichardet, A, Analyse harmonique commutative, Dunod, 1968

А И Штерн 撰

【补注】 G 上所有复连续正定函数全体构成的集不是代数，因为 1 在其中而 -1 不在其中 然而它们的复线性组合全体构成的集，通常记作 $B(G)$，在通常点态乘法下是代数（见 A[1](32 10)） 对所有非离散局部紧 Abel 群 G，存在 G 上连续紧支集函数，它不在 $B(G)$ 中（见 A[1], (33 3) 和 (41 19)） 因此 $K(G)$ 不是 $B(G)$ 的子集

对 G 的模函数 Δ 的概念，见 **Haar 测度**（Haar measure） 在复 Hilbert 空间中具有对合的代数的对称表示（symmetric representation）π 是适合 $\pi(a^*)=\pi(a)^*$（$\forall a\in A$）的表示，其中 A 中元右边之 * 表示取伴随，左边之 * 表示取对合

参考文献

[A1] Hewitt, E and Ross, K A, Abstract harmonic analysis, 1-2 Springer, 1979
[A2] Dixmier, J, C^* algebras, North-Holland, 1977（译自法文）

许以超 译 石生明 校

群演算[group calculus, групповое исчисление]

一种**结合演算**（associative calculus），群的结合演算的逆运算的存在自然要求能行地实现．事实上，一个结合演算 $\mathfrak{A}$ 是一个群演算（[1], [5]），如果可以构造它的一个逆算法（inverting algorithm），即一个**算法**

(algorithm) $\mathfrak{C}$，使得对 $\mathfrak{A}$ 的字母表 A 上的任意一个字 P 下列条件成立 1) $\mathfrak{C}(P)$ 是有定义的，并且也是 A 上的一个字；2) 字 $P\mathfrak{C}(P)$ 与字 $C(P)P$ 等价于 $\mathfrak{A}$ 中的空字 (此处的术语"算法"必须在某种确切的字的意义下理解，例如理解为一个**正规算法** (normal algorithm))

最有用的群演算是那些特殊类型的演算 (它们称为逆演算 (inversive calculi)，见[2])，这些演算中逆算法的存在性是由适当选择字母表和关系表来确定的 由于字母表的每一个字母 ξ，显然有一个逆字母 ξ^{-1}，故可逆演算的字母表的长度为偶数，关系表要包括所有被称为平凡关系 (trivial relation) 的关系，即关系的右边是空字，而关系的左边是形为 $\xi\xi^{-1}$ 的字的关系

群演算的重要性事实上是由于他们是有限表现群的表示 (亦见**有限表现群** (finitely-presented group))．与其他结合演算一样，一个群演算按标准方式 (见**结合演算** (associative calculus)) 生成一个有限表现结合系统 $K_{\mathfrak{A}}$，由于 $\mathfrak{A}$ 有逆算法，故 $K_{\mathfrak{A}}$ 是一个群 在一个群演算 $\mathfrak{A}$ 中，识别字的等价性问题的**算法问题** (algorithmic problem)，用群演算的术语来说就是有限表现群 $K_{\mathfrak{A}}$ 的恒等问题 (identity problem) (或称字问题 (word problem))．这是 M Dehn ([3]) 1911 年列出的有限表现群的基本判定问题中的第一个 对于由特殊类型的群演算可定义的群，这个问题已有几个作者找到了肯定解答．特别地，对于由具有一个非平凡关系的逆演算定义的群来说这个问题已得到解决 ([4])．1952 年 П С.Новиков (P C Novikov) 首先构造了一个具有不可解字问题的有限表现群，即由群的演算生成的一个群，而在字的某种确切意义下 (例如，**Turing 机** (Turing machine)，或**正规算法** (normal algorithm))，不能在这个演算中构成一个算法以解决其字问题．这个例子给出了给定的有限表现群的字问题的否定解，这个问题的现代精确描述可以用算法论给出 (见 **Church 论题** (Church thesis))．此种群演算的另一个例子后来又找到了 (例如见[7], [8])

刚才提到的由 Новиков 给出的例子也给出了 Dehn 第二个基本问题——识别字对在给定的群演算中是否共轭的问题——的否定解．后来 Новиков ([9]) 又单独给出了一个更简单的例子，证明共轭问题是不可解的

从代数的观点来看，群演算性质的研究的最大兴趣是在群演算的同构下不变的群演算性质，其次是抽象有限表现群的性质．1955 年 С И Адян 得到了一个非常概括的结果 ([10], [11], [12])，此结果与 A.A Марков 对结合演算得到的结果平行，后来知道几乎所有与群演算有关的基本分类问题的算法问题给出了一个否定解．特别地，他得到了 Dehn 第三问题 (给定有限表现群的同构问题) 的一个否定解．类似的结果后来也由 M Rabin ([13]) 得到．

上面提到的与群演算有关的算法问题的不可解性蕴涵着拓扑学中某些算法问题的不可解性 于是一个具有不可解的共轭问题的群演算，可以用来构造一个二维可剖分空间使其道路同伦问题是不可解的 基于 Адян 的结果，Марков 于 1958 年得到了同胚问题的否定解 [14]

参考文献

[1] Марков, A A , Теория алгорифмов, M , 1954 (中译本 A A 马尔科夫，算法论 (上、下)，科学出版社，1959)

[2] Марков, A A ,《Изв AH CCCP Cep матем》, **27** (1963), 4, 907 – 936

[3] Dehn, M , Ueber unendliche diskontinuierliche Gruppen *Math Ann* , **71** (1911), 116 – 144

[4] Magnus, W , Ueber diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation (der Freiheitssatz), *J Reine Angew Math* , **163** (1931), 2, 141 – 165

[5] Новиков, П С ,《Докл AH CCCP》, **85** (1952), 709 – 712

[6] Новиков, П С , Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп, M , 1955 (英译本 Novikov, P S , On algorithmic unsolvable problems of word identity in group theory, Amer Math Soc , 1958)

[7A] Boone, W W , Certain simple unsolvable problems of group theory I, II , *Indag Math* , **16** (1954), 231 – 237, 492 – 497 .

[7B] Boone, W W , Certain simple unsolvable problems of group theory III, *Indag Math* , **17** (1955), 571 – 577

[7C] Boone, W W , Certain simple unsolvable problems of group theory IV, V, *Indag Math* , **19** (1957), 22 – 27, 227 – 232

[8] Britton, J L , The word problem for groups, *Proc London Math Soc* , (3), **8** (1958), 32, 493 – 506

[9] Новиков П С ,《Изв AH CCCP Cep матем》, **18** (1954), 6, 485 – 524

[10] Адян, С И ,《Докл AH CCCP》, **103** (1955), 533 – 535

[11] Адян, С И ,《Докл AH CCCP》, **117** (1957), 1, 9 – 12

[12] Адян, С И ,《Тр Моск матем общ-ва》, **6** (1957), 231 – 298 .

[13] Rabin, M O , Algorithmic unsolvability of group theoretic problems, *Ann of Math* , **67** (1958), 172 – 194

[14] Марков, A A ,《Докл AH CCCP》, **121** (1958), 2, 218 – 220

[15] Markov, A A and Nagornyi, N M , The theory of algorithms, Kluwer, 1988 (译自俄文)

H M Нагорный 撰

【补注】 Dehn 问题，特别是共轭问题的更新的概述可参见 [A1] 及其列举的广泛的参考文献

[A2]中包含一些字问题的综合性论文及相关的群论中的算法问题

参考文献

[A1] Hurwitz, R D , A survey of the conjugacy problem, *Contemp Math* . **33** (1984), 278 – 298

[A2] Boone, W W , Cannonito, F B and Lyndon, R C (eds), Word problems, North-Holland, 1973 .

卢景波 译

群对象 [**group object** , **групповой объект**], 范畴的

范畴 C 中的一个对象 X, 使对任何 $Y\in \mathrm{Ob}(C)$, 态射的集合 $\mathrm{Hom}_C(Y, X)$ 为一个群, 而 $Y \to \mathrm{Hom}_C(Y, X)$ 这个对应是从 C 到群范畴 Gr 的一个函子 一个群对象 X 到一个群对象 X_1 的一个同态 (homomorphism) 是 C 的一个态射 f $X \to X_1$, 使得对任何 $Y\in \mathrm{Ob}(C)$,相应的映射 $\mathrm{Hom}_C(Y, X) \to \mathrm{Hom}_C(Y, X_1)$ 是群的同态 . 范畴 C 的群对象与它们之间的同态组成范畴 Gr$-C$ 函子 $X \to h_X = \mathrm{Hom}_C(\cdot, X)$ 在范畴 Gr$-C$ 与 C 上的群可表示预层的范畴之间, 建立了一个等价 . 如果函子 h_X $Y \to \mathrm{Hom}_C(Y, X)$ 的值属于 Abel 群的子范畴 Ab, 则群对象 X 称为交换的(commutative)或 Abel 的 (Abelian) 如果 C 有有限积与一个终对象 e, 则 C 的一个群对象 X 由下列的性质来定义 .

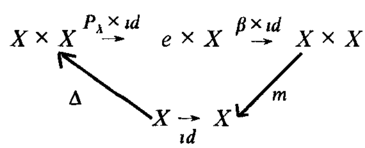
存在态射 m $X\times X \to X$(乘法) , r $X \to X$ (反演) 与 β $e \to X$(一个单位) 满足下列公理 .

a) 结合性 . 图式

$$\begin{array}{ccccc} X\times X\times X & \xrightarrow{m\times id} & X\times X & \xrightarrow{m} & X \\ & \searrow^{id\times m} & & \nearrow_{m} & \\ & & X\times X & & \end{array}$$

是可交换的

b) 存在单位元 图式



是可交换的

c) 存在逆元 图式

$$\begin{array}{ccccc} X\times X & \xrightarrow{r\times id} & X\times X & \xrightarrow{m} & X \\ & \nwarrow^{\Delta} & & \swarrow_{\beta} & \\ & & X \xrightarrow{p_x} e & & \end{array}$$

是可交换的 这里 p_x $X \to e$ 是 X 到终对象 e 的典范态射, 而 Δ $X \to X\times X$ 是对角态射

如果 C 是集合的范畴 Ens, 群对象就是群 范畴 Ens 的终对象是集合 $\{e\}$, 它是由单独一个元素 e 组成的 . 公理 a) 表示由态射 m $X\times X \to X$ 所给的二元运算的结合性 态射 r $X \to X$ 是反演映射, 而态射 β $\{e\} \to X$ 是集合 $\{e\}$ 到 X 的映射, 其象等于 X 中的单位元

同样可以定义一个范畴中的环对象 (ring object), 而且一般地, 可以定出范畴的一个对象上的代数结构 (algebraic structure) ([2])

参考文献

[1] Манин , Ю И , 《Успехи матем наук》, **18** (1963), 6, 3 – 90

[2] Demazure, M and Grothendieck, A , Schémas en groupes, 1, Springer, 1970

[3] Conte, A and Murre, J P , The Hodge conjecture for Fano complete intersections of dimension four, in J de Geometrie Algebrique d Angers, juillet 1979, Sythoff & Noordhoff, 1980, 129–141

И В Долгачев 撰

【补注】 在一些特殊的范畴中, 群对象往往是由其本身的意义成为有兴趣的对象 例如, 在拓扑空间与连续映射的范畴中, **拓扑群** (topological group) 是群对象, 在平滑流形的范畴中, **Lie 群** (Lie group) 是群对象, 在一个给定的空间 X 上的集合之层的范畴中, X 上的群层是群对象 在一个取形为 Gr$-C$ 的范畴中, 群对象是 C 的一个带有两个交换的群结构的对象, 容易看到, 在这种情况, 这两个结构必须重合而且是 Abel 的 反之, 一个 Abel 群结构可与它自己交换, 所以 Gr$-$Gr$-C$ 同构于 C 中 Abel 群对象的范畴 Ab$-C$ 一个函子若能保持有限积 (包括终对象) 也必能保持群对象, 用这个性质以及上面所述的辨识, 我们就得到拓扑群的**基本群** (fundamental group) 是 Abel 群这个结果的一个容易证法

参考文献

[A1] MacLane, S , Categories for the working mathematician, Springer, 1971

[A2] Eckmann, B and Hilton, P J , Group-like structure in general categories 1 Multiplications and comultiplications, *Math Ann* , **145**, (1962), 227 – 255

周伯埙 译

覆叠变换群 [**group of covering transformations , скольжений группа**], 正则覆叠 p $X \to Y$ 的

空间 X 到其自身使得 $\gamma p = p$ 的那些同胚 γ 的群 $\Gamma(p)$ (X 和 Y 理解为连通的, 局部道路连通的, Hausdorff 空间)

用实直线 $\mathbf{R}$ 由 $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ 给出的圆的覆叠的覆叠变换群就是平移 $t \mapsto t+2\pi n$ ($n\in \mathbf{Z}$) 的群

$\Gamma(p)$ 是自由作用 (即对某个 x, $\gamma(x) = x$ 蕴含着 $\gamma = 1$) 的 X 的**离散变换群** (discrete group of transformations), 而 Y 自然同构于商空间 $X/\Gamma(p)$ 群 $\Gamma(p)$ 同构于**基本群** (fundamental group) $\pi_1(Y, y_0)$ (其中 $y_0 \in Y$) 与通过群 $\pi_1(X, x_0)$ (其中 $p(x_0) = y_0$) 在由映射 p 诱导的同态下的象所得到的商群 特别地, 若 p

是万有覆叠，则 $\Gamma(p)$同构于 Y 的基本群

参考文献

[1] Hu, S - T , Homotopy theory, Acad Press, 1959

Э Б Винберг 撰

【补注】 也见**覆叠**（covering），**万有覆叠**（universal covering）

参考文献

[A1] Spanier, E H , Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966, Chapt 2（中译本 E H 斯潘尼尔，代数拓扑学，上海科学技术出版社，1987）

薛春华 译 徐森林 校

运动群 [group of motions, движений группа]

空间变换的一个**连续群**（continuous group），它的元素是这个空间的**运动**（motion），群的运算是两个运动按规定的次序连续施行．在广泛的意义下，任何一个空间连续变换群（见**变换群**（transformation group））都可以作为这个空间的运动群而实现．这是通过对于这个给定的群引入图形的相等概念来完成的，这就导致一种新的几何学，而这个群就成为相对于它的运动群（见**埃尔兰根纲领**（Erlangen program））．

一个运动群称为传递的（transitive），如果对于这个空间中任意两点来说，总可以在这个群内选取一个运动，将其中一点变到另一点，它称为非传递的（intransitive），如果存在一对点，对这一对点来说，不可能选出这样一个运动

一个空间如果能在其中引进一个给定的运动群，就称它是一个容许这个运动群的空间　如果一个空间的运动群具有最高阶（维数），那么就称它是一个完全运动群（complete group of motion）　例如，n 维 Euclid 空间的完全传递运动群的阶是 $n(n+1)/2$，即这个群依赖于 $n(n+1)/2$ 个参数　对于 Euclid 平面这一特殊情形来说，完全运动群的参数可以是坐标原点所变到的点的坐标和旋转角——即这个运动群有三个参数　Euclid 平面的运动群是一个非交换的**可解群**（solvable group）．它的由旋转所组成的子群 H 是交换的且是非传递的，而由平移所组成的子群 N 是交换的，传递的，并且是这个运动群的一个**正规子群**（normal subgroup）．这两个子群的交是这运动群的单位，商群 G/N 与 H 同构，而 G 的**换位子群**（commutator subgroup）包含在 N 内　三维 Euclid 空间的运动群可能的参数是原点所映成的点 $O(a,b,c)$ 的坐标和 **Euler 角**（Euler angles），即这个运动群是六参数的．

在一般微分几何空间里对运动群的研究同时导致许多方向，其中最重要者列在下面．

1) 群论方向（[3]）　在变换群所作用的空间内构造一个**联络**（connection）或一个**不变度量**（invariant metric）

2) 在给定空间内研究运动群，即研究带有一个给定的度量或给定的联络的空间所容许的群（[1],[2]）

3) 界于另外两个方向之间的方向，这就是研究缺项和**缺项空间**（lacunary space），即构造一个容许具有给定阶的完全运动群的空间，或者证明容许某个运动群的具有给定型的空间不存在

例如，一个 n 维仿射空间容许一个具最大阶 $r=n^2+n$ 的运动群．其他仿射联络空间的运动群的阶都属于自然数序列的区间 $[1,n^2+n]$，但并不是这区间的每个数都可以是完全运动群的阶．

由那些不是完全运动群的阶的数所组成的具有最大长度的区间称为空隙（lacunas），它们在这个自然数序列区间内的补集称为凝聚段（condensation segments）　一个空间称为 k 次空隙空间，如果它的完全运动群的阶属于序列数 k 的凝聚段　一个主要问题是缺项的分布和对于最后那些运动群本身和它们所对应的缺项空间所定义的完全运动群可能的阶的凝聚段的分布．这个问题与固体的自由度的研究有密切关系．

常曲率 Riemann空间是唯一的容许一个阶为 $n(n+1)/2$ 的完全运动群的空间．在一切其他情形，一个空间的运动群有较少的参数．一个带有仿射联络的流形容许一个（阶为 $n(n+1)$的）完全运动群，当且仅当这个联络是对称的，而这时曲率等于零，在这一情形运动群是一个**一般线性群**（general linear group）．

参考文献

[1] Егоров, И П , Итоги науки Алгебра, Топология, Геометрия, 1965, М , 1967, 375-428

[2] Егоров, И П , Движения в пространствах аффинной связности, Казань, 1965

[3] Рашевский, П К , Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд , М , 1967

И П Егоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kobayashi, S , Transformation groups, Springer, 1972

[A2] Bredon, G , Introduction to compact transformation groups, Acad Press, 1972

郝钢新 译

p^∞ 型群 [group of type p^∞, группа типа p^∞]

见**拟循环群**（quasi-cyclic group）．

【补注】 在西方有时称为 Prufer 群（Prüfer group）

群概形 [group scheme, групповая схема]

代数群（algebraic group）概念的推广．设 Sch/S 是由基概形 S 上的概形所构成的范畴，这个范畴中的**群对象**（group object）就是概形 S 上的群概形（group scheme over the scheme S）或称群 S 概形（group S-

scheme)，或 S 概型群（S-scheme group)）对 S 上的群概形 G，点函子 h_G $X \to \mathrm{Hom}_{Sch/S}(X,G)=G(X)$ 是从范畴 Sch/S 到群范畴 Gr 中的反变函子 S 上的群概形的范畴 $S-$Gr 就定义为这种函子的范畴的由**可表示函子**（representable functor）构成的完全子范畴

例 1)域 k 上的代数群是 k 上有限型的约化群概形．(域上有限型的约化群概形有时也被称为代数群)

2)将 S 概形 X 对应到其结构层的截面环 $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ 的加法(或乘法)群的函子是可表示的，对应的 S 上的群概形称为加法群概形（additive group scheme)（或乘法群概形（multiplicative group scheme))，记为 $G_{a,S}$（或 $G_{m,S}$)．对任何 S 概形 S_1 有

$$G_{a,S}\times_S S_1\simeq G_{a,S_1},\quad G_{m,S}\times_S S_1\simeq G_{m,S_1}$$

3)任一抽象群 Γ 定义了一个群概形 $(\Gamma)_S$，它是一族与概形 S 同构的概形 $(S_g)_{g\in G}$ 的直和，对应的函子将 S 概形 X 映到直和 $\Gamma^{\pi_0(X)}$，这里 $\pi_0(X)$ 是 X 的连通分支的集合

如果 G 是 S 上的群概形，那么对 S 中任何点 s，纤维 $G_s=G\otimes_S k(s)$ 是这点处的剩余域 $k(s)$ 上的群概形 特别地，任何在 S 上有限型的群概形都可看作以基 S 参数化的一族代数群 概形论的术语可以扩展到群概形上，因此可以谈论光滑、平坦、有限和奇异的群概形

对任何群概形 G，对应的约化概形 G_{red} 也是一个群概形，且典范闭嵌入 $G_{red}\to G$ 是群概形的态射 在完满域上局部有限型的每一约化群概形光滑，而 Cartier 定理（Cartier theorem）表明特征 0 域上局部有限型的每一群概形是约化的

群概形中有许多与代数群理论相类似的概念和结果 有与仿射代数群的 Borel-Chevalley 结构定理相类似的结果（[5]），群概形扩张及群概形上的齐性空间的上同调理论已有发展（[2],[5]） 另一方面，许多群概形理论所特有的问题和结果都与基概形和这一群概形本身的结构层的幂零元的存在性有关 因此群概形的无限小形变、形式形变（[4]） 向零特征的提升问题，群概形的形式完全化（见**形式群**（formal group)）都得到了研究 群概形在正特征域上的代数群的研究中自然出现 见 **p 可除群**（p-divisible group)

仿射基概形 S=Spec(B)上的仿射群概形的概念与交换 **Hopf 代数**（Hopf algebra）的概念对偶，如当 A 是交换 Hopf 代数时，G=Spec(A) 是一群概形，这就是这种对偶的情况

亦见**交换群概形**（commutative group scheme)，**有限群概形**（finite group scheme)

参考文献

[1] Tate, J and Oort, F, Group schemes of prime order Ann Sc Ecole Norm Sup, 3(1970), 1-21

[2] Demazure, M and Gabriel, P, Groupes algebriques, 1, Masson 1970

[3] Oort, F, Commutative group schemes, Springer, 1966

[4] Oort, F, Finite group schemes, local moduli for abelian varieties and lifting problems Compos Math, 23(1971), 256-296

[5] Demazure, M and Grothendieck, A, Schemas en groupes Ⅰ-Ⅲ, Lecture notes in math, 151-153, Springer

И В Долгачев 撰

【补注】 Abel（群）簇是群概形的其他的例子

参考文献

[A1] Mumford, D, Abelian varieties, Oxford Univ Press, 1974

刘先仿 译

速度群 [group velocity, групповая скорость]

描述弥散介质中波动过程传播速率的物理量．用带有可变系数的**波动方程**（wave equation）来描述此波动过程

$$\frac{1}{c^2(z)}\ u_{tt}-u_{xx}-u\ \ =0,$$

$$0\leqslant z<\infty,\ -\infty<x<\infty,\quad c(z)>0$$

所求的解满足条件

$$u\big|_{z=0}=0,\quad u_{\to\infty}\to 0,$$

并具有下列形式

$$u=e^{i\omega(k)t-ikx}v(z)$$

函数 $v(z)$ 应当是下列一维边界值问题的非零解，

$$v''+\left[k^2-\frac{\omega^2}{c^2(z)}\right]v=0,\ v\big|_{z=0}=0,\ v_{z\to\infty}\to 0$$

如果在 k 的某个变化范围内，存在着有限个 $\omega_j(k)$，$k=1,2,$ ，对它们来说这个问题具有一个非零解 v_j，那么量 $V=\omega_j(k)/k$ 和 $U=d\omega_j/dk$ 分别称为波的相速度（phase velocities）和群速度（group velocities）

$$u_j=e^{i\omega(k)t-ikx}v_j(z)$$

这两个速度通过 Rayleigh 公式（Rayleigh formula）互相关连

$$U=V-\frac{\lambda dV}{d\lambda},$$

其中 λ 是波长

参考文献

[1] Мандельштам, Л И, Полное собрание трудов, т

5, Л , 1950, 315 – 319, 419 – 425, 439 – 467

[2] Горелик, Г С , Колебания и волны, 2 изд , М , 1959

В М Бабич 撰

【补注】

参考文献

[A1] Brillouin, L , Les tenseur en mécanique et en elasticité, Masson, 1949

韩耀新、赵金平 译

具有有限性条件的群 [group with a finiteness condition, группа с условием конечности]

一个群，它的元素或子群满足一些有限性条件．在群论中，有限性条件（finiteness condition）的意思是任何一个为一切**有限群**（finite group）所具有的性质然而却一定存在不具有该性质的无限群　在群论中研究下列有限性条件是最重要的　子群降链的有限性（关于子群的极小条件，见 **Artin 群**（Artinian group）），子群升链的有限性（关于子群的极大条件，见 **Noether 群**（Noetherian group）），群是有限生成的（见**有限生成群**（finitely-generated group）），元素的阶的有限性（周期性，见**周期群**（periodic group）），有限生成的子群的有限性（局部有限性，见**局部有限群**（locally finite group）），秩的有限性（见**群的秩**（rank of a group）），以及共轭类的有限性（见**共轭元**（conjugate elements））

对于具有有限性条件的群系统的研究起源于对于子群满足极小条件的**局部幂零群**（locally nilpotent group）和**局部可解群**（locally solvable group）的研究，开始于 1939－1940（[1]）　作为这个研究的一个结果，证明了这种类型的无限群是有限多个**拟循环群**（quasi-cyclic group）的直积的有限扩张　还不知道（1977）这个定理对于子群满足极小条件的任意无限群是否成立　如果假设了局部有限性，这个问题的答案是肯定的（[5]）．研究具极小条件的群所得到的重要结果丰富了群的理论　加上极小条件的真正限制不是对所有子群，而只是对那些满足某种附加特殊要求（像是正规性或交换性，或是具有限指数或阶是素数幂）的子群．对于具极大条件的群的研究所获得的结果比具极小条件的群少　具极大条件的**可解群**（solvable group）是**多循环群**（polycyclic group）　在可解群里，对于子群的极大条件与对于 Abel 子群的极大条件是等价的（[4]）．在局部可解群里，对于极小条件来说也有类似的结果．对于子群的极大条件与这个群及其所有子群都是有限生成的这一事实等价　对于**幂零群**（nilpotent group）来说，这个条件等价于群本身是有限生成的

一个群具有有限秩（finite rank），如果在它的每一个有限生成的子群里，生成元的最小个数不超过一个固定的数　这个有限性条件被广泛地用于研究可解群和局部幂零群　特别，人们发现，如果一个局部幂零的**无挠群**（group without torsion）的所有 Abel 子群都是有限秩的，那么这个群本身也是有限秩的（[4]）

对于所有共轭类都是有限的群的研究产生了许多重要的结果，研究得最彻底的是分层有限群（layer-finite groups），即是这样的群，其中具有每个阶的元素的集合都是有限的．对于这种群的研究实际上已得出对它们的结构的完全描述　特别地，由这个描述得出，分层有限群的类与满足准素子群极小条件的**局部正规群**（locally normal group）的类是等同的．

参考文献

[1] Черников, С Н , 《Успехи матем наук》, **14** (1959), 5 (89), 45–96

[2] Robinson, D J S , Finiteness condition and generalized soluble groups, 1-2, Springer, 1972

[3] Курош, А Г , Теория групп, 3 изд , М , 1967（中译本 А Г 库洛什，群论，高等教育出版社，上册，1987，下册，1982）

[4] Мальцев, А И , 《Матем сб》, **28** (70) (1951), 3, 567–588

[5] Шунков, В П , 《Алгебра и логика》, **9** (1970), 5, 579–615

С Н Черников 撰

【补注】　所有共轭类都是有限的群称为 FC 群．

郝钢新 译

具有极大条件的群 [group with the maximum condition, группа с условием максимальности]

见 **Noether 群**（Noetherian group）

具有极小条件的群 [group with the minimum condition, группа с условием минимальности]

见 **Artin 群**（Artinian group）

具有唯一开方法的群 [group with unique extraction of root, группа с однозначным извлечением корня], R 群（R-group）

一个群，对于其中任意元素 x, y 和任意自然数 n 来说，由等式 $x^n = y^n$ 必然得出 $x = y$　一个群 G 是一个 R 群，当且仅当它是无挠群且对于任意 $x, y \in G$ 和任意自然数 n 来说，由 $x^n y = y x^n$ 必然得出 $xy = yx$　一个 R 群分裂成秩为 1 交于单位元的 Abel 群的集合并．一个群是 R 群当且仅当它是无挠的且对**群的中心**（centre of a group）的商群是一个 $\dot{R}$ 群　R 群的子群，R 群的直积和完全直积（见**直积**（direct product））都是 R 群．以下的局部定理对于 R 群类来说成立　如果一个群 G 的所有有限生成的子群都是 R 群，则 G 本身也是 R 群　自

由群（free group），自由可解群（solvable group）和无挠局部幂零群（nilpotent group）都是 R 群　一切可除 R 群（D群（D-groups），亦见可除群（divisible group））的类在乘法和开方根运算下构成一个代数的簇

参考文献

[1] Курош，А Г，Теория групп，3 изд，М，1967（中译本 А Г 库洛什，群论，高等教育出版社，上册，1987，下册，1982）　　В М Копытов 撰　郝钢新 译

无挠群 [group without torsion 或 torsion free group，группа без кручения]

不含非平凡的有限阶元素的群　**自由群**（free group），自由**可解群**（solvable group），自由**幂零群**（nilpotent group）和**自由 Abel 群**（free Abelian group）都是无挠群．无挠群的**直积**（direct product），完全直积和自由积（见**群的自由积**（free product of groups））都是无挠群．一个无挠群 G 对于一个正规子群 H 的商群是无挠群，当且仅当对于一切 $x\in G$ 和任意自然数 n 来说，$x^n\in H$ 蕴涵 $x\in H$　一个无挠群通过一个无挠群的扩张是一个无挠群　如果一个群对于两个不同的素数 p 来说，是剩余有限 p 群（见**剩余有限群**（residually-finite group），p **群**（p-group）），那么它是一个无挠群

参考文献

[1] Курош，А Г，Теория групп，3 изд，М，1967（中译本 А Г 库洛什，群论，高等教育出版社，上册，1987，下册，1982）　　В М Копытов 撰　郝钢新 译

广群 [groupoid，группоид]

具有一个二元运算的**泛代数**（universal algebra）．在此种类型的代数中，是最广泛的一类　群，半群，拟群皆为特殊类型的广群．广群理论中的一个重要概念是运算同痕（isotopy）．假定（·）及（∘）是定义在 G 上的两个二元运算，如果存在 G 到 G 上的三个一一映射 α,β,γ 使得对任意 $a,b\in G$ 皆有 $a\cdot b=\gamma^{-1}(\alpha a\circ\beta b)$，则称（·）与（∘）是同痕的．如果一个广群同痕于一个**拟群**（quasi-group），那么它本身是一个拟群，如果一个具有单位元的广群同痕于一个群，那么它也同构于这个群　由于这个原因，群论中不使用同痕概念由于群的同痕与同构一致

一个具有消去律的广群是这样一个广群，在其中，只要等式 $ab=ac$，$ba=ca$ 之一成立，那么就有 $b=c$，其中 a,b,c 是广群的任意元素　任意一个具有消去律的广群可以嵌入到一个拟群中　一个拟群的同态象是一个具有除法的广群，即在这个广群中，方程 $ax=b$ 和 $ya=b$ 有解（但不必有唯一解）

具有一个部分二元运算（即不是对所有元素对皆有定义）的集合称为一个部分广群（partial groupoid）．一个自由部分广群的任一部分子广群是自由的

参考文献

[1] Курош，А Г，Лекции по общей алгебре，2，изд，М，1973（中译本　А Г 库洛什，一般代数学讲义，上海科学技术出版社，1962）．

[2] Cohn，P M，Universal algebra，Reidel，1981．

[3] Boruvka，O，Foundations of the theory of groupoids and groups，Wiley，1976

[4] Bruck，R H，A survey of binary systems，Springer，1958　　В Д Белоусов 撰

【补注】　在数学中，广群这个术语有另外一个与上面的意义不一致的用法，这个用法是由 H Brandt（[A1]）引入的，一个广群可以非常方便地定义为一个（小）**范畴**（category），在这个范畴中每一态射皆是一个同构，广群还有一个等价定义，集合 G 上有一个一元运算 $g\mapsto g^{-1}$ 和一个部分二元运算 $(g,h)\mapsto gh$．并且满足下列条件

1) gg^{-1} 和 $g^{-1}g$ 总有定义，

2) gh 有定义，当且仅当 $g^{-1}g=hh^{-1}$，

3) 如果 gh 及 hk 皆有定义，那么 $(gh)k$ 和 $g(hk)$ 皆有定义并且相等

4) 如果 $g^{-1}gh$，$hg^{-1}g$，$gg^{-1}h$，hgg^{-1} 中任一个有定义，那么它就等于 h．

作为范畴的特殊情形的广群，在范畴理论的很多应用领域中起着重要作用，这些领域包括代数（[A2]），微分几何（[A3]）及拓扑（[A4]，[A5]）．

参考文献

[A1] Brandt，H，Ueber eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes，*Math Ann*，**96**（1926），360－366．

[A2] Higgins，P J，*Categories and groupoids*，v Nostrand-Reinhold，1971

[A3] Ehresmann，C，Structures locales et catégories ordonnés，in *Oeuvres complètes et commentées*，Partie II，1980 Supplément aux Cahiers de Topologie et Géométrie Differentielle Catégoriques

[A4] Brown，R，Elements of modern topology，McGraw-Hill，1968

[A5] Brown，R，From groups to groupoids a brief survey，*Bull London Math Soc*，**19**（1987），113－134．

卢景波 译

增长标形 [growth indicatrix，роста индикатриса]，整函数的指标（indicator of an entire function）

刻画有限 $\rho(>0)$ 阶和有限 σ 型的整函数 $f(z)$ 沿射线 $\arg z=\varphi$ 对于大的 $r(z=re^{i\varphi})$ 的增长的量

$$h(\varphi)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho}}$$

例如，对于函数

$$f(z)=e^{(a-ib)z^{\rho}},$$

其阶为 ρ，增长标形等于 $h(\varphi)=a\cos\rho\varphi+b\sin\rho\varphi$，对于函数 $\sin z$，其阶为 $\rho=1$，而 $h(\varphi)=|\sin\varphi|$．函数 $h(\varphi)$ 处处有限，连续，在每个点具有左、右导数且可能除去可数个点外处处有导数，恒有 $h(\varphi)\leqslant\sigma$，且至少有一 φ 使得 $h(\varphi)=\sigma$，并具有三角凸性（property of trigonometric convexity），即如果

$$h(\varphi_1)\leqslant H(\varphi_1),\ h(\varphi_2)\leqslant H(\varphi_2),$$

$$H(\varphi)=a\cos\rho\varphi+b\sin\rho\varphi,$$

$$\varphi_1<\varphi_2,\ \varphi_2-\varphi_1<\min\left(\frac{\pi}{\rho},\ 2\pi\right),$$

则

$$h(\varphi)\leqslant H(\varphi),\ \varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2.$$

下面的不等式成立．对于所有 $\varepsilon>0$，有

$$|f(re^{i\varphi})|\leqslant e^{[h(\varphi)+\varepsilon]r^{\rho}},\ r>r_0(\varepsilon),$$

其中 $r_0(\varepsilon)$ 不依赖于 φ

对于在一个角域内解析且在该角域中为有限阶或有追近阶且为有限型的函数，也已引进了增长标形概念．

参考文献

[1] Левин, Б Я, Распределение корней целых функций, М, 1956 (英译本 Levin, B Ya, Distribution of zeros of entire functions, Amer Math Soc, 1980)

[2] Маркушевич, А И, Теория аналитических функций, 2 изд, т 2, М, 1968 (中译本 А И 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957，第 7 章)．

А Ф Леонтьев 撰

【补注】 也已引进多变量整函数的指标，例如，Lelong 正则化径向指标（Lelong regularized radial indicator）

$$L^{*}(z)=\overline{\lim_{w\to z}}\ \overline{\lim_{t\to\infty}}\ \frac{\ln|f(t,w)|}{t^{\rho}},$$

其中 f 是 $\mathbf{C}^n$ 上 $\rho(>0)$ 阶有限型整函数，$z\in\mathbf{C}^n$．(当 $n=1$ 时，$h(\varphi)=L^{*}(e^{i\varphi})$．)

指标 $L^{*}(z)$ 是 ρ 齐次**多重次调和函数**（plurisubharmonic function）．这对应于一维情形的凸性，然而它一般不是连续函数．

参考文献

[A1] Ронкин, Л И, Введение в теорию целых функций многих переменных, М, 1971 (英译本 Ronkin, L I, Introduction to the theory of entire functions of several variables, Amer Math Soc, 1974)

[A2] Lelong, P, Gruman, L, Entire functions of several variables, Springer, 1986

[A3] Boas, R P, Entire functions, Acad Press, 1954

沈永欢 译

Guichard 线汇 [**Guichard congruence**; **Гишара конгруэнция**]

直线的一种线汇，使得其焦网由焦曲面的曲率线所形成．每一个焦曲面的曲率中心曲面之一承载了一个由测地线所构成的焦网．Guichard 线汇的可展曲面的球面象是一个 **Чебышев 网**（Chebyshev net）Guichard 线汇的焦曲面称为 Guichard 曲面（Guichard surfaces）Guichard 线汇是根据第一个研究此线汇的 G Guichard (1889) 的姓名而命名的．

参考文献

[1] Фиников, С П, Теория конгруэнций, М-Л, 1950

[2] Шуликовский, В И, Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М, 1963

В Т Базылев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Guichard, G, Surfaces rapporteés à leurs lignes asymptotiques et congruences rapporteés à leurs développables, *Ann Sc Ec Norm Sup* (3), **6** (1889), 333 – 348

沈纯理 译

H

H 闭空间[H-closed space, H-замкнутое пространство], 绝对闭空间(absolutely-closed space)

一个 **Hausdorff 空间**(Hausdorff space), 在映入任意 Hausdorff 空间 Y 的任何拓扑嵌入下, 被映成 Y 中的闭集. H 闭空间的特性是 空间的任何开覆盖都含有有限子族, 其元素的闭包构成该空间的覆盖 正则的 H 闭空间是紧空间. 如果一个空间的每个闭子空间都是 H 闭空间, 则该空间本身是紧空间. Hausdorff 空间的 H 闭扩张理论已经发展起来.

参考文献

[1] Александров, П С, Урысон, П С, Мемуар о компактных топологических пространствах, 3 изд, М, 1971

[2] Илиадис, С Д, Фомин, С В, 《Успехи матем наук》, **21** (1966), 4, 47 – 76

[3] Малыхин, В И, Пономарев, В И, в кн Итоги науки и техники Алгебра Топология Геометрия, **13** (1975), 149 – 230 В И Пономарев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Porter, J R and Woods, R G, Extensions and absolutes of Hausdorff spaces, Springer, 1988

胡师度、白苏华 译

h 配边 [h-cobordism, h-кобордизм]

一个**下配边**(bordism)(W, M_0, M_1),其中 W 是一个紧流形, 它的边界是闭流形 M_0, M_1 的不交并, M_0, M_1 是 W 的**形变收缩核**(deformation retract). 最简单的例子是平凡 h配边

$$(M\times[0, 1], M\times\{0\}, M\times\{1\})$$

两个流形 M_0 和 M_1 称为 h 配边的(h-cobordant), 如果存在一个连接它们的 h 配边 W

如果 (W, M_0, M_1)是 h 配边使得 W, M_0, M_1 是单连通可微的(或分片线性)流形且 $\dim W\geqslant 6$,那么 W 微分同胚(或分片线性同构)于$M_0\times[0, 1]$. $W\approx M_0\times[0, 1]$, 所以 $M_0\approx M_1$(h 配边定理 (h-cobordism theorem)[4]) 这样证明同构 $M_0\approx M_1$ 化为提供一个可通过代数拓扑的方法得到的 h 配边. 因为这个理由, 从通过单连通流形的同伦分类到它们的微分同胚(或分片线性同构)型的分类,此定理是基本的. 因此, 如果 W^n $(n\geqslant 6)$是有单连通边界的紧微分流形,那么它就微分同胚于圆盘 D^n 如果 M^n $(n\geqslant 5)$ 是同伦等价于球面 S^n 的流形, 那么它就同胚(甚至分片线性同构)于 S^n(广义 Poincaré 猜想(generalized Poincaré conjecture))

h 配边定理允许将球面 S^n $(n\geqslant 5)$上的微分构造分类([6]), 也允许在任意闭的单连通流形 $M^n$$(n\geqslant 5)$ 的同伦型上的分类([1])

在具有 $\pi_1 W\neq\{1\}$ 的 h 配边 (W, M_0, M_1)的情形, 一般没有从 W 到 $M_0\times[0, 1]$ 的微分同胚.

所有具有 $\dim W\geqslant 6$ 和固定M_0的 h 配边 (W, M_0, M_1)由某些 Abel 群, 即群 $\pi_1 M_0$ 的 **Whitehead 群**(Whitehead group)$\mathrm{Wh}\,\pi_1$来分类. 与给定的 h 配边相对应的是对 (W, M_0)的一个不变量 $\mathrm{Wh}\,\pi_1$ 的一个元素, 用 $\tau(W, M_0)$表示并且称为给定 h 配边的挠率(torsion)(有时称为 **Whitehead 挠率**(Whitehead torsion)) 如果 $\tau(W, M_0)=0$(或者等价地 $\tau(W, M_1)=0$), 那么 h 配边就称为 s 配边(s-cobordism) 如果 (W, M_0, M_1)是使 $\dim W\geqslant 6$ 的 h 配边,那么 $\tau(W, M_0)$为零,当且仅当 $W\approx M_0\times[0,1]$ (s 配边定理(s-cobordism theorem)) 从 $\mathrm{Wh}\{1\}=0$ 这一事实来看, h 配边定理是这个定理的特殊情形. s 配边定理对拓扑流

形也成立([9])

对 h 配边 (W, M_0, M_1),挠率 $\tau(W, M_1)$与 $\tau(W, M_0)$一起被定义,如果给定的 h 配边是可定向的,则 $\tau(W, M_0)=(-1)^{n-1}\tau^*(W, M_1)$,其中 $n=\dim W$ 且在群 $\mathrm{Wh}\,\pi_1$ 中元素 τ^* 共轭于 τ 特别地,如果 π_1 是有限的和 Abel 的,则 $\tau^*=\tau$

如果两个 h 配边 (W, M_0, M_1)和 $(W'; M_1, M_2)$沿 M_1 粘合为 h 配边 $(W\cup W', M_0, M_2)$,则

$$\tau(W\cup W', M_0)=\tau(W, M_0)+\tau(W', M_1)$$

如果 W 的两片沿 M_1 粘合起来,其中 $\dim W$ 是奇数且 $\pi_1=\mathbf{Z}_5$,则得到一个 h 配边 $(2W, M_0, M_0')$,这里当不存在从 W 到 $M_0\times[0,1]$ 的微分同胚时 $M_0=M_0$,即 $M_0\approx M_1$ 并不蕴涵着连接它们的 h 配边是平凡的.

如果 M_0 是闭连通流形且 $\dim M_0\geqslant 5$,那么对任意 $\tau\in\mathrm{Wh}\,\pi_1 M_0$,存在 h 配边 (W, M_0, M_1)有 $\tau(W, M_0)=\tau$ 如果 (W, M_0, M_1)和 (W', M_0, M_1) $(\dim W\geqslant 6)$有相同的挠率 $\tau(W, M_0)=\tau(W', M_0)$,则相对于 M_0 有 $W\approx W'$ 当 $\dim M_0$ 是偶数和 $\pi_1 M_0$ 为有限时,则存在与 M_0 h 配边的不同的流形的有限集.当 $\dim M_0$ 是奇数时,就不是这种情形

如果两个同伦等价的流形 M_1 和 M_2 被嵌入 N 充分大的 $\mathbf{R}^N$ 中,并且它们的法丛是平凡的,那么 $M_1\times S^N$ 和 $M_2\times S^N$ 是 h 配边的.此外,如果 M_1 和 M_2 属于同一个**单同伦型**(simple homotopy type),即如果这个同伦等价的挠率为零,则 $M_1\times S^N\approx M_2\times S^N$

如果 (W, M_0, M_1)是 h 配边,P 是闭流形,则存在一个 h 配边 $(W\times P, M_0\times P, M_1\times P)$ 满足 $\tau(W\times P, M_0\times P)=\tau(W, M_0)\chi(P)$,其中 $\chi(P)$ 是 P 的 **Euler 示性数**(Euler characteristic) 如果 $\dim W\geqslant 5$,且 $P=S^1$,则

$$W\times S^1\approx M_0\times S^1\times[0,1]\approx M_1\times S^1\times[0,1]$$

特别地,$M_0\times S^1\approx M_1\times S^1$,更进一步,两个相同维数 $\geqslant 5$ 的闭流形 M_0 和 M_1 是 h 配边的当且仅当 $M_0\times\mathbf{R}^1\approx M_1\times\mathbf{R}^1$

h 配边结构对 $n<6$ 还没有完全被阐明(1978) 因此,有以下的否定的结果([8]) 存在一个 h 配边 (W, T^4, T^4),没有从 W 到 $T^4\times[0,1]$ 的微分同胚,其中 T^4 是四维环面,因为 $\mathrm{Wh}\,\pi_1 T^4=0$,这意味着 s 配边定理在 $n=5$ 时失效

参考文献

[1] Новиков, С П 《Изв АН СССР Сер матем》, **28** (1964), 2, 365 - 474

[2] Milnor, J , Lectures on the h - cobordism theorem, Princeton Univ Press, 1965

[3] Milnor, J , Whitehead torsion, *Bull Amer Math Soc*, **72** (1966), 358 - 462

[4] Smale, S , On the structure of manifolds, *Amer J Math* , **84** (1962), 387 - 399

[5] Milnor, J , Sommes des variétés différentiables et structures différentiables des sphères, *Bull Soc Math France*, **87** (1959), 439 - 444

[6] Kervaire, M and Milnor, J , Groups of homotopy spheres I, *Ann of Math* (2), **77** (1963), 504 - 537

[7] Mazur, B , Relative neighbourhoods and the theorems of Smale, *Ann of Math* , **77** (1963), 232 - 249

[8] Siebenmann, L , Disruption of low - dimensional handlebody theory by Rohlin s theorem, in Topology of manifolds, Markham, 1969, 57 - 76

[9] Kirby, R and Siebenmann, L , On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung, *Bull Amer Math Soc* , **75** (1969), 742 - 749

[10] Kervaire, M , Le théorème de Barden - Mazur - Stallings, in M Kervaire, G de Rham and S Maumary (eds) Torsion et type simple d'homotopie, Lecture notes in math , Vol 48, Springer, 1967, 83 - 95

[11] Thom, R , Les classes caractéristiques de Pontryagin des variétés triangulées, Univ Nac Aut Mexico & UNESCO, 1958, 54 - 67

[12] Rourke, C P and Sanderson, B J , Introduction to piecewise - linear topology, Springer, 1972

Ю Б Рудяк 撰

【补注】 对广义的 Poincaré 猜想,也见[A1]

参考文献

[A1] Smale, S , Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, *Ann of Math* (2), **74** (1961), 391 - 406

徐森林 译 薛春华 校

H^{∞} 控制理论 [H^{∞} - control theory, H^{∞} - регулирования теория]

【补注】 控制理论的一个分支 这里动态系统(见**自动控制理论**(automatic control theory))的性能是用 H^{∞} 范数来评价的. Banach 空间 H^{∞} (以 G. H Hardy) 命名,见 **Hardy 类** (Hardy classes))是由在右半开平面内解析且具有有界模的复变量复值函数构成.这样函数的范数是上确界模 (supremum modulus)

$$\|F\|_{\infty}=\sup_{\mathrm{Re}\,s>0}|F(s)|$$

由 **Fatou 定理** (Fatou theorem) 这样的函数对几乎所有 ω 具有边界值 $F(i\omega)$,而且,

$$\|F\|_{\infty}=\operatorname*{ess\,sup}_{\omega}|F(j\omega)|$$

H^{∞} 控制的理论是由 G Zames [A1], [A2], [A3] 创立的.他把一个基本的反馈问题化为带有一个算子范数

的优化问题，特别是 H^∞ 范数的优化问题 同一时期相关的工作有 J W. Helton [A4] 和 A Tannenbaum [A5] 的工作.

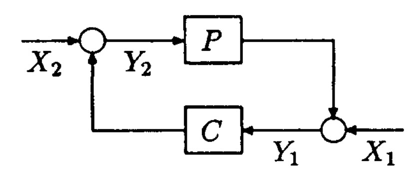
该理论处理的动态系统表示为积分算子的形式

$$y(t)=\int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

这里 g 足够正则，使得输入-输出映射 $x\mapsto y$ 成为 $L_2[0,\infty)$ 上的一个有界算子．取 Laplace 变换得 $Y(s)=G(s)X(s)$ 函数 G 称为系统的**传递函数** (transfer function)．由于积分算子是有界的，故 G 属于 H^∞ 此外，G 的 H^∞ 范数等于上述积分算子的范数，即

$$\|G\|_\infty=\sup_{\|x\|_2\leq 1}\|y\|_2 \qquad \text{(A1)}$$

以下两个典型的问题导致具有 H^∞ 范数的优化准则 第一个是如下反馈系统的鲁棒稳定性问题



这里 P 和 C 是 H^∞ 中的传递函数，X_1,X_2,Y_1,Y_2 是信号的 Laplace 变换，P 表示一个"对象"，即受控的动态系统，C 表示"控制器"(亦见**自动控制理论** (automatic control theory)) 上图表示下述两个方程

$$Y_1=X_1+PY_2,\quad Y_2=X_2+CY_1,$$

由此可解得

$$\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{1-PC} & \dfrac{P}{1-PC}\\ \dfrac{C}{1-PC} & \dfrac{1}{1-PC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}$$

因此，反馈系统的输入-输出映射有四个传递函数．如果这四个传递函数都在 H^∞ 中，则反馈系统称为是内部稳定的．为此一个简单的充分条件是 $\|PC\|_\infty<1$

内部稳定性称为是鲁棒的，是指它在 P 的扰动下仍能保持 有几种可能的扰动概念，其中典型的是加性扰动．于是设 P 受扰动后变为 $P+\Delta P$, ΔP 在 H^∞ 中 对于 ΔP, 仅假设 $|\Delta P(j\omega)|$ 的界是已知的，即

$$|\Delta P(j\omega)|<|R(j\omega)| \quad 对几乎所有\ \omega$$

其中 $R\in H^\infty$ J C Doyle 和 G Stein [A6] 证明 为了在所有这样的扰动下仍能保持内部稳定性，当且仅当

$$\|RC(1-PC)^{-1}\|_\infty<1 \qquad \text{(A2)}$$

这就导致了鲁棒稳定性设计问题 (robust stability design problem) 给定 P 和 R, 寻找 C, 使得反馈系统是内部稳定的，且 (A2) 成立．

第二个问题涉及的是同一个反馈系统 设 $X_2=0$, X_1 表示一个干扰信号，目标是减小 X_1 对输出 Y_1 的影响．从 X_1 到 Y_1 的传递函数等于 $(1-PC)^{-1}$ 另外假定干扰不是一个固定的信号，而可能是另一个系统的输出，该系统的输入在 $L_2[0,\infty)$ 中，并且具有单位范数．设后一系统的传递函数 W 在 H^∞ 中．于是由 (A1), y_1 在所有这些干扰下的最大 $L_2[0,\infty)$ 范数等于 $\|W(1-PC)^{-1}\|_\infty$ 这就导致所谓扰动抑制问题 (disturbance attenuation problem) 给定 P 和 R, 寻找 C, 使达到内部稳定性，且使 $\|W(1-PC)^{-1}\|_\infty$ 最小．

以上两个问题是更一般的标准 H^∞ 控制问题 (standard H^∞ control problem) 的特殊情形．它可以通过化为 Nehari 问题来解决，即化为用 H^∞ 中的函数来近似 L_∞ 中的函数 (虚轴上的有界函数) 的问题．该理论的简介见 [A7], 详细的讨论见 [A8]

参考文献

[A1] Zames, G, Feedback and complexity, Special plenary lecture addendum, in *IEEE Conf Decision Control*, IEEE, 1976

[A2] Zames, G, Optimal sensitivity and feedback weighted semi-norms, approximate inverses, and plant invariant schemes, in *Proc Allerton Conf*, IEEE, 1979

[A3] Zames, G, Feedback and optimal sensitivity model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses, *IEEE Trans Auto Control*, **AC-26** (1981), 301-320

[A4] Helton, J W, Operator theory and broadband matching, in *Proc Allerton Conf*, IEEE, 1979

[A5] Tannenbaum, A, On the blending problem and parameter uncertainty in control theory, *Techn Report Dept Math Weizmann Institute* (1977)

[A6] Doyle, J C and Stein, G, Multivariable feedback design concepts for a classical modern synthesis, *IEEE Trans Auto Control*, **AC-26** (1981), 4-16

[A7] Francis, B A and Doyle, J C, Linear control theory with an H^∞ optimality criterion, *SIAM J Control and Opt*, **25** (1987), 815-844

[A8] Francis, B A, A course in H^∞ control theory, Lecture notes in control and information sci, 88, Springer, 1987

夏小华 译 冯德兴 校

H 空间 [*H*-space, *H*-пространство]

带有乘积运算的拓扑空间而且乘积具有两侧同伦单位元素 更确切些说，一个带基点的拓扑空间 (X,e)，以及给定的连续映射 $m\ \ X\times X\to X$ 称为 *H* 空间 (*H*-space) 假如 $m(e,e)=e$, 并且若映射 $X\to X$, $x\mapsto m(x,e)$ 与 $x\mapsto m(e,x)$ 均 rel(e,e) 同伦于恒等映射．基点 e 称为 *H* 空间 X 的同伦单位元 (homo-

topy identity） 有时，“H空间”一词在较窄的意义下使用 要求 $m . X\times X\to X$ 为同伦结合的，即映射

$$m\circ(m\times \mathrm{id}),\ m\circ(\mathrm{id}\times m)\quad X\times X\times X\to X$$

为 rel(e, e) 同伦．有时还要求存在同伦逆（homotopy-inverse），即有映射 $\mu\ \ (X, e)\to(X, e)$ 使得映射

$$x\mapsto m(x, \mu(x)),\ x\mapsto m(\mu(x), x)$$

均同伦于常值映射 $X\mapsto e$ 例如，对于任何带基点的拓扑空间 Y，**闭路空间**（loop space）ΩY 为同伦结合的 H 空间，并具有同伦逆元素，而 $\Omega^2 Y=\Omega(\Omega Y)$ 甚至是同伦交换的 H 空间，即对于映射 $X\times X\xrightarrow{m} X$，下面两个映射

$$(x, y)\mapsto m(x, y),\ (x, y)\mapsto m(y, x)$$

是同伦的．H 空间的上同调群构成 **Hopf 代数**（Hopf algebra）

参考文献

[1] Boardman, J and Vogt, P, Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces, Springer, 1973

А Ф Харшиладзе 撰

【补注】（具备同伦结合性与同伦逆存在的）H 空间的重要性主要来自这样一个事实，即在任意空间到 H 空间的映射同伦类集合上可诱导出一个群结构．见 [A1]

参考文献

[A1] Spanier, E H, Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966

Haag 定理 [Haag theorem, Хаага теорема]

【补注】 正则**量子场论**（quantum field theory）方面的 Haag 定理（[A1]，亦见 [A4]）、以其广义形式（[A2]）阐明· 一个正则量子场对固定 t 1）是不可约的，2）具有一个循环向量 Ω，它 a）被 Hamilton 量（即时间平移的生成元）所湮没，和 b）作为平移不变态是唯一的，以及 3）在 Фок 表示中在时刻 t 与自由场是酉等价的，它本身是一自由场

Haag 定理反映下列事实 正则量子动力学由基态（[A3]）或“真空”的选择而确定．因为根据假设，与自由场共享基态 Ω 的量子场，本身也是自由场，相互作用场生成 CCR（正则对易关系）的非 Фок 表示（见**对易和反对易关系的表示**（commutation and anti-commutation relationships, representation of））

参考文献

[A1] Haag, R, On quantum field theories, *Danske Mat-Fys Medd*, **29** (1955), 12, 17 − 112

[A2] Emch, G, Algebraic methods in statistical mechanics and quantum field theory, Wiley, 1972

[A3] Streit, L, Energy forms Schrodinger theory, processes, New stochastic methods in physics, *Physics reports*, **77** (1980), 3, 363 − 375

[A4] Streater, R F and Wightman, A S, PCT, spin and statistics, and all that, Benjamin, 1964

徐锡申 译

Haar 条件 [Haar condition, Хаара условие]

关于连续函数 $x_k(k=1,\ \ ,n)$上的一个条件，它们在 Euclid 空间的有界闭集 M 上是线性无关的．由 A Haar（[1]）给出的 Haar 条件保证了 M 上每一个连续函数 f 在函数系 $\{x_k\}$ 中最佳逼近多项式（polynomial of best approximation）的唯一性，所谓 f 在系 $\{x_k\}$ 中的最佳逼近多项式是指下述形式的函数

$$P_{n-1}(t)=\sum_{k=1}^{n} c_k x_k(t) \qquad (*)$$

且满足

$$\max_{t\in M}|f(t)-P_{n-1}(t)|=\min_{\{\alpha_k\}}\max_{t\in M}\left|f(t)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k(t)\right|.$$

Haar 条件是指任何形如 (*) 的非平凡多项式在 M 中至多有 $n-1$ 个不同零点．对每个 M 上连续函数 f，在函数系 $\{x_k\}_{k=1}^n$ 中存在唯一最佳逼近多项式的充分必要条件是该系满足 Haar 条件．满足 Haar 条件的函数系称为 **Чебышев 系**（Chebyshev system）．对于这种函数系，（关于交错的）**Чебышев 定理**（Chebyshev theorm）和 **de la Vallée-Poussin 定理**（de la Vallée-Poussin theorem）成立 Haar 条件保证 $[a, b]$ $(M=[a, b])$ 上的每个连续函数，按照 $L[a, b]$ 的度量在函数系 $\{x_k\}_{k=1}^n$ 中的最佳逼近多项式唯一

参考文献

[1] Haar, A, Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Functionen, *Math Ann*, **78** (1918), 249 − 311

[2] Ахиезер, Н И Лекции по теории аппроксимации, 2 изд, М, 1965（中译本 Н И 阿赫叶惹尔，逼近论讲义，科学出版社，1957）

Ю Н Субботин 撰

【补注】

[A1] Cheney, E W, Introduction to approximation theory, McGraw-Hill, 1966, Chap 3

[A2] Holland, A S and Sahney, B N, The general problem of approximation and spline functions, R E Krieger, 1979, Chapt 2

[A3] Lorentz, G G and Riemenschneider, S D, Approximation and interpolation in the last 20 years, in Birkhoff interpolation, Addison-Wesley, 1983, 19 − 55, in particular, 20 − 23.

[A4] Timan, A F, Theory of approximation of functions of a real variable, Pergamon, 1963, Chapt 2（译自俄文）

[A5] Rice, J R, The approximation of functions, 1, Addison-Wesley, 1964

[A6] Meinardus, G, Approximation of functions, theory and numerical methods, Springer, 1967

[A7] Bridges, D S, Recent development in constructive approximation theory, in A S Troelstra and D van Dalen (eds) The L E J Brouwer Centenary Symposium, North-Holland, 1982, 41 - 50
陈迪荣 译 葛显良 校

Haar 测度 [Haar measure, Хаара мера]

设 G 为局部紧群，M 为由 G 的一切紧子集族产生的 σ 环，M 上的非零正**测度**（measure）μ 称为 Haar 测度是指它在 G 的每个紧子集上取有限值并且满足下列两条件之一

(i) 左不变条件（condition of left-invariance）对一切 $E\in M$，$g\in G$，有 $\mu(E)=\mu(gE)$，

(ii) 右不变条件（condition of right-invariance）．对一切 $E\in M$，$g\in G$，有 $\mu(E)=\mu(Eg)$，

其中 $gE=\{gx\ \ x\in E\}$，$Eg=\{xg\ \ x\in E\}$ 因此，人们相应地说左不变 Haar 测度（left-invariant Haar measure）或右不变 Haar 测度（right-invariant Haar measure）．每个 Haar 测度是 μ 正则的（μ-regular），即对一切 $E\in M$，

$$\mu(E)=\sup_K\{\mu(K)\ \ K\subset E,\ K\text{为紧集}\}.$$

左不变（以及右不变）Haar测度是存在的且是唯一的，确切到一个正因子不计，这是 A Haar（[1]）建立的（在 G 是可分群的假定下）

若 f 为 G 上具紧支集的连续函数，则 f 在 G 上关于左不变 Haar 测度可积，且相应的积分为左不变的（见**不变积分**（invariant integration）），即

$$\int_G f(g)\,d\mu(g)=\int_G f(g_0g)\,d\mu(g),\quad \forall g_0\in G$$

右不变 Haar 测度有类似的性质 整个群 G 的 Haar 测度为有限当且仅当 G 是紧的

若 μ 为 G 上左不变 Haar 测度，则对每个 $g_0\in G$，下列等式成立

$$\int_G f(gg_0^{-1})\,d\mu(g)=\Delta(g_0)\int_G f(g)\,d\mu(g),$$

其中 Δ 为由 G 到正实数乘群 $\mathbf{R}^+$ 的连续同态，它不依赖于在 G 上有紧支集的连续函数 f 的选择．同态 Δ 称为 G 的模（modulus）；测度 $\Delta(g^{-1})d\mu(g)$ 是 G 上右不变 Haar 测度．若 $\Delta(g)\equiv 1$，则 G 称为幺模的（unimodular），此时左不变 Haar 测度也是右不变 Haar 测度并称为（双边）不变的（(two-sided) invariant） 特别，幺模群的例子有．紧群，离散群，Abel 局部紧群，连通半单 Lie 群以及幂零 Lie 群等．群的幺模性等价于下列条件 G 上每个左不变 Haar 测度 μ 也是逆不变的（inversely invariant），即对一切 $E\in M,\mu(E^{-1})=\mu(E)$

若 G 为 **Lie 群**（Lie group），则关于 G 上左不变（右不变）Haar 测度的积分用式子

$$\int_G f(x)\,d\mu(x)=\int_G f\omega_1\wedge\quad\wedge\omega_n$$

定义，其中 ω_j 是 G 上线性无关的左不变（右不变）一阶微分形式（见 **Maurer-Cartan 形式**（Maurer-Cartan form））且 $n=\dim G$ Lie 群 G 的模用式子

$$\Delta(x)=|\det \mathrm{Ad}(x)|,\ x\in G$$

定义，其中 Ad 为伴随表示（参看 **Lie 群的伴随表示**（adjoint representation of a Lie group））．

例 1) 加群 $\mathbf{R}$ 与商群 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$（圆周的旋转群）上的 Haar 测度与通常 **Lebesgue 测度**（Lebesgue measure）相同．2) **一般线性群**（general linear group）$\mathrm{GL}(n,\Phi)$，$\Phi=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$，是幺模的，它的 Haar 测度取下列形式

$$d\mu(x)=|\det x|^{-k}dx,$$

其中对 $\Phi=\mathbf{R}$，$k=n$，对 $\Phi=\mathbf{C}$，$k=2n$，而 dx 为域 Φ 上一切 n 阶矩阵组成的 Euclid 空间中的 Lebesgue 测度．

设 G 为局部紧群，H 为它的闭子群，X 为**齐性空间**（homogeneous space）G/H，Δ 与 δ 分别为 G 与 H 的模，并设 χ 为 G 到 $\mathbf{R}^+$ 中的连续同态，它在 H 上的限制由公式

$$\chi(h)=\delta(h)\Delta(h^{-1}),\ h\in H$$

给出，则存在 $X=G/H$ 中子集的 σ 环 T 上的正测度 ν，这里的 σ 环 T 是由 X 的紧子集的族产生的；该测度 ν 由条件

$$\int_{G/H}\left[\int_H f(gh)\,d\mu(h)\right]d\nu(g)=\int_G f(g)\,\chi(g)\,d\mu(g)$$

唯一地确定，其中 f 为 G 上有紧支集的任何连续函数，$g=gH\in X$，并且对 X 上有紧支集的一切连续函数 h，有

$$\int_X h(g^{-1}x)\,d\nu(x)=\chi(g)\int_X h(x)\,d\nu(x)$$

参考文献

[1] Haar, A, Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, *Ann of Math* (2), **34** (1933), 147-169

[2] Bourbaki, N, Elements of mathematics Integration, Addison-Wesley, 1975, Chapt 6, 7, 8 (译自法文)

[3] Weil, A, l'Intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, 1940

[4] Loomis, L H, An introduction to abstract harmonic

analysis, v Nostrand, 1953
[5] Helgason, S, Differential geometry and symmetric spaces, Acad Press, 1962

Д П Желобенко, А И Штерн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hewitt, E and Ross, K, A, Abstract harmonic analysis, 1-2, Springer, 1979

郑世骏 译

Haar 函数系 [Haar system, Хаара система]

经典的规范正交函数系之一 此函数系的 Haar 函数 (Haar functions) χ_n 在区间 [0, 1] 上定义如下

$$\chi_1(t)\equiv 1,\quad t\in[0,1],$$

如果 $n=2^m+k$, $k=1,\ \ ,2^m$, $m=0,1,\ \ $, 那么

$$\chi_n(t)=\begin{cases}\sqrt{2^m} & 对\ t\in\left[\frac{2k-2}{2^{m+1}},\ \frac{2k-1}{2^{m+1}}\right],\\ -\sqrt{2^m} & 对\ t\in\left[\frac{2k-1}{2^{m+1}},\ \frac{2k}{2^{m+1}}\right],\\ 0 & 对\ t\notin\left[\frac{k-1}{2^m},\ \frac{k}{2^m}\right].\end{cases}$$

在不连续内点 Haar 函数的值是它的左、右极限值之和之半，而在 [0,1] 端点的值是它内部值的极限 .

系 $\{\chi_n\}$ 由 A Haar 在 [1] 中定义 它在区间 [0,1] 上是正交的 . 在 [0,1] 上任意连续函数关于此系的 Fourier 级数一致收敛于该连续函数 此外，如果 $\omega(\sigma,f)$ 是 f 在 [0,1] 上的连续模，那么 f 的 Fourier-Haar 级数的 n 阶部分和 $S_n(f)$ 满足不等式

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|f(t)-S_n(t,f)|\leqslant 12\omega\left[\frac{1}{n},\ f\right],\quad n=1,\ 2,\ \ .$$

Haar 函数系是 $L_p[0,1]$ $(1\leqslant p<\infty)$ 空间的一个基 如果 $f\in L_p[0,1]$ 且 $\omega_p(\sigma,f)$ 是依 $L_p[0,1]$ 中度量的 f 的连续积分模，那么 (见 [3])

$$\|f-S_n(f)\|_{L_p[0\ 1]}\leqslant 24\omega_p\left[\frac{1}{n},\ f\right],\quad n=1,2,\ \ .$$

当 $1<p<\infty$ 时 Haar 系是 $L_p[0,1]$ 中的一个无条件基 (见 [6]) .

如果 f 在 [0, 1] 上是 Lebesgue 可积的，那么它的 Fourier-Haar 级数在任一 Lebesgue 点收敛于它，特别，级数在 [0,1] 上几乎处处收敛，这里在 [0,1] 的一固定点 Fourier-Haar 级数的收敛性 (与绝对收敛性) 仅依赖于该点的任意小邻域上的函数值 .

对 Fourier-Haar 级数以下性质彼此有本质区别· a) 处处绝对收敛，b) 几乎处处绝对收敛，c) 在一正测度集上绝对收敛以及 d) Fourier 系数的级数绝对收敛 . 对于三角级数所有这些性质是等价的 .

Fourier-Haar 系数的性质和三角 Fourier 系数的性质有显著的不同 . 例如，如果一函数 f 在区间 [0,1] 上是连续的并且 $a_n(f)$ 是它关于系 $\{\chi_n\}$ 的 Fourier 系数，那么下列不等式成立

$$|a_n(f)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n}}\,\omega\left[\frac{1}{n},\ f\right],\quad n\geqslant 2,$$

这蕴含

$$a_n(f)=o(n^{-1/2}),\quad n\to\infty$$

然而，连续函数的 Fourier-Haar 系数不能减小得太快· 如果 f 在 [0,1] 上是连续的且

$$a_n(f)=o(n^{-3/2}),$$

那么在 [0,1] 上，$f\equiv$ 常数 (见 [6]) .

当函数 $f\in L_p[0,1]$ 时，$1\leqslant p<\infty$，下面估计成立 (见 [3])

$$|a_n(f)|\leqslant n^{(2-p)/2p}\,\omega_p\left[\frac{1}{n},\ f\right],\quad n=1,2,\cdots,$$

$$\left[\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}|a_k(f)|^p\right]^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant 8\cdot 2^{n(2-p)/2p}\,\omega_p\left[\frac{1}{2^n},\ f\right],\quad n=0,1,$$

如果 f 在 [0,1] 上有有界变分 $V(f)$，那么

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}|a_k(f)|\leqslant\left[\frac{3}{2\sqrt{2^n}}\right]V(f),\quad n=0,1,\cdot$$

所有这些不等式右边关于 $n\to\infty$ 时的下降阶是精确的 (在相应的类中) (见 [3]) .

形如

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\chi_n(t)\qquad (*)$$

的几乎处处无条件收敛级数可由下列有趣特性来辨别 如果形如 (*) 的一个级数对它的项的任何阶在一个正 Lebesgue 测度的集 $E\subset[0,1]$ 上几乎处处收敛 (测度为 0 的例外集可依赖于级数的项的阶)，那么这个级数在 [0,1] 上几乎处处绝对收敛 . 对形如 (*) 的级数下列准则成立 一个级数 (*) 在可测集 $E\subset[0,1]$ 上几乎处处收敛，其充要条件是，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\chi_n^2(t)$ 在 E 上几乎处处收敛 (见 [6]) .

Haar 级数可用来研究可测函数的表示 对于任意

在 [0,1] 上几乎处处有限的可测函数 f，存在 [0,1] 上几乎处处收敛于 f 的形如 (*) 的级数，这里函数的有限性是本质的 不存在形如 (*) 的级数在一正 Lebesgue 测度集上收敛于 $+\infty$ (或 $-\infty$).

参考文献

[1] Haar, A , Zur theorie der orthogonalen Funktionensysteme, *Math Ann* , **69** (1910), 331 – 371

[2] Alexits, G [G, Aleksits] Convergence problems of orthogonal series, Pergamon, 1961

[3] Ульянов, П Л , 《Матем сб 》, **63** (1964), 3, 356–391

[4] Ульянов, П Л , 《Матем сб 》, **72** (1967), 2, 193–225

[5] Голубов, Б И , в сб Итоги науки Математический анализ, 1970, М , 1971, 109 – 143

[6] Kashin, B S and Saakyan, A A , Orthogonal series, Moscow, 1984 (俄文)

Б И Голубов 撰

【补注】 关于在 Banach 空间的一种推广，见 [A1], [A2]

参考文献

[A1] Singer, I M , Bases in Banach spaces, 1 – 2, Springer, 1970 – 1981

[A2] Lindenstrauss, J and Tzafriri, L , Classical Banach spaces, 1 – 2, Springer, 1977 – 1979

杨吟林 译 郑维行 校

Hadamard 矩阵 [Hadamard matrix , Адамара матрица]

一个 n 阶矩阵 H，它的所有元都是 +1 或 −1，使得方程

$$HH^T = nI_n \qquad (*)$$

成立，式中 H^T 是 H 的转置矩阵，且 I_n 是 n 阶单位矩阵．等式 (*) 相当于 H 的任意两行是正交的．Hadamard 矩阵以 J Hadamard 的名字命名，因为他曾证明 ([1]) 复数元的 n 阶矩阵 $A=\|a_{ij}\|$ 的行列式 $|A|$ 满足 Hadamard 不等式 (Hadamard inequality)

$$|A|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} s_{ii},$$

式中

$$s_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{a}_{kj},$$

这里 $\bar{a}_{kj}$ 是元 a_{kj} 的共轭元 (见关于行列式的 **Hadamard 定理** (Hadamard theorem)) 特别地，如果 $|a_{ij}| \leqslant M$，则 $|A| \leqslant M^n n^{\frac{n}{2}}$ 由此，一个 Hadamard 矩阵是一个由 ±1 构成的方矩阵，其行列式的极大绝对值为 $n^{\frac{n}{2}}$ Hadamard 矩阵的性质是 1) $HH^T = nI_n$，可推得 $H^TH = nI_n$，反之亦然，2) 行或列的置换或以 −1 遍乘任一行或列的元的结果还是 Hadamard 矩阵，3) 两个 Hadamad 矩阵的张量积也是一个 Hadamard 矩阵，其阶数等于构成积的两个矩阵的阶数的积．换句话说，若 $A = \|a_{ij}\|$，与 $B = \|b_{ij}\|$ 分别是阶数 m 与 n 的 Hadamard 矩阵，则 $C = \|a_{ij}B\|$ 是 mn 阶 Hadamard 矩阵 第 1 行和第 1 列的元都是 +1 的 Hadamard 矩阵，称为正规化的 Hadamard 矩阵 Hadamard 矩阵的阶数是 $n=1$，2 或 $n \equiv 0 \pmod 4$ 阶数 1 与 2 的正规化 Hadamard 矩阵是

$$[1], \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

若干阶数 n 的 Hadamard 矩阵的存在已经得到证明 (见，例如 [2], [3]) 直到现在 (20 世纪 80 年代)，尚未能证明对于任意阶数 $n \equiv 0 \pmod 4$ 的 Hadamard 矩阵都存在．构造 Hadamard 矩阵的方法见 [2] Hadamard 矩阵被用于构造某些类型的区组设计 ([2]) 和编码 ([3]) (见**区组设计** (block design)，**码** (code))，一个阶数 $n = 4t$ 的 Hadamard 矩阵相当于一个 $(4t-1, 2t-1, t-1)$ 设计

一个广义 Hadamard 矩阵 (generalized Hadamard matrix) 是一个 h 阶方矩阵 $H(p, h)$，它的元是 1 的 p 次根，且满足等式

$$HH^{cT} = hI_h,$$

式中 H^{cT} 是矩阵 H 的共轭转置，且 I_h 是 h 阶单位矩阵．广义 Hadamard 矩阵具有类似于 1) 和 3) 的性质 (见 [4])

参考文献

[1] Hadamard, J , Résolution d'une question relative aux déterminants, *Bull Sci Math* , (2), **17** (1893), 240 – 246

[2] Hall, M , Combinatorial theory, Blaisdell, Waltham (MA), 1967, Chapt 14

[3] Peterson, W W , Error-correcting codes, M I T & Wiley, 1961

[4] Butson, A T , Generalized Hadamard matrices, *Proc Amer Math Soc* , **13** (1962), 894 – 898

С А Рукова 撰

【补注】 Hadamard 矩阵相当于所谓 Hadamard 2-设计 (Hadamard 2-designs)，它们在统计应用中也很重要 (见 [A6])

参考文献

[A1] Wallis, W D , Street, A P and Wallis, J S , Combinatorics, room squares, sum-free sets, Hadamard matrices, Springer, 1972

[A2] Hughes, D R and Piper, F C , Design theory, Cambridge Univ Press, 1988

[A3] MacWilliams, F J and Sloane, N J A , The theory of error correcting codes, 1 – 11, North–Holland, 1977

[A4] Agaian, S S , Hadamard matrices and their applica-

tions, Lecture notes in math, 1168, Springer, 1985

[A5] Beth, T, Jungnickel, D and Lenz, H, Design theory, Cambridge Univ Press, 1986

[A6] Hedayat, A and Wallis, W D, Hadamard matrices and their applications, Ann Stat, 6 (1978), 1184－1238

锺集译 李乔校

Hadamard定理 [Hadamard theorem, Адамара теорема]

1) Hadamard间隙定理 (Hadamard gap theorem) 如果幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

的所有非零系数的下标$n_1,n_2,$ 满足条件

$$n_{k+1}>(1+\theta)n_k, \qquad (*)$$

其中$\theta>0$, 则该级数的收敛圆盘的边界是它的自然边界，即函数$f(z)$没有越过此圆盘边界的**解析延拓** (analytic continuation). 条件 (*) 称为 Hadamard 条件 (Hadamard condition); 满足 Hadamard 条件的间隙称为 Hadamard 间隙 (Hadamard gap) 亦见**缺项级数** (lacunary series), **Fabry定理** (Fabry theorem).

参考文献

[1] Hadamard, J, Essai sur l'etude des fonctions données par leurs developpement de Taylor, *J Math Pures Appl* (4), **8**(1892), 101－186

[2] Bieberbach, L, Analytische Fortsetzung, Springer, 1955

Е Д Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Dienes, P, The Taylor series, Oxford Univ Press, 1931

[A2] Bourion, G, L'ultraconvergence dans les séries de Taylor, Hermann, 1937

沈永欢 译

2) 关于整函数的 Hadamard 定理 (Hadamard theorem on entire functions) 关于通过一个**整函数** (entire function) 的零点表示该函数的一条定理，它使得关于无穷乘积的 **Weierstrass 定理** (Weierstrass theorem) 在有限ρ阶整函数$f(z)$的情形下更加精确化 为简单起见，设$f(0)\neq0$, 则

$$f(z)=e^{Q(z)}P(z),$$

其中$Q(z)$是次数不超过ρ的多项式，而

$$P(z)=\prod_{k=1}^{\infty}W\left[\frac{z}{a_k}, q\right]=\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{z}{a_k}\right]e^{P_k(z)}$$

是由$f(z)$的零点集$\{a_k\}$构造的亏格$q\leqslant\rho$的 Weierstrass **典范积** (canonical product). 换言之，Hadamard 定理断言：一个整函数的亏格不超过它的阶 在证明素数分布的渐近律中，J Hadamard 用了这条定理

参考文献

[1] Hadamard, J, Études sur les proprietes des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann, *J Math Pures Appl* (4), **9**(1893), 171－215

[2] Маркушевич, А И, Теория аналитических функций, 2 изд, т 2, М, 1968, гл 2 (中译本 А И 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957，第7章)

[3] Левин, Б Я, Распределение корней целых функций, М, 1956 (英译本 Levin, B Ya, Distributions of zeros of entire functions, Amer Math Soc, 1964)

Е Д Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Boas, R P, Entire functions, Acad Press, 1954

[A2] Titchmarsh, E C, The theory of functions, Oxford Univ Press, 1979 (中译本 E C 梯其玛希，函数论，科学出版社，1962).

沈永欢 译

3) 关于行列式的 Hadamard 定理 (Hadamard theorem on determinants) 设D是具有复元素$a_{\mu\nu}(\mu,\nu=1,\cdots,n)$的矩阵$A$的行列式，则下述不等式成立.

$$|D|^2\leqslant\prod_{\mu=1}^{n}\left[\sum_{\nu=1}^{n}|a_{\mu\nu}|^2\right] \qquad (*)$$

等号成立当且仅当对于每对不同的μ,ν,有

$$a_{\mu1}\overline{a_{\nu1}}+\cdots+a_{\mu n}\overline{a_{\nu n}}=0,$$

或者 (*) 右边的因子中至少有一个等于零 这条定理的几何意义是，n维空间中平行六面体的体积不大于它从某一顶点出发的各边长度之积，而当这些边互相垂直或某一边的长度为零时则等于这个乘积

参考文献

[1] Hadamard, J, Résolution d'une question relative aux déterminants, *Bull Sci Math* (2), **17** (1893), 240－246

О А Иванова 撰

【补注】 在A的所有元素均为实数且$|a_{\mu\nu}|\leqslant1$的特殊情形下，得到$D^2\leqslant n^n$, 等号成立当且仅当所有元素全为$+1$或-1且A满足条件$AA^T=nI$. 这种矩阵称为n阶**Hadamard矩阵** (Hadamard matrix).

关于参考文献，见**Hadamard矩阵** (Hadamard matrix)

沈永欢 译

4) Hadamard三圆定理 (Hadamard three-circle theorem). 设$f(z)$是圆环$0<r_1<r<r_2<\infty$中复变量$z=re^{i\varphi}$的全纯函数并在闭圆环$r_1\leqslant r\leqslant r_2$上连续，令$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$, 则下述不等式对$r_1\leqslant r\leqslant r_2$成立

$$\log M(r)\leqslant\frac{\log\dfrac{r_2}{r}}{\log\dfrac{r_2}{r_1}}\log M(r_1)+\frac{\log\dfrac{r}{r_1}}{\log\dfrac{r_2}{r_1}}\log M(r_2)$$

这个不等式意味着 $\log M(r)$ 是 $\log r$ 的**凸函数**（**单实变量的**)(convex function (of a real variable)) 这条 Hadamard 定理是**二常数定理**（two-constants theorem) 的特殊情形

这条 Hadamard 定理可以循不同方向加以推广，特别是，可以推广到其他度量，也可以推广到调和函数和次调和函数．

参考文献

[1] Hadamard, J , Sur la distribution des zeros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques, *Bull Soc Math France*, **24** (1896), 199－220

[2] Маркушевич, А И , Теория аналитических функций, 2 изд , т 2, М , 1968, гл 6 (中译本 А И 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957，第 6 章)

[3] Привалов, И И , Субгармонические функции, М －Л , 1937, гл 3

[4] Соломенцев, Е Д , 《Докл АН АрмССР》, **42** (1966), 5, 274－278

Е Д Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Boas, R P , Entire functions, Acad Press, 1954

[A2] Titchmarsh, E C , The theory of functions, Oxford Univ Press, 1979 (中译本 E C 梯其玛希，函数论，科学出版社，1962)

沈永欢 译

5) Hadamard 乘法定理 (Hadamard multiplication theorem) (关于奇点乘法的 Hadamard 定理 (Hadamard theorem on the multiplication of singularities)) 如果幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \tag{1}$$

的收敛半径分别为 $r_1>0, r_2>0$, S_1, S_2 分别是关于 $f(z)$, $g(z)$ 的 Mittag-Leffler 星形 (见**函数元的星形** (star of a function element)), α 是 $f(z)$ 在 S_1 的边界上的奇点集, β 是 $g(z)$ 在 S_2 的边界上的奇点集，则幂级数

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n \tag{2}$$

的收敛半径 $r\geqslant r_1r_2$，且其 Mittag-Leffler 星形 S 包含星形积 $C(CS_1\times CS_2)$, 其中 CA 是集合 A 的余集, $A\times B$ 是对于数 $p\in A$, $q\in B$ 的所有乘积 pq 构成的集合 此外，在所述星形积的边界上的角点和可达边界点处，只有积集 $\alpha\times\beta$ 中的点可能是函数 $f(z)$ 的奇点 本定理的最早叙述 ([1],[2]) 与上面给出的叙述略有不同，且需要精确化 ([2])

幂级数 (2) 称为幂级数 (1) 的 Hadamard 积 (Hadamard product) 或 Hadamard 合成 (Hadamard composition)．本定理 (及其后的研究 [3]) 所显示的 Hadamard 积的性质使得在幂级数的解析延拓问题中运用它成为可能，级数 (2) 的系数给出了它所表示的解析函数的奇点的某些信息

如果 K 是位于星形积 $C(CS_1\times CS_2)$ 之内的任一紧集，则存在位于 $C(CS_1\times CS_2)$ 内且包围 K 的可求长闭围道 L，使得下述 Hadamard 积的积分表示 (integral representation of the Hadamard product) 对所有 $z\in K$ 成立

$$P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(t)g\left(\frac{z}{t}\right)\frac{dt}{t} \tag{3}$$

表示式 (3) 也能用于解析延拓问题中．

参考文献

[1] Hadamard, J , Théoreme sur les series entières, *Acta Math* , **22** (1899), 55－63

[2] Hadamard, J , La serie de Taylor et son prolongement analytique, *Scientia Phys -Math* , no 12, 1901

[3] Bieberbach, L , Analytische Fortsetzung, Springer, 1955

Е Д Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Boas, R P , Entire functions, Acad Press, 1954.

[A2] Titchmarsh, E C , The theory of functions, Oxford Univ Press, 1979 (中译本 E C 梯其玛希，函数论，科学出版社，1962)

[A3] Pommerenke, Ch , Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht, 1975 (中译本 Ch 泊茂仁克，单叶函数，科学出版社，1987)

沈永欢 译

Hadamard 变分公式 [Hadamard variational formula ; Адамара вариационная формула]

关于复数 z 平面中 n 连通域 $G(n=1,2, \ )$ 的 **Green 函数** (Green function) $g(z,\zeta)$ 的变分公式

$$g^*(z,\zeta)=g(z,\zeta)+$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\int_0^{l_k}\frac{\partial g(\varphi_k(s),z)}{\partial n^{(k)}}\cdot\frac{\partial g(\varphi_k(s),\zeta)}{\partial n^{(k)}}\ \varphi_k(s)ds+O(\varepsilon^2)$$

在以下条件下，Hadamard 变分公式可以应用 1) 区域 G 的边界分支 $\Gamma_k=\{z \ \ z=\varphi_k(s)\}$ 是二次可微的闭 Jordan 曲线，其中 s 是 Γ_k 上的弧长，$0\leqslant s\leqslant l_k$; 2) 数 $\varepsilon_k>0$ 很小，使得 Γ_k 的内法线上长度为 $\varepsilon_k\varphi_k(s)$ 的位于 G 内的那一段的端点构成连续可微曲线，它们围成一个 n 连通区域 G^*, $\overline{G^*}\subset G$, 以及 3) ζ 是 G^* 内的定点．Hadamard 变分公式用 $g(z,\zeta)$ 表示区域 G^* 的 Green 函数 $g^*(z,\zeta)$, 带着余项的一致估计 $O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon=\max\{\varepsilon_k \ \ 0\leqslant k\leqslant n\}$, 它在区域 G^* 与 G 中任一紧集的直积上是一致的 Hadamard 变分公式也可用于带边的有限 Riemann 曲面的 Green 函数

此公式由 J Hadamard ([1]) 给出

参考文献

[1] Hadamard, J , Memoire sur le problème d'analyse relatif a l'equilibre des plagues élastiques eucastrées, *Mém prés par divers savants à l'Acad Sci* , 33 (1907), 亦见 Oeuvres, vol 11, C N R S (1968), 515-631

[2] Schiffer, M and Spencer, D C , Functionals of finite Riemann surfaces, Princeton Univ Press, 1954

И А Александров 撰

【补注】 对于在最少的假设条件下的 Hadamard 变分公式的证明，加上进一步的参考文献，见[A1]

参考文献

[A1] Warschawski, S E , On Hadamard's variation formula for Green's function, *J Math Mech* , 9 (1960), 497-511

杨维奇 译

Hadwiger 假设 [Hadwiger hypothesis ,Хадвигера гипотеза], Hadwiger 猜想 (Hadwiger conjecture)

组合几何 (combinatorial geometry) 中关于用一种特殊形式的图形覆盖凸体的问题，它是 H Hadwiger 在[1]中提出的．设 K 是 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中的凸体，并设 $b(K)$ 是以 k 为位似系数，$0<k<1$，与 K 位似的，且足以覆盖 K 的立体的最小个数 Hadwiger 猜测的内容如下 任何有界的集合 $K\subset\mathbf{R}^n$ 满足不等式

$$n+1\leqslant b(K)\leqslant 2^n \qquad (*)$$

这里等式 $b(K)=2^n$ 表明 K 是平行多面体 (见[1])．Hadwiger 猜测在 $n\leqslant 2$ 时已得到证明，对 $n\geqslant 3$，仅有部分结果 (1988) 例如，对任何 n 维有界的多面体 $K\subset\mathbf{R}^n$，若其中任何两个顶点属于 K 不同的平行支撑超平面，则不等式 (*) 成立．这里的 $b(K)$ 与 K 的顶点数一致，但在这种多面体的集合中，等式 $b(K)=2^n$ 仅对平行多面体得到了验证 这结果与关于 $\mathbf{R}^n$ 中一些点数目的 **Erdös 问题** (Erdos problem) 的解有联系，这些点中的任何三个构成的三角形都不是钝角的．Hadwiger 猜测还与**覆叠** (covering)，**分解** (decomposition) 以及**照明问题** (illumination problem) 有联系 例如，当 $\mathbf{R}^n$ 换成 Minkowski 空间时，Hadwiger 猜测能看成是与把一集合分解成直径较小的一些部分有关的 **Borsuk 问题** (Borsuk problem) 的推广 对于无界集 $K\subset\mathbf{R}^n$，数 $b(K)$ 或等于 $b(K')$，这里的 K' 是维数较低的有界凸体，或等于 ∞ 例如，对 $K\subset\mathbf{R}^3$，数 $b(K)$ 只能取 1，2，3，4，∞ 这些值之一 (见[2])

参考文献

[1] Hadwiger, H , Ueber Treffanzahlen bei translationsgleichen Eikorpern, *Arch Math (Basel)*, 8 (1957), 212-213

[2] Болтянский, В Г , Солтан, П С , Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств, Кишинев, 1978

П С Солтан 撰

【补注】 对于有界的中心对称的立体 $K\subset\mathbf{R}^3$，Hadwiger 猜测成立，见[A1]

亦见**数的几何学** (geometry of numbers) 及权威著作 [A4]

参考文献

[A1] Lassak, M , Solution of Hadwiger's covering problem for centrally symmetric convex bodies in E^3, *J London Math Soc* (2), 30 (1984), 501-511

[A2] Danzer, L , Grunbaum, B and Klee, V , Helly's theorem and its relatives, in V Klee (ed) Convexity, Proc Symp Pure Math , Vol 7, Amer Math Soc , 1963, 101-180

[A3] Hadwiger, H and Debrunner, H , Kombinatorische Geometrie in der Ebene, *L'Enseign Math* , 2 (1959)

[A4] Gruber, P M and Lekkerkerker, C G , Geometry of numbers, North-Holland, 1987

姜国英 译 杨 路 校

Haefliger 结构 [Haefliger structure, Хефлигера структура]，拓扑空间 X 上的余维 q 和 C_r 类的

用 Haefliger 图册 (Haefliger atlas) (也称为 Haefliger 上闭链 (Haefliger cocycle)) $\{U_\alpha, \Psi_{\alpha\beta}\}$ 定义的一个结构，其中 U_α 是覆盖 X 的开子集，

$$\Psi_{\alpha\beta}\ \ U_\alpha\cap U_\beta\to\Gamma_r^q,\ u\to\Psi_{\alpha\beta\ u}$$

是 $U_\alpha\cap U_\beta$ 到空间 $\mathbf{R}^q$ 的局部 C^r 微分同胚的芽层 (见**芽** (germ)) Γ_r^q 中的连续映射，而对 $u\in U_\alpha\cap U_\beta\cap U$，

$$\Psi_{\gamma\alpha\ u}=\Psi_{\gamma\beta\ u}\circ\Psi_{\beta\alpha\ u}$$

如果两个 Haefliger 图册是某个较大的 Haefliger 图册的一部分，那么它们就各自决定了一个且为相同的 Haefliger 结构 (因此，一个 Haefliger 结构也可以定义为最大 Haefliger 图册) 如果在 X 上通过一个图册 $(U_\alpha, \Psi_{\alpha\beta})$ 给出一个 Haefliger 结构 $\mathscr{H}$，$f\ Y\to X$ 是连续映射，则图册 $\{f^{-1}U_\alpha, \Psi_{\alpha\beta}\}$ 定义了**诱导** Haefliger 结构 (induced Haefliger structure) $f^*\mathscr{H}$ (它不依赖于确定 $\mathscr{H}$ 的图册具体选择)，其中 $\Psi_{\alpha\beta\ t}=\Psi_{\alpha\beta\ f(u)}$

设 X 是一个流形，它藉助于相容的浸没 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 赋予**一叶状结构** (foliation) $\mathscr{F}$，所谓相容的意义是指如果 $u\in U_\alpha\cap U_\beta$，那么存在一个局部 C^r 微分同胚 $\Phi_{\beta\alpha\ u}$，通过它对所有充分接近 u 的 v 可以从 $\varphi_\alpha(v)$ 转到 $\varphi_\beta(v)$

$$\varphi_\beta(v)=\Phi_{\beta\alpha\ u}(\varphi_\alpha(v)). \qquad (*)$$

如果在点 u 处令 $\Psi_{\beta\alpha\ u}=\Phi_{\beta\alpha\ u}$ 的芽，则 $\Psi_{\beta\alpha}\ u\to\Psi_{\beta\alpha\ u}$ 是映射 $U_\alpha\cap U_\beta\to\Gamma_r^q$，$\{U_\alpha, \Psi_{\beta\alpha}\}$ 是一个 Haefliger 图册．这里 φ_α 可以从 Haefliger 图册被唯一地重新构造 $\varphi_\alpha(u)$ 是其中芽为 $\Psi_{\alpha\alpha\ u}$ 的那样一个点．得到叶状结构物和某些 Haefliger 结构之间的对应不依赖于结构的偶然性 (系统 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 的选择)；不同的叶

状结构物对应于不同的 Haefliger 结构，但是，存在一个不与任何叶状结构相对应的 Haefliger 结构．因此，Haefliger 结构是叶状结构概念的推广．

在一般情况下，如上可为 Haefliger 结构定义一个映射 φ_α $U_\alpha \to \mathbf{R}^q$ 如果 $\Phi_{\beta\alpha\ u}$ 是芽 $\Psi_{\beta\alpha\ u}$ 的一个表示，那么如前 $\varphi_\alpha(v)$ 和 $\varphi_\beta(v)$ 由关系（*）在 u 的某个邻域里相连接 但是，因为 φ_α 和 φ_β 不必是浸没，所以一般说来，从（*）不能唯一地确定 $\Psi_{\beta\alpha\ u}$ 因此，通常不用 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 定义 Haefliger 结构而在定义中将 $\Psi_{\beta\alpha}$ 包含在内

如果 f $N \to M$ 是横截于 M 上给定的余维 q 和 C^r 类的叶状结构 $\mathscr{F}$ 的叶的流形的 C^r 映射，那么将 N 按 $\mathscr{F}$ 的叶的逆象的连通分支的分解是叶状结构，它自然说成是诱导的，用 $f^*\mathscr{F}$ 表示．如果浸没 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 的相容的系统确定了 $\mathscr{F}$, 则 $f^*\mathscr{F}$ 就由浸没 $\{(f^{-1}U_\alpha, \varphi_\alpha \circ f)\}$ 的相容系统所确定，在此情形中，诱导 Haefliger 结构与诱导叶状结构实质上是相同的 但是，如果 f 不横截于 $\mathscr{F}$ 的叶，那么就不存在诱导叶状结构而只有诱导 Haefliger 结构 因此，在叶状结构物的同伦理论中，至少在论证的某些中间步骤，Haefliger 结构的反转是必然的

观察到（见[1], [2]）对叶状结构物和纤维丛（见**叶状结构**（foliation））在它们的分类和到**分类空间**（classifying space）的连续映射之间的已知联系是为 Haefliger 结构保持着 对一个余维 q 和 C^r 类的 Haefliger 结构的这个分类空间用 $B\Gamma_q^r$ 表示．在 $B\Gamma_q^r$ 中也有某个“万有”Haefliger 结构 $\mathscr{H}$（在这方面 $B\Gamma_q^r$ 有点像万有叶状结构（纤维丛））．对任何“好的”拓扑空间 X（例如胞腔多面体），X 上的任何 Haefliger 结构是从 $\mathscr{H}$ 由某个连续映射 $f.X \to B\Gamma_q^r$ 诱导出来的．两个映射 f_0, f_1 $X \to B\Gamma_q^r$ 是同伦的，当且仅当 Haefliger 结构 $f_0^*\mathscr{H}$ 和 $f_1^*\mathscr{H}$ 是*和谐的*（concordant），即从某个 Haefliger 结构在“柱面”$X \times [0, 1]$ 上到“底”和“顶”的“限制”所得到．

已经说过的一切也可看作为*拓扑的*（topological）、*解析的*（analytic）和*分段线性的*（piecewise-linear）Haefliger 结构，并且，如果取 $r = 0$ 或 $r = a$，则前两种情形就被正式归入前文的情形中了，而最后一种情形需要一些重新描述

参考文献

[1] Haefliger, A , Feuilletages sur les variétés ouvertes, *Topology*, **9**(1970), 2, 183 - 194

[2] Haefliger, A , Homotopy and integrability, in N H Kuiper(ed) Manifolds Amsterdam 1970, Lecture notes in math , Vol 197, Springer, 1971, 133 - 163

[3] Lawson, H , The quantitative theory of foliations, *Amer Math Soc* , 1977

[4] Фукс, Д Б ,《Итоги науки и техники Сер Совр пробл матем》, **10**(1978), 179 - 285

[5] Фукс, Д Б ,《Итоги науки и техники Алгебра Топология Геометрия》, **18**(1981), 151 - 213

Д В Аносов 撰 徐森林 译 薛春华 校

Hahn-Banach 定理 [Hahn-Banach theorem; Хана-Банаха теорема]

设 L 是实或复向量空间 X 中的一个线性流形 假设 p 是 X 上的一个**半范数**（semi-norm），f 是定义在 L 上的一个**线性泛函**（linear functional），它对任一 $x \in L$ 满足

$$|f(x)| \leqslant p(x), \qquad (*)$$

那么 f 可以延拓为整个 X 上的一个线性泛函 F, 使得对所有的 $x \in X$ 满足

$$|F(x)| \leqslant p(x)$$

这样的延拓不是唯一决定的

在 X 为实空间的情况下，半范数可以用正齐次次可加函数代替，并且不等式（*）可以用单边不等式 $f(x) \leqslant p(x)$ 代替，它对延拓后的泛函仍然成立．如果 X 是一个 Banach 空间，那么 $p(x)$ 可取为 $\|f\|_L \cdot \|x\|$，并且有 $\|F\|_X = \|f\|_L$ 这个定理由 H Hahn(1927) 和 S Banach (1929) 各自独立地证明

参考文献

[1] Hahn, H , Ueber lineare Gleichungsysteme in linearen Raume, *J Reine Angew Math* , **157**(1927), 214 - 229

[2A] Banach, S , Sur les fonctionelles linéaires, *Studia Math* , **1**(1929), 211 - 216

[2B] Banach, S , Sur les fonctionelles linéaires II, *Studia Math* , **1**(1929), 223 - 239

[3] Колмогоров, А Н , Фомин, С В , "лементы теории функций и функционального анализа, 5 изд , Москва, 1981（中译本 А Н 柯尔莫果洛夫，С В 佛明，函数论与泛函分析初步，高等教育出版社，1992）

[4] Канторович, Л В , Акилов, Г П , Функциональный анализ, 2 изд Москва, 1977（中译本 Л В Канторович, Г П Акилов，泛函分析，上、下册，高等教育出版社，1984）

В И Соболев 撰

【补注】 一个实值函数 f 称为*次加性的*（subadditive），如果 $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$ 对其定义域中所有这样的 x, y 成立，$x+y$ 也在其定义域中

参考文献

[A1] Dunford, N and Schwartz, J T , Linear operators General theory, 1, Interscience, 1958

[A2] Kothe, G , Topological vector spaces, Springer, 1969

鲁世杰 译 葛显良 校

Hahn 分解 [Hahn decomposition, Хана разложение]

设 Σ 是集合 X 的子集族所成的 σ 代数，f 是定义在

Σ上的σ可加集函数，那么Hahn分解是指X可分解为两子集X_+与X_-之并，$X_+\cup X_-=X$，使当$M\in\Sigma, M\subset X_+$时$f(M)\geqslant 0$，且当$M\in\Sigma$，$M\subset X_-$时$f(M)\leqslant 0$ 一般说来，X的这种分解不是唯一的

参考文献

[1] Dunford, N and Schwartz, J T , Linear operators General theory, 1, Interscience, 1958

В И Соболев 撰

【补注】 亦见 **Jordan 分解** (Jordan decomposition) 也用 Hahn-Jordan 分解 (Hahn-Jordan decomposition) 一词来代替 Hahn 分解

参考文献

[A1] Halmos, P R , Measure theory, v Nostrand, 1950 (中译本 R 哈尔摩斯，测度论，科学出版社，1958 英文新版 Springer-Verlag, 1974)

[A2] Rudin, W , Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1966 (中译本 W 鲁丁，实分析与复分析，人民教育出版社，1982)

[A3] Royden, H L , Real analysis, Macmillan, 1968

郑维行 译

半直线 (射线) [half-line (ray), полупрямая]

由直线上的一点O把直线分成的两部分中的一部分. 如果点O属于这一部分，则该半直线称为闭半直线 (closed half-line) (或闭射线 (closed ray))

БСЭ-3 张鸿林 译

半鞅 [half-martingale, полумартингал]

一个等价于下鞅或上鞅的概念 定义在概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$上的、具有一个可区别的非减$\sigma$代数族$(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$, $\mathscr{F}_s\subseteq\mathscr{F}_t\subseteq\mathscr{F}$ $(s\leqslant t)$的随机过程$X=(X_t, \mathscr{F}_t)$ $(t\in T\subseteq[0, \infty))$称为半鞅 (half-martingale)，如果$\mathsf{E}|X_t|<\infty$，X_t是$\mathscr{F}_t$可测的，而且或者

$$\mathsf{E}(X_t | \mathscr{F}_s) \geqslant X_s \tag{1}$$

或者

$$\mathsf{E}(X_t | \mathscr{F}_s) \leqslant X_t \tag{2}$$

以概率1成立. 在情形(1)这个随机序列称为下鞅 (submartingale)，在情形(2)称为上鞅 (supermartingale)

在现代文献中，"半鞅"一词或者不用或者等同于下鞅 (上鞅可以通过改变符号从下鞅导出,有时称为下半鞅 (lower half-martingale) 亦见**鞅** (martingale)

А В Прохоров 撰

【译注】 现代半鞅 (semi-martingale) 的概念不同于这里所说的半鞅 (half-martingale) 它是指关于非降σ代数族$\{\mathscr{F}_t, t\in T\subset[0, \infty)\}$的右连续适应过程$X=(X_t, \mathscr{F}_t)$，并可分为两个过程之和·

$$X = M + A,$$

其中M是局部鞅 (local martingale)，A是具有限变差的适应过程 (adapted process)

参考文献

[B1] He, S W , Wang, J G , Yan, J A , Semimartingale theory and stochastic calculs, Science Press and CRC Press Inc , 1992

[B2] Dellacherie, C , Meyer, P A , Probability and potential B, chapter V, North-Holland, 1982 (译自法文)

刘秀芳 译

半平面 [half-plane, полуплоскость]

平面上处于给定直线一侧的所有点的集合. 半平面上的点的坐标满足不等式$Ax+By+C>0$，其中A, B, C是一些常数，A和B不同时等于零. 如果直线$Ax+By+C=0$本身(半平面的边界)属于半平面，则半平面称为闭的 (closed) 复平面$z=x+iy$上的一些特殊平面是 上半平面 (upper half-plane) $y=\operatorname{Im} z>0$，下半平面 (lower half-plane) $y=\operatorname{Im} z<0$，左半平面 (left half-plane) $x=\operatorname{Re} z<0$，右半平面 (right half-plane) $x=\operatorname{Re} z>0$，等等 复z平面的上半平面可以通过 Mobius 变换

$$w = e^{i\theta}\frac{z-\beta}{z-\bar{\beta}}$$

共形地映射 (见**共形映射** (conformal mapping)) 到圆盘$|w|<1$上，其中θ是任意实数，且$\operatorname{Im}\beta>0$

БСЭ-3 张鸿林 译

Hall 子群 [Hall subgroup, Холлова подгруппа]

有限群的一个子群，它的阶与它的指数互素 这个名称来源于 Ph. Hall，他在1920年开始研究有限**可解群** (solvable group) 内这样的子群

在一个有限π**可除群** (π-divisible group) 内有一个 Hallπ子群 (Hall π-subgroup) (一个 Hall 子群，它的阶只能被π中的素数所整除同时它的指数与π中任意数互素)，并且所有 Hall π子群都是共轭的 一个有限可解群对于任意素数集π都有一个 Hallπ子群. 有限可解群的每一个π子群都包含在一个 Hallπ子群内，并且所有 Hallπ子群都是共轭的. 有限群G的一个正规 Hall 子群H在G中总有一个补，即一个子群D，使得$G=H\cdot D$且$H\cap D$是平凡的，H在G中所有的补都是共轭的. 如果一个群有一个幂零 Hallπ子群 (见**幂零群** (nilpotent group))，那么所有 Hallπ子群都是共轭的，并且每一个π子群都包含在某个 Hallπ子群内，一般地，一个 Hall 子群不具有这些性质 例如，阶为60的**交错群** (alternating group) A_5没有 Hall $\{2,5\}$子群 在A_5内有一个阶为12的 Hall$\{2, 3\}$子群，然而有一个6阶子群不在 Hall 子群内. 最后，在阶为

168 的**单群**（simple group）内，Hall{2, 3}子群是不共轭的

参考文献

[1] Чунихин, С А, Подгруппы конечных групп, Минск, 1964（英译本 Chunikhin, S A, Subgroups of finite groups, Wolters-Noordhoff, 1969）

[2] Итоги науки и техники Алгебра 1964, М, 1966, 7–46

[3] Huppert B, Endliche Gruppen, 1, Springer, 1979

[4] Gorenstein, D(ed), Reviews on finite groups, Amer Math Soc, 1974

В Д Мазуров 撰 郝钢新 译

Halphen 线束 [Halphen pencil, Альфана пучок]

由具有 9 个 n 重基点的 $3n$ 次平面代数曲线构成的线束 $n=2$ 时的这种线束最早由 G Halphen 所研究（[1]） 一个 Halphen 线束的九个基点 P_1, , P_9（可能包括无限接近点）总是位于一条三次曲线 $F=F(x_0, x_1, x_2)$上 Halphen 线束中的任一曲线的方程具有 $\lambda G+\mu F^n=0$ 的形式，这里 $G=G(x_0, x_1, x_2)=0$ 是一条具有 9 个 n 重奇点 P_1, , P_9 的 $3n$ 次椭圆曲线．如果 $F=0$ 是非奇异曲线，则关于这条曲线上群律，有 $n(P_1\oplus \quad \oplus P_9)=0$ 这一结论可推广到 $F=0$ 是有奇异点曲线的情形（[3]） 通过平面的某一双有理变换，平面上椭圆曲线的任意线束都可变换为一个 Halphen 线束（[2],[3]）

参考文献

[1] Halphen, G H, Sur les courbes planes du sixième degre à neuf points double, *Bull Soc Math France*, **10**(1882), 162–172

[2] Bertini, E, *Ann Mat Pura Appl*, **8**(1877), 224–286

[3] Долгачев, И В, 《Изв АН СССР Сер матем》, **30**(1966), 5, 1073–1100

И В Долгачев 撰 刘先仿 译

Hamilton 方程 [Hamilton equations, Гамильтона уравнения]

一阶典范常微分方程组，它描述完整力学系统在外力作用下的运动和描述经典变分学中的极值问题

由 W Hamilton（[1]）建立的 Hamilton 方程组等价于二阶 **Lagrange 方程（力学中的）**（Lagrange equations (in mechanics)）（或在经典变分学中，**Euler 方程**（Euler equation）），其中未知量为广义坐标 q_i 以及 $\dot{q}_i=dq_i/dt$ Hamilton 曾考虑用广义动量

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},\quad i=1,\quad ,n \tag{1}$$

去代替广义速度 $\dot{q}_i$，这里 $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ 为 **Lagrange 函数**（Lagrange function），n 为该系统的自由度个数，并且还定义函数

$$H(q_i, p_i, t)=\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i-L, \tag{2}$$

现今称为 **Hamilton 函数**（Hamilton function）或 Hamilton 算子（Hamiltonian） 在 (2) 的右边变量 $\dot{q}_i$ 被表示式

$$\dot{q}_i=\varphi_i(q_s, p_s, t)$$

代替，这是由解方程组（1）得到的．对于满足

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\right)\neq 0$$

的动力系统，这样的解总存在

Hamilton 方程组有标准形式

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}+Q_i^*,\quad i=1,\quad ,n, \tag{3}$$

其中 Q_i^* 表示非位势的广义力，如果它们作用于该系统的话．(3)中方程的个数等于未知元 q_i, p_i 的个数 $2n$

方程组（3）的阶为 $2n$，它等于二阶 Lagrange 方程组的阶数．

利用公式（1）与（2）将变量 q_i, $\dot{q}_i$, t 与 Lagrange 函数 L 转换成变量 q_i, p_i, t 与 Hamilton 函数 H 是由 **Legendre 变换**（Legendre transform）给出的 Hamilton 方程较 Lagrange 方程有其优点，因此在分析力学中起重要作用．亦见 **Hamilton 系统**（Hamiltonian system）

参考文献

[1] Hamilton, W R, *Philos Transact Roy Soc London Ser A*, **1**(1835), 95–144

В В Румянцев 撰

【补注】

[A1] Arnol'd, V I, Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978（译自俄文）

郑维行 译 沈永欢、陈一元 校

Hamilton 函数 [Hamilton function, Hamiltonian, Гамильтона функция]

由 W Hamilton(1834) 引入用来描述力学系统运动的函数 自 C G J Jacobi(1837) 的工作开始，它被用在经典变分法中，表示正则形式的 **Euler 方程**（Euler equation） 令 $L(t, x, \dot{x})$ 是力学系统的 **Lagrange 函数**（Lagrange function），或是在经典变分法中泛函

$$J(x)=\int L(t, x, \dot{x})dt$$

的极小化问题中的被积函数 其中，$x=(x_1, \quad ,x_n)$, $\det\|L_{\dot{x}\dot{x}}\|\neq 0$ Hamilton 函数是 L 相对于变量 $\dot{x}$ 的 **Legendre 变换**（Legendre transform），或者，换言之，

$$H(t, x, p)=(p\mid\dot{x})-L(t, x, \dot{x}),$$

其中 $\dot{x}$ 利用关系式 $p=L_{\dot{x}}$ 用 p 来表示，$(p\mid\dot{x})$ 是矢量 $p=(p_1, \quad ,p_n)$ 和 $\dot{x}$ 的点积 如果应用 Ham-

ilton 函数，则 Euler 方程

$$-\frac{dL_{\dot{X}}}{dt}+L_X=0$$

(经典力学问题中也称作 **Lagrange 方程**（**力学中的 Lagrange 方程**）（Lagrange equations (in mechanics))) 写成一阶方程组的形式.

$$-\dot{p}=\frac{\partial H}{\partial x},\quad \dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}$$

这些方程称为 **Hamilton 方程**（Hamilton equations），**Hamilton 系统**（Hamiltonian system），也称为正则方程组（canonical system） 对作用函数，Hamilton-Jacobi 方程（见 **Hamilton-Jacobi 理论**（Hamilton-Jacobi theory））可用 Hamilton 函数写出．

在最优控制问题中，Hamilton 函数确定如下．对给定的边界条件及控制的约束 $u\in U$，在微分约束

$$\dot{x}^i=f^i(t,x,u)$$

下，要求找到泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}f^0(t,x,u)dt$$

的极小．这里 $x=(x^1,\quad,x^n)$ 是相坐标中的 n 维矢量，$u=(u^1,\cdot,u^m)$ 是 m 维控制矢量，而 U 是 u 允许值的闭集．在此问题中，Hamilton 函数的形式为

$$H(t,x,\psi,u)=\psi_0f^0(t,x,u)+\sum_{i=1}^{n}\psi_if^i(t,x,u),$$

其中 $\psi_0=$ 常数 $\leqslant 0$，$\psi_1,\ \cdot,\psi_n$ 是类似上述正则变量 p_i 的共轭变量（Lagrange 乘子，动量） 如果（x_0,u_0）是上述问题的极小，且 $\psi_0\neq 0$（这时 ψ_0 可认为等于 -1），则

$$H(t,x_0(t),p(t),u_0(t))=(p\mid f)\Big|_{x_0,u_0}-f^0\Big|_{x_0,u_0},$$

其中

$$-\dot{p}=\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{x_0,u_0}$$

对 Hamilton 函数得到的表达式，其结构与经典变分法中的相同 根据 **Понтрягин 最大值原理**（Pontryagin maximum principle），最优控制问题的 Euler 方程应用 Hamilton 函数写成下列形式

$$\dot{x}^i=\frac{\partial H}{\partial\psi_i},\ \dot{\psi}_i=-\frac{\partial H}{\partial x^i},\quad i=1,\cdot,n$$

对每个 t，最优控制 u 应构成 Hamilton 的极大

$$H(t,x,\psi,u)=\max_{v\in U}H(t,x,\psi,v).$$

参考文献

[1] Bliss, G A , Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ Press, 1947

[2] Понтрягин, Л С , [и др] , Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд , М , 1969（英译本 Pontryagin, L S et al , The mathematical theory of optimal processes, Wiley, 1962）

И Б Вапнярский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Goldstein, H , Classical mechanics, Addison-Wesley, 1950

[A2] Crouch, P E and Schaft, A J van der, Variational Hamiltonian control systems, Lecture notes in control and inform , 101, Springer, 1987

[A3] Arnol'd, V I , Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978（译自俄文）.

唐福林 译

Hamilton 群 [**Hamilton group**, Hamiltonian group, **Гамильтонова группа**]

一个非 Abel 群，它的所有子群都是**正规子群**（normal subgroup）. 这种群曾被 R Dedekind 研究过，并且以四元数代数的创始人 W R Hamilton 的名字命名为"Hamilton 群". 一个非 Abel 群是一个 Hamilton 群，当且仅当它是下述三种群的直积 8 阶的**四元数群**（quaternion group），一个每一元素都是有限奇数阶的 **Abel 群**（Abelian group），和一个指数为 1 或 2 的 Abel 群，特别地，任何一个 Hamilton 群都是**周期群**（periodic group）.

参考文献

[1] Hall, M , The theory of groups, Macmillan, 1959（中译本 M 赫尔，群论，科学出版社，1981）

В Д Мазуров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Huppert, B , Endliche Gruppen, 1, Springer, 1967

郝锛新 译

Hamilton-Jacobi 理论 [**Hamilton-Jacobi theory**; **Гамильтона-Якоби теория**]

经典变分学和解析力学的一个分支，它把求极值曲线的问题（或对 Hamilton 方程组求积分问题）归结为对一阶偏微分方程——所谓的 Hamilton-Jacobi 方程——求积分．Hamilton-Jacobi 理论的基本原则是由 W. Hamilton 在 19 世纪 20 年代为波光学和几何光学问题而发展的．1834 年 Hamilton 将他的思想推广到动力学问题，而 C G. J Jacobi (1837) 将此方法应用于经典变分法的一般问题

Hamilton-Jacobi 理论的初始观点是由 P. Fermat 和 Chr Huygens 在 17 世纪建立的，为此目的他们应用了几何光学的素材（见 **Fermat 原理**（Fermat princi-

ple), **Huygens 原理**(Huygens principle)) 下面按 Hamilton 的思路来考察光线通过非均匀(但为简单起见,是各向同性的)介质的传播问题,其中 $v(x)$ 是光线在 x 点的当地速度 按照 Fermat 原理,光线在非均匀介质中是以最可能短的时间由一点传播至另一点 令 $x_0 \in E$ 是起始点,并令 $W(x)$ 是光线穿过 x_0 至 x 距离的最短时间 函数 $W(x)$ 称为光程函数(eikonal)或路程的光学长度 假定在短时间 dt 内,光线从点 x 传至点 $x+dx$ 按照 **Huygens 原理**(Huygens principle)光线将以达到高阶小量的精确度沿函数 $W(x)$ 的同值表面的法线传播 这样方程

$$W\left[x+\frac{W'(x)}{|W'(x)|}v(x)dt\right]=W(x)+dt+o(dt)$$

满足,由此得到几何光学中的 Hamilton-Jacobi 方程为

$$|W'(x)|^2=\frac{1}{v^2(x)} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial W(x)}{\partial x_i}\right]^2=\frac{1}{v^2(x)}$$

分析力学中,Fermat 原理的作用由变分的 **Hamilton-Остроградский 原理**(Hamilton-Ostrogradski principle)来完成,而光程函数的作用则由作用泛函,亦即由沿联接给定点 (t_0, x_0) 和点 (t, x) 的轨迹 γ 的积分

$$S(t, x)=\int_{\gamma} L dt, \quad x=(x_1, \quad , x_n) \qquad (1)$$

来完成,其中 L 是力学系统的 Lagrange 函数

Jacobi 建议在解决经典变分学的所有问题时都应使用一个类似于作用泛函(1)的函数 问题 $\int L dt \rightarrow$ inf 的极值曲线由点 (t_0, x_0) 出发与作用函数的同值表面横截地相交(见**横截条件**(transversality condition)),由此条件可导出作用泛函的微分形式

$$dS=(p|dx)-Hdt .$$

其中 $p=L_{\dot{x}}$,而 $H=p\dot{x}-L$ 是 **Hamilton 函数**(Hamilton function)(亦见 **Legendre 变换**(Legendre transform))

最后提到的关系产生下列函数 S 的方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H[t, x, \frac{\partial S}{\partial x}]=0 \qquad (2)$$

这就是 Hamilton-Jacobi 方程(Hamilton-Jacobi equation)

Hamilton-Jacobi 理论的最重要结论是 Jacobi 定理(Jacobi theorem) 该定理指出,方程(2)的完全积分,亦即依赖于参数 $\alpha=(\alpha_1, \quad , \alpha_n)$ 的方程解 $S(t, x, \alpha)$(假定 $\det|\partial^2 S/\partial x \partial \alpha| \neq 0$),使有可能得到泛函(1)的 Euler 方程的完全积分,或者,也就是说,与这一泛函以公式 $\partial S/\partial x=p$, $\partial S/\partial \alpha=\beta$ 相联系的 Hamilton 方程组的完全积分 . 应用 Jacobi 定理对 Hamilton 方程组求积分通常建立在特殊坐标中分离变量方法的基础上

仅管对偏微分方程求积分通常要难于解常微分方程,但 Hamilton-Jacobi 理论仍被证明是研究光学、力学和几何学问题的有力工具 Huygens 原理的实质被 R Bellman 用于解决最优控制问题

亦见 **Hilbert 不变积分**(Hilbert invariant integral)

参考文献

[1] Вариационные принципы механики, М , 1959

[2] Pars, L A , A treatise on analytical dynamics, Heinemann, 1965

[3] Арнольд, В И , Математические методы классической механики, М , 1974, 219-224 (英译本 Arnol'd, V I , Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978)

[4] Ахиезер, Н И , Лекции по вариационному исчислению, М , 1955, 92-96 (英译本 Akhiezer, N I , The calculus of variations, Blaisdell, 1962)

В М Тихомиров 撰

【补注】 在最优控制中,Hamilton-Jacobi 方程具有,例如说,形式

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H\left[t, x, \frac{\partial V}{\partial x}\right]=0, \ V(t_1, x)=\varphi(t_1, x),$$
$$t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

其中

$$H\left[t, x, \frac{\partial V}{\partial x}\right]=$$
$$=\min\left\{\left[\frac{\partial V}{\partial x}, f(t, x, u)\right]+f^0(t, x, u) \ u \in U\right\}$$

例如见,**最优综合控制**(optimal synthesis control) 在此背景下,它常被称为 Bellman 方程(Bellman equation)(特别在工程文献中)或 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程(Hamilton-Jacobi-Bellman equation). 对最优随机控制还有一种版本,见**受控随机过程**(controlled stochastic process) 由于 Hamilton-Jacobi 方程的经典解常常不存在,因此有必要研究各种类型的广义解,如**粘性解**(viscosity solutions).

参考文献

[A1] Goldstein, H , Classical mechanics, Addison-Wesley, 1950

[A2] Lions, P L , Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations, Pitman, 1982

[A3] Fleming, W and Rishel, R , Deterministic and stochastic optimal control, Springer, 1975

[A4] Lions, P L , On the Hamilton-Jacobi-Bellman equations, *Acta Appl Math* , **1** (1983), 17-41

[A5] Benton, S H , Jr , The Hamilton - Jacobi equation a global approach, Acad Press , 1977

唐福林 译

Hamilton 算子 [Hamilton operator 或 Hamiltonian, **Гамильтона оператор**], 劈形算子 (nabla operator), ∇算子 (∇-operator)

记号性的一阶微分算子，用作向量分析的主要微分运算之一的记号 在以单位向量 $\mathbf{e}_1, \ \ , \mathbf{e}_n$ 为基的直角 Descartes 坐标系 $x=(x_1, \ \ , x_n)$ 下，Hamilton 算子具有形式

$$\nabla=\sum_{j=1}^{n}\mathbf{e}_j\frac{\partial}{\partial x_j}$$

Hamilton 算子应用于标量函数 f，理解为"向量" ∇ 与标量 $f(x)$ 的乘法，生成了 f 的**梯度** (gradient)

$$\operatorname{grad} f=\nabla f=\sum_{j=1}^{n}\mathbf{e}_j\frac{\partial f}{\partial x_j},$$

即具有分量 $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ \ , \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ 的向量.

∇ 与一个场向量 $\mathbf{a}=(a_1, \ \ , a_n)$ 的数量积生成 $\mathbf{a}$ 的**散度** (divergence)

$$\operatorname{div}\mathbf{a}=\nabla\mathbf{a}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_j}{\partial x_j}$$

∇与向量 $\mathbf{a}_j=(a_{j1}, \ \ , a_{jn})$ $(j=1, \ \ , n-2)$ 的向量积生成场 $\mathbf{a}_1, \ \ , \mathbf{a}_{n-2}$ 的**旋度** (curl) (记为 rot)，即向量

$$[\nabla, \mathbf{a}_1, \ \ , \mathbf{a}_{n-2}]=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & & \mathbf{e}_n\\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & & \frac{\partial}{\partial x_n}\\ a_{11} & a_{12} & & a_{1n}\\ & & & \\ a_{n-2\,1} & a_{n-2\,2} & & a_{n-2\,n}\end{vmatrix}$$

如果$n=3$，则有

$$[\nabla, \mathbf{a}]=\nabla\times\mathbf{a}=\operatorname{rot}\mathbf{a}$$

$$=\left[\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right]\mathbf{e}_1+\left[\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right]\mathbf{e}_2+\left[\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right]\mathbf{e}_3.$$

Hamilton 算子的标量平方生成 **Laplace 算子** (Laplace operator)

$$\Delta=\nabla\cdot\nabla=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

下列关系式是成立的·

$$[\nabla, \nabla\varphi]=\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=0,$$

$$\nabla\cdot\nabla\mathbf{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a},\ \nabla[\nabla, \mathbf{a}]=\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}=0,$$

$$[\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]]=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a},\ \Delta\varphi=\nabla\cdot(\nabla\varphi)$$
$$=\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$$

Hamilton 算子是由 W Hamilton 导入的 ([1])

参考文献

[1] Hamilton, W R , Lectures on quaternions, Dublin, 1853

Л П Купцов 撰

【补注】 亦见**向量演算** (vector calculus)

参考文献

[A1] Rutherford, D E , Vector mechanics, Oliver & Boyd, 1949

[A2] Apostol, T M , Calculus, 1 - 2, Blaisdell, 1964

[A3] Holman, H and Rummler, H , Alternierende Differentialformen, B1 Wissenschaftsverlag, 1972

沈纯理 译

Hamilton-Остроградский 原理 [Hamilton-Ostrogradski principle Гамильтона-Остроградского принцип]，稳态作用原理 (principle of stationary action)

由 W Hamilton ([1]) 为具有理想定常约束的完整体系建立的，并由 M B Остроградский ([2]) 推广至非定常几何约束的通用的积分的**经典力学的变分原理** (variational principle of classical mechanics) 根据这一原理，在受位势力作用下的系统的真实运动中，

$$S=\int_{t_0}^{t_1}(T-U)dt=\int_{t_0}^{t_1}Ldt$$

与临近的运动学可能的运动相比较具有一定态值，对于相比较的运动系统的初始和终结位置和运动时间与真实运动的相同 这里 T 是动能，U 是势能，$L=T-U$ 是系统的 Lagrange 函数 在某些情况下，真实运动不仅对应泛函 S 的驻点，且对应其最小值 因此，Hamilton-Остроградский 原理有时称为最小作用原理 (principle of least action) 在非位势作用力 F_v 情况下，作用的定态条件 $\delta S=0$，换为条件

$$\int_{t_0}^{t_1}[\delta T+\sum_v F_v\cdot\delta r_v]dt=0$$

参考文献

[1] Hamilton, W , Report of the 4-th meeting of the British Association for the Advancement of Science, London, 1835, 513 - 518

[2] Ostrogradski, M , *Mem Acad Sci St Petersbourg*, **8** (1850), 3, 33 - 48

В В Румянцев 撰

【补注】 在英文文献中，此原理的名称为 Hamilton 原理 (Hamilton principle)

参考文献

[A1] Arnol'd V I, Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978 (译自俄文)

唐福林 译

Hamilton 系统 [Hamiltonian system, Гамильтонова система]

由含有 $2n$ 个未知量 $p=(p_1, \cdots, p_n)$（广义动量）与 $q=(q_1, \cdots, q_n)$（广义坐标）的常微分方程组——Hamilton 方程组（Hamiltonian system of equations）

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i=1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

描述的力学系统，其中 H 是 (p, q, t) 的某一函数，称为方程组(1)的 **Hamilton 函数**（Hamilton function）或 Hamilton 算子（Hamiltonian）．Hamilton 方程组亦称正则方程组（canonical system of equations），并且在自治情形（当 H 非 t 的显函数时）可称为保守系统（conservative system），这是由于此时函数 H（它常有能量含意）是首次积分（亦即能量在运动中保持不变）．

在力学中 Hamilton 方程组描述一个含有完全约束与具有**位势**（potential）的力的运动（见 **Hamilton 方程** Hamilton equations））．理论物理中许多问题也导致 Hamilton 方程组或具有类似性质的偏微分方程，可以将后者看成 Hamilton 方程组的无穷维模拟来讨论．量子力学的方程可用 Hamilton 方程组的形式，其中 $p_i(t)$ 与 $q_i(t)$ 不是时间的数值函数，而是满足一定的交换关系的依赖于 t 的自伴线性算子．Hamilton 方程组（依此词的平常"有限维"意义）在研究偏微分方程的某些渐近问题（波动方程的短波渐近式，量子力学中拟经典渐近式）中起重要作用．

各种变分原理与 Hamilton 方程组有紧密联系．Helmholtz 原理（例如见[3]）直接导致 Hamilton 方程组，然而并非经常使用．最重要的原理是 **Hamilton-Остроградский 原理**（Hamilton-Ostrogradski principle），即稳定作用原理，它直接产生 **Lagrange 方程（力学中的）**（Lagrange equations (in mechanics)），若带有某种非退化的附加条件，则可以利用 **Legendre 变换**（Legendre transform）（见 **Hamilton 函数**（Hamilton function），**Hamilton 方程**（Hamilton equations））从 Lagrange 方程过渡到 Hamilton 方程组，如果在应用变分原理时只涉及一阶导数．如果变分原理涉及一阶以上导数，过渡到 Hamilton 方程组的 M．B．Остроградский 法则变得更为复杂些（例如，见[4]，§110）．

若 H 不是 q_i 的显函数，则 $p_i=$ 常数为首次积分．在此情形下，坐标 q_i 称为循环的（cyclic）（在某些情形下，它有角变量的物理或几何意义）或可忽视的（ignorable）．这样的坐标 q_i 与相应的动量 p_i 可以消去，因而导致一个具有较少未知元的 Hamilton 方程组的效果．更一般地说，若有 k 个首次**对合积分**（integrals in involution），Hamilton 方程组的阶可以减少 $2k$（至少在变元的某一区域中且应用一个时间变换时如此），因此又得到了一个 Hamilton 方程组．若所有坐标都是循环的，则此 Hamilton 方程组称为（完全）可积的（(completely) integrable），求解以及作定性研究已不再需要解微分方程了．

Hamilton 方程组的首次积分通常由 Noether 定理（Noether theorem）得到．若 Lagrange 函数（或 Lagrange 算子（Lagrangian））关于某一连续变换群是不变的，则相应的 Hamilton 方程组有某种类型的首次积分（[2]）．另一种一般的想法是通过辅助偏微分方程即所谓 Hamilton-Jacobi 方程（见 **Hamilton-Jacobi 理论**（Hamilton-Jacobi theory）），使得有可能对 Hamilton 方程组进行积分．利用对适当坐标的分离变量法，有时可以找到上述 Hamilton-Jacobi 方程的完全积分，并且据 Jacobi 定理，相应的 Hamilton 方程组是相对地容易积分的．（Hamilton 方程组与 Hamilton-Jacobi 方程之间的联系是可逆的．求解 Hamilton-Jacobi 方程化为相应的 Hamilton 方程组的积分．历史上这种联系以及力学与几何光学之间类似联系（[1]，[2]，[3]），促使 Hamilton 方程组的发现（光学中的 Huygens 原理立即产生一种 Hamilton-Jacobi 型方程——**程函方程**（eikonal equation）））近来又一个积分方法——(L, A) 对法已发展起来（见[5]，[6]）（尽管此法未必是针对 Hamilton 方程组的，但其主要应用恰恰就是 Hamilton 方程组）．

对于接近可积的 Hamilton 方程组，特殊的近似积分法与解的定性研究已有了发展．类似的方法也用于研究 Hamilton 方程组在一个平衡位置邻域中轨道的性态以及周期或拟周期解的性态．也可利用某些不是专门对 Hamilton 方程组设计的方法，可是 Hamilton 方程组自身的特性仍可大大地简化计算量，或者相反，使原问题复杂化（因为，从一般方法观点出发，Hamilton 方程组可证明"例外情况"（例如，在具有（结构）**稳定性**（stability）的情形）．见**浸渐不变量**（adiabatic invariant），**小参数法**（small parameter, method of the），**小分母**（small denominators），**平均化**（averaging））．

设 $\varphi_t(z)$ 为 Hamilton 方程组(1)的解并在时间 $t=0$ 时通过点 $z=(p, q)\in\mathbf{R}^{2n}$．Hamilton 方程组无歧义地被下列事实所刻画：（局部）微分同胚 φ_t 将外微分形式

$$\omega=\sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i \tag{2}$$

（所谓 Poincaré 积分不变量（Poincaré integral invariant））变换为 ω，此事实由 Остроградский 与 H．Helmholtz 注意到了，尽管采用不同的术语，后者用的词

是“相互性”([3]) 保持 ω 的微分同胚称为正则变换(canonical transformation)或正则变量变换(canonical change of variables);它们不仅从 Hamilton 方程组中自然而然地产生,而且还将任何 Hamilton 方程组转换成某个 Hamilton 方程组(广义正则变换也具有此性质,转变为广义正则变换并不是所考虑的变换类的本质上的扩张).新方程组的 Hamilton 算子容易用原 Hamilton 算子与正则变换的生成函数 S 来表示(典范变换易于用 S 定义).这样,若给定一个 Hamilton 方程组,则能够用变量的正则变换,去进行只含两个函数 H 与 S 的计算(在一般情形下,对微分方程组进行变量替换将包括大量的函数),这就是构造所谓正则形式体系(canonical formalism),它相当大地简化了在应用性领域中进行的计算.它广泛地用于天体力学与理论物理中.

用积分不变量叙述的 Hamilton 方程组的定义导致一种自然的推广,此时 $\mathbf{R}^{2n}$ 中的形式(2)由定义在某个偶维($2n$ 维)流形 M 上的 2 阶外微分形式代替,这里 ω 是闭的(外微分 $d\omega=0$),且处处 $\omega^n=\omega\wedge\wedge\omega\neq 0$(因而在 M 上确定了一个辛结构(symplectic structure)) 甚至更一般地,把 Hamilton 方程组不作为动力系统来讨论,而作为线汇来讨论,这时把轨道简单地看成具有确定性质的直线族,而与运动沿这些直线的速度无关.(此格式可包括方程组(1),只须考虑解 $p=p(t)$, $q=q(t)$ 在空间 (p, q, t) 中的图象,这里 Poincaré - Cartan 积分不变量(Poincaré - Cartan integral invariant) $\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - Hdt$ 远比(2)为重要) 严格地说,若 Hamilton 方程组(1)的阶借助于首次积分而减小,则所得 Hamilton 方程组有此广义意义([2])

关于不可积或不接近可积的 Hamilton 方程组的性质知道得很少(除了关于上面讨论过的轨道的局部性态问题).体积元 ω^n 的保持性由 ω 的保持性推出(Liouville 定理(Liouville theorem),除了低维情形其逆不真).因此,Hamilton 方程组是具有不变测度的方程组,这样的方程组在**遍历理论**(ergodic theory)中予以研究.

关于近来的综合文章,见[6].

参考文献

[1] Pars, L A , A treatise on analytical dynamics, Heinemann, 1965

[2] Арнольд, В И., Математический методы классической механики, М , 1974(英译本 Arnol'd, V I , Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978)

[3] Levi-Civita, T and Amaldi, U , Lezioni di meccanica razionale, 2, Zanichelli, 1951

[4] Whittaker, E T., Analytical dynamics of particles and rigid bodies, Dover, reprint, 1944

[5] Moser, J , Various aspects of integrable Hamiltonian systems, in J Guckenheimer, J Moser and Sh E Newhouse (eds) Dynamical Systems, Birkhauser, 1980, 233 – 289

[6] Arnol'd, V I , et al , Encycl of Math Sci , 3, 4, 7, Springer, 1988(译自俄文)

Д В Аносов 撰

【补注】 (L, A) 对也称为 Lax 对(Lax pair),指的是这样的动力系统,它可表为 $\dot{L}=[A, L]$ 的形式,其中 L, A 为适当的算子或矩阵.熟知的例子有 **Korteweg-de Vries 方程** (Korteweg - de Vries equation) $u_t = 6uu_x - u_{xxx}$, 且 $L=-(d^2/dx^2)+u$, $A=-4(d^3/dx^3)+6u(d/dx)+3u_x$ Lax 对在**孤立子**(soliton)方程与完全可积系的数学理论中以及在其解法(称为逆散射法(inverse scattering method)或逆谱变换法(inverse spectral-transform method))中是一个重要的组成部分 关于此课题的书,见[A1]-[A3]

循环坐标也称为角坐标(angle coordinates).一个有限维完全可积系统能(用典则变换)变换成 $I_i=$ 常数, $\varphi_i=c_i$ 的形式,$(I_1, \ , I_n, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ 称为作用 - 角变量(action - angle variables).

参考文献

[A1] Fomenko, A T , Integrability and nonintegrability in geometry and mechanics, Kluwer, 1988(译自俄文).

[A2] Faddeev, L D and Takhtajan, L A , Hamiltonian methods in the theory of solitons, Springer, 1987(译自俄文).

[A3] Drazin, P G , Solitons, Cambridge Univ Press, 1983

郑维行 译 沈永欢、陈一元 校

线性 Hamilton 系统 [Hamiltonian system, linear, Гамильтонова система линейная]

由线性 Hamilton 方程组(linear Hamiltonian-system of equations)

$$\frac{dp_j}{dt}=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_j}, \quad \frac{dq_j}{dt}=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_j}, \quad j=1, \quad , k \quad (1)$$

描述的力学系统,其中 $\mathscr{H}$ 是变量 $p_1, \cdots, p_k, q_1, \cdots, q_k$ 的二次型,其系数是实的且可能依赖于时间 t.线性 Hamilton 方程组(1)也称为线性正则方程组(linear canonical system of equations).方程组(1)可写为 Hamilton 向量方程

$$J\frac{dx}{dt}=H(t)x, \quad (2)$$

其中 x 为列向量 $(p_1, \cdot, p_k, q_1, \cdot, q_k)$, $H(t)=H(t)^*$ 为二次型 $2\mathscr{H}$ 的矩阵且

$$J=\begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}$$

(这里 I_k 为 $k\times k$ 单位矩阵). 若方程 (2) 中的 J 为任意非退化实斜对称矩阵, 则经适当的代换 $x=Sx_1$, 这里 S 为非退化实矩阵, 它可化为一个类似形式

$$J_1\frac{dx_1}{dt}=H_1(t)x_1,$$

其中 J_1 是任何给定的实非退化斜对称矩阵. 对 (2) 将假定 对一切 $-\infty<t_1<t_2<\infty$ 有 $|H(t)|\in L_1[t_1,t_2]$ 下列方程均可化为(2) 二阶向量方程

$$\frac{d}{dt}\left[R(t)\frac{dy}{dt}\right]+P(t)y=0, \qquad (3)$$

其中 y 为 k 阶向量, $R(t)=R(t)^*$, $P(t)=P(t)^*$ 均为实($k\times k$) 矩阵函数, 且 $\det R(t)\neq 0$, 方程

$$\frac{d}{dt}\left[R(t)\frac{dy}{dt}\right]+Q\frac{dy}{dt}+P(t)y=0, \quad (3a)$$

其中 $Q=-Q^*$ 为常数矩阵, $R(t)=R(t)^*$, $P(t)=P(t)^*$, $\det R(t)\neq 0$ (矩阵 $P(t)$, Q, $R(t)$ 均为实的), 标量方程

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\frac{d^j}{dt^j}\left[\varphi_j(t)\frac{d^j\eta}{dt^j}\right]=0, \qquad (4)$$

其中 $\varphi_j(t)$ 为实函数, $\varphi_k(t)\neq 0$, 以及对应的向量方程. 对于方程 (3),

$$x=\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix},\quad z=R\frac{dy}{dt},$$

对于方程(3a),

$$x=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix},\ \text{这里}\ p=R\frac{dy}{dt}+\frac{1}{2}Qy,\ q=y,$$

对于方程 (4), $x_j=\eta^{(j-1)}$, $j=1,\ \ ,k$,

$$x_{j+k}=\varphi_j x_{j+1}-x_{k+j+1},\ j=1,\ \ ,k-1,$$

$$x_{2k}=\varphi_k x_k$$

对于 $R(t)=1$ 的标量方程 (3), 即方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}+P(t)y=0,$$

其中 $P(t)$ 为周期函数, 就是 **Hill 方程** (Hill equation)

设 $X(t)$ 为方程(2) 的发展矩阵 (evolution matrix) (即(2) 的**基本解组** (fundamental system of solutions), 并用条件 $X(0)=I_n$ 正规化的矩阵). 引进不定标量积 (indefinite scalar product) $\langle x,y\rangle=i\langle Jx,y\rangle$, 这里 $(x,y)=\sum_{j=0}^{2k}x_j\overline{y}_j$ 为平常**内积** (inner product) 依此标量积为酉的复矩阵 U (亦见**酉矩阵** (unitary matrix)), 即满足 $U^*JU=J$ 的 U, 称为 J 酉的 (J-unitary), 实的 J 酉矩阵 X 称为辛的 (symplectic)

已经知道 (见 **Hamilton 系统** (Hamiltonian system)), Poincaré 不变量即外微分形式 $\sum_{j=1}^{k}dp_j\wedge dq_j$ 沿 Hamilton 方程组的轨道运动时保持不变. 在线性 Hamilton 方程组情形下, 这表示对方程 (2) 的任何解 $x^{(1)}=x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}=x^{(2)}(t)$, 有 $\langle x^{(1)},x^{(2)}\rangle=\langle X(t)x^{(1)}(0), X(t)x^{(2)}(0)\rangle=$ 常数, 即 $X(t)$ 对任何 t 是辛矩阵. 由关系式 $X^*JX=J$ 推出, X 的本征值 (重根依重数计并依 Jordan 块的次序) 对于单位圆 (依反演意义) 是对称的 (Ляпунов-Poincaré 定理 (Lyapunov-Poincaré theorem)) 辛 (与 J 酉) 矩阵的幺模本征值据下列法则分为两类 设 ρ 是 J 酉矩阵 U 的本征值且 $|\rho|=1$, 那么形式 $\langle x,x\rangle$ 在相应的根子空间上是非退化的. 设 p, q 分别为它的正块, 负块的个数, 则称 p 个第一类本征值 (eigen value of the first kind) 与 q 个第二类本征值 (eigen value of the second kind) 在 ρ 相合

矩阵 $K=J^{-1}L$, $L^*=L$ (满足 $\langle Kx,y\rangle=-\langle x,Ky\rangle$, $\forall\ x,y$) 的纯虚数本征值的类别可同样定义. 对 J 酉矩阵 X, 模不等于 1 的本征值 ρ 称为第一类本征值, 如果 $|\rho|<1$, 称为第二类本征值, 如果 $|\rho|>1$ 任何辛矩阵恰好有 (依重数计) k 个第一类本征值 $\rho_1,\ \ ,\rho_k$ 与 k 个第二类本征值 $\rho_1^{-1},\cdot\ ,\rho_k^{-1}$ 若 $\rho_1,\ \ ,\rho_k$ 适当编号, 则它们均是矩阵 X 的连续函数 ([2], [3])

线性 Hamilton 方程组解的振动性质. 方程 (2)-(4) 的解的振动性质, 涉及变分学、最优控制、相应微分算子的谱的性质等等若干问题

定义 Ⅰ) 方程 (3) 称为振动的 (oscillatory), 如果对任何 $t_0>0$, 有数 $t_2>t_1>t_0$ 与解 $y(t)\not\equiv 0$, 满足 $y(t_1)=y(t_2)=0$, 在其余情形下, 便称为非振动的 (non-oscillatory) Ⅱ) 方程 (4) 称为振动的, 如果对任何 $t_0>0$ 有解 $\eta(t)\not\equiv 0$, 且它至少有两个 k 阶零点 t_1, t_2, $t_2>t_1>t_0$, 在其余情形下便称为非振动的 Ⅲ) 方程 (1) 称为振动的, 如果函数

$$\Delta\operatorname{Arg}X(t)=\sum_{j=1}^{k}\Delta\operatorname{Arg}\rho_j(t) \qquad (5)$$

在 (t_0,∞) 上无界, 在其余情形下便称为非振动的 ((5) 中的 $\rho_j(t)$ 是 $X(t)$ 的第一类本征值.) 将方程 (3) 或(4) 化为 (2) 后, 所得方程(2) 依Ⅲ) 中意义为振动的, 当且仅当方程 (3) (或 (4)) 依定义Ⅰ) (或Ⅱ)) 为振动的. 对定义Ⅲ) 可以给出下述几何解释. 由辛矩阵 X 构成的群 $\mathrm{Sp}(k,R)$ 同胚于一个连通且单连通拓扑空间与圆周的积 相应的映射可以选择得使 $\exp(\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Arg}\rho_j)$ 成为矩阵 $X\in\mathrm{Sp}(k,R)$ 到此圆周上的投影 (这里 ρ_j 为 X 的第一类本征值). 这样, 若当 $t\to\infty$ 时 $X(t)$ 在 $\mathrm{Sp}(k,R)$ 中是"无界弯曲的", 方程 (2) 便是振动的 (若 $n=1$, 此群同胚于一个"实心环", 因而"弯曲"有直观解释) 辛矩阵的辐角有多种别的定义, 它们对应于群 $\mathrm{Sp}(k,R)$ 到圆周的其他映射, 并且依下述意义与 (5) 等价: 对任何曲

线 $X(t)\in Sp(k, R)$，它们全都满足不等式

$$|\Delta \operatorname{Arg}' X(t) - \Delta \operatorname{Arg} X(t)| < c \qquad (6)$$

这样的辐角例如有

$$\operatorname{Arg}_1 X = \operatorname{Arg}\det(U_1 - iV_1),$$
$$\operatorname{Arg}_2 X = \operatorname{Arg}\det(U_2 - iV_2),$$

其中 U_j, V_j 为矩阵

$$X = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{pmatrix}$$

的 $(k \times k)$ 子矩阵（见[6]） 关于方程(2)，(3)与(4)的振动性与非振动性，有多种有效且易于验证的充分(有时是充要的)条件（例如见[5]与[6]的参考文献）

具周期系数的线性 Hamilton 方程组．设在(2)中几乎处处有 $H(t+T)=H(t)$ 矩阵 $X(T)$ 称为方程(2)的单值矩阵(monodromy matrix)，并且它的本征值称为(2)的乘子(multiplier) 方程(2)(或对应的 Hamilton 算子或 Hamilton 函数 $H(t)$)称为强稳定的(strongly stable)，如果它的一切解在 $(-\infty, \infty)$ 上有界，并且此性质在 Hamilton 算子依范数 $\|H\| = \int_0^T |H(t)|dt$ 意义作小变形时保持不变．方程(2)(或 Hamilton 算子或 Hamilton 函数 $H(t)$ 的强不稳定性(strong instability)可类似地定义．为使方程(2)为强稳定的，其充要条件是它的所有乘子都位于单位圆周上且没有两个不同类型乘子相合（换句话说，$X(t)$ 的所有根子空间依积 $\langle x, y\rangle = i(Jx, y)$ (意义为确定的)．方程(2)为强不稳定的当且仅当它的某些乘子位于单位圆周之外．乘子的两个样本(取自它们的属类)，其中每个乘子不包括不同类的相合乘子，称为等价的(equivalent)，如果一个样本可以连续变为另一个以致不同类乘子不会相遇．等价样本类称为乘子型(multiplier type) 在稳定性情形下有 2^k 个乘子型．它们可以用形如 $\mu=(+, +, -, +, -, \ldots, -)$ 的符号来表示，其中加号与减号对应于沿着圆周 $|\rho|=1$ 的上半部自点 $\rho=1$ 到 $\rho=-1$ 移动时依次遇到的乘子的类．设 $L=\{H(t)\}$ 为一切上述型 Hamilton 函数以 $\|H\| = \int_0^T |H(t)|dt$ 为范数的 Banach 空间 强稳定 Hamilton 函数的集合 $O \subset L$ 在 L 中分解为可数个区域 $O_n^{(\mu)}$, $n=0, \pm1, \pm2, \ldots, \mu=\mu_1, \ldots, \mu_{2^k}$ 区域 $O_n^{(\mu)}$ 为一切这样的 Hamilton 函数的集合 它们对应于乘子型 μ，与由公式

$$\Delta \operatorname{Arg} X(t)|_0^T = 2n\pi + \sum_{j=1}^{k} \theta_j$$

确定的整数 n，其中 $\theta_j = \arg \rho_j(T)$ 为第一类乘子的辐角([4]，[7]) 对于 $k=1$，强不稳定 Hamilton 函数的集合分解为可数个区域，若 $k>1$，此集合为连通的．关于 $H(t)\in O_n^{(\mu)}$ 的种种充分条件是已知的，见[3]，[7]，[8] 很多充分条件是由下述定理得到的．设 $H_1(t) \leqslant H_2(t)$，则据"线段" $H_s(t) = sH_1(t) + (1-s)H_2(t)$，$0 \leqslant s \leqslant 1$ 的强稳定性，可得满足 $H_1(t) \leqslant H(t) \leqslant H_2(t)$ 的 Hamilton 函数 $H(t)$ 是强稳定的．关于无穷维情形($k=\infty$)类似的定理亦已证明，这里 $\{x\}$ 为 Hilbert 空间，并且在(2)中 J 与 $H(t)$ 均为具特殊性质的算子([9])，若 $k=1$，此定理对强不稳定 Hamilton 函数也成立([3])

参数共振 考虑方程

$$J\frac{dx}{dt} = H_0 x, \qquad (8)$$

其中 H_0 是常 Hamilton 函数，假定方程(8)的一切解是有界的．频率 θ 称为临界的(critical)，若对任何 $\delta>0$，存在"扰动" Hamilton 方程

$$J\frac{dx}{dt} = H(\theta t)x, \qquad (9)$$

其中 $H(t+2\pi) = H(t)$，$\|H(t) - H_0\| < \delta$，使方程(9)有无界解(θ 可正可负) 当方程组中某些参数给予任意小周期扰动时便引起无界振动，此现象称为参数共振(parametric resonance) 参数共振在技术中和物理中有极大重要性 它比平常共振有更大的"危险性"(或更"有用"，依赖于所论问题)，这是由于与后者不同，此振动呈指数型增长（非多项式增长），并且共振频率不是离散的，而是充满区间．这些区间的长依赖于扰动的振幅，而当扰动振幅趋于零时，这些区间收缩为单个点(对应于临界频率)．设 $i\omega_1, \ldots, i\omega_k$ 为矩阵 $J^{-1}H_0$ 的第一类本征值(因而 $-i\omega_1, \ldots, -i\omega_k$ 为第二类本征值)．设 $\omega_j + \omega_h \neq 0$ $(j, h=1, \ldots, k)$ 临界频率恰好由数 $\theta_{jh}^{(N)} = (\omega_j + \omega_h)/N (j, h=1, \ldots, k, N=\pm1, \pm2, \ldots)$ 组成([2]) 在(9)中令 $H(\theta t) = H_0 + \varepsilon H_1(\theta t)$，这里 ε 是小参数且

$$J^{-1}H_0 f_j = i\omega_j f_j (j=\pm1, \ldots, \pm k), \ \omega_{-j} = -\omega_j,$$
$$H_1(\tau) = \sum_m H^{(m)} e^{im\tau}$$

可以选择向量组 $\{f_j\}$ 使 $\langle f_j, f_h\rangle = \delta_{jh}\operatorname{sign} j (j=\pm1, \ldots, \pm k)$ 在"一般"情形下，当关于 $H(\theta t) = H_0 + \varepsilon H_1(\theta t)$ 的方程(9)为强不稳定时，相应的点 $\{\varepsilon, \theta\}$ 将充满靠近 θ 轴的区域 $\Omega_1(\varepsilon) < \theta - \theta_{jh}^{(N)} < \Omega_2(\varepsilon)$，这里 $\Omega_{1,2} = \theta_{jh}^{(N)} + \varepsilon\mu_{1,2} + O(\varepsilon^{3/2})$ 数 μ_1, μ_2 能简单地用 $H^{(m)}$ 与 f_j 表示(例如见[3])

量 $|(H^{(N)}f_j, f_{-h})|$ 是临界频率 $\theta_{jh}^{(N)}$ 的"危险度"的刻画 此值越大，邻接于点 $(0, \theta_{jh}^{(N)})$ 的"不稳定楔"越宽，并且具有小的 $\alpha>0$ 的解的 α 指数增长的区域越靠近 θ 轴(详见[3]) 关于其他知识，亦见[10]，[12]，[13]

对具有复系数的方程(1)的类似结果已经获得

($H(t)$ 为 Hermite 矩阵函数，$J^* = -J$, $\det J \neq 0$，例如见[11]) 在[14]中考虑了更一般的方程组

$$Q(t)\frac{dy}{dt} = \left[S(t) - \frac{1}{2}\frac{dQ}{dt}\right]y,$$

其中

$$Q(t)^* = -Q(t),\ S(t)^* = S(t),\ \det Q(t) \neq 0,$$

$$Q(t+T) = Q(t),\ S(t+T) = S(t)$$

已经证明，在实复两种情形下，稳定性区域的个数均为有限的，这些区域的刻画可借用相应方程的解的性质得到.

关于 Hilbert 空间中具有界或无界算子系数的算子方程(2)，许多类似结果也已获得([15]，[16])

参考文献

[1] Ляпунов, А М , Общая задача об устойчивости движения, Собр соч т 2, 1956, с 7 – 263

[2] Krein, M G , Foundations of the theory of λ-zones of stability of a canonical system of linear differential equations with periodic coefficients, *Transl Amer Math Soc* (2), **120** (1983), 1 – 70 (In memoriam A A Andronov (1955), 413 – 498)

[3] Якубович, В А , Старжинский, В М , Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М , 1972, гл 3 (英译本 Yakubovich, V A , and Starzhinskii, V M , Linear differential equations with periodic coefficients, Wiley, 1975)

[4] Гельфанд, И М и Лидский, В Б , 《Успехи матем наук》, **10** (1955), 1, 3 – 40

[5] Sternberg, R L , Variational methods and non-oscillation theorems for systems of differential equations, *Duke Math J* , **19** (1952), 311 – 322

[6] Якубович, В А , 《Матем Сб 》, **56**(98) (1962), 1, 3 – 42

[7] Крейн, М Г и Якубович, В А , в кн Тр Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, т 1, К , 1963, 277 – 305

[8] Лидский, В Б , 《Докл АН СССР》, **102** (1955), 5, 877 – 880

[9] Дергузов, В М , 《Матем сб 》, **63**(105) (1964), 4, 591 – 619

[10] Moser, J , New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems, *Comm Pure Appl Math* , **11** (1958), 81 – 114

[11] Coppel, W A and Howe, A , On the stability of linear canonical systems with periodic coefficients, *J Austral Math Soc* , **5** (1965), 169 – 195

[12] Митропольский, Ю А , Метод усреднения в нелинейной механике, К , 1971

[13] Еругин, Н П , Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Минск, 1963 (英译本 Erugin, N P , Linear sestems of ordinary differential equations with periodic and quasi-periodic coefficients, Acad Press, 1966)

[14] Лидский, В Б , Фролов, П А , 《Матем сб 》, **71** (113) (1966), 1, 48 – 64

[15] Далецкий, Ю Л , Крейн М Г , Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М , 1970, гл 5 (英译本 Daletskii, Yu L and Krein, M G , Stability of solutions of differential equations in Banach space, Amer Math Soc , 1974)

[16] Фомин, В Н , Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах, Л , 1972

В А Якубович 撰 郑维行 译 沈永欢、陈一元 校

Hammerstein 方程 [Hammerstein equation, Гаммерштейна уравнение]

下列形式的非线性积分方程

$$\varphi(x) + \int_a^b K(x, s)f[s, \varphi(s)]ds = 0$$
$$a \leqslant x \leqslant b,$$

其中 $K(x, s)$ 和 $f(x, s)$ 是已知函数，而 $\varphi(x)$ 是未知函数. 因 A Hammerstein ([1]) 而得名，他研究了 $K(x, s)$ 是对称的正 Fredholm 核，即其特征值均为正数的情况. 此外，如果函数 $f(x, s)$ 是连续的，并且满足条件

$$|f(x, s)| \leqslant C_1|s| + C_2,$$

其中 C_1 和 C_2 是正的常数，并且 C_1 小于核 $K(x, s)$ 的第一个特征值，则 Hammerstein 方程至少有一个连续解 另一方面，如果对于属于区间 (a, b) 的任何固定的 x，$f(x, s)$ 是 s 的非减函数，则 Hammerstein 方程的解不能多于一个 如果 $f(x, s)$ 满足条件

$$|f(x, s_1) - f(x, s_2)| \leqslant C|s_1 - s_2|,$$

其中正的常数 C 小于核 $K(x, s)$ 的第一个特征值，则最后这个性质仍然保持. Hammerstein 方程的解可以用**序列逼近法** (sequential approximation, method of) 来构造

参考文献

[1] Hammerstein, A , Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen, *Acta Math* , **54** (1930), 117 – 176

[2] Tricomi, F G , Integral equations, Dover, reprint, 1985

[3] Вайнберг, М М , Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М , 1956 (英译本 Vaǐnberg, M M , Variational methods for the study of nonlinear operators, Holden-Day, 1964)

[4] Красносельский, М А, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М, 1956(英译本 Krasnosel'skiĭ, M A, Topological methods in the theory of nonlinear integral equations, Pergamon, 1964)

[5] Смирнов, Н С, Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений, М -Л, 1936

Б В Хведелидзе 撰 张鸿林 译

环柄理论[handle theory, ручек теория]，环柄体理论(handle-body theory)

研究拓扑流形的方法之一，它基于流形的一个表示，而这流形是用一个特殊方法作为以内部不交，边界相交的拓扑球的并集

设 M^n 是一个 n 维流形，k 是整数，使得 $0\leqslant k\leqslant n$，又设拓扑球 H 是同胚映射 h $B^k\times B^{n-k}\to M^n$ 的象，其中 B^m 表示中心在 0 点的标准的 m 维球．那么对 (H, h)(或简单地，H)就称为 M^n 中的指标 k 的环柄．同胚 h 称为环柄 H 的特征映射(characteristic mapping of the handle)圆盘 $h(B^k\times 0)$ 称为核心圆盘(core disc)，而圆盘 $h(0\times\partial B^{n-k})$ 称为横截圆盘(transversal disc)球面 $h(\partial B^k\times 0)$ 称为粘贴球面(attaching sphere)(或底球面(base sphere))，且球面 $h(0\times\partial B^{n-k})$ 称为横截球面(transversal sphere)空间 $h(\partial B^k\times B^{n-k})$ 称为环柄 H 的底(base of the handle)

如果流形 M^n 是分片线性的，则说分片线性环柄才有意义，这就意味着特征映射的分片线性性．类似地，当 M^n 是光滑流形的情形时，人们可以说光滑环柄．

设 (H, h) 是流形 M^n 中的指标 k 的环柄，P 是它的底，且设 M_1^n 是 M^n 的子流形，使得 $H\cap M_1^n=P$ 从 M_1^n 到 $M_2^n=M_1^n\cup H$ 的变换称为粘贴指标 k 的环柄的运算 嵌入 $f=h|_{\partial B\times B}$ 称为粘贴映射(attaching mapping)在 M_1^n 的同胚不变下，流形 M_2^n 完全由粘贴映射 f 确定，并且不依赖于外围流形 M^n．如果 f 是 $\partial B^k\times B^{n-k}$ 在 ∂M_1^n 中的任一嵌入，那么通过 f 粘贴一个环柄的结果可以如下描述 $M_2^n=(M_1^n\cup(B^k\times B^{n-k}))/\sim$，其中等价关系 $\sim$ 由 f 将 $\partial B^k\times B^{n-k}$ 和 ∂M_1^n 的点粘合而生成，从 ∂M_1^n 到 ∂M_2^n 的变换称为球面重排(spherical rearrangement)(也称割补术(surgery))通过用合痕的嵌入粘贴一个环柄所得到的流形是同胚的．图 1 表示了指标 1 和 2 的三维环柄的粘贴 粘贴一个指标 0 的环柄到 M_1^n 是由增加单独取的 n 维球到 M_1^n 所组成 附加一个指标 n 的环柄是由粘上一个 n 维球到 ∂M_1^n 的分支之一而组成．

如果流形 M_1^n 和粘贴嵌入 f $\partial B^k\times B^{n-k}\to M_1^n$

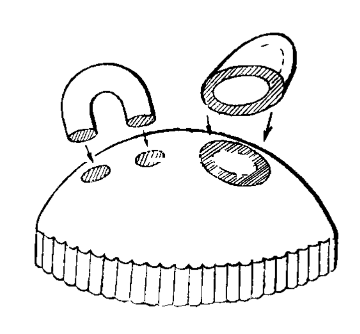


图 1

是分片线性的，那么由 f 通过粘贴一个环柄所得到的流形 M_2^n 也是分片线性的 在光滑的 M_1^n 和 f 的情形下，流形 M_2^n 在除了"隅角"点外的所有点处都有自然的光滑结构，这些"隅角"点的并与环柄的底的边界相一致．这个结构可以唯一地延拓为整个 M_2^n 上的光滑结构．这样的延拓称为隅角的磨光(smoothing of corners)在此光滑条件下，隅角的磨光被包含在粘贴环柄中 粘贴一个光滑的环柄完全由具有法丛的平凡化粘贴一个球面而确定

作为在 M^n 中的环柄的有限的有序族的并的紧流形 M^n 的表示称为 M^n 的环柄分解(handle decomposition)，如果每个随后的环柄与前面的并恰好沿着它的底相交 换言之，如果 M^n 是从球(或者空集)通过顺序地粘贴环柄来得到，则 M^n 就允许一个环柄分解 类似地，利用对 (M^n, M_0^n) 的分解，将 M^n 的一个表示理解为顺序地粘贴环柄到 M_0^n 上的结果，其中 M_0^n 是 M^n 的一个子流形．特别地，对 $(W, M_0\times I)$ 的分解称为下配边 (W, M_0, M_1) 的环柄分解，其中 $M_0\times I$ 是 M_0 的领子．非紧流形 M^n 的环柄分解由无穷多个环柄组成．这里，通常要求分解是局部有限的，即在 M^n 中的每一个紧集只与有限多个环柄相交

通过变换，将早已粘上的环柄的横截球面和要粘到**一般位置**(general position)的环柄的底球面以及用同痕映射(见**同痕(拓扑学中的)**(isotopy(in topology)))代替粘贴映射，可以得到同一指标的环柄不相交以及相继粘贴的环柄的指标不减少．这样的环柄分解称为正则的(regular)

每个分片线性流形可以分解成分片线性环柄．如果 T 是 M^n 的三角剖分，而 T'' 是它的第二次重心重分，那么作为指标 k 的环柄，可以在 T 的 k 维单形的重心的 T'' 中取闭星形(见图 2，星形的定义在**复形**(complex)中给出)．

在光滑流形 M^n 的光滑环柄分解与具有非退化的临界点的 M^n 上的光滑函数——**Morse 函数**(Morse function)二者之间存在一个密切的关系．这个关系如下 设 x_0 是 Morse 函数 f $M^n\to\mathbf{R}$ 的指标 k 的临界

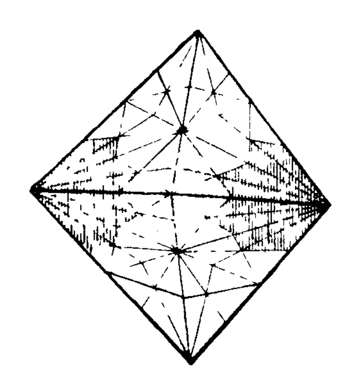


图 2

点，使得对某个 $\varepsilon>0$，区间 $[f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon]$ 的逆象不包含其他的临界点，并且设 $M_C=\{x\in M^n\ f(x)\leqslant c\}$ 那么，从流形 $M_{f(x_0)-\varepsilon}$ 通过粘贴一个指标 k 的光滑环柄得到流形 $M_{f(x_0)+\varepsilon}$ 因此，在紧流形 M^n 上的每一个 Morse 函数产生 M^n 的一个光滑的环柄分解，此外，在这分解中的指标 k 的环柄的数目与指标 k 的临界点的数目是一样的 这就证明了任何光滑流形的光滑环柄分解的存在性．相反地，M^n 的每一个光滑环柄分解由 M^n 上的某个 Morse 函数所产生

拓扑流形分解为环柄的问题更复杂 众所周知，任何维数 $n\geqslant 5$ 的闭拓扑流形可以分解为拓扑环柄．维数 $n\leqslant 3$ 的流形是可组合三角剖分的，因此，可以分解成环柄．已经证明，存在不允许环柄分解的维数 4 的流形

如果在流形 M^n 的正则环柄分解中，连续收缩所有的环柄到它们的核心圆盘，那么就得到一个**胞腔空间**(cellular space) K. 因此，对 M^n 的分解里的每个指标 k 的环柄对应于 K 中的 CW 复形的一个 k 维胞腔．空间 K 与 M^n 有相同的**同伦型**（homotopy type）如果 M^n 是闭的，则 K 与 M^n 是一致的．

从环柄的定义可见，每个指标 k 的 n 维环柄 H 同时也是一个指标 $n-k$ 的环柄．如果 P_k 是作为指标 k 的环柄 H 的底，P_{n-k} 是作为指标 $n-k$ 的环柄 H 的底，则 $P_k\cup P_{n-k}=\partial H$ 及 $P_k\cap P_{n-k}=\partial P_k=\partial P_{n-k}$ 闭流形 M^n 的每一个环柄分解产生 M^n 的所谓对偶环柄分解（dual handle decomposition）对偶分解由反序的初始分解的环柄组成，并且每个指标 k 的环柄早就被认为是指标 $n-k$ 的环柄 这个事实是 **Poincaré 对偶性**(Poincaré duality)的几何基础 如果流形 M^n 有边界，则对偶分解可以看作对 $(M^n\cup(\partial M^n\times I),\ \partial M^n\times I)$ 的分解．

设 H_1, H_2 是粘在流形 M^n 上的指标 k 的不交的环柄，具有用嵌入 $f_1, f_2\ \partial B^k\times B^{n-k}\to\partial M^n$ 的单连通的边界 设 $k\geqslant 2$ 及 $n-k\geqslant 2$，并且用 $[f]$ 表示由 f 决定的群 $\pi_{k-1}(\partial M^n)$ 的元素 那么嵌入 f_2 在 $\partial(M^n\cup H_1)$ 中同痕于嵌入 $f_2\ \partial B^k\times B^{n-k}\to\partial M^n$，使得 $[f_2]=[f_1]+[f_2]$. 这意味着流形 $M^n\cup H_1\cup H_2$ 和 $M^n\cup H_1\cup H_2'$ 是同胚的，其中 H_2' 是通过 f_2 粘上的环柄．从流形 $M^n\cup H_1\cup H_2$ 到流形 $M^n\cup H_1\cup H_2'$ 的变换称为环柄的加法（addition of handles）.

设流形 M_2^n 是从流形 M_1^n 通过顺序粘上指标 k 的环柄 H_1 和指标 $k+1$ 的环柄 H_2 得到的，使得 H_2 的底球面恰好在一点上横截地切割 H_1 的横截球面．那么这个环柄对可以消去 这意味着存在 M_2^n 到 M_1^n 上的同胚，它在 $H_1\cup H_2$ 的一个邻域外面是恒等的．消去的运算有时称为附加环柄的消去（cancellation of additional handles）环柄的加法和环柄的消去可以停留在分片线性或光滑范畴里进行 通过指标 0 和 1 的环柄的消去，例如，恰好有一个指标为 0 的环柄分解来代替紧连通流形 M^n 的任何环柄分解．如果 M^n 是单连通的且 $n\geqslant 5$，那么通过环柄的加法和消去，可以将任何环柄分解简化到与 M^n 的同调结构一致的环柄的最小数目的分解

设 (H, h) 是在分片线性流形 M^n 里的指标 k 的拓扑环柄，而且设特征映射 h 在 $\partial B^k\times B^{n-k}$ 的一个邻域里是分片线性的 是否存在在 $\partial B^k\times B^{n-k}$ 的一个邻域里恒等并且将环柄 H 变直的 h 的同痕，即是否可将 H 变成分片线性的环柄呢？如果这个问题回答总是肯定的，那么在每个拓扑流形上，可以通过在将一个邻域的分片线性环柄在另一个邻域内变直相一致的坐标邻域上作出结构来引进分片线性结构．事实上，这个回答依赖于环柄 H 的指标 k 和维数 n. 如果 $n\leqslant 3$ 或者 $n\geqslant 5$ 且 $k\neq 3$，那么任何环柄都可以变直．熟知当 $n\geqslant 5$ 时存在指标 3 的环柄不能变直，而且变直的障碍在群 $\mathbf{Z}_2$ 中．在维数是 4 时，指标 0 和 1 的环柄可以变直，而对指标 2 和 3 的那些环柄一般是不行的．它就是来自使分片线性环柄光滑的障碍的所谓 Milnor 群 Γ_k

参考文献

[1] Smale, S , Generalised Poincare conjecture in dimensions >4, *Ann of Math* (2), **74** (1961), 391 – 466

[2] Smale, S , Structure of manifolds, *Amer J Math* , **84** (1962), 387 – 399

[3] Smale, S , A survey of some recent developments in differential topology, *Bull, Amer Math Soc* , **69** (1963), 131 – 145

[4] Kirby, R C and Siebenmann, L C , Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations, Princeton Univ Press, 1977

[5] Rourke, K and Sanderson, B , Introduction to piecewise linear topology, Springer, 1972

[6] Рохлин, В А , Фукс, Д Б, Начальный курс топологии Геометрические главы, М , 1977 (英译本 Rokhlin, V A and Fuks, D B , Beginner's course in topology, Geometric chapters, Springer, 1984)

С В Матвеев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Milnor, J , Morse theory, Princeton Univ Press, 1963 (中译本 J W 米尔诺，莫尔斯理论，科学出版社，1988)

[A2] Milnor, J ,Lectures on the h-cobordism theorem, Princeton Univ Press , 1965

徐森林 译 薛春华 校

Hankel 函数 [Hankel functions , Ганкеля функции]

第三类**柱函数** (cylinder functions) 它们可以通过 **Bessel 函数** (Bessel functions) 定义如下

$$H_p^{(1)}(z) = \frac{J_{-p}(z) - e^{-ip\pi} J_p(z)}{i \sin p\pi},$$

$$H_p^{(2)}(z) = \frac{e^{-ip\pi} J_p(z) - J_{-p}(z)}{i \sin p\pi},$$

其中 p是非整数. 由此可以得到重要的关系式

$$H_{-p}^{(1)}(z) = e^{ip\pi} H_p^{(1)}(z),$$

$$H_{-p}^{(2)}(z) = e^{-ip\pi} H_p^{(2)}(z).$$

如果 z取实值，则 Hankel 函数是复的，但是，如果 z 取实正值，则

$$i^{p+1} H_p^{(1)}(iz) \text{ 和 } i^{-(p+1)} H_p^{(2)}(-iz)$$

是实的. 对于大的 $|z|$, Hankel 函数具有简单的渐近表示

$$H_p^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[i \left[z - p\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] \right],$$

$$H_p^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[-i \left[z - p\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] \right]$$

“半整数”变元 $p = n + 1/2$ 的 Hankel 函数可以用初等函数来表示，特别是

$$H_{1/2}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{e^{iz}}{i},$$

$$H_{1/2}^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{e^{-iz}}{-i}$$

这些函数是 H Hankel 于 1869 年引入的.

参考文献

[1] Jahnke, E , Emde, F and Losch, F , Tafeln hoheren Funktionen, Teubner, 1966

П И Лизоркин 撰

【补注】 其他文献见**柱函数** (cylinder functions)

张鸿林 译

Hardy 类 [Hardy classes , Харди классы] H_p, $p>0$

圆盘 $D=\{z \ |z|<1\}$ 中满足下述条件的解析函数 $f(z)$ 的类

$$\sup_{0<r<1} \left\{ \int_T |f(r\xi)|^p dm(\xi) \right\}^{1/p} < \infty, \qquad (*)$$

其中 $dm=|d\xi|/2\pi$ 是圆周 $T=\{\xi \ |\xi|=1\}$ 上的规范 Lebesgue 测度，此条件等价于次调和函数 $|f(z)|^p$ 在 D 内具有优调和函数. D 内有界解析函数的类 H^∞ 也算作 Hardy 类. Hardy 类是 F. Riesz 于 [1] 中引进的，为向首次在条件 (*) 之下研究 p平均值性态的 G.H Hardy 表示敬意，他为这种类取名 Hardy 类. Hardy 类在函数边界性质的各种问题、调和分析、幂级数论、线性算子、随机过程，以及极值和逼近问题理论中起着重要作用

对任何 $0<q<p\leqslant\infty$, 严格包含关系 $H^p \subset H^q \subset N$ 成立，这里 N 是 Nevanlinna **有界特征函数** (function of bounded characteristic) 类，特别是，Hardy 类中的函数在 T上几乎处处有**角边界值** (angular boundary value) $f^*(\xi)$, 从 $f^*(\xi)$ 可以唯一地还原到 D 中原先的函数 $f(z)$. 如果 $f(z)\in H^p$, 则 $f^*(\xi)\in L_p(T)$ (对任意的解析函数 $f(z)$ 逆命题不成立)，且有

$$\lim_{r\uparrow 1} \int_T |f(r\xi)-f^*(\xi)|^p dm(\xi)=0.$$

类 $H^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 恰是 D 中满足下述条件的解析函数 $f(z)$ 的类 $f(z)$ 具有边界值 $f^*(\xi)\in L_p(T)$, 且可通过 **Cauchy 积分** (Cauchy integral) 从 $f^*(\xi)$ 还原到 $f(z)$. 然而在 D 中可表示为 Cauchy 型积分或 Cauchy-Stieltjes 型积分的函数一般地说只属于类 H^p, $p<1$ (逆命题不成立). D 内的单叶函数属于所有类 H^p, $p<1/2$. 条件 $f'(z)\in H^1$ 是解析函数 $f(z)$ 在 $\bar{D}$上连续、在 T上绝对连续的必要充分条件 如果 $f(z)$ 把圆盘 D 共形映射到 Jordan 区域 G上，则条件 $f'(z)\in H^1$ 等价于围道 ∂G 为可求长 (见 [2], [5])

Hardy 类函数同其边界值之间存在一一对应，这使得在需要时把函数 $f(z)\in H^p$ 看作 T上的函数成为可能，于是类 H^p 就成为 Banach 空间 $L_p(T)$ (当 $p<1$ 时是完全线性度量空间) 的闭子空间. 当 $0<p<\infty$ 时这些子空间与 $\xi=e^{it}$ 的多项式系在 $L_p(T)$ 中的闭包相同，而当 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 时则与 $L_p(T)$ 中负下标 Fourier 系数等于零的函数集相同 M Riesz 定理 (M. Riesz theorem) 断言，对于每个 $1<p<\infty$, 通过 Fourier 级数由

$$P\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}\right]=\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int}$$

表达的映射 P 是 Banach 空间 $L_p(T)$ 到 H^p 上的有界射影，但对 $p=1$ 或 ∞ 则不成立. 此命题蕴涵实空间 $L_p(T)_{\mathbf{R}}$ 与 $\mathrm{Re}\, H^p(1<p<\infty)$ 相同，对于其余的 p值，这些空间在其逼近特征与对偶空间的结构这两方面，以

及（对于 $p=1$）涉及 Fourier 系数的性态方面，都有本质的差别（见 [7]，[9]）

Hardy 类中非零函数的零点集 $\{z_k\}$ 完全由条件 $\sum_k(1-|z_k|)<\infty$ 所刻画，此条件保证了典范 **Blaschke 积**（Blaschke product）

$$B(z)=z^n\prod_k\frac{|z_k|}{z_k}\frac{z_k-z}{1-\bar{z}_k z}\in H^\infty$$

在 D 内紧统上的一致收敛性　对每个函数 $f(z)\in H^p$，$f(z)\not\equiv 0$，$p>0$，存在一个 F Riesz 因子分解（F Riesz factorization）$f(z)=B(z)\cdot f_0(z)$，其中 $B(z)$ 是由 $f(z)$ 的零点构造的 Blaschke 积，$f_0(z)\in H^p$ 且在 D 内 $f_0(z)\neq 0$．函数 $f_0(z)$ 又可分解为外函数

$$F(z)=\exp\left\{\int_T\frac{\xi+z}{\xi-z}\ln\chi(\xi)\,dm(\xi)+i\alpha\right\},\quad \alpha\in\mathbf{R}$$

与奇异内函数

$$S(z)=\exp\left\{-\int_T\frac{\xi+z}{\xi-z}\,d\mu(\xi)\right\}$$

之积 $f_0(z)=F(z)S(z)$，其中 $\chi(\xi)\geqslant 0$，$\ln\chi(\xi)\in L_1(T)$，$d\mu$ 是 T 上的非负奇异测度　条件

$$f(z)\in H^p,\quad F(z)\in H^p,\quad \chi(\xi)\in L_p(T)$$

是等价的，而且在 T 上几乎处处有 $|f^*(\xi)|=|F^*(\xi)|=\chi(\xi)$．形如 $G(z)=B(z)S(z)$ 的函数 $G(z)$ 称为**内函数**（inner function），它们完全由下列条件刻画　在 D 内 $|G(z)|<1$，在 T 上几乎处处 $|G^*(\xi)|=1$．常要用到把任一函数 $f(z)\in H^1$ 分解为 H^2 中两个函数之积的分解式 $f(z)=\sqrt{f_0(z)}\cdot(\sqrt{f_0(z)}\,B(z))$（见 [4]，[5]）．

类 H^2 在 Hardy 类中占有特殊地位，因为它是具有再生核的 Hilbert 空间并能通过 Taylor 系数简单描述

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\in H^2\Leftrightarrow\{a_n\}\in l_2$$

乘以 z 的算子即**移位算子**（shift operator）的研究在 H^2 中起着重要作用，这一算子的所有不变子空间都由内函数 $G(z)$ 生成，即都具有 $G(z)\cdot H^2$ 的形式（见 [4]）

类 H^∞ 在逐点乘法和上确界范数下是 **Banach 代数**（Banach algebra），其极大理想的空间 $\mathfrak{M}$ 和 Шилов 边界的结构非常复杂（见 [4]），理想 $(z-\xi)\cdot H^\infty$，$\xi\in D$ 在具有通常 Гельфанд 拓扑的空间 $\mathfrak{M}$ 中的稠密性问题（所谓日冕问题（corona problem）），已在描述**通用插值序列**（universal interpolation sequence）的基础上**得到肯定解决**，通用插值序列是使得 $\{\{f(z_n)\}\ f(z)\in H^\infty\}=l_\infty$ 的序列 $\{z_n\}$，$z_n\in D$（见 [5]，[9]）．

对于并非圆盘的区域 $G\subset\mathbf{C}$，G 内的解析函数 $f(z)$ 的 Hardy 类 $H^p(G)$（$p>0$）可以从函数 $|f(z)|^p$ 在 G 内具有调和优函数这个条件出发来定义，也可从围道族 $\{L_r\}(L_r\subset G)$ 上的积分 $\int_{L_r}|f(z)|^p|dz|$ 为有界这个条件出发来定义，此处 $L_r\subset G$ 在某种意义上逼近 G 的边界，但两者一般地说并不等价　用第一种方法也能定义 Riemann 曲面上的 Hardy 类．第二种方法引向能更好适应于求解极值和逼近问题的类，在具有可求长边界的 Jordan 区域 G 的情形下，后一种类称为 **Смирнов 类**（Smirnov class），并记作 $E^p(G)$（见 [2]）．对于半平面，例如 $P=\{z\ \mathrm{Re}\,z>0\}$，由条件

$$\sup_{x>0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^p\,dy<\infty$$

定义的类 $H^p(P)$（$p>0$）在其性态上与对于圆盘的 Hardy 类有紧密联系，不过其在调和分析中的应用是与 Fourier 变换理论而不是与 Fourier 级数理论有关．

复空间 $\mathbf{C}^n$ 中单位球 B^n 或单位多圆柱 D^n 内解析函数 $f(z)=f(z_1,\ ,z_n)$ 的 Hardy 类由条件（*）定义，其中 T 应换以球面 ∂B^n 或多圆柱的特异边界 T^n．高维情形的特殊性质变得很突出，这首先是由于没有零点集的简单刻画与 Hardy 类中函数的因子分解（见 [6]，[10]）对于 $\mathbf{C}^n$ 中别的区域，也能用不同方式定义 Hardy 类（见 [10]）

高维情形类似于 Hardy 类的是所谓 Hardy **空间**（Hardy space，见 [3]），即 Riesz 空间系 $H^p(\mathbf{R}^n)$，$p>0$，Riesz 系由满足**广义** Cauchy-Riemann **条件**（generalized Cauchy-Riemann conditions）

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0,\quad\frac{\partial u_j}{\partial x_k}=\frac{\partial u_k}{\partial x_j},\quad x_0=y$$

的实值向量函数 $F(x,y)=\{u_j(x,y)\}_{j=0}^n(x\in\mathbf{R}^n,\ y>0)$ 构成，且 $F(x,y)$ 满足

$$\sup_{y>0}\left\{\int_{\mathbf{R}^n}|F(x,y)|^p\,dx\right\}^{1/p}<\infty.$$

也能只用系 $F(x,y)$ 的“实部” $u_0(x,y)$ 给出这种空间的定义，为此须要求函数 $u_0(x,y)$ 及其极大函数

$$M_a u(x)=\sup_{t\ y}\{|u_0(t,y)|\ \ |t-x|<ay\}\in L_p(\mathbf{R}^n),a>0$$

都是调和的

实变量 H^p 空间也有其他的刻画．也能在齐性群即具有底流形 $\mathbf{R}^n$ 和伸缩 $x\mapsto rx$ 的 Lie 群上定义 H^p 空间（见 [11]）

当 $p>1$ 时，从函数 $u_0(x,y)$ 到其边界值的转移使空间 $H^p(\mathbf{R}^n)$ 等同于 $L_p(\mathbf{R}^n)$，因而只有 $p\leqslant 1$ 的情形才有意义．正是在空间 $H^p(\mathbf{R}^n)$ 的框架中，Hardy 类理论的基本结果——诸如对偶空间 $(H^1)^*$ 实现为有界平均振动函数空间（见 [8]，[9]），类 H^p，$p\leqslant 1$ 的原子分

解（见[7]）等，得以首次建立．在许多情形下，Hardy类通过极大函数的刻画需要借助与**Brown运动**（Brownian motion）有关的概率概念（见[8]）

抽象Hardy类出现于**一致代数**（uniform algebra）的理论中，与解析函数并无直接联系 固定紧集X上连续函数的一个闭代数A与某个同态$\varphi \quad A\to \mathbf{C}$，在$X$上存在表示$\varphi$的正测度$d\mu \quad \varphi(f)=\int_X f d\mu$，$f\in A$．类$H^p(d\mu)$ $(0<p\leqslant\infty)$定义为代数A在空间$L_p(d\mu)$中的闭包（$p=\infty$时为弱闭包），类$H^p(d\mu)$的研究使得获知关于A的另外的信息成为可能（见[12]）．

参考文献

[1] Riesz, F , Ueber die Randwerte einer analytischen Funktion, *Math Z* , **18** (1923), 87－95

[2] Привалов, И И , Граничные свойства аналитических функций, 2 изд , М －Л , 1950（中译本 И И 普里瓦洛夫，解析函数的边界性质，科学出版社，1956）

[3] Stein, E , Weiss, G , On the theory of harmonic functions of several variables, *Acta Math* , **103** (1960), 25－62

[4] Hoffman, K , Banach spaces of analytic functions, Prentice-Hall, 1962

[5] Duren, P , Theory of H^p-spaces, Acad Press, 1970

[6] Rudin, W , Function theory in polydiscs, Benjamin, 1969

[7] Coifman, R R , Weiss, G , Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, *Bull Amer Math Soc* , **83** (1977), 4, 569－645

[8] Petersen, K E , Brownian motion, Hardy spaces, and bounded, mean oscillation, Cambridge Univ Press, 1977

[9] Koosis, P , Introduction to H_p-spaces With an appendix on Wolff's proof of the corona theorem, Cambridge Univ Press, 1980．

[10] Rudin, W , Function theory in the unit ball of $\mathbf{C}^n$, Springer, 1980

[11] Folland, G B , Stein, E M , Hardy spaces on homogeneous groups, Princeton Univ Press, 1982．

[12] Gamelin, T , Uniform algebras, Prentice-Hall, 1969

С В Шведенко 撰

【补注】 关于移位算子的所述结果通称为Beurling定理（Beurling theorem）．条文中提示的日冕问题的解归功于L Carleson．还有另一个更新近的由T Wolff给出的证明，它基于非齐次Cauchy-Riemann方程组性态好的解的存在性．关于H^1的对偶是BMO——有界平均振动函数空间的结果属于C Fefferman 通常它是对于ReH^1叙述的，因为否则就得在实BMO上引进一个异常的复乘法，见[A1] ．

R上的可测函数φ称为BMO函数（BMO function）或BMO类函数（function of class BMO），如果φ局部可积（即$|\varphi|$在任一紧子集上可积）且当令

$$\varphi_I=\frac{1}{|I|}\int_I|\varphi|\,dt$$

（φ在有界区间I上的平均值）时，有

$$\sup_I\frac{1}{|I|}\int_I|\varphi-\varphi_I|\,dt<\infty,$$

此处上确界是对所有有界区间$I\subset\mathbf{R}$取的．

也有其他区域，例如单位圆T上的BMO空间（$I\subset T$为弧，积分为关于Lebesgue（或Haar）测度）．

一个重要的子类是VMO函数类（class of VMO-functions）或消没平均振动函数（function of vanishing mean oscillation）类．设φ，I如上，对$\delta>0$，令

$$M_\delta(\varphi)=\sup_{|I|<\delta}\frac{1}{|I|}\int_I|\varphi-\varphi_I|\,dt,$$

则$\varphi\in$VMO，如果$\varphi\in$BMO且当$\delta\to 0$时$M_\delta(\varphi)\to 0$（见[A1] ）

关于多变量H^p空间亦见 [A2]．

除已提到的许多应用领域外，Hardy类尤其是H^∞在**控制理论**（control theory）中有重要作用．

参考文献

[A1] Garnett, J , Bounded analytic functions, Acad Press 1981

[A2] Fefferman, C , Stein, E M , H^p spaces of several variables, *Acta Math* , **129** (1972), 137 － 193

沈永欢 译

Hardy 准则 [**Hardy criterion**，**Харди признак**]，关于函数项级数一致收敛性的

如果实值函数序列$a_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$对于每个$x\in E$都是单调的，其中E是某个集合，并且在E上一致收敛于0，级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)$的部分和序列在$E$上是有界的（函数$b_n(x)$可以取复值），则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$在$E$上一致收敛．

这个准则是G H Hardy（[1]）建立的．

参考文献

[1] Hardy, G H , Some theorems connected with Abel's theorem on the continuity of power series, *Proc London Math Soc* , (2), 4 (1907), 247 － 265

Л Д Кудрявцев 撰

【补注】 这个准则可用**Euler-MacLaurin公式**（Euler-MacLaurin formula）来证明（见[A1]定理3.42的证明）．

参考文献

[A1] Rudin, W , Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1976（中译本 W 卢丁，数学分析原理，高等教育出版社，1979）

张鸿林 译

Hardy 不等式 [**Hardy inequality**，**Харди неравенство**]

1）关于级数的Hardy不等式· 如果$p>1$，$a_n\geqslant 0$，$A_n=a_1+\cdots+a_n$，$n=1, 2, \cdots$，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{A_n}{n}\right]^p < \left[\frac{p}{p-1}\right]^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p,$$

其中 a_n 不全等于零．在这个不等式中，常数 $(p/(p-1))^p$ 是最佳的．

2）关于积分的 Hardy 不等式

$$\int_0^{\infty} x^{-p}\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|^p dx < \left[\frac{p}{p-1}\right]^p \int_0^{\infty} |f(x)|^p dx,$$

$$p>1,$$

和

$$\int_0^{\infty}\left|\int_x^{\infty} f(t)\,dt\right|^p dx < p^p \int_0^{\infty} |xf(x)|^p dx,\ p>1$$

对于使不等式左端为有限的一切函数，这两个不等式成立，只是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上几乎处处为零的情况除外（在这种情况下，不等式变为等式）．常数 $(p/(p-1)^p)$ 和 p^p 是最佳的．

Hardy 积分不等式可以推广到任意区间

$$\int_a^b \left|x^{\alpha-1}\int_a^x f(t)\,dt\right|^p dx \leqslant c\int_a^b |x^{\alpha} f(x)|^p dx,\ \alpha<1-\frac{1}{p},$$

$$\int_a^b \left|x^{\alpha-1}\int_x^b f(t)\,dt\right|^p dx \leqslant c\int_a^b |x^{\alpha} f(x)|^p dx,\ \alpha>1-\frac{1}{p},$$

其中 $0\leqslant a<b\leqslant+\infty$，$1<p<+\infty$．而 c 是常数．

广义 Hardy 不等式 (generalized Hardy inequalities) 具有下列形式

$$\int_a^b \left|\varphi(x)\int_a^x f(t)\,dt\right|^p dx \leqslant c\int_a^b |\psi(x)f(x)|^p dx,$$

$$\int_a^b \left|\varphi(x)\int_x^b f(t)\,dt\right|^p dx \leqslant c\int_a^b |\psi(x)f(x)|^p dx$$

如果 $a=0$，$b=+\infty$，则当且仅当

$$\sup_{x>0}\left[\int_x^{\infty} |\varphi(t)|^p dt\right]^{1/p}\left[\int_0^x |\psi(t)|^{-p'} dt\right]^{1/p'} < +\infty$$

时，不等式 (1) 成立；当且仅当

$$\sup_{x>0}\left[\int_0^x |\varphi(t)|^p dt\right]^{1/p}\left[\int_x^{\infty} |\psi(t)|^{-p'} dt\right]^{1/p'} < \infty,$$

时，不等式 (2) 成立，这里

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

参考文献

[1] Hardy, G H , Littlewood, J E and Pólya, G , Inequalities, Cambridge Univ Press, 1934 (中译本 G H 哈代、J E 李特伍德、G 波利亚，不等式，科学出版社，1965)

[2] Никольский, С М , Приближение функций многих переменных и теорем вложения, 2 изд , М , 1977 (英译本 Nikol'skiĭ, S M , Aproximation of functions of several variables and imbedding theorems, Springer, 1975)

[3] Muckenhoupt, B , Hardy's inequality with weights, *Studia Math* , **44** (1972), 31 – 38

Л Д Кудрявцев 撰 张鸿林 译

Hardy-Littlewood 准则 [Hardy-Littlewood criterion，Харди-Литлвуда признак]，关于 Fourier 级数收敛性的

如果以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 使得

$$f(x_0+h)-f(x_0)=o\left[\frac{1}{\log(1/|h|)}\right],\ |h|\to+0$$

成立，并且其 Fourier 系数 a_n，b_n 对于某些 $\delta>0$ 满足条件

$$a_n,\ b_n=O(n^{-\delta}),\ n\to\infty,$$

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在点 x_0 收敛于 $f(x_0)$．

这个准则是 G H Hardy 和 J E Littlewood 建立的 ([1])

参考文献

[1] Hardy, G H and Littlewood, J E , Some new convergence criteria for Fourier series, *J London Math Soc* , 7 (1932), 252 – 256

[2] Бари, Н К , Тригонометрические ряды, М , 1961 (英译本 Bary, N K , A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964)

Б И Голубов 撰 张鸿林 译

Hardy-Littlewood 问题 [Hardy-Littlewood problem，Харди-Литлвуда проблема]

寻求方程

$$p+x^2+y^2=n \tag{1}$$

的解数 $Q(n)$ 的渐近公式的问题，这里 p 是素数，x 和 y 是整数，而 n 是自然数 $(n\to\infty)$．一个类似的问题是寻求方程

$$p-x^2-y^2=l \tag{2}$$

的解数的渐近性态，其中 $l\neq0$ 是一固定整数，而 $p\leqslant n$ $(n\to\infty)$．

这一问题由 G H Hardy 和 J. E. Littlewood 于 1923 年提出，并在直观推断和假设论证的基础上加以讨论．

由 Ю. В Линник 研究出来的**离差法** (dispersion method)，使他找到了对于 (1) 的渐近展开式：

$$Q(n)=\pi A_0\frac{n}{\ln n}\prod_{p|n}\frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2-p+\chi(p)}+R(n),$$

这里

$$A_0=\prod_{p|n}\left[1+\frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right],\ R(n)=O\left[\frac{n}{(\ln n)^{1.042}}\right]$$

从对(2)的类似公式得知，形如 $p=x^2+y^2+l$ 的素数集合是无限集 用离差法还找到了广义 Hardy-Littlewood 方程 $p+\varphi(x,y)=l$ 解数的渐近展开式，这里 p 是素数，而 $\varphi(x,y)$ 是一给定的本原正定二次型．

类似的方程 $p-\varphi(x,y)=l$ 的讨论导致形如 $p=\varphi(x,y)+l$ 的素数集合是无限集的一个证明

用**大筛法**(large sieve)型的定理代替广义 Riemann 假设，关于算术级数中**素数分布**(distribution of prime numbers)均值的 Виноградов-Bombieri 定理也给出了 Hardy-Littlewood 问题的一个解

参考文献

[1] Линник, Ю В , Дисперсионный метод в бинарных адЪдитивных задачах, Л , 1961 (英译本 Linnik, Yu V , The dispersion method in binary additive problems, Amer Math Soc , 1963)

[2] Бредихин, Б М , Линник, Ю В ,《Матем сб》, **71** (1966), 2, 145-161

[3] Бредихин, Б М ,《Успехи матем наук》, **20** (1965), 2, 89-103

Б М Бредихин 撰

【补注】 当然，这只是 Hardy 和 Littlewood 提出的许多问题中的一个．

戚鸣皋 译 张明尧 校

Hardy-Littlewood 定理 [Hardy-Littlewood theorem, Харди-Литлвуда теорема]

1) 复变函数理论中的 Hardy-Littlewood 定理．如果 $a_k\geqslant 0$, $k=0,1$ ，且如果收敛半径等于 1 的幂级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$$

在实轴上满足渐近等式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\sim\frac{1}{1-x},\ x\uparrow 1,$$

那么部分和 s_n 满足渐近等式

$$s_n=\sum_{k=0}^{n}a_n\sim n,\ n\to\infty$$

这一定理是由 G H Hardy 及 J E Littlewood 建立的([1])，它是**Tauber 定理**(Tauberian theorems)之一．

参考文献

[1] Hardy, G H and Littlewood, J E, Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive, *Proc London Math Soc* (2), **13** (1914), 174-191

[2] Titchmarsh, E The theory of functions, Oxford Univ Press, 1979

2) 关于非负可和函数的 Hardy-Littlewood 定理．关于与一个给定函数有关的某个函数之积分性质的定理．该定理是由 G H Hardy 与 J E Littlewood 建立的([1])．设 f 是 $[a,b]$ 上的非负可和函数，并设

$$\theta(x)=\theta_f(x)=\sup_{\substack{\xi\in[a,b]\\ \xi\neq x}}\frac{1}{x-\xi}\int_{\xi}^{x}f(t)\,dt.$$

于是

1) 如果 $f\in L_p(a,b)$, $1<p<\infty$，那么

$$\int_a^b\theta^p(x)\,dx\leqslant 2\left[\frac{p}{p-1}\right]^p\int_a^b f^p(x)dx;$$

2) 如果 $f\in L_1(a,b)$，那么对所有 $\alpha\in(0,1)$,

$$\int_a^b\theta^\alpha(x)dx\leqslant\frac{2(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\int_a^b f(x)dx,$$

3) 如果 $f\ln^+f\in L_1(a,b)$，那么

$$\int_a^b\theta(x)dx\leqslant 4\int_a^b f(x)\ln^+f(x)dx+A,$$

其中 A 仅依赖于 $b-a$ 这里

$$\ln^+u=\begin{cases}0, & \text{如果 } u<1,\\ \ln u, & \text{如果 } u\geqslant 1\end{cases}$$

设 f 是一以 2π 为周期的周期函数，并在 $[-\pi,\pi]$ 上可和，且设

$$M(x)=M_f(x)=\sup_{0<|t|\leqslant\pi}\frac{1}{t}\int_x^{x+t}|f(u)|\,du.$$

那么 $M_f(x)\leqslant\theta_{|f|}(x)$，其中 $\theta_{|f|}(x)$ 是对 $[-2\pi,2\pi]$ 构造的 从这个定理出发，对 θ 可求得对 M 的积分不等式

参考文献

[1] Hardy, G H and Littlewood, J E, A maximal theorem with function-theoretic applications, *Acta Math*, **54** (1930), 81-116

[2] Zygmund, A , Trigonometric series, 1, Cambridge Univ Press, 1988

A A Конюшков 撰

【补注】 函数 M_f 称为对于 f 的 Hardy-Littlewood 极大函数

参考文献

[A1] Stein, E M and Weiss, G , Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ Press, 1971

郭思旭 译 邓应生 校

Hardy 定理 [Hardy theorem, Харди теорема]，复变函数论中的

如果 $f(z)$ 是圆盘 $|z|<R$ 中的正则解析函数，α 是一个正数，且

$$M_\alpha(r)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^\alpha d\theta\right\}^{1/\alpha}\quad(0<r<R)$$

是其平均值，则 $M_\alpha(r)$ 是 r 的递增函数，且关于 $\ln r$ 是对数凸的（见**对数凸性**（convexity, logarithmic））此定理为G H Hardy建立（[1]）

关于对数凸性的断言对圆环 $0\leq\rho<|z|<R$ 中正则的函数 $f(z)$ 仍然成立（见 [1]）

Hardy定理可推广到 $\mathbf{R}^n$ $(n\geq2)$ 的球内的**下调和函数**（subharmonic function），亦见 [2]

参考文献

[1] Hardy, G H, The mean value of the modulus of an analytic function, *Proc London Math Soc* (2), **14** (1915), 269－277

[2] Привалов, И И, Субгармонические функции, М -Л, 1937

Е Д Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rado, T, Subharmonic functions, Springer, 1937

[A2] Duren, P, Theory of H_p spaces, Acad Press, 1970

[A3] Doob, J L, Classical potential theory and its probabilistic counterpart, Springer, 1984

沈永欢 译

Hardy 变换 [Hardy transform, Харди преобразование]

积分变换

$$F(x)=\int_0^\infty C_\nu(xt)tf(t)dt,$$

其中

$$C_\nu(z)=\cos p\pi J_\nu(z)+\sin p\pi Y_\nu(z),$$

而 $J_\nu(z)$ 和 $Y_\nu(z)$ 分别是第一类和第二类 **Bessel 函数**（Bessel functions）对于 $p=0$，Hardy 变换与 Hankel 变换的形式之一相同，对于 $p=1/2$，则与 Y 变换相同. Hardy 变换是 G. H Hardy 在 [1] 中提出的

逆变换公式是

$$f(t)=\int_0^\infty \Phi(tx)xF(x)dx,$$

其中

$$\Phi(x)=\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n(x/2)^{\nu+2p+2n}}{\Gamma(p+n+1)\Gamma(\nu+p+n+1)}$$

对于某些类型的广义函数也定义了 Hardy 变换

参考文献

[1] Hardy, G H, Some formulae in the theory of Bessel functions, *Proc London Math Soc* (2), **23** (1925), 61－63

[2] Брычков, Ю А, Прудников, Интегральные преобразование обобщенных функций, М, 1977（英译本 Brychkov, Yu A and Prudnikov, A P, Integral transforms of generalized functions, Gordon & Breach, 1989）

Ю А Брычков, А П Прудников 撰 张鸿林 译

Hardy 变差 [Hardy variation, Харди вариация]

多元函数的数值特征之一 设 $f(x)=f(x_1, \dots, x_n)$ $(n=2,3,\dots)$ 为 n 维平行多面体

$$D_n=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$$

上定义的函数并令

$$\Delta_{h_k}(f,x)=f(x_1,\dots,x_k+h_k,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n),\quad k=1,\dots,n,$$

$$\Delta_{h_1\cdots h_k}(f,x)=\Delta_{h_k}(\Delta_{h_1\cdots h_{k-1}},x),\ k=2,\dots,n$$

其次，令 Π 为此平行多面体用超平面

$$x_s=x_s^{(r_s)},\ r_s=0,\dots,l_s,\ s=1,\dots,n,$$

$$x_s^{(r_s)}<x_s^{(r_s+1)},$$

$$x_s^{(0)}=a_s,\quad x_s^{(l_s)}=b_s,$$

$$x_s^{(r_s+1)}-x_s^{(r_s)}=h_s^{(r_s)}$$

分为 n 维平行多面体的任意分划，并令 $\widetilde{H}_n$ 为满足

$$\widetilde{H}_n(f)=\sup_\Pi\sum_{r_1=0}^{l_1-1}\cdots\sum_{r_n=0}^{l_n-1}|\Delta_{h_1^{(r_1)}\cdots h_n^{(r_n)}}[f,x_1^{(r_1)},\dots,x_n^{(r_n)}]|<\infty$$

的一切函数 f 组成的类

最后，令 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$ $(s=1,\dots,n-1)$ 为整数值向量，其坐标满足不等式 $1\leq\alpha_1<\cdots<\alpha_s\leq n$，并且令 $\bar\alpha$ 为 $n-s$ 维整数值向量，使其坐标构成严格增序列并由数集 $\{1,\dots,n\}$ 中那些不含在 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 中的数组成 于是，每一点 $x\in D_n$ 可写成 $x=(x^\alpha,x^{\bar\alpha})$ 的形式．若点 $x\in D_n$ 的坐标 $x_{\alpha_1},\dots,x_{\alpha_s}$ 固定取值 $\dot{x}_{\alpha_1},\dots,\dot{x}_{\alpha_s}$，则写成 $x=(\dot{x}^\alpha,x^{\bar\alpha})$

f 在 D_n 上的 Hardy 变差为

$$H(f,D_n)=\sup_\alpha\sup_{x^\alpha}\widetilde{H}_{n-s}(f(\dot{x}^\alpha,x^{\bar\alpha}))$$

若 $H(f,D_n)<\infty$，则说函数 f 在平行多面体 D_n 上有有界（有限）Hardy 变差，并用 $H(D_n)$ 表示所有这种函数的类 对 $n=2$，此类为 G H Hardy 在 [1]（亦见 [2]）中所引进，它与 Fourier 二重级数的收敛性的研究有关 他证明了，类 $H(Q_2)$ $(Q_2=[0,2\pi]\times[0,2\pi])$ 中函数 $f(x_1,x_2)$ 若关于每个变量有周期 2π，则其 Fourier 二重级数的矩形部分和在每一点 (x_1,x_2) 收敛于数值

$$\frac{1}{4}\{f(x_1+0,x_2+0)+f(x_1+0,x_2-0)$$
$$+f(x_1-0,x_2+0)+f(x_1-0,x_2-0)\},$$

其中

$$f(x_1\pm0,\ x_2\pm0)=\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to+0}f(x_1\pm\varepsilon_1,x_2\pm\varepsilon_2)$$

函数 f 属于类 $H(D_n)$ 的充要条件是，它可以表示成

$f=f_1-f_2$，其中f_1,f_2为D_n上满足

$$\Delta_{h_1\ \ \ h_k}(f,x)\geqslant 0,\ k=2,\ \ ,n,\ \forall\ x\in D_n,$$
$$\text{对一切容许增量 } h_1,\ \ ,h_n$$

的有限函数．类$H(D_n)$包含在由D_n上具有界 **Arzelà 变差**（Arzelà variation）的函数构成的类$A(D_n)$之中．

参考文献

[1] Hardy, G H, On double Fourier series and especially those which represent the double zeta-function with real and incommensurable parameters, *Quarterly J Math*, 37 (1905), 53－79

[2] Hahn, H, Theorie der reellen Funktionen, 1, Springer, 1921

Б И Голубов 撰 郑维行 译

调和分析 [harmonic analysis，гармонический анализ]

一个数学分支与一个数学方法的名称 调和分析作为数学的一个分支，通常理解为包括（一维与高维的）**三角级数**（trigonometric series）理论，（单变量与多变量的）**Fourier 变换**（Fourier transform），**殆周期函数**（almost-periodic function），**Dirichlet级数**（Dirichlet series），（三角多项式对函数的）**逼近论**（approximation theory），**抽象调和分析**（harmonic analysis, abstract），以及其他相关的数学学科 方法在于把（数学各个领域中的）一定的问题化为调和分析的问题，而后解决 例如，在复变函数论中，单位圆盘内解析的函数的边界性态问题实际上归结为三角级数理论，借助于特征函数研究随机变量的性质是调和分析方法在概率论中的一个应用；泛函分析中的某些对象与三角级数，殆周期函数以及调和分析中的其他内容密切相关，在微分方程理论中，为求解各种数学物理方程所采用的 **Fourier 法**（Fourier method）属于调和分析，最后，计算数学中的种种应用问题要用 **Fourier 级数**（Fourier series）与 **Fourier 积分**（Fourier integral）解决，它们都是调和分析的对象

Е М Никищин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ash, J M (ed), Studies in harmonic analysis, Math Assoc Amer, 1976

[A2] Katznelson, Y, An introduction to harmonic analysis, Dover, reprint, 1976

苏维宜 译

抽象调和分析 [harmonic analysis, abstract，гармонический анализ абстрактный]

抽象的 **Fourier 级数**（Fourier series）与 **Fourier 积分**（Fourier integral）理论．经典调和分析——Fourier 级数与 Fourier 积分理论——在 18 与 19 世纪中，由于物理问题的促进，经历了一个快速发展，P Dirichlet, B Riemann, H Lebesgue, M Plancherel, L Fejér 与 F Riesz 把调和分析作为一个独立的数学学科来描述．

调和分析的进一步发展导致调和分析与函数论、泛函分析的一般问题之间各种关系的建立．**Haar 测度**（Haar measure）的发现与**无限群的表示**（representation of an infinite group）理论的发展，提出了经典调和分析中主要结果的自然界限问题（无限群表示理论是从 H Weyl 与 F Peter（见[1]）关于**紧群的表示**（representation of a compact group）理论以及 Л. С Понтрягин（见[2]）关于局部紧 Abel 群的特征标理论（见**群的特征标**（Character of a group））等工作开始的）．这个问题基于下述关于通常复形式下 Fourier 级数的理解．设f是单位圆周或区间$[0,1]$上的复值平方可和函数，c_n是f关于函数系$\{e^{2\pi inx}\ n\text{是整数}\}$的 Fourier 系数

$$c_n=\int_0^1 f(x)\,e^{-2\pi inx}dx,$$

则f的 Fourier 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,e^{2\pi inx}$$

在$L_2[0,1]$中平均收敛于f $[0,1]$上的 Lebesgue 测度生成（单位长的）圆周群G的 Haar 测度，这里G视为平面上的旋转群，而函数$x\mapsto e^{2\pi inx}$代表拓扑群G的既约酉表示的完整系（见**酉表示**（unitary representation）） 因此，包含在 Fourier 级数定义中的所有数据获得群理论意义，并且使基于拓扑群既约酉表示论去推广 Fourier 级数的概念成为可能 这样，抽象调和分析不仅能够寻找实直线或圆周上经典调和分析结果的自然形式，而且也能建立关于较大类拓扑群上的新结果

作为群上的调和分析（harmonic analysis on groups）的抽象调和分析，主要是在 Понтрягин 建立的局部紧 Abel 群的特征理论基础上发展的（[2]，也见[7]，[8]，[9]） 抽象调和分析是 Banach 代数理论的方法在应用方面的自然领域之一，并且在一定程度上可视为后者的一个分支．另一方面，抽象调和分析的框架是函数论与泛函分析中许多经典问题中自然的一个．

抽象调和分析的应用是极其多样的．其结果被应用于局部紧群的一般理论（例如，在结构定理中），动力系统理论，无限群的表示理论（它本是抽象调和分析的主要工具之一），以及很多其他数学理论．

抽象调和分析中发展得最好的分支是局部紧 Abel 群上的 Fourier 积分理论 一种特殊类型的非交换群是紧群，它的表示理论特别简单与完整 调和分析中许多经典问题的解，在紧群情形下都已获得．在非紧非交换群情形下，一般理论仍然距完整相差甚远 (1989) 然而，甚至在这种情形下，人们还是知道经典调和分析许多基本结果的自然界限

抽象调和分析问题与Banach代数理论之间的联系是基于这样的事实，在每个局部紧拓扑群G上构造两个Banach代数是可能的，两者在G的表示论中都起着重要作用．群代数（见**群代数（局部紧群的）**（group algebra (of a locally compact group)））与**测度代数**（algebra of measure）$M(G)$，后者的定义如下 设$C_0(G)$是G上在无穷远处为零的连续函数集，并设$M(G)$是其对偶空间，即G上的有界**正则测度**（regular measure）的Banach空间 如果$M(G)$上的乘法——卷积$(\mu_1,\mu_2)\mapsto\mu_1*\mu_2$——与对合$\mu\mapsto\mu^*$由关系

$$\int_G f(g)d(\mu_1*\mu_2)(g)=\int_G\int_G f(gh)\,d\mu_1(h)\,d\mu_2(g),\quad\forall f\in C(G),$$

与

$$\int_G f(g)d\mu^*(g)=\overline{\int_G\overline{f(g^{-1})}d\mu(g)},\qquad\forall f\in C(G),$$

定义，则$M(G)$可转化为一个具有对合运算的Banach代数，称为群G的测度代数（measure algebra of the group） 如果dg是G上左不变Haar测度，则将群代数$L_1(G)$中的每个元素f与测度$f(g)\,dg$对应，给出$L_1(G)$到$M(G)$的闭子代数之间保持对合运算的等距映射 在此意义下，$L_1(G)$可视为$M(G)$的一个闭子代数．

局部紧Abel群上的抽象调和分析 为了构造局部紧Abel群G上Fourier积分，要求下列事实 G的任一个既约酉表示是一维的，并且定义从G到模1的复数乘法群U的一个连续同态．这样的映射χ $G\to U$称为G的酉特征标（unitary character） 设$\hat{G}$为G的连续特征的群 Понтрягин对偶定理（Pontryagin duality theorem）叙述为，映射

$$\eta\ \ G\to\hat{\hat{G}},\qquad(\eta(g))(\chi)=\chi(g)$$

是G到$\hat{\hat{G}}$的拓扑同构（见[2],[3],[4],[6]），其中$\chi\in\hat{G}$，$g\in G$ 群G是紧的，当且仅当其对偶群$\hat{G}$是离散的．非离散局部紧域的加群K的特征群同构于K，群U的特征群同构于整数群$\mathbf{Z}$．如果H是G的闭子群，$H^{\perp}$是在H上满足$\chi\equiv1$的$\chi\in\hat{G}$的集，则$H^{\perp}$是$\hat{G}$的闭子群，$(H^{\perp})^{\perp}=\eta(H)$，$\hat{G}/H^{\perp}\approx\hat{H}$，并且子群$H$和任一酉特征可扩张为群$G$上的酉特征

群G上的Fourier积分（Fourier integral on the group）（或群G上的Fourier变换（Fourier transform on the group））是使测度$\mu\in M(G)$对应于$\hat{G}$上函数$\hat{\mu}=F\mu$的一个映射F，由方程

$$(F\mu)\ (\chi)=\int_G\overline{\chi(g)}\,d\mu(g)$$

定义．Fourier协变换（Fourier cotransform）则是由方程

$$(\bar{F}\mu)\ (\chi)=\int_G\chi(g)d\mu(g),\qquad\mu\in M(G)$$

定义的映射$\bar{F}$ 对于$f\in L_1(G)$，函数$F(f(g)dg)$记为$\hat{f}$或Ff（对应地，$\bar{F}f$） 映射F与$\bar{F}$是$M(G)$到$L_\infty(\hat{G})$中的**单同态**（monomorphism），在这些映射下，$M(G)$的象是$\hat{G}$上连续正定函数的线性组合的代数$B(G)$ 广义Bochner定理（generalized Bochner theorem）成立（见[4],[6]） $F\mu$是G上的正定函数，当且仅当μ是一个正测度，并且

$$\sup_{\chi\in G}|F\mu(\chi)|=F\mu(\hat{e})=\|\mu\|,$$

其中$\hat{e}$是$\hat{G}$的单位元．

拓扑空间$\hat{G}$典则地同胚于环$L_1(G)$的谱（也就是，代数$L_1(G)$的极大理想空间）．事实上，由公式

$$f\mapsto\int_G f(g)\,\chi(g)dg,\qquad f\in L_1(G)$$

定义特征$\chi\in\hat{G}$与交换代数$L_1(G)$的相应特征之间的一个映射，$L_1(G)$上Fourier协变换$\bar{F}$与Banach代数$L_1(G)$的**Гельфанд表示**（Gel'fand representation）等同．$M(G)$的谱通常并不同胚于$\hat{G}$

设$d\chi$是$\hat{G}$上的Haar测度，并设$L_2(\hat{G})$是相应的Hilbert空间 下述Plancherel定理（Plancherel theorem（[4]，[16]））成立 如果$f\in L_1(G)\cap L_2(G)$，则$Ff\in L_2(\hat{G})$，并且如果测度dg与$d\chi$已经以一定方式标准化，则$L_1(G)\cap L_2(G)$到$L_2(\hat{G})$中的映射$f\to Ff$可唯一地扩张为$L_2(G)$到$L_2(\hat{G})$上的酉算子F 这个算子便是周知的$L_2(G)$上的Fourier变换（Fourier transform）．在此情形下，测度dg与$d\chi$称为相容的（compatible） 记$A(G)$为形如$f*g$的函数生成的$L_1(G)$的线性子空间，这里$f,g\in L_1(G)\cap L_2(G)$ 下述Fourier反演公式（Fourier inversion formula）（[4]，[16]））成立 如果$f\in A(G)$，则$Ff\in L_1(\hat{G})$，则对所有$g\in G$，方程

$$f(g)=\int_G\chi(g)(Ff)(\chi)\,d\chi$$

成立，亦即，如果η是G到$\hat{\hat{G}}$中的典则映射，则$\eta f=\bar{F}Ff$对所有$f\in A(G)$成立 令$\mathfrak{B}(G)$为满足$\hat{f}\in L_1(\hat{G})$的$f\in L_1(G)$的集合，则F在$\mathfrak{B}(G)$上的限制是$\mathfrak{B}(G)$到$\mathfrak{B}(\hat{G})$上的一一映射，逆映射是$\bar{F}$在$\mathfrak{B}(\hat{G})$上的限制 如果$f,g\in L_2(G)$，则$F(fg)=(Ff)*(Fg)$．

经典的**Poisson求和公式**（Poisson summation formula）在抽象调和分析中自然地作如下理解 设H是群G的闭子群，dg，dh，dk分别是G，H与K上的标准化Haar测度，并且$dg=dhdk$ 设$\widehat{(G/H)}$与$H^{\perp}$等

同，且 $d\rho$ 是 $H^{\perp}$ 上与 dk 协调的 Haar 测度．最后设 $f\in L_1(G)$，且连续函数 Ff 在 $H^{\perp}$ 上的限制关于 $d\rho$ 可积．则对几乎所有的 $g\in G$，H 上的函数 $h\rightarrow f(gh)$ 关于测度 dh 是可积的，且有

$$\int_H f(gh)dh = \int_{H^{\perp}} \rho(g)(Ff)(\rho)d\rho$$

这就是周知的广义 Poisson 求和公式（generalized Poisson summation formula）．

抽象调和分析中一个实质性问题是从 G 上 Fourier 变换的观点去研究 Banach 代数 $L_1(G)$ 与 $M(G)$．代数 $L_1(G)$ 是完全对称的，等式 $M(G)=L_1(G)$ 成立，当且仅当 G 是离散的，如果 G 非离散，则 $M(G)$ 包含非对称的极大理想．设 $A(\hat{G})$（相应地，$B(\hat{G})$）是 $L_1(G)$（相应地，$M(G)$）中元的 Fourier 变换所成的集合．$A(\hat{G})$ 与 $B(\hat{G})$ 是 $\hat{G}$ 上的函数代数，进而，$A(\hat{G})$ 是正则代数，并且 $f\in A(\hat{G})$，当且仅当 $f=f_1*f_2$ 对于一切函数 $f_1, f_2\in L_2(G)$ 成立．使函数 Ff 具有紧支集的 $f\in L_1(G)$ 所成的集合是 $L_1(G)$ 中的稠密子集．

下列结果描述了 G 上 Fourier 变换的泛函性质．设 F 是定义在 $[-1,1]$ 上的函数，$\hat{G}$ 是非离散的，又设 F 作用在 $A(\hat{G})$ 上，亦即 $F(\varphi)\in A(\hat{G})$ 对值域属于 $[-1,1]$ 的任意函数 $\varphi\in A(G)$ 成立，则 F 是 $[-1,1]$ 上的解析函数，且当 G 是非离散时，$F(0)=0$，反之，在 $[-1,1]$ 上解析的任一函数（若 G 非离散，则 $F(0)=0$）作用在 $A(\hat{G})$ 上、函数 F 作用在 $B(G)$ 上，当且仅当 F 是某个整实解析函数在 $[-1,1]$ 上的限制　如果 F 定义在 $[-1,1]$ 上，且 $\hat{G}$ 是无限离散群．则 F 作用在 $A(\hat{G})$ 上，当且仅当 $F(0)=0$，并且 F 在原点的某一邻域中解析（见 [12]，[13] 中所列的详细参考文献）

Banach 代数理论中一个传统问题是闭子代数的结构与性质　下面是关于代数 $L_1(G)$ 的闭子代数的结果．设 S 是局部紧 Abel 群 G 中的 Borel 半群，且 $L_1(S)$ 是 $L_1(G)$ 中的极大子代数．则 S 含于一个能诱导 G 的 Archimed 序的闭半群 $P\subset G$ 中．交换 Banach 代数 A 称为 Stone-Weierstrass 代数（Stone-Weierstrass algebra），如果 A 的任一个区分环 A 的谱 M 的点、并在 M 的任意点不为零的对称子代数 $B\subset A$ 在 A 中是稠密的．$L_1(G)$ 是一个 Stone-Weierstrass 代数，当且仅当 G 是全不连通的．

抽象调和分析中现代研究领域之一是局部紧 Abel 群中的**薄集**（thin set）理论，它可看成经典调和分析中特殊结果的推广（特别是**缺项三角级数**（lacunary trigonometric series）理论）．设 G 是局部紧 Abel 群，e 是它的单位元．集合 $E\subset G$ 称为无关的（independent），如果对任意 $g_1,\cdots,g_k\in E$ 与整数 $n_1,\cdots,n_k$，或者 $g_1^{n_1}=\cdots=g_k^{n_k}=e$，或者 $\prod_{i=1}^{k} g_i^{n_i}\neq e$　任意非离散局部紧 Abel 群包含一个同胚于 Cantor 集的无关集．无关集包括两种重要的集类，就是 Kronecker 集（Kronecker set）与 D_q 群中的 K_q 集（K_q-set）．局部紧 Abel 群中的集合 E 称为 Kronecker 集，如果对于 E 上任意模 1 的连续函数 f 与任意指定的 $\varepsilon>0$，存在特征 $\chi\in\hat{G}$，满足

$$\sup_{g\in E}|f(g)-\chi(g)|<\varepsilon$$

Kronecker 集是无关集，并且不包含有限阶元素．设 $\mathbf{Z}_q$ 是 $q(\geqslant 2)$ 阶圆周群，D_q 是可数多个同构于 $\mathbf{Z}_q$ 的群的直积．D_q 中的集 E 称为 K_q 集，如果任意连续函数 f　$E\rightarrow \mathbf{Z}_q$（$\mathbf{Z}_q$ 称为单位根群）与群 D_q 中的某个酉特征在 E 上相合．K_q 集是无关集．如果在局部紧群 G 的单位元的每个邻域中存在一个无限阶元，则 G 包含与 Cantor 集同胚的 Kronecker 集．如果 G 是非离散局部紧 Abel 群，并且如果存在单位元的不含无限阶元的邻域，则对 $q\geqslant 2$，G 包含 D_q 作为其闭子群　任一个群 D_q 包含与 Cantor 集同胚的 K_q 集

在有限维可距离化的局部紧 Abel 群中，无关集是全不连通集　无限维环面包含与线段同胚的 Kronecker 集．可以证明，圆周上两个 Kronecker 集的并集是无关集，却不是 Kronecker 集　增加一个点到无限维环面上的某个 Kronecker 集中，就可能得到非 Kronecker 集的无关集．如果 E 是 G 中的紧 kronecker 集，μ 是集中在 E 上的有界测度，则

$$\max_{\chi\in G}|F\mu(\chi)| = \|\mu\|$$

局部紧 Abel 群的另一重要子集类是 Helson 集（Helson sets）　紧集 $P\subset G$ 称为 Helson 集，如果 P 上的每个连续函数 F 是代数 $A(\hat{G})$ 的某个元在 P 上的限制．任意紧 Kronecker 集与 D_q 中的紧 K_q 集是 Helson 集．并非局部紧 Abel 群 G 的每个紧子集都是 Helson 集，也存在非 Helson 集的无关 Cantor 集．紧子集 $P\subset G$ 是 Helson 集，当且仅当 $\|\mu\|$ 与 $\sup_{\chi\in G}|(F\mu)(\chi)|$ 是 P 上有界测度的 Banach 空间 $M(P)$ 的等价范数　记 $I(P)$ 为下述所有 $f\in L_1(G)$ 所成的集合　对一切 $g\in P$ 满足等式 $(\bar{F}f)(g)=0$，则 $I(P)$ 是 $L_1(\hat{G})$ 中的闭理想．$L_1(\hat{G})/I(P)$ 的对偶空间等距于空间 $\Phi(P)$，它由一切满足

$$\int_{\hat{G}} f(\chi)\varphi(\chi^{-1})d\chi = 0, \qquad \forall f\in I(P)$$

的 $\varphi\in L_\infty(\hat{G})$ 组成．紧集 P 是 Helson 集，当且仅当任意函数 $\varphi\in\Phi(P)$ 几乎处处等于集中在 P 上的某个有界测度的 Fourier 变换　如果 P 是 G 中的 Helson 集，σ 是集中于 P 的非零测度，则 $F\sigma$ 在无穷远处不趋于零

在紧 Abel 群上 Fourier 级数的研究中，离散 Abel 群中的 Sidon 集（Sidon set）的概念非常重要　设 G 是紧 Abel 群，E 是 $\hat{G}$ 的子集．函数 $f\in L_1(G)$ 称为 E 函数（E-function），如果 $\hat{f}(\chi)=0$ 对所有 $\chi\in E$ 成立　G 上

酉特征的线性组合 f 称为 E 多项式(E-polynomial),如果 f 是一个 E 函数 集合 E 称为 Sidon 集 (Sidon set),如果存在常数 $B=B_E$,使得对 G 上任意 E 多项式 f,有

$$\sum_{\chi\in\hat{G}}|\hat{f}(\chi)|\leqslant B\max_{g\in G}|f(g)|$$

下列论断彼此等价

a) E 是 $\hat{G}$ 中的 Sidon 集,

b) 对任意有界 E 函数 f,级数 $\sum_{\chi\in\hat{G}}|\hat{f}(\chi)|$ 收敛,

c) 对任意连续 E 函数 f,级数 $\sum_{\chi\in\hat{G}}|\hat{f}(\chi)|$ 收敛,

d) E 上任意有界函数 f 与某个元 $\hat{f}\in B(\hat{G})$ 在 E 上的限制相合,

e) E 上的在无穷远处趋于零的任意函数与某个函数 $\hat{f}\in A(\hat{G})$ 在 E 上的限制相合

$\hat{G}$ 中任意无限集包含无限 Sidon 集. $\hat{G}$ 中任意无关集是 Sidon 集.

抽象调和分析的、到撰文时为止仍在深入发展的另一个领域,是 $L_1(G)$ 中闭理想理论,特别是**谱综合** (spectral synthesis) 理论 谱综合问题是以如下一般方式提出的 设 I 是 $L_1(G)$ 中的闭理想,问题是阐明 I 恰为 $L_1(G)$ 中包含 I 的那些极大理想之交的条件(应当注意,此时 $L_1(G)$ 的任意极大理想是正则的,也就是闭的) 谱综合理论的最重要的结果之一是 **Wiener-Tauber 定理** (Wiener-Tauberian theorem) 如果 J 是 $L_1(G)$ 中的闭理想,$J\neq L_1(G)$,则存在一个特征 $\chi\in\hat{G}$,使得 $(Ff)(\chi)=0$ 对所有 $f\in J$ 成立. 这个定理可视为上述问题在 $I=L_1(G)$ 情形的正解. 如果 $L_1(G)$ 中的每个闭理想是所有包含它的极大理想的交,则称 G 满足谱综合 (spectral synthesis). 任一紧群满足谱综合 另一方面,下述定理 (见 [15]) 成立 若群 $\hat{G}$ 是非离散的,则 G 不满足谱综合 由此得到,如果 $\hat{G}$ 是非离散的,则代数 $L_1(G)$ 含有非对称闭理想

紧群上的抽象调和分析可视为紧群表示论的一部分,这个理论与群上的殆周期函数的关系密切,亦见 **Bohr 紧化** (Bohr compactification) 与 [11], [4] 中的评论. 任意局部紧拓扑群上抽象调和分析的问题是相当复杂的,这是由于局部紧群上无穷维表示的一般理论 (见**无穷维表示** (infinite-dimensional representation)) 的不成熟性及其复杂性 然而,甚至在此情形下,Fourier 积分仍然能在局部紧群上定义 (见 [5]),并且能获得广义 Bochner 定理、Plancherel 公式与许多其他一般定理的类似结果 (见 [8], [11])

参考文献

[1] Peter, F and Weyl, H, Die Vollstandigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossener kontinuierlichen Gruppe, *Math Ann*, **97** (1927), 737-755

[2] Понтрягин, Л С, 《Ann Math》, 1934 v 35, 361-388

[3] Kampen, E R van, *Proc Nat Acad Sci USA*, **20** (1934), 434-436

[4] Weil, A, l'Integration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, 1940

[5] Гельфанд, И М, Райков, Д А 《Матем сб》, **13** (1943), 301-316

[6] Райков, Д А, 《Тр Матем ин-та АН СССР》, **14** (1945), 1-86

[7] Гельфанд, И М, Райков, Д А Шилов, Г Е, Коммутативные нормированные кольца, М, 1960

[8] Наймарк, М А, Нормированные кольца, 2 изд, М, 1968

[9] Понтрягин, Л С, Непрерывные группы, 2 изд, М, 1954 (英译本 Pontryagin, L S, Topological groups, Princeton Univ Press, 1958)

[10] Bourbaki, N, Elements of mathematics, Spectral theories, Addison-Wesley, 1977 (译自法文)

[11] Dixmier, J, C^* algebras, North-Holland, 1977 (译自法文)

[12] Helson, H, et al, The functions which operate on Fourier transforms, *Acta Math*, **102** (1959), 135-157

[13] Hewitt, E and Ross, K A, Abstract harmonic analysis, 1-2, Springer, 1963-1970

[14] Loomis, L H, An introduction to abstract harmonic analysis, v, Nostrand, 1953

[15] Malliavin, P, Impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes abeliens non compacts, *Publ Math IHES*, **2** (1959), 61-68

[16] Крейн, М Г, 《Докл АН СССР》, **30** (1941), 482-486

Е А Горин, А И Штерн 撰

【补注】 在薄集理论中,一类重要的问题是 两个一定类型的集合(或偶而也考虑可数多个)之并是否仍然是该种类型 S W Drury 证明 (见 [A1]),两个 Sidon 集之并也是 Sidon 集,并且 N Th Varopoulos (见 [A2]) 利用 Drury 的技巧证明关于 Helson 集的类似结果. 对于谱综合集,问题仍然未解决 (1989).

参考文献

[A1] Drury, S W, Sur les ensembles de sidon, *C R Acad Sci Paris*, **A 271** (1970), 162-163

[A2] Varopoulos, N Th, Sur la reunion de deux ensembles de Helson, *C R Acad Sci Paris*, **A271** (1970), 251-253

[A3] Rudin, W, Fourier analysis on groups, Wiley, 1962

[A4] Reiter, H, Classical harmonic analysis and locally compact groups, Clarendon Press, 1968

[A5] Lindahl, L-A and Poulsen, F, Thin sets in harmonic analysis, M Dekker, 1971

[A6] Graham, C C and McGehee, O C, Essays in commutative harmonic analysis, Springer, 1979

[A7] López, J and Ross, K, Sidon sets, M Dekker, 1975

苏维宜 译

调和平衡法 [**harmonic balance method**, **гармонического баланса метод**]

一种研究由非线性常微分方程描述的非线性振动系统的近似方法．这种方法的本质是用专门构造的线性函数代替振动系统中的非线性力，因此可用线性微分方程理论求非线性系统的近似解

这个线性函数是用称之为调和线性化的特殊方法构造的．设给定的非线性函数（力）为

$$F(x,\dot{x}) \equiv \varepsilon f(x,\dot{x}),\quad \dot{x}=\frac{dx}{dt},$$

其中 ε 是一个小参数，调和线性化（harmonic linearization）就是用线性函数

$$F_l(x,\dot{x})=kx+\lambda\dot{x}$$

代替 $F(x,\dot{x})$，其中参数 k 和 λ 由公式

$$k(a)=\frac{\varepsilon}{\pi a}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\cos\psi\, d\psi,$$

$$\lambda(a)=-\frac{\varepsilon}{\pi a\omega}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\sin\psi\, d\psi,$$

$$\psi=\omega t+\theta$$

给出．

如果 $x=a\cos(\omega t+\theta)$，$a=$ 常数，$\omega=$ 常数，$\theta=$ 常数，那么非线性力 $F(x,\dot{x})$ 是时间的周期函数，一般说来，它的 Fourier 级数展开式含有无限多个频率为 $n\omega$ $(n=1,2,\cdots)$ 的**谐波**（harmonics），即形式为

$$F(x,\dot{x})=\sum_{n=0}^{\infty} F_n\cos(n\omega t+\theta_n)\ . \qquad (1)$$

项 $F_1\cos(\omega t+\theta_1)$ 称为展开式 (1) 的基本谐波（fundamental harmonic）．线性函数 F_l 的振幅和位相与非线性力的基本谐波的相应特征一致．

对于拟线性振动理论中典型的微分方程

$$\ddot{x}+\omega^2x+F(x,\dot{x})=0, \qquad (2)$$

调和平衡法用线性函数 F_l 代替 $F(x,\dot{x})$，因此代替方程 (2)，考虑方程

$$\ddot{x}+\lambda\dot{x}+k_1x=0, \qquad (3)$$

其中 $k_1=\omega^2+k$．通常称 F_l 为等价线性力（equivalent linear force），λ 为等价阻尼系数（equivalent damping coefficient），而 k_1 为等价弹性系数（equivalent elasticity coefficient）．已经证明，如果非线性方程 (2) 有一个形如

$$x=a\cos(\omega t+\theta)$$

的解，其中

$$\dot{a}=O(\varepsilon),\ \dot{\omega}=O(\varepsilon),$$

那么在 (2) 和 (3) 的解之间的差的量级为 ε^2 调和平衡法中的振动频率依赖于振幅 a（通过参数 k 和 λ）．

调和平衡法常用于求周期和拟周期振荡，自动控制理论中的周期和拟周期条件与平衡条件，以及研究它们的稳定性 它在**自动控制理论**（automatic control theory）中广泛使用

参考文献

[1] Крылов, Н М, Боголюбов, Н Н, Введение в нелинейную механику, К, 1937（英译本 Krylov, N M and Bogolyubov, N N, Introduction to non-linear mechanics, Princeton Univ Press, 1947）.

[2] Боголюбов, Н Н, Митропольский, Ю А, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 4 изд, М, 1974（英译本 Bogolyubov, N N and Mitropol'skii, Yu A, Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations, Hindushtan Publ Comp, Delhi, 1961）

[3] Попов, Е П, Пальтов, И П, Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, М, 1960（英译本 Popov, E P and Pal'tov, I P, Approximate methods for studying non-linear automatic systems, Translation Services, Ohio, 1963）

Е А Гребеников 撰 周芝英 译 叶彦谦 校

调和容量 [**harmonic capacity**, **гармоническая емкость**]

一个术语，曾用来表示按经典**位势论**（potential theory）方法，当 $n\geqslant 3$ 时借助于 **Newton 位势**（Newton potential），当 $n=2$ 时借助于**对数位势**（logarithmic potential）求得的 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 里的一个集合的**容量**（capacity）它与**解析容量**（analytic capacity）或者用其他位势求得的容量不同．

Е Д Соломенцев 撰 高琪仁、吴炯圻 译

调和坐标 [**harmonic coordinates**; **гармонические координаты**]

度量张量（metric tensor）g_{ik} 满足条件

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{|g|}g^{ik}\right)=0$$

的一种坐标，其中 g 是由张量 g_{ik} 的分量所定义的行列式 在一些情形下，运用调和坐标可导致计算的很大的简化 广义相对论中运动方程的导出是一个例证．

参考文献

[1] Фок, В А, Теория пространства, времени и тяготения, М, 1955（英译本 Fock, V A [V A Fok], The theory of space, time and gravitation, Mac-

millan, 1954) А Б Иванов 撰

【补注】 调和坐标也可用下列性质导入 坐标函数是调和的([A1]) 这等价于方程

$$g^{ij}\Gamma_{ij}^{k}=0$$

它们简化了 **Ricci 曲率**(Ricci curvature)的公式. 对二维流形而言, **等温坐标**(isothermal coordinates)是调和的.

注意 最好的坐标既不是法坐标, 也不是调和坐标, 而是 Jost-Karcher 坐标(Jost-Karcher coordinates), 见[A2], 59-60页.

参考文献

[A1] Besse, A L, Einstein manifolds, Springer, 1987
[A2] Elie Cartan et les mathématiques d'auyourd'hui, *Astérisque* (1985) 沈纯理 译

调和形式 [harmonic form, гармоническая форма]

Riemann 流形 M 上满足方程 $\Delta\alpha=0$ 的一个外微分形式(differential form)α, 这里 $\Delta=d\delta+\delta d$ 为相应于 M 上 Riemann 度量的 **Laplace 算子**(Laplace operator), 且 δ 为外微分 d 的伴随 若 α 有紧支集, 则它的调和性等价于 $d\alpha=\delta\alpha=0$ M 上 p 次调和形式构成域 $\mathbf{R}$ 上的一个向量空间 $H^p(M)$ 若所给 Riemann 流形是紧的, 则 $H^p(M)$ 作为椭圆算子 Δ 的核是有限维的. 由于调和形式是闭的, de Rham 定理产生空间 $H^p(M)$ 到 M 的 p 次实上同调空间 $H^p(M,\mathbf{R})$ 的一自然映射 据 **Hodge 定理**(Hodge theorem), 此映射为一同构 特别地, 调和函数即零次调和形式在连通紧流形上为常数.

紧 Riemann 流形上的调和形式关于此流形的等距的任何连通群是不变的, 对于对称空间 M, 空间 $H^p(M)$ 与 p 形式空间相同, 后者关于等距的最大连通群不变

现有关于 Hermite 流形(见 **Hermite 结构**(Hermitian structure))M 的调和形式的平行理论. 这种调和形式是属于 Laplace-Beltrami 算子 $\square$(见 **Laplace-Beltrami 方程**(Laplace-Beltrami equation))的核的一复形式. (p,q) 型调和形式构成 $\mathbf{C}$ 上的空间 $H^{p,q}(M)$ 若 M 为紧的, 则 $H^{p,q}(M)$ 为有限维的, 并且自然同构于 Dolbeault 上同调空间. 若 M 为 **Kahler 流形**(Kahler manifold), 则由于 $\square=\overline{\square}=\Delta/2$, 调和形式的这两个定义实际上恒同 此时,

$$H^{p,q}(M)=\overline{H}^{q,p}(M)$$

且

$$H^k(M)\otimes\mathbf{C}=\sum_{p+q=k}H^{p,q}(M)$$

设 ω 为 M 上的 Kahler 形式, L 为由 ω 外乘法定义的算子, Λ 为 L 的伴随算子, 并设 $H_0^{p,q}(M)$ 为 (p,q) 型本原调和形式(primitive harmonic form)即满足 $\Lambda\alpha=0$ 的形式 $\alpha\in H^{p,q}(M)$ 所成的空间, 则下列等式对 $p\geqslant q$ 与 $p+q\leqslant\dim_{\mathbf{C}}M$ 成立·

$$H^{p,q}(M)=\sum_{s=0}^{q}L^sH_0^{p-s,q-s}(M)\cong\sum_{s=0}^{q}H_0^{p-s,q-s}(M).$$

对紧 Kahler 流形 M, 空间 $H^{p,0}(M)$ 恒同于 p 次**全纯形式**(holomorphic form)的空间 $\Omega^p(M)$ 特别地,

$$H^1(M)\otimes\mathbf{C}=\Omega^1(M)+\overline{\Omega^1(M)}.$$

Riemann 曲面上调和函数与调和形式的研究始于 B Riemann, 它们的存在性定理在 20 世纪初被完全证明. 紧 Riemann 流形上调和形式理论由 W V. D Hodge([1]) 首先提出

以下给出调和形式理论的各种推广. 假定给出一个 Riemann 流形(Hermite 流形)M 上的局部平坦(解析)向量丛 E, 并在 E 的纤维上给定一个 Euclid(Hermite)度量 将 Laplace(Laplace-Beltrami)算子适当一般化([4],[8]), 能定义取值于 E 的调和形式的空间 $H^p(E)$ $(H^{p,q}(E))$(见**微分形式**(differential form)) 若 M 为紧的, 则这些空间为有限维且同构于相应的 de Rham 与 Dolbeault 上同调空间, 后者也能用层上同调来解释. 在局部平坦丛情形下, 这些上同调空间还与群 $\pi_1(M)$ 的上同调空间紧密相关 若 M 非紧, 则平方可积调和形式空间同构于平方可积形式复形的同调空间([2]) 若 M 为区域, 具有光滑边界与在一 Kahler 流形 $\widetilde{M}$ 中的紧闭包 $\overline{M}$, 则也能考虑这样的 (p,q) 型调和形式空间, 这些调和形式取值于 $\widetilde{M}$ 上一个解析向量丛 E, 在 M 中光滑而在 $\overline{M}$ 上连续. 若 M 为严格伪凸的, 则此空间为有限维的且同构于与 M 上向量丛 E 相应的 Dolbeault 上同调空间([9])

在研究实、复流形的上同调与离散群的上同调空间中, 调和形式是有力的工具. 调和形式理论产生紧 Kahler 流形特别是投影代数簇的基本上同调性质([1],[4],[5]). 调和形式能用来建立紧 Riemann 流形的曲率与它的一些上同调群的平凡性之间的一种联系([6],[7]) 复解析几何([4],[5])与离散变换群([8])理论中的类似联系也已经得到

参考文献

[1] Hodge, W V D, The theory and applications of harmonic integrals, Cambridge Univ Press, 1952
[2] Rham, G de, Differentiable manifolds, Springer, 1984 (译自法文)
[3A] Schwartz, L, Equaciones diferenciales parciales eliptícas, Univ Nac Colombia, 1973
[3B] Schwartz, L, Variedades analíticas complejas, Univ Nac Colombia, 1956

[4] Wells, Jr., R. O., Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980
[5] Chern, S. S., Complex manifolds without potential theory, Springer, 1979
[6] Goldberg, S. I., Curvature and homology, Acad. Press, 1962
[7] Yano, K. and Bochner, S., Curvature and Betti numbers, Princeton Univ. Press, 1953
[8] Matsushima, Y. and Murakami, S., On vector bundle valued harmonic forms and automorphic forms on symmetric Riemannian manifolds, *Ann. of Math.*, **78** (1963), 365 - 416
[9A] Kohn, J. J., Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds Ⅰ, *Ann. of Math.*, **78** (1963), 112 - 148
[9B] Kohn, J. J., Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds Ⅱ, *Ann. of Math.*, **79** (1964), 450 - 472

А. Л. Онищик 撰　郑维行 译　沈永欢 校

调和函数 [harmonic function, гармоническая функция]

定义在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$的区域 D 里的一个实值函数，有连续的一、二阶偏导数且为 **Laplace 方程** (Laplace equation)

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0$$

的解，其中 $x_1,\cdots,x_n$ 是点 x 的正交 Descartes 坐标．这定义有时也作推广使之包括复函数 $w(x)=u(x)+iv(x)$,这时指的是，实部 $\mathrm{Re}\,w(x)=u(x)$ 和虚部 $\mathrm{Im}\,w(x)=v(x)$ 都是调和函数．关于导数的连续性，甚至其存在性的要求未必要作为定义的前提事先给出．例如，下面这个 Привалов 定理 (Privalov theorem)也可用来作为定义．D 中的一个连续函数 u 是调和函数，当且仅当在任意点 $x\in D$,对充分小的 $R>0$,如下平均值性质

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n(R)}\int_{B_n(x,R)}u(y)dy$$

都满足，其中 $B_n(x,R)$为以 x 为心，R 为半径的球，$\omega_n(R)$ 是这球的体积，而 dy 是 $\mathbf{R}^n$ 的体积元素．

如果 D 是具有紧边界 ∂D 的无界域，那么调和函数的定义可加以完善使它包括无穷远点 ∞，即可扩充到 $\mathbf{R}^n$ 的 Александров 紧致化的区域．完善这定义的一般原则是：在那种能保持调和性并把一个有限点 x_0 变成 ∞ 的最简单的变换 (当 $n=2$ 时，为**反演** (inversion)，当 $n\geqslant 3$时为 **Kelvin 变换** (Kelvin transformation)) 之下，x_0 的邻域里的调和函数变成 ∞ 邻域里的调和函数．在这基础上，调和函数 u 称为在无穷远点正则的，如果当 $n\geqslant 3$ 时有

$$\lim_{|x|\to\infty}u(x)=0,\ |x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\ .$$

因此，当 $n\geqslant 3$ 时，在无穷远点正则的调和函数总满足 $u(\infty)=0$．当$n=2$ 时，u 在无穷远点正则的条件为

$$u(x)=O(1),\ \ |x|\to\infty,$$

由此可推出存在有限的极限

$$\lim_{|x|\to\infty}u(x)=u(\infty)$$

无界区域上的调和函数通常被理解为在无穷远点正则的函数．

在调和函数的理论中，Laplace 方程的主基本解

$$h_2(x)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}\ ,n=2\ ,$$

$$h_n(x)=\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\frac{1}{|x|^{n-2}}\ ,\ n\geqslant 3$$

起了重要的作用，其中 σ_n 是 $\mathbf{R}^n$ 的单位球面的面积．当 $|x|>0$ 时，它是调和函数．基本解可用以写出调和函数理论的基本公式，这时,一个调和函数 $u(x)$ 在区域 D 里的值可由它在边界 $S=\partial D$ 上的值 $u(y)$ 以及它在 y 点的关于 S 的外法线的方向导数的值 $\partial u(y)/\partial\nu$ 表示出来

$$\int_S\left[h_n(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu}-u(y)\frac{\partial h_n(x-y)}{\partial\nu_y}\right]d\sigma(y)$$

$$=\begin{cases}u(x), & x\in D,\\ 0\ , & x\notin\overline{D}\end{cases}$$

这个 Green 公式 (Green formula)在一定条件下成立，例如，当函数 u 及其一阶偏导数在闭区域 $\overline{D}$ 连续，即 $u\in C^1(\overline{D})$，且 D 的边界 S 是分片光滑的闭曲面或者闭曲线时．由此推出，任何一个调和函数可表示成单层位势和双层位势 (见**位势论** (potential theory))之和．这两个位势的密度分别为边界值 $\partial u(y)/\partial\nu$ 和 $u(y)$, 不能任意指定．它们之间存在一个积分关系，这一点见诸于上一公式的左边，即 Green 积分 (Green integral)在 $\overline{D}$ 外的所有点 x 必取零值．调和函数的这个基本公式完全类似于解析函数理论的基本公式，即 Cauchy 积分公式 (见 **Cauchy 积分** (Cauchy integral))．若公式中的主基本解 h_n 由 Laplace 方程的任意其他基本解来代替，只要后者在 $\overline{D}$ 上是充分光滑的，例如属于 $C^1(\overline{D})$类，那么公式仍成立．

在区域 D 的边界 S 是分片光滑的假定下，调和函数的主要性质列举如下．其中许多性质经适当修改后对复调和函数也成立．

1) 如果 D 是有界区域而调和函数 $u\in C^1(\overline{D})$,则

$$\int_S\frac{\partial u(y)}{\partial\nu}d\sigma(y)=0.$$

2) 中值定理 (mean-value theorem) 如果 u 在以 x_0 为中心，R 为半径的球 $B=B(x_0, R)$ 里调和且 $u\in C^1(\overline{B})$,则 u 在球心的值等于它在球面 $S(x_0, R)$上的算术平均值，即

$$u(x_0)=\frac{1}{\sigma_n(R)}\int_{S(x_0,R)} u(y)d\sigma(y),$$

其中 $\sigma_n(R)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中半径为 R 的球面面积 如果 u 只是连续，这个性质可作为调和函数的定义

3) 极值原理 (extremum principle) 设 D 为 $\mathbf{R}^n$ 的不包含 ∞ 为内点的区域 若 u 为 D 里的调和函数且 $u(x)\neq$ 常数，则 u 在任意点 $x_0\in D$ 不能达到局部极值，即在点 $x_0\in D$ 的任意邻域 $V(x_0)$ 里，总存在一点 $x^*\in V(x_0)$使得 $u(x^*)>u(x_0)$,同时存在一点 x_* 使得 $u(x_*)<u(x_0)$ (局部形式的极值原理 (extremum in local form)). 如果且有 $u\in C(\overline{D})$,则 u 在 $\overline{D}$ 的最大值和最小值只能在边界 ∂D 上的点达到 (整体形式的极值原理 (extremum principle in global form)) 因此，如果在 ∂D上有 $|u(x)\leqslant M$，则在 D上处处有 $|u(x)|\leqslant M$

这个原理有各种推广 例如，若 u 为在一个不含 ∞ 的区域 D 里的调和函数并对所有点 $y\in\partial D$ (在 $\overline{\mathbf{R}^n}$ 中的边界) 有

$$\lim_{x\to y}\sup u(x)\leqslant M,$$

则在 D 里处处有 $u(x)\leqslant M$

4) 可去奇点定理 (theorem on removable singularities) 如果 u 是区域 $D\setminus\{x_0\}(x_0\in D)$ 里的调和函数，并且满足条件

$$u(x)=o(|h_n(x-x_0)|),\quad x\to x_0,$$

则存在有限的极限

$$\lim_{x\to x_0} u(x)=u(x_0),$$

并且 u 用 $u(x_0)$完善其定义后，是 D 里的调和函数

5) 如果 u 在全空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$是上有界或下有界的调和函数，则 $u=$ 常数

6) 如果 u 是点 $x_0=((x_1)_0,\ \ ,(x_n)_0)$的一个邻域里的调和函数，则 u 在这个邻域里可以展开成关于变元 $x_1-(x_1)_0,\ \ ,x_n-(x_n)_0$ 的幂级数，即所有调和函数都是变元 $x_1,\ \ \ x_n$ 的解析函数，因此，调和函数 u 有各阶导数

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1}\ \ \partial x_n^{k_n}},\qquad k_1+\ \ \ +k_n=m,$$

且它们也都是调和函数

7) 唯一性性质 (uniqueness property) 如果 u 是区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 里的调和函数并在某点 $x_0\in D$ 的某个 n维邻域里 $u\equiv 0$，则在 D 里 $u\equiv 0$ 如果 u 是区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 里的实变量 $x=(x_1,\ \ ,x_n)$的解析函数并且在一点 $x_0\in D$ 的某个 n 维邻域里为调和函数，则 u 为 D 里的调和函数

8) 对称原理 (symmetry principle) 设区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 的边界 ∂D 包含平面 $x_n=0$ 里的开集 G，假定 u 是 D 里的调和函数使得在 G 上 $u=0$且连续，又设 $\widetilde{D}$ 是 D 关于平面 $x_n=0$ 的对称区域，则利用公式

$$u(x_1,\ \ ,x_{n-1},x_n)=-u(x_1,\ \ ,x_{n-1},-x_n),$$
$$(x_1,\ \ ,x_{n-1},x_n)\in\widetilde{D},$$

u 可调和延拓到区域 $D\cup G\cup\widetilde{D}$

9) Harnack 第一定理 (Harnack first theorem) 如果在有界区域 D 里调和，在闭区域 $\overline{D}$ 上连续的函数序列 $\{u_n\}$在边界 ∂D 上一致收敛，则它在 D上也一致收敛，并且极限函数

$$u(x)=\lim_{n\to\infty} u_n(x)$$

是 D 里的调和函数 .

10) Harnack 第二定理(Harnack second theorem)· 如果在区域 D 里的调和函数序列 $\{u_n\}$ 是单调的且至少在一点 $x_0\in D$ 收敛，则它在 D 里处处收敛于一个调和函数

$$u(x)=\lim_{n\to\infty} u_n(x).$$

亦见 **Harnack 不等式** (Harnack inequality), **Harnack 定理** (Harnack theorem)

两个变元 (x_1, x_2)的调和函数与复变元 $z=x_1+ix_2$ 的解析函数之间有密切的联系 解析函数的实部与虚部 (可能多值) 是共轭调和函数 (conjugate harmonic functions), 即它们由 **Cauchy-Riemann 条件** (Cauchy-Riemann conditions)相联系. 如果 $u(x_1, x_2)$是定义在点 (x_1^0, x_2^0)的一个邻域里的调和函数，要求一个解析函数 $f(z)$, $z=x_1+ix_2$ 使得 $u(x_1, x_2)=\mathrm{Re}f(z)$,其最简单的方法由 Goursat 公式 (Goursat formula)给出

$$f(z)=2u\left[\frac{z+\overline{z^0}}{2},\ \frac{z-\overline{z^0}}{2i}\right]-u(x_1^0, x_2^0)+iC_0,$$

其中 $\overline{z^0}=x_1^0-ix_2^0$, C_0 是任意实常数 . 数学物理中的某些空间问题也涉及 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$的区域里的多值调和函数 .

在数学物理中调和函数很重要，这主要是经常出现形如 $\mathbf{s}=-\mathrm{grad}\,u$ 的向量场 这种场在不包含场源的区域里必定满足守恒方程 $\mathrm{div}\,\mathbf{s}=-\Delta u=0$, 即 Laplace 方程，这意味着在这种区域里 u 是调和函数 .

例 . 若 $\mathbf{s}$ 是重力场的力向量，则 u 为重力的 Newton 位势，若 $\mathbf{s}$ 是不可压缩的均匀气体或者液体

的平稳运动的速度场，则 u 为速度位势，若 **s** 是在均匀的各向同性的介质里的静电场强度，则 u 为静电场的位势，若 **s** 是磁场均匀的各向同性介质里的平稳磁场强度，则 u 是磁场的数量位势，通常是多值的．当热在均匀各向同性介质里作稳定传播时或在扩散微粒的稳定分布中，调和函数 $u(x)$ 分别是介质的温度或者微粒在点 x 的密度．弹性理论与电磁场理论的许多重要问题也可被归结为解那些与调和函数有关的问题

边界 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem), 又称第一边界问题，对调和函数理论及数学物理的发展是特别重要的．这就是求这样一个函数 u, 它在区域里调和，在 $\overline{D}$ 上连续，在边界 $S=\partial D$ 上取事先给定的连续函数的值 $u(y)$. 如果曲面或曲线 S 是足够光滑的，则该解可用 **Green 函数** (Green function) $G(x, y)$ 表示为

$$u(x)=-\int_S u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial v_y}\, d\sigma(y)$$

对于最简单的区域（球，半空间），法向导数容易表示成显式，从而得到 **Poisson 积分** (Poisson integral). 第二边值问题，即 **Neumann 问题** (Neumann problem) 也常遇到．这就是由给定在边界 S 上的法向导数来确定调和函数 u. 该问题可用对应的 Green 函数来求解，但这时显式表达式要复杂得多　在调和函数理论中，还有许多边值问题，它们的提出及求解都更复杂．亦见**扫除法** (balayage method), **Robin 问题** (Robin problem)

在调和函数的现代理论中，不适定的问题占有特殊的地位，它们主要是与 Laplace 方程的 Cauchy 问题有关，例如，包括了下述关于最佳强函数的问题假定在区域 D 的边界 $S=\partial D$ 上给定函数 $M=M(y)$ 和条件 $|u(y)|\leqslant M(y)$, $|\partial u(y)/\partial v|\leqslant M(y)$, 要在 D 里的调和函数 u 所成的类中求出 $\sup|u(x)|$ 的可能的最佳估计 ([9], [10])

结合有关的**下调和函数** (subharmonic function) 以及**解析函数的边界性质** (boundary properties of analytic functions) 来研究调和函数的边界性质具有重要的意义．例如，在 $\mathbf{R}^n$ 的单位球 $B(0,1)$ 里的调和函数 u 通常没有径向极限值．

$$f(y)=\lim_{r\uparrow 1} u(ry),\ y\in S=\partial B(0,1)$$

但是，由下面条件定义的 A 类调和函数

$$\int_S u^+(ry)\,d\sigma(y)\leqslant C(u)<\infty,$$

其中 $d\sigma(y)$ 是 S 的曲面元素，$u^+=\max\{0,u\}$, 其径向极限在 S 上关于 Lebesgue 测度几乎处处存在，并且 $u\in A$ 可以表示成 Poisson-Stieltjes 积分

$$u(x)=\int_S P_n(x,y)\,d\mu(y),$$

其中

$$P_n(x,y)=\frac{1}{\sigma_n(1)}\ \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}$$

是 Poisson 核，$d\mu$ 是 S 上的 Borel 测度．A 类的真子类 B 类也很重要，它是由在 $B(0,1)$ 能表示成 Poisson-Lebesgue 积分

$$u(x)=\int_S P_n(x,y)f(y)\,d\sigma(y)$$

的所有调和函数 u 组成的．

拓扑空间中的调和函数与位势的公理理论已获得重大进展．见**调和空间** (harmonic space), **抽象位势论** (potential theory, abstract).

参考文献

[1] Тиман, А Ф, Трофимов, В Н, Введение в теорию гармонических функций, М, 1968

[2] Гюнтер, Н М, Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М, 1953 (英译本 Günter, N M [N M Gyunter], Potential theory and its applications to basic problems of mathematical physics, F Ungar, 1967)

[3] Сретенский, Л, Н, Теория ньютоновского потенциала, М -Л, 1946

[4] Brelot, M, Eléments de la théorie classique du potentiel, Sorbonne, Univ Centre Doc Univ, Paris, 1959

[5] Kellogg, O D, Foundations of potential theory, Springer, 1967 Re-issue Springer, 1967

[6] Владимиров, В С, Уравнения математической физики, М, 1967 (英译本 Vladimirov, V S, Equations of mathematical phisics, Mir, 1984)

[7] Лаврентьев, М А, Шабат, Б В, Методы теории функций комплексного переменного, 3 изд, М, , 1965 (中译本 М А 拉甫伦捷夫, Б В 沙巴特, 复变函数论方法, 高等教育出版社, 上册, 1956, 下册, 1957)

[8] Маркушевич, А И, Теория аналитических функций, 2 изд, т 2, М, 1968 (中译本 А И 马库雪维奇, 解析函数论, 高等教育出版社, 1957)

[9] Лаврентьев, М М, О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосибирск, 1962 (英译本 Lavrentiev, M M [M. M Lavrent'ev] Some improperly posed problems of mathematical physics, Springer, 1967)

[10] Мергелян, С Н, 《Успехи матем наук》, 11 (1956), 5, 3 - 26

[11] Привалов И И, Граничные свойства аналитнческих функций, 2 изд, М, -Л, 1950

[12] Соломенцев, Е Д, Гармонические и субгармонические функции и их обобщения, в кн Итоги науки Серия математика Математический анализ Тео-

рия вероятностей Регулирование, 1962, М , 1964, 83 − 100

Е Д Соломенцев 撰

【补注】上文主要性质 5)也称为(关于调和函数的) Pıcard 定理(Pıcard theorem)

对称原理(symmetry prıncıple)也称为 Schwarz 反射原理(Schwarz reflectıon prıncıple), 见 **Schwarz 对称定理**(Schwarz symmetry theorem) [A1]定义了关于**细拓扑**(fine topology)的调和函数.

参考文献

[A1] Fuglede, B , Fınely harmonıc functıons, Sprınger, 1972

[A2] Hayman, W K and Kennedy, P B , Subharmonıc functıons 1, Acad Press, 1976

[A3] Helms, L L , Introductıon to potentıal theory, Wıley (ınterscıence), 1969

吴炯圻、高琪仁 译

调和强函数 [harmonic majorant, гармоническая мажоранта]

Euclıd 空间 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ 的开集 D 上的下调和函数族 $\{u_i\}$ 的最小调和强函数(least harmonıc majorant) v 指的是 $\{u_i\}$ 的上调和强函数 v_K 全体 $\mathfrak{V} = \{v_k\}$ 的下包络,即

$$v(x) = \inf\{v_k(x) \quad v_k \in \mathfrak{V}\}, \quad x \in D$$

最小调和强函数 v 要么为 D 上的调和函数,要么 $v(x) \equiv +\infty$. 如果该族仅由一个函数 u 组成而 u 在更大的集合 $D_0 \supset \overline{D}$ 上为下调和,那么,最佳调和强函数(best harmonıc majorant) v^*, 即关于区域 D 的、在边界 $\Gamma = \partial D$ 取值为 u 的广义 Dırıchlet 问题的解——这个概念也可利用 这时总有 $v^* - v \geqslant 0$, 且有下述公式([1])

$$v^*(x) - v(x) = -\int_{\Gamma} G(x, y)\, d\mu(y), \ x \in D,$$

其中 μ 是与 u 关联的测度,$\mu \leqslant 0$, 而 $G(x, y)$ 是关于 D 的 Dırıchlet 问题的(广义)Green 函数 最佳与最小调和强函数重合的充要条件是, Γ 的**非正则边界点**(ırregular boundary poınt)全体之集合为 μ 零测集.

相应地,如果 $\{\widetilde{u}_i\}$ 为 D 上的上调和函数族,则 $\{\widetilde{u}_i\}$ 的最大调和弱函数(greatest harmonıc mınorant) w 定义为 $\{\widetilde{u}_i\}$ 的下调和弱函数全体的上包络 这时, $-w$ 正好是 $\{-u_i\}$ 的最小调和弱函数

对于 Laplace 方程的 Cauchy 问题,也可提出调和弱函数的问题. 见**调和函数**(harmonıc functıon)

参考文献

[1] Frostman, O , Potentıel d equılıbre et capacıte des ensembles avec quelques applıcatıons à la theorıe des fonctıons, *Mett Lunds Unıv Mat Sem*, 3 (1995), 1−118

[2] Brelot, M , Eléments de la theorıe classıque du potentıel, Sorbonne Unıv Centre Doc Unıv , Parıs, 1959

Е Д Соломенцев 撰

【补注】 在公理位势论中(见**抽象位势论**(potentıal theory, abstract)), 最佳与最小调和强函数相等的条件是与控制原理(domınatıon prıncıple)(见**控制**(domınatıon))相关联的. 见[A1]第9章.

参考文献

[A1] Constantınescu, C and Cornea, A , Potentıal theory on harmonıc spaces, Sprınger, 1972

吴炯圻 高琪仁 译

调和平均值 [harmonic mean, гармоническое среднее], 亦称调和平均, 数 $a_1, a_2, \quad, a_n$ 的

这些给定数的倒数的**算术平均值**(arıthmetıc mean)的倒数,即数

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \quad + \dfrac{1}{a_n}}$$

例如, $1/n$ 是分数 $1/(n-1)$ 和 $1/(n+1)$ $(n=2, 3, \quad)$ 的调和平均值 一些给定数的调和平均值决不大于它们的算术平均值

Л Д Кудрявцев 撰 张鸿林 译

调和测度 [harmonic measure, гармоническая мера]

调和函数(harmonıc functıon)理论中与估计解析函数在区域内部的模的问题相关联的概念, 该问题中, 函数在区域边界上的模的某种估计为已知([1], [2]) 设 D 为 Euclıd 空间 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ 的有界开集, $\Gamma = \partial D$ 是 D 的边界, 又设 f 为 Γ 上的有限实值连续函数. 对每个这样的函数 f, D 里有唯一的调和函数 $H_f(x)$ 与它对应 H_f 就是关于 f 的 **Drichlet 问题**(Dırıchlet problem)的广义解 如果点 $x \in D$ 取定, 那么泛函 $H_f(x)$ 在紧集 Γ 上定义了一个正 Radon 测度 $\omega(x) = \omega(x, D)$, 称之为在点 x 的调和测度 Ch J de la Vallée-Poussın 用**扫除法**(balayage method)得到了 Dırıchlet 问题的广义解的表示公式

$$H_f(x) = \int f(y)\, d\omega(x, D),$$

它对 Γ 上每个连续函数 f 都成立. 进一步, 如果 E 是 Γ 上的任意 Borel 集, 则 E 在 x 的调和测度 $\omega(x, E, D)$ $(x \in D)$ 与关于 E 的特征函数 $\chi_E(y)$ $(y \in \Gamma)$ 的 Dırıchlet 问题的广义解在 x 点的值相等.

调和测度的基本性质是 $\omega(x, E, D)$ 是 D 中的点 x 的调和函数,

$$0 \leqslant \omega(x, E, D) \leqslant 1,$$

$$1-\omega(x, E, D)=\omega(x, \Gamma\setminus E, D),$$

如果 D 是区域，那么，只要有一点 $x\in D$ 使得 $\omega(x, E, D)=0$ 成立，就有 $\omega(x, E, D)\equiv 0$

在上述最后的情形中，E 被称为调和零测度集（set of harmonic measure zero） 如果一个紧集 $K\subset \mathbf{R}^n$ 关于某个区域 $D(K\subset D)$ 的调和测度为零，即 $\omega(x; K, D\setminus K)=0$，则它关于所有其他区域的调和测度也为零，即 K 是绝对调和零测度集（set of absolute harmonic measure zero） 集合 K 为绝对调和零测度集，当且仅当它具有零（调和）**容量** （capacity）

从应用于复变函数论的观点看来，调和测度对区域 D 的依赖关系具有特别重要的意义 这种依赖关系可表述为如下**调和测度原理** （harmonic measure, principle of） 区域 D 在单价解析函数 $w=w(z)$ $(z\in D)$ 映照下，调和测度不减．特别，在一对一的共形映照下，调和测度不变．

只有最简单的一些区域（主要是圆盘，球体，半平面和半空间，见 **Poisson 积分** （Poisson integral））的调和测度能明确地算出来 因此，调和测度的各种估计方法（[4]，[5]，[6]，[7]）有重要意义，它们主要基于**区域扩张原理** (extension of domain, principle of) 当 $n=2$ 时，这个原理的最简单形式可叙述为· 假定 D 是由有限条 Jordan 曲线 Γ 所界定的有限连通区域，α 是 Γ 上的一段弧 如果区域 D 按某种方法越过边界的其余部分 $\Gamma\setminus\alpha$ 扩张，则调和测度 $\omega(z, \alpha, D)$ 只会增加．

参考文献

[1] Carleman, T, Sur les fonctions inverses des fonctions entières d ordre fini, *Ark Mat*, **15** (1921), 10, 1-7

[2] Nevanlinna, F and Nevanlinna, R, Ueber die Eigenschaften einer analytischen Funktion in der Umgebung einer singularen Stelle oder Linie, *Acta Soc Sci Fennica*, **50** (1922), 5, 1-46

[3] Vallée-Poussin, Ch J de la, *Ann Inst H Poincaré*, **2** (1932), 169-232

[4] Nevanlinna, R, Analytic functions, Springer, 1970 (译自德文)

[5] Голузин, Г М, Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд, М, 1966 (中译本 Г М 戈鲁辛，复变函数的几何理论，科学出版社，1956)

[6] Brelot, M, Eléments de la théorie classique du potentiel, Sorbonne Univ Centre Doc Univ, Paris, 1959

[7] Haliste, K, Estimates of harmonic measure, *Ark Mat*, **6** (1965), 1, 1-31

Е Д Соломенцев 撰

【补注】 在公理位势论中(见**抽象位势论**(potential theory, abstract))，调和测度是一个重要工具，见 [A1]

最近，对于 $\mathbf{C}$ 的区域，通过 **Hausdorff 测度** (Hausdorff measure) 已获得关于调和测度的非常准确的估计 设 $h(t)$ $(t\geq 0)$ 是连续的增函数，$h(0)=0$，E 为 **Borel 集** （Borel set）．用 $\Lambda_h(E)$ 表示 E 关于 h 的 Hausdorff 测度，又设 D 是 $\mathbf{C}$ 中的区域而 $\omega(E)=\omega(x, E, D)$ Макаров 定理 （Makarov theorem）（[A3]）称· 1) 当 D 是单连通区域时，若 $\lim_{t\to\infty}h(t)/t=0$，则 ω 关于 Λ_h 是奇异的，即 $\omega\perp\Lambda_h$ 2) 存在具有下述性质的常数 C_1，C_2 若

$$h_i(t)=t\exp\left\{C_i\sqrt{\left[\log\frac{1}{t}\right]\log\log\log\frac{1}{t}}\right\},\ i=1, 2,$$

则对于每个 Jordan 区域 D，ω 关于 Λ_{h_1} 是绝对连续的，即 $\omega\ll\Lambda_{h_1}$ 但是，却存在一个 Jordan 区域 D，具有 $\omega\perp\Lambda_{h_2}$

接着，B. Øksendal, Jones, Wolff 证明 如果 $1<a\leq 2$，则对于 $\mathbf{C}$ 的每一个区域 D，$\omega\perp\Lambda_{(t^a)}$

参考文献

[A1] Constantinescu, c and Cornea, A, Potential theory on harmonic spaces, Springer, 1972

[A2] Garnett, J B, Applications of harmonic measure, Wiley (Interscience), 1986

[A3] Makarov, N, On the distortion of boundary stes under conformal mappings, *Proc London Math Soc*, **51** (1985), 369-384

高琪仁、吴炯圻 译 卫念祖 校

调和测度原理 [harmonic measure, principle of, гармонической меры принцип]

调和测度在单值解析函数映照下不减少 假定 $\omega(z, \alpha, D)$ 是复 z 平面上的一个边界集 α 关于区域 D 的调和测度，则调和测度原理可具体阐述如下 假定区域 D_z 的边界 Γ_z 由有限条 Jordan 弧组成，给定一个满足下述条件的单值解析函数 $w=w(z)$．值域 $w=w(z)$，$z\in D_Z$ 所构成的区域 D_w 的边界 Γ_w 是由有限条 Jordan 弧组成的，同时，函数 $w(z)$ 可以连续延拓到某一个由有限条弧组成的集合 $\alpha_z\subset\Gamma_z$ 上，又，$w(z)$ 在 α_z 上的值属于集合 $E\subset\bar{D}_w$，而边界 ∂E 由有限条 Jordan 弧组成．在这些条件下，对任意一点 $z\in D_z$，若 $w(z)\notin E$，则

$$\omega(z, \alpha_z, D)\leq\omega(w(z), \partial E, D_w^*),\quad(1)$$

其中 D_w^* 表示 D_w 的这样的子区域，使得 $w(z)\in D_w^*$ 且 $\partial D_w^*\subset\Gamma_w\cup\partial E$ (1) 式如果在某一点 z 相等，则在 D_z 里处处相等 特别，对于从 D_z 到 D_w 上的一对一的保形映照，有恒等式

$$\omega(z, \alpha_z, D_z)\equiv\omega(w(z), \alpha_w, D_w)$$

调和测度原理，包括它的许多应用（[1]，[2]）是

R Nevanlinna 创立的 特别，从这个原理的推论，即**二常数定理** (two-constants theorem) 又可推出，对于区域 D_z 里的全纯函数 $w(z)$, $\ln w(z)$ 在等值线 $\{z \ \omega(z, \alpha_z, D_z) = t\}$ 上的最大值是参数 $t \in (0,1)$ 的凸函数．

调和测度原理已推广到多复变全纯函数 $w = w(z)$, $z = (z_1, \cdots, z_n)$, $n \geq 1$

参考文献

[1] Nevanlinna, F and Nevanlinna, R, Ueber die Eigenschaften einer analytischen Funktion in der Umgebung einer singularen Stelle oder Linie, *Acta Soc Sci Fennica*, **50** (1922), 1-46

[2] Nevanlinna, R, Analytic functions, Springer, 1970 (译自德文).

П М Тамразов 撰

吴炯圻、高琪仁 译 卫念祖 校

调和多项式 [harmonic polynomial, гармонический многочлен]

1) 以 $x_1, \cdots, x_n$ 为变量的满足 **Laplace 方程** (Laplace equation) 的多项式．任何调和多项式都可以表示为齐次调和多项式 (homogeneous harmonic polynomials) 之和．如果 $n=2$，则只有两个线性无关的 m 次齐次调和多项式，例如表达式 $(x_1+ix_2)^m$ 的实部和虚部．如果 $n=3$，则线性无关的 m 次齐次调和多项式的个数为 $2m+1$ 在一般情况 $(n \geq 2)$ 下，线性无关的 m 次齐次调和多项式的个数等于

$$K_n^m - K_n^{m-2}, \ m \geq 2,$$

其中

$$K_n^m = \frac{n(n+1) \cdots (n+m-1)}{m!}$$

是从 n 个对象中取 m 个对象 (可重复 m 次) 的组合数．齐次调和多项式 $V_m(x)$ 也称为**球面函数** (spherical functions) (特别是，当 $n=3$ 时) 当 $n=3$ 时，在球面坐标中 $V_m(x)$ 可写成

$$V_m(x) = r^m Y_m(\theta, \varphi),$$

其中 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$，而 $Y_m(\theta, \varphi)$ 是 m 次球面函数

参考文献

[1] Соболев, С Л, Уравнения математической физики, 4 изд, М, 1966 (中译本 С Л 索伯列夫，数学物理方程，高等教育出版社，1956)

[2] Тихонов, А Н, Самарский, А А, Уравнения математической физики, 3 изд, М, 1966 (中译本 А Н 吉洪诺夫, А А 萨马尔斯基，数学物理方程，高等教育出版社，1956, 1957)

[3] Brélot, M, Eléments de la théorie classique du potentiel, Centre Doc Sorbonne Univ Paris, 1959

Е Д Солощенцев 撰

2) **谐波** (harmonics) 的有限线性组合．实值调和多项式能够表示为下列形式

$$\sum_{k=1}^{N} A_k \sin(\omega_k x + \varphi_k),$$

其中 N 是给定的自然数，A_k 是非负数，而 ω_k, φ_k 是实数，$k=1, 2, \cdots, N$ 复值调和多项式能够表示为下列形式

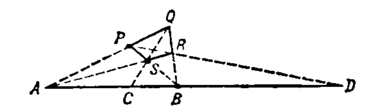
$$\sum_{k=-m}^{n} c_k e^{i\omega_k x},$$

其中 n 和 m 是自然数，ω_k 是实数，c_k 是复数，$k = -m, -m+1, \cdots, n$ 调和多项式是最简单的**殆周期函数** (almost-periodic function)

В Ф Емельянов 撰 张鸿林 译

调和四元组 [harmonic quadruple, гармоническая четверка], 点的

在一直线上其**交比** (cross ratio) 等于 -1 的四元点组．如果 $(ABCD)$ 是一调和四元点组，就说点对 AB 调和分割点对 CD，或者点 A 和 B 关于点 C 和 D 是调和共轭的 (harmonically conjugate)，点对 AB 和 CD 称为调和共轭的



调和四元组可以不借助于度量概念来定义．设 $PQRS$ 是一个四元组 (见图)，A 和 B 是四边形 $PQRS$ 的对边的交点，C 和 D 是对角线 SQ 和 PR 与直线 AB 的交点，则四元点组 $(ABCD)$ 是一调和四元组 通过同一点 (同一直线) 的四元直线 (平面) 组称为调和四元直线 (平面) 组 (harmonic quadruple of straight lines (planes))，如果它与一直线相交于一调和四元点组．

А Б Иванов 撰

【补注】 被看作 Euclid 平面的复直线上的调和四元组称为调和四边形 (harmonic quadrilateral)，见 [A1]

调和四元组的用途等等，见 [A1]-[A3]

参考文献

[A1] Berger, M, Geometry, 1 Springer, 1987, p 270 (译自法文)

[A2] Coxeter, H S M, Projective geometry, Blaisdell, 1964

[A3] Coxeter, H S M, The real projective plane, McGraw-Hill, 1949

杨 路、侯晓荣 译 张景中 校

调和级数 [harmonic series, гармонический ряд]

数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

调和级数的每一项（从第2项开始）等于其相邻两项的**调和平均值**（harmonic mean）（因此称为调和级数）调和级数是发散的（G Leibniz，1673），其部分和

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

随 $\ln n$ 增加而增加（L Euler，1740） 存在常数 $c>0$，称为 **Euler 常数**（Euler constant），使得 $s_n=\ln n+c+\varepsilon_n$，其中 $\lim\varepsilon_n=0$. 级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$$

称为广义调和级数，当 $\alpha>1$ 时它是收敛的，而当 $\alpha\leqslant 1$ 时是发散的.

Л Д Кудрявцев 撰

【补注】 关于 s_n 的表达式的证明，例如见[A1]，定理422 注意 级数 $\sum 1/p$，当 p 取一切素数时，也是发散的，其部分和表达式，例如见[A1]，定理427

广义调和级数常常用来检验一个给定级数是收敛的还是发散的，只须借助于 $1/n^{\alpha}$ 来估计给定级数的第 n 项即可.

参考文献

[A1] Hardy, G H and Wright, E M , An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ Press, 1979

张鸿林 译

调和空间[**harmonic space**，**гармоническое пространство**]

赋予一个连续实值函数（线性）层 $\mathfrak{H}$ 的拓扑空间 X，其中经典**调和函数**（harmonic function）的三个基本性质被指定为该层必须满足的公理 这三个基本性质是 由第二 **Harnack 定理**（Harnack theorem）表示的收敛性，极值原理；对 X 中足够大的开集族，**Dirichlet 问题**（Dirichlet problem）的可解性. $\mathfrak{H}$ 中的函数称为调和函数. 这种公理方法的益处在于，由此建立的理论不仅包括 **Laplace 方程**（Laplace equation）的解，而且包括某些其他椭圆型及抛物型方程的解. 设 X 为局部紧拓扑空间 X 上的一个函数层（sheaf of functions）指的是定义在 X 上所有开集 U，V，· 上的这样的映射 $\mathfrak{F}$，它满足 1) $\mathfrak{F}(U)$ 是 U 上的一个函数族，2)若 $U\subset V$，则 $\mathfrak{F}(V)$ 中的任何函数在 U 上的限制必属于 $\mathfrak{F}(U)$，3)对任意开集族 $\{U_\iota\}_{\iota\in I}$，若一个函数定义在 $\bigcup_{\iota\in I}U_\iota$ 且对所有 $\iota\in I$，它在 U_ι 上的限制都属于 $\mathfrak{F}(U_\iota)$，则它也属于 $\mathfrak{F}(\bigcup_{\iota\in I}U_\iota)$ 一个函数层 $\mathfrak{U}$ 称为超调和的（hyperharmonic），若对任意 U，$\mathfrak{U}(U)$ 是由 U 上的下半连续的有限数值函数组成的一个凸锥. 函数层 $\mathfrak{H}$，称为调和的（harmonic），若对任意 U，$\mathfrak{H}(U)$ 是由 U 上的连续函数组成的一个实向量空间，下文仅考虑这样的调和层

$$\mathfrak{H}\quad U\to\mathfrak{U}(U)\cap(-\mathfrak{U}(U))$$

满足下述诸公理的局部紧空间称为调和空间（[3]）

正性公理（positivity axiom） $\mathfrak{H}$ 在每个点 $x\in X$ 不退化，即对于任意 $x\in X$，存在 x 的某个邻域上定义的函数 $u\in\mathfrak{H}$ 使得 $u(x)\neq 0$.

收敛性公理（convergence axiom）. $\mathfrak{H}(U)$ 中的增函数列若局部有界，则必须收敛于 $\mathfrak{H}(U)$ 中的某个函数

可解性公理（resolutivity axiom） 可解的开集 U 全体是一个（拓扑）基 U 为可解指的是，对于 ∂U 上任何具有紧支集的连续函数 f，关于 U 的 Dirichlet 问题在 $\mathfrak{H}(U)$ 中有 Wiener-Perron 广义解 $H(u,f)$（见 **Perron 法**（Perron method））

完全性公理（axiom of completeness），若 U 上的一个下有限、下半连续函数 u，对任意相对紧集 V，$\bar{V}\subset U$，在 V 上满足条件

$$\sup\{H(U,f)\ u\geqslant f\in C(\partial V)\}=\mu^{V}u\leqslant u,$$

则 $u\in\mathfrak{U}(U)$

Euclid 空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 连同 Laplace 方程或者**热传导方程**（thermal - conductance equation）的经典解之层构成调和空间. 还有一些别的不同的调和公理系统 调和空间是局部连通的且不包含孤立点，又，连通可解全体是一个基.

调和空间 X 上的一个超调和函数 u 称为上调和的（superharmonic），若对任意相对紧可解集 V，函数 $\mu^{V}u$ 在 V 里为调和. 若一个正上调和函数的任意正调和弱函数恒等于0，则称它为位势（potential） 一个调和空间 X 称为 $\mathfrak{s}$ 调和的（$\mathfrak{p}$ 调和的），如果对任意 $x\in X$，存在 X 上的一个正上调和函数 u（相应地，一个位势 u）使得 $u(x)>0$

任意调和空间可用满足下述形式的最小值原理（minimum principle）的所有开集 U 来覆盖 若超调和函数 $u\in\mathfrak{U}(U)$ 在 U 与 X 的任一紧集之交的外部是正的，且对所有 $y\in\partial U$ 有

$$\lim_{x\to y}\inf u(x)\geqslant 0,$$

则 $u\geqslant 0$. $\mathfrak{p}$ 调和空间的所有开集都满足最小值原理 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 连同 Laplace 方程的经典解之层，当 $n\geqslant 1$ 时，是 $\mathfrak{s}$ 调和空间，当且仅当 $n\geqslant 3$ 时，是 $\mathfrak{p}$ 调和空间 空间 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1$，$n\geqslant 1$，连同热传导方程的解之层为 $\mathfrak{p}$ 调和空间

调和空间理论的基本问题包括 Dirichlet 问题的可解性理论、其中包括广义解在边界点的性质的研究 此外，也研究调和空间中点集的**容量**（capacity）理论，扫除问题（见**扫除法**（balayage method）以及 **Robin 问题**（Robin problem））

参考文献

[1] Brelot, M, Lectures on potential theory, Tata Inst Fundam Res, 1960

[2] Bauer, H, Harmonische Raume und ihre Potentialtheorie, Springer, 1966

[3] Constantinescu, C and Cornea, A, Potential theory on harmonic spaces, Springer, 1972

[4] Brelot, M, On topologies and boundaries in potential theory, Springer, 1971

Е Д, Соломенцев 撰

【补注】 对任意一个具有可数基的 p 调和空间 X，若函数 1 是其中上调和函数，则可构造一个适当的 **Марков 过程**（Markov process）使得 X 的位势论概念与该过程的位势论概念之间建立对应

亦见**位势论**（potential theory），**抽象位势论**（potential theory, abstract）

参考文献

[A1] Bauer, H, Harmonische Raume, in Jahrbuch *Uberblicke mathematik*, BI Wissenschaftsverlag, 1981, 9 − 35

[A2] Brelot, M (ed), Potential theory, C I M E Stresa, 1969, Cremonese, 1970

高琪仁、吴炯圻 译

谐和振动 [**harmonic vibration**, **гармоническое колебание**]、**谐振动**，**正弦振动**（sinusoidal vibration）

可写成解析形式

$$x = x(t) = A\cos(\omega t - \alpha) = \mathrm{Re}[Be^{i\omega t}]$$

的物理量随时间的周期变化 这里 $x = x(t)$ 是 t 时刻振动量的值，$|A| = |B|$ 是振幅，ω 是周期（圆周）频率，α 是振动的初相．一个完整振动的持续时间 $T = 2\pi/\omega$ 称为谐和振动的周期（period），而单位时间内完成的完整振动次数 $\nu = 1/T$ 称为谐和振动的频率（frequency）($\omega = 2\pi\nu$) 谐和振动的周期与其振幅无关．振动量的速度、加速度及所有高阶导数均以同一频率谐和地变化．在**相平面**（phase plane）$(x, \dot{x})$ 上谐和振动表现为一椭圆．由于能量的耗散，理想的谐和振动在自然界是遇不到的，但很多过程接近谐和振动．它们包括力学系统相对其平衡位置的小振动，这里所得的振动频率（所谓的本征频率（eigen frequencies））与运动的初始条件无关，只决定于振动系统自身的性质 例如，长为 l 的细线上的数学摆的小振动（在重力作用下）由下面微分方程描述

$$ml\ddot{x} = -mgx,$$

这里 g 是重力加速度，$x(t)$ 是摆线与垂线间的夹角．此方程的通解具有形式 $x = A\cos(\omega t - \alpha)$，这里振动的本征频率，$\omega = \sqrt{g/l}$，仅依赖于 g 和 l，而振幅 A 和相 α 为积分常数，根据初始条件而选定．

谐和振动在振动总体的研究中起重要作用，因为复杂的周期变化和基本是周期变化的量可以以任意要求的精确度近似表示为谐和振动的和 数学上这相当于用**三角级数**（trigonometric series）和 **Fourier 积分**（Fourier integral）来逼近函数

一定义于 $[-\pi, \pi]$ 的复值函数 $x(t)$ 的经典 Fourier 级数

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int},$$

可看作是将 $x(t)$ 展成一具有整数频率 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 的谐和振动的和 Fourier 系数

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-int}dt$$

确定频率为 n 的谐和振动的振幅（$|a_n|$）和相移（$\arg a_n$） 全部 Fourier 系数的集合决定 $x(t)$ 的谱，并示出那些确实包含于 $x(t)$ 中的谐和振动，以及这些振动的振幅和初相 知道谱等价于知道函数 $x(t)$

定义于 $(-\infty, \infty)$ 的函数 $x(t)$ 不能再由整数频率的谐和振动来构造 它的结构中包含所有频率的振动 函数 $x(t)$ 可表示为 Fourier 积分

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(n)e^{int}dn,$$

这里

$$a(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-int}dt$$

是 $x(t)$ 的谐密度

函数的这类表示法形成了微分方程和积分方程理论中解各种问题的 **Fourier 法**（Fourier method）的基础

参考文献

[1] Горелик, Г С, Колебания и волны, 2 изд, М, 1959

Л П Купцов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rayleigh, J W S, The theory of sound, 1, Dover, reprint, 1945

唐福林 译

调和函数 [**harmonics**, **гармоника**]

一些最简单的周期函数，其形式为

$$A\sin(\omega x + \varphi)$$

在研究各种振动过程时，都会遇到这些函数．数 A 称

为振幅，ω 称为频率，φ 称为初始相位，而 $T=2\pi/\omega$ 是振动的周期. 相对基本调和函数来说，函数 $\sin(2\omega x+\varphi)$, $\sin(3\omega x+\varphi)$, · 分别是二次、三次等高次调和函数. 除了这些调和函数本身以外，还考虑它们的和

$$a_0+a_1\sin(\omega x+\varphi)+a_2\sin(2\omega x+\varphi)+\quad,\ (*)$$

因为在研究各种过程时，很广泛的一类函数都能展开为形如(*)的级数. А И Барабанов 撰

【补注】 更一般地说，如果 G 是一个紧群，K 是 G 的一个闭子群，并且 G 在 $L_2(G/K)$ 上的正则表示唯一地分解为一些不可约子表示，则属于 $L_2(G/K)$ 的不可约子空间的齐次空间 G/K 上的函数称为调和函数，见[A1]. 对于 $G=O(z)$, $K=O(1)$，得到经典调和函数.

参考文献

[A1] Weyl, H, Harmonics on homogeneous manifolds, *Ann of Math*, 35 (1934), 486 - 499

[A2] Hobson, E W, The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, Chelsea, reprint, 1955

张鸿林 译

可调和化动力系统 [harmonizable dynamical system, гармонизуемая динамическая система]

这样的流(连续时间动力系统)(flow (continuous-time dynamical system))，其轨道经时间的某种改变后成为殆周期的. 通常作下述补充假设. 每条轨道在相空间中是处处稠密的(因此可以说是可调和化最小集). Д В Аносов 撰

【补注】 上面提到的度量空间 X 上动力系统(dynamical system) $\{S^t\}$ 中的一条殆周期轨道(almost-periodic trajectory)是指具下列性质的任何点 $x\in X$ 的轨道. 对每个 $\varepsilon>0$，ε 殆周期(ε-almost period)集合

$$\{\tau\in\mathbf{R}\ \ \rho(S^t(x),S^{t+\tau}(x))<\varepsilon\ \ 对\ -\infty<t<\infty\}$$

在 $\mathbf{R}$ 中相对稠密，即存在 $l(\varepsilon)>0$ 使长为 $l(\varepsilon)$ 的每个区间含有一个 ε 殆周期(比较殆周期函数(almost-periodic function)的殆周期(almost-period)的定义). 郑维行 译 沈永欢、陈一元 校

可调和化随机过程 [harmonizable random process, гармонизуемый случайный процесс]

可以用随机积分(stochastic integral)

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}d\Phi(\lambda)=\lim\sum_k e^{i\lambda t}\Delta_k\Phi(\lambda)\quad(*)$$

表示的实参数 t 的复值随机函数 $X=X(t)$，式中 $\Phi(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ 是一个随机过程，增量 $\Delta_k\Phi(\lambda)=\Phi(\lambda_{k+1})-\Phi(\lambda_k)$ 在(*)中定义的具有随机"振幅" $A_k=|\Delta_k\Phi(\lambda)|$，"相位" $\theta_k=\arg\Delta_k\Phi(\lambda)$ 和频率为 $\lambda(\lambda_k\leqslant\lambda\leqslant\lambda_{k+1})$ 的形如

$$A_k e^{i(\lambda t+\theta)}=e^{i\lambda t}\Delta_k\Phi(\lambda)$$

的基本振动，叠加起来，取极限产生了 $X=X(t)$ 表示式(*)中的(均方)极限是沿着把直线逐次细分成区间 $\Delta_k=(\lambda_k,\lambda_{k+1})$ 使 $\max_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\to 0$ 的序列来取的. 通常假定

$$F(\Delta_1\times\Delta_2)=\mathrm{E}(\Delta_1\Phi\cdot\overline{\Delta_2\Phi})$$

作为平面上集 $\Delta_1\times\Delta_2$ 的函数，定义了一个复值有界变差测度. 在这种情形下，相应的过程 $\Phi(\lambda)(-\infty<\lambda<\infty)$(或者更确切地，相应的随机测度 $d\Phi(\lambda)$)，可以被过程 $X(t)$ $(-\infty<t<+\infty)$ 唯一地确定：即

$$\Delta\Phi(\lambda)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-i\lambda_2 t}-e^{-i\lambda_1 t}}{-it}X(t)dt,$$

对任意具有 $d\Phi(\lambda_1)=d\Phi(\lambda_2)=0$ 的区间 $\Delta=(\lambda_1,\lambda_2)$ 成立，并且

$$\Phi(\lambda+0)-\Phi(\lambda-0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}e^{-i\lambda t}X(t)dt,$$

对任意 $\lambda(-\infty<\lambda<\infty)$ 成立. 一个随机过程 $X(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ 是可调和化的，当且仅当它的协方差函数可表示为如下形式

$$B(s,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\lambda s-\mu t)}F(d\lambda\times d\mu)$$

可调和化随机过程的例 1) 调幅平稳随机过程 如果

$$X_0(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}d\Phi_0(\lambda)$$

是平稳随机过程，则形如

$$X(t)=c(t)X_0(t)$$

的随机过程通常不再是平稳的，其中 $c(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\times m(d\lambda)$, $m(d\lambda)$ 是直线上的测度，但 $X(t)$ 是可调和化的

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}d\Phi(\lambda),$$

这里随机测度 $d\Phi(\lambda)$ 由公式

$$\Delta\Phi(\lambda)=\int_{\Delta}m(\Delta-\lambda)\,d\Phi_0(\lambda)$$

确定

2) 用滑动求和(sliding summation)(或滑动平均(moving averages))

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}c(t-s)dZ(s)$$

定义的过程，其中 $dZ(t)$ 是直线上的随机测度，而权函数 $c(t)$ 与上例中的形式相同，即

$$c(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}m(d\lambda)$$

在此情形下，

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda),$$

这里

$$\Delta\Phi(\lambda) = \int_{\Delta} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} dZ(t) \right] m(d\lambda)$$

参考文献

[1] Loève, M , Probability theory, 2, Springer, 1978

Ю А Розанов 撰 刘秀芳 译

Harnack 不等式 (对偶 Harnack 不等式) [**Harnack inequality** (dual Harnack inequality); **Гарнака неравенство (двойное)**]

给出正调和函数的两个值之比 $u(x)/u(y)$ 的上界和下界估计的一个不等式，由 A Harnack ([1]) 得到．令 $u \geqslant 0$ 是 n 维 Euclid 空间的区域 G 中的一个调和函数，令 $E_r(y)$ 是中心在点 y 处半径为 r 的球 $\{x \mid |x-y|<r\}$ 若闭包 $\overline{E_r(y)} \subset G$，则对于所有的 $x \in E_\rho(y)$, $0<\rho<r$, Harnack 不等式 (Harnack inequality)

$$\left(\frac{r}{r+\rho}\right)^{n-2} \frac{r-\rho}{r+\rho} u(y) \leqslant u(x) \leqslant \left(\frac{r}{r-\rho}\right)^{n-2} \frac{r+\rho}{r-\rho} u(y), \qquad (1)$$

或者

$$\max_{x \in E_\rho(y)} u(x) \leqslant \left(\frac{r+\rho}{r-\rho}\right)^n \min_{x \in E_\rho(y)} u(x)$$

成立．如果 g 是一个紧统，$\overline{g} \subset G$，那么存在数 $M = M(G, g)$，使得对于任何 $x, y \in \overline{g}$ 有

$$M^{-1} u(y) \leqslant u(x) \leqslant M u(y), \qquad (2)$$

特别地，有

$$\max_{x \in \overline{g}} u(x) \leqslant M \min_{x \in \overline{g}} u(x).$$

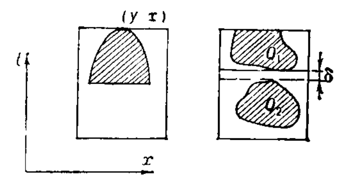
Harnack 不等式有下述一些推论 强**最大值原理** (maximum principle)，关于调和函数序列的 **Harnack 定理** (Harnack theorem)，关于调和函数族的紧性定理，**Liouville 定理** (Liouville theorems)，以及其他一些事实．Harnack 不等式可推广到一大类形如

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[a^{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x^j} \right] + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} + c(x) u = 0$$

的线性椭圆型方程的非负解上 ([3], [4])，这里矩阵 $\| a^{ij} \|$ 是一致正定的·

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leqslant \Lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,$$

$\Lambda \geqslant \lambda > 0$ 是常数，$\xi = (\xi_1, \cdot, \xi_n)$ 是任一 n 维实向量，$x \in G$ 不等式 (2) 中的常数 M 仅依赖于 λ, Λ，算子 L 的低阶项系数的某些范数以及 G 的边界与 g 的边界之间的距离．



对于形如 $u_t + Lu = 0$ 的一致抛物型方程 (算子 L 的系数可以依赖于 t) 的非负解 $u(x, t)$、类似于 Harnack 不等式的不等式也成立．在此情形下，对于顶点在点 (y, τ) 处开口向下的抛物面 (图 a)

$$\{(x, t) \mid |x-y|^2 < \mu^2(\tau - t), \tau - \nu^2 \leqslant t \leqslant \tau\}$$

的内部的点 (x, t)，只能有单边的不等式 ([5])

$$u(x, t) \leqslant M u(y, \tau),$$

这里，M 依赖于 y, τ, λ, Λ, μ, ν，算子 L 的低阶项系数的某些范数，以及抛物面的边界与在其中 $u(x, t) \geqslant 0$ 的区域的边界之间的距离 例如，如果在柱形区域

$$Q = G \times (a, b],$$

中 $u \geqslant 0$，此外，$\overline{g} \subset G$，并且如果 ∂G 与 ∂g 之间的距离不小于 $d(>0)$，而 d 充分小，那么在 $g \times (a-d^2, b]$ 中不等式

$$\ln \frac{u(x, t)}{u(y, \tau)} \leqslant M \left(\frac{|x-y|^2}{\tau - t} + \frac{\tau - t}{d^2} + 1 \right)$$

成立 ([5])．特别地，如果在 Q 中 $u \geqslant 0$ (图 b)，且如果对于位于 Q 中的紧集 Q_1 和 Q_2 有

$$\delta = \min_{\substack{(x,t) \in Q_1 \\ (y, \tau) \in Q_2}} (t - \tau) > 0,$$

那么有

$$\max_{(x, t) \in Q_2} u(x, t) \leqslant M \min_{(x, t) \in Q_1} u(x, t),$$

其中 $M = M(\delta, Q, Q_1, Q_2, L)$．函数

$$u(x, t) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} k_i x^i + t \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \right)$$

——对于任意的 k_1, , k_n，它是热方程 $u_t - \Delta u = 0$ 的解——表明在抛物型情形下双边估计的不可能性．

参考文献

[1] Harnack, A , Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales und der eindeutigen Potentialfunktion in der Ebene, Leipzig, 1887

[2] Courant, R and Hilbert, D, Methods of mathematical physics Partial differential equations, 2, Interscience, 1965(中译本 R 柯朗, D 希尔伯特, 数学物理方法, 卷Ⅱ, 科学出版社, 1977)

[3] Serrin, J, On the Harnack inequality for linear elliptic equations, *J d'Anal Math*, **4** (1955 - 1956), 2, 292 - 308

[4] Moser, J, On Harnack's theorem for elliptic differential equations, *Comm Pure Appl Math*, **14** (1961), 577 - 591

[5] Moser, J, On Harnack's theorem for parabolic differential equations, *Comm Pure Appl Math*, **17** (1964), 101 - 134

[6] Friedman, A, Partial differential equations of parabolic type, Prentice - Hall, 1964 (中译本 A 弗里德曼, 抛物型偏微分方程, 科学出版社, 1984)

[7] Ландис, Е М, Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов, М, 1971

Л И Камынин, Л П Купцов 撰

【补注】 一直到 G 的边界的 Harnack 不等式, 见 [A2]

参考文献

[A1] Boboc, N and Mustață, P, Espaces harmoniques associés aux opérateurs différentiels linéaires du second order de type elliptique, Springer, 1968

[A2] Helms, L L, Introduction to potential theory, Wiley (Interscience), 1969

陆柱家 译

Harnack 积分 [Harnack integral, Гарнака интеграл]

下述函数 f 的类上反常 Riemann 积分的一种推广, f 的无界点集 E_f 的 Jordan 测度为零且 f 在不含 E_f 的点的任何区间上为 Riemann 可积 设 $\Delta_i(i=1, \quad, n)$ 为含 E_f 的有限区间系 Harnack 积分由方程

$$(H)\int_a^b f(x)\,dx=\lim(R)\int_{(a,b)\setminus\bigcup_i\Delta_i} f(x)\,dx$$

定义, 如果式中极限当 $\operatorname{mes}(\bigcup_i\Delta_i)\to 0$ 时存在. 此积分由 A. Harnack ([1]) 引进. 后来在原定义中附加了每个区间 Δ_i 与 E_f 相交这一条件 一个结果是, Harnack 积分常常是条件收敛的 它部分地与 **Lebesgue 积分** (Lebesgue integral) 相重合, 但被 **Perron 积分** (Perron integral) 与 **Denjoy 积分** (Denjoy integral) 所包含. 现时认为, Harnack 积分只有方法上与历史上的兴趣.

参考文献

[1] Harnack, A, Anwendung der Fourier'schen Reihe auf die Theorie der Funktionen einer komplexen Veranderlichen, *Math Ann*, **21** (1883), 305-326

[2] Песин, И Н, Развитие понятия интеграла, М, 1966 (英译本 Pesin, I N, Classical and modern integration theories, Acad Press, 1970)

В А Скворцов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hobson, E W, The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, 1, Dover, reprint, 1957

郑维行 译

Harnack 定理 [Harnack theorem; Гарнака теорема]

1) Harnack 第一定理 (Harnack first theorem): 在有界区域 G 里调和, 在 $\bar{G}$ 上连续的函数列若在边界 ∂G 上一致收敛, 则必在 G 里也一致收敛于一个调和函数 这定理可推广到下面这样一个椭圆型方程的解上去

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+a(x)u=0, (*)$$

它对于任意的连续边界函数的 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem) 有唯一解 ([1]) 如果方程 (*) 的解序列在 ∂G 上一致收敛, 则它在 G 里也一致收敛于方程 (*) 的一个解

2) Harnack 第二定理 (Harnack second theorem), 即 Harnack 原理 (Harnack principle) 有界区域 G 里的调和函数的单调序列若在 G 中某一点收敛, 则必在 G 里收敛于一个调和函数, 并且在 G 的任意闭子区域上一致收敛. Harnack 第二定理可以推广到椭圆型方程 (*) 的解的单调序列上去

参考文献

[1] Петровский, И Г, Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд, М, 1961

[2] Friedman, A, Partial differential equations of parabolic type, Prentice - Hall, 1964

Л И Камынин 撰

【补注】 在调和空间 (harmonic space) 的公理理论中, 第一 Harnack 定理被称为 Bauer 收敛性质 (Bauer convergence property), 而第二 Harnack 定理被称为 Brelot 收敛性质 (Brelot convergence property), 见 [A3] 与 [A1] 下列性质与 Brelot 收敛性质等价 (见 [A4]) 1) 区域 U 上的每一个正调和函数 u 或者是严格正的, 或者 $u=0$ 而且, 在某个给定点 $a\in U$ 取值为 1 的, U 里的正调和函数全体是等度连续的 (见**等度连续性** (equicontinuity)) 2) 对于任意区域 U 和 U 的任意紧子集 K, 存在常数 $c>0$, 使得对任意 $x, y\in K$ 及任何 U 里的正调和函数 u, 有 $u(x)\leqslant cu(y)$, 此即 Harnack 不等式 (Harnack inequality)

参考文献

[A1] Bony, J M, Opérateurs elliptiques dégénérés associés aux axiomatiques de la théorie du potentiel, in Potential Theory CIME, Stresa 1969, Cremonese, 1970, 69 - 119

[A2] Brelot, M, Eléments de la théorie classique du potentiel, Sorbonne Univ Centre Doc Univ, 1959

[A3] Constantinescu, C and Cornea, A, Potential theory on harmonic spaces, Springer, 1972

[A4] Loeb, P and Walsh, B, The equivalence of Harnack's principle and Harnack's inequality in the axiomatic system of Brelot, *Ann Inst Fourier*, **15** (1965), 2, 597 – 600

高琪仁、吴炯圻 译

Hartogs 区域 [Hartogs domain, Гартогса область], 半圆形域(semi-circular domain), 具有对称平面$\{z_n=a_n\}$的

n 个复变数空间中的一个区域，对它的每个点 $z=(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n) \equiv ('z, z_n)$，它亦包含圆周

$$\{('z, a_n+e^{i\theta}(z_n-a_n)) \quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$$

这个区域以 F Hartogs 命名 一个 Hartogs 区域称为完全的(complete)，如果对每个点 $('z, z_n)$，它包含圆盘

$$\{('z, a_n+\lambda(z_n-a_n)) \quad |\lambda|\leqslant 1\}.$$

一个具有对称平面$\{z_n=0\}$的 Hartogs 区域能方便地表示为一个 Hartogs 图形(Hartogs diagram)，亦即此 Hartogs 区域在映射 $('z, z_n)\to('z, |z_n|)$ 下的象

参考文献

[1] Владимиров, В С, Методы теории функций многих комплексных, переменных, М, 1964 (英译本 Vladimirov, V S, Methods of the theory of functions of several complex variables, M I T, 1966)

[2] Bochner, S and Martin, W T, Several complex variables, Princeton Univ Press, 1948

Е М Чирка 撰

【补注】

参考文献

[A1] Behnke, H and Thullen, P, Theorie der Funktionen meherer komplexer Veranderlichen, Springer, 1970

陈志华 译

Hartogs-Laurent 级数 [Hartogs-Laurent series, Гартогса-Лорана ряд]

一个级数

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k('z)(z_n-a_n)^k, \qquad (*)$$

此处$'z=(z_1, \cdots, z_{n-1})$，而 $f_k('z)$ 是与 k 无关的某个区域$'D\subset\mathbf{C}^{n-1}$ 内的全纯函数. 如果对所有 $k<0$ 有 $f_k=0$，则称级数(*)为 Hartogs 级数(Hartogs series)在

$$\{('z, z_n) \quad 'z\in 'D, 0\leqslant r('z)<|z_n-a_n| < R('z)\leqslant+\infty\}$$

型的 **Hartogs 区域**(Hartogs domain) D 内的任一全纯函数能展开成一个 Hartogs-Laurent 级数，它在 D 内绝对一致收敛. 在完全 Hartogs 域中，它将展开成一个 Hartogs 级数. Hartogs-Laurent 级数的收敛域是同一类区域但具有特殊的 $r('z)$ 和 $R('z)$，称为 Hartogs 半径(Hartogs radii) 如果 $n=1$，当所有 f_k 都是常数时，Hartogs-Laurent 级数称为 **Laurent 级数**(Laurent series)

参考文献

[1] Владимиров, В С, Методы теории функций многих комплексных переменных, М, 1964 (英译本 Vladimirov, V S, Methods of the theory of functions of several complex variables, M I T, 1966)

Е М Чирка 撰

【补注】

参考文献

[A1] Behnke, H and Thullen, P, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veranderlichen, Springer, 1970

[A2] Bochner, S and Martin, W T, Several complex variables, Princeton Univ Press, 1948

陈志华 译

Hartogs 定理 [Hartogs theorem, Гартогса теорема]

1) Hartogs 基本定理(Hartogs fundamental theorem) 如果函数 $f(z_1, \ldots, z_n)$ 定义在区域 $D\subset\mathbf{C}^n$ 内，在每点 $\xi\in D$ 处关于每个变量 z_k 是全纯的(对固定的 $z_j=\xi_j, j\neq k, k=1, \ldots, n$)，则它在 D 内关于所有变量全纯. 这个定理有很多推广，其中包括某些变量是实变量的情况，或不是 D 的所有点都需用到的情况，或允许 f 有某些奇异性的情况 例如 a)如果函数 $f(z,w)$ $(z\in\mathbf{C}^k, w\in\mathbf{C}^l)$ 定义在区域 $D=\{|z|<R_1, |w|<R_2\}$ 内，在区域$\{|z|<r_1, |w|<R_2\}$ $(r_1<R_1)$ 内全纯且对每个给定的 $w(|w|<R_2)$ 在球 $|z|<R_1$ 内全纯，则 f 在 D 内全纯，b) 如果 f 是在 $\mathbf{C}^n$ 上定义、在扩充复平面内取值的函数且关于每个变量都是有理的，则 f 是有理函数

2) Hartogs 扩张定理(Hartogs extension theorem) 设区域 $D\subset\mathbf{C}^n$ 形式为 $D='D\times D'$，此处 $'D\subset\mathbf{C}^k$, $D'\subset\mathbf{C}^{n-k}$，且设 D' 是有界的，则任一在集合 $('\bar{D}\times\partial D')\cup(\{'a\}\times\bar{D}')$ $('a\in 'D)$ 的一个邻域内全纯的函数 f，能被全纯扩张到 D 上

3) Hartogs 定理也作为可去紧奇异性定理(若 $n>1$)，也称为 Osgood-Brown 定理(Osgood-Brown theorem)([3])

4) 称为 Hartogs 定理的还有当 $n>1$ 时关于奇异点连续分布的定理，奇异点集的解析性定理和逐点有界的次调和函数序列的一致有界性定理

定理 1), 1a), 2)和 4)是由 F Hartogs 最先证明的.

参考文献

[1] Hartogs, F, Zur theorie der analytischen Funktionen meherer unabhangiger Veranderlichen, insbesondere über

die Darstellung derseler durch Reihen welche nach Potentzen einer Veranderlichen fortscheiten, *Math Ann*, **62** (1906), 1－88
[2] Bochner, S and Martin, W T, Several complex variables, Princeton Univ Press, 1948
[3] Шабат, Б В, Введение в комплексный анализ, M, 1969 E M Чирка 撰

【补注】 Hartogs 定理 3)(或 Osgood-Brown 定理)也可描述如下(见[A1]定理 2 3 2) 设 $\Omega \subset \mathbf{C}^n (n>1)$ 是一个开集，且设 K 是 Ω 的紧子集，且 $\Omega \backslash K$ 是连通的，则每个在 $\Omega \backslash K$ 上的全纯函数都能全纯扩张到 Ω 上

在 4)中提到的关于逐点有界的次调和函数序列的结果也称为 Hartogs 引理 (Hartogs lemma)

参考文献

[A1] Homander, L, An introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, 1973
[A2] Krantz, S G, Function theory of several complex variables Wiley (interscience), 1982 陈志华 译

Hasse 不变量 [Hasse invariant, Хассе инвариант]

1) 局部域 K (或域 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$) 上中心单代数 (central simple algebra) A 的 Hasse 不变量 $h(A)$ 是在 K 的 **Brauer 群** (Brauer group) 到所有复单位根的群 (或 $\{\pm 1\}$, 或 $\{1\}$) 上的典范同构之下 A 所在类的象．若循环代数 A 以 a,b 为生成元，具有定义关系 $a^n=x$, $b^n=y$, $ba=\varepsilon ab$, 其中 $x, y\in K^*$, $\varepsilon\in K$ 是 n 次本原单位根，则 Hasse 不变量 $h(A)$ 与**范-剩余符号** (norm-residue symbol) (Hilbert 符号) $(x,y)_n$ 一致．特别地，四元数代数的 Hasse 不变量为 -1

对整体域 K 上的**中心代数** (central algebra) A 及域 K 的任一**赋值** (valuation) v, 局部 Hasse 不变量 (local Hasse invariant) $h_v(A)$ 定义为 K_v 上代数 $A\otimes K_v$ 的 Hasse 不变量，K_v 是 K 在由 v 所确定的拓扑之下的完全化 局部 Hasse 不变量唯一决定 A 所在的类 它们被下列条件所联系 1) 仅有有限个赋值 v, 使得 $h_v(A)\neq 1$, 2) $\prod_v h_v(A)=1$ (互反律 (reciprocity law)) 除了这些条件，它们可取任意值

Hasse 不变量是由 H Hasse ([1],[2]) 首先引入的

参考文献

[1] Hasse, H, Ueber p-adische Schiefkorper und ihre Bedeutung fur die Arithmetik hyperkomplexen Zahlsysteme, *Math Ann*, **104** (1931), 495－534
[2] Hasse, H, Die Struktur der R Brauerschen Algebrenklassengruppe uber einem algebraischen Zahlkorper Inbesondere Begrundung der Theorie des Normenrestsymbols und Herleitung des Reziprozitatsgesetzes mit nichtkommutativen Hilfsmitteln, *Math Ann*, **107** (1933), 731－760
[3] Cassels, J W S and Frohlich, A (eds), Algebraic number theory, Acad Press, 1986
[4] Weil, A, Basic number theory, Springer, 1967

2) 特征 $\neq 2$ 的局部域 K (或域 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$) 上的非退化**二次型** (quadratic form) $f\sim a_1x_1^2+ \quad +a_nx_n^2$ 的 Hasse 不变量 (Hasse invariant), Hasse-Минковский 不变量 (Hasse-Minkowski invariant), Hasse 符号 (Hasse symbol) $\varepsilon(f)$ 是积

$$\prod_{i<j}(a_i, a_j)=\pm 1$$

其中 $(\,,\,)$ 是二次 Hilber 符号 (quadratic Hilbert symbol), 即若二次型 ax^2+by^2 在域 K 中能表 1, 则 $(a,b)=1$, 否则 $(a,b)=-1$ Hasse 不变量仅依赖于型 f 的等价类，与这个类中对角型的选取无关．有时 Hasse 不变量定义为 $\prod_{i\leqslant j}(a_i,a_j)$, 与前面的定义差一个因子 $(d(f), d(f))$, 这里 $d(f)$ 是型 f 的**判别式** (discriminant)

在 K 为局部域的情况下，变量个数 n, 判别式和 Hasse 不变量决定了型 f 的类 当 $n\geqslant 3$ 时，不变量 $d(f)$ 和 $\varepsilon(f)$ 可以互相独立地取任意值，当 $n=2$ 时，不存在 $d(f)=-1$, $\varepsilon(f)=-1$ 的情况，当 $n=1$ 时，总有 $\varepsilon(f)=1$

当 $K=\mathbf{R}$ 时，Hasse 不变量可用**符号差** (signature) 表示，即

$$\varepsilon(f)=(-1)^{s(s-1)/2},$$

这里 s 是型 f 的负惯性指数 当 $K=\mathbf{C}$ 时，有 $\varepsilon(f)=1$

对于特征 $\neq 2$ 的整体域 K 上的非退化二次型 f 及 K 的任一赋值 v, 局部 Hasse 不变量 (local Hasse invariant) $\varepsilon_v(f)$ 定义为把二次型 f 作为 K 在 v 所确定的拓扑之下的完全化 K_v 上的二次型时的 Hasse 不变量 变量个数、判别式、局部 Hasse 不变量及在 K 的实完全化上的符号差决定 f 的类

在特征 $\neq 2$ 的整体域 K 上，存在一个具有给定判别式 $d\neq 0$, 给定 Hasse 不变量 ε_v, 对实赋值 v 具有给定的负惯性指数 s_v 的 n 个变量的非退化二次型的必要充分条件为

a) 仅对有限多个赋值 v 有 $\varepsilon_v\neq 1$,

b) $\prod_v \varepsilon_v=1$ (**二次互反律** (quadratic reciprocity law) 的推论),

c) 若 $n=1$ 或 $n=2$ 且 $d\in(-1)\ (K_v^*)^2$, 则 $\varepsilon_v=1$,

d) 对任一实赋值 v 有 $\varepsilon_v=(-1)^{s_v(s_v-1)/2}$,

e) 对任一复赋值 v 有 $\varepsilon_v=1$,

f) 对任一实赋值 v 有 $\operatorname{sign} d_v=(-1)^{s_v}$ (这里 d_v 是 d 在同构 $K_v\to\mathbf{R}$ 下的象)

Hasse 不变量是由 H Hasse ([1]) 引入的

参考文献

[1A] Hasse, H, Ueber die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Korper der rationalen Zahlen, *J Reine Angew Math*, **152** (1923), 129－148
[1B] Hasse, H, Ueber die Aequivalenz quadratischer Formen im Korper der rationalen Zahlen, *J Reine Angew Math*,

152 (1923), 205－224
[1C] Hasse, H, Symmetrische Matrizen im Korper der rationalen Zahlen, *J Reine Angew, Math*, **153** (1924), 12－43
[1D] Hasse, H, Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkorper, *J Reine Angew Math*, **153** (1924), 113－130
[1E] Hasse, H, Aequivalenz quadratischer Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkorper, *J Reine Angew Math*, **153** (1924), 158－162
[2] O'Meara, O T, Introduction to quadratic forms, Springer, 1963
[3] Lam, T Y, The algebraic theory of quadratic forms, Benjamin, 1973
[4] Cassels, J W S, Rational quadratic forms, Acad Press, 1978

3) 特征 $p>0$ 的域 K 上的椭圆曲线（elliptic curve）X 的 Hasse 不变量为 0 或 1，取决于 X 的 **Frobenius 自同态**（Frobenius endomorphism）诱导的上同调群 $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ 的自同态是零或双射　Hasse 不变量为零的曲线称为超奇异的（supersingular）

参考文献

[1] Hartshorne, R, Algebraic geometry, Springer, 1977
[2] Манин, Ю И, 《Изв АН СССР Сер матем》, **25** (1961), 1, 153－172

Э. Б Винберг 撰

【补注】

参考文献

[A1] Silverman, J H, The arithmetic of elliptic curves, Springer, 1986

裴定一 译　赵春来 校

Hasse 原理 [Hasse principle, Хассе принцип]

Diophantus 几何的主要原理之一，它把在整体域上一个代数簇的有理点存在性问题归结到局部域上类似的问题．

设 M 是整体域 K 的一类代数簇，如果 M 中任意 X 使得对 K 上所有的非平凡绝对赋值 v，X 的 K_v 有理点集 $X(K_v)$ 是非空的，就可推出 K 有理点集 $X(K)$ 也是非空的（这里 K_v 是 K 对于 v 的完备化），则称 Hasse 原理对 M 成立　特别地，K 是有理数域 $\mathbf{Q}$，那么，如果实数点集 $X(\mathbf{R})$，和对所有素数 p 的 p 进点集 $X(\mathbf{Q}_p)$ 都是非空的，则可推出有理点集 $X(\mathbf{Q})$ 也是非空的　Hasse 原理对二次曲面是成立的（[2]），同样，它对亏格为零的代数曲线也是成立的（见 [3]），在数域上二次曲面的 Hasse 原理是由 H Hasse 在 [1] 中提出并给以证明的．对三次曲面，一般说来，Hasse 原理是不正确的（见 [3], [4]），一个反例（在 $\mathbf{Q}$ 上）是射影曲线 $3x^3+4y^3+5z^3=0$ 或者射影曲面 $5x^3+12y^3+9z^3+10t^3=0$．

设 G 是 K 上一个代数群，并设 $M(G)$ 是由 G 上所有主齐次空间组成的一类代数簇（见 **Galois 上同调**（Galois cohomology），**Weil Châtelet 群**（Weil-Châtelet group）和 [2], [3], [5]）　如果 Hasse 原理对 $M(G)$ 成立，则称它对 G 成立　对数域上单连通和伴随半单代数群 Hasse 原理成立（[5], [6]）　如果 G 是 Abel 簇，Hasse 原理对 G 成立的充分必要条件是 G 的 **Шафаревич-Tate 群**（见 **Galois 上同调**（Golois cohomology））等于零（见 [7], [8] 中的例子）．

参考文献

[1] Hasse, H, Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkorpen, *J Reine Angew Math*, **153** (1924), 113－130
[2] Cassels, J W S and Fröhlich, A (eds), Algebraic number theory, Acad Press, 1967
[3] Cassels, J W S, Diophantine equations with special reference to elliptic curves, *J London Math Soc*, **41** (1966), 193－291．
[4] Манин, Ю И, Кубические формы, М, 1972 (英译本 Manin, Yu N, Cubic forms, Algebra, geometry, arithmetic, North-Holland, 1974)
[5] Serre, J P, Cohomologie Galoisienne, Springer, 1964
[6] Chernusov, V, The Hasse principle for groups of type E_8, Minsk, 1988 (译自俄文)
[7] Rubin, K, Tate-Shafarevich group and L-functions of elliptic curves with complex multiplication, *Invent Math*, **89** (1987), 527－560
[8] Kolyvagin, V, The Mordell-Weil groups and the Shafarevich-Tate gronps of Weil's elliptic curves, *Izv, Akad Nauk SSSR Ser Mat* **52** (1988), 6

Ю Г Зархин 撰　徐广善 译　潘承彪 校

Hausdorff 公理 [Hausdorff axiom, Хаусдорфа аксиома]

分离公理（separation axiom）之一．这是 F Hausdorff 于 1914 年定义拓扑空间概念时引进的（见 [1]）　如果一个拓扑空间中任何两个（不同的）点都有互不相交的邻域，就说该空间中 Hausdorff 公理成立．满足 Hausdorff 公理的空间称为 Hausdorff 空间（Hausdorff space）或 T_2 空间（T_2-space）

参考文献

[1] Hausdorff, F, Set theory, Chelsea, reprint, 1978 (译自德文)(中译本 F 豪斯道夫，集论，科学出版社，1960)

И Г Кошевникова 撰

【补注】

参考文献

[A1] Arkhangel'skiĭ, A V and Ponomarev, V I, Fundamentals of general topology problems and exercises, Reidel, 1984 (译自俄文)

胡师度、白苏华 译

Hausdorff 维数 [Hausdorff dimension, Хаусдорфа размерность]

度量空间的数值不变量，是 F. Hausdorff 在 [1]

中引进的．设 X 是一个度量空间 对于实数 $p>0$ 和 $\varepsilon>0$，设 $m_p^\varepsilon(X)=\inf\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam}A_i)^p$，其中下确界取自 X 的所有可数覆盖 $\{A_i\}$，使得直径 $\operatorname{diam}A_i<\varepsilon$．于是 X 的 Hausdorff 维数定义为 $\sup\{p\ \ m_p(X)>0\}$，其中 $m_p(X)=\sup_{\varepsilon>0}m_p^\varepsilon(X)$ 这样定义的数依赖于 X 上的度量（亦见**度量维数**（metric dimension）)，一般说来，它并非整数（例如 **Cantor 集**（Cantor set）的 Hausdorff 维数是 $\log_3 2$） 例如，关于已知拓扑空间 X 上所有度量的 Hausdorff 维数的下确界则是一个拓扑不变量，当 X 是紧空间时，这个不变量与 X 的 **Lebesgue 维数**（Lebesgue dimension）相同．

参考文献

[1] Hausdorff, F , Dimension and ausseres Mass, *Math Ann* , **79** (1918), 159 − 179

[2] Hurewicz, W and Wallman, G, Dimension theory, Princeton Univ Press, 1948

И Г Кошевникова 撰

【补注】 非降数集 $\{m_p^\varepsilon(X)\}_\varepsilon$ 的极限 $m_p(X)=\sup_{\varepsilon>0}m_p^\varepsilon(X)$ 称为 X 按维数 p 的 Hausdorff 测度（Hausdorff measure） 于是扩充后的实直线 $[0,\infty]$ 上存在唯一一个 p_0，使得 $p<p_0$ 时 $m_p(X)=\infty$，而 $p>p_0$ 时 $m_p(X)=0$ 这个实数就是 X 的 Hausdorff 维数，亦称 Hausdorff - Besicovitch 维数（Hausdorff-Besicovitch dimension）

更多的材料及参考文献亦见 **Hausdorff 测度**（Hausdorff measure）的补注 Hausdorff 维数是**分形集**（fractals）理论的基本概念，亦见 [A1]

参考文献

[A1] Falconer, K J , The geometry of fractal set, Cambridge Univ Press, 1985

胡师度、白苏华 译

Hausdorff 测度 [Hausdorff measure, Хаусдорфа мера]

定义在度量空间 X 的 Borel σ 代数 $\mathfrak{B}_X$ 上的一类测度的总名称，其构造如下 设 $\mathfrak{A}$ 为 X 的某一开子集类，$l=\{l(A)\ A\in\mathfrak{A}\}$ 为定义在 $\mathfrak{A}$ 上非负函数，并设

$$\lambda(B,\varepsilon)=\inf\{\sum_{i=1}^{n}l(A_i)\ (A_1,\ \ ,A_n),B\subset\bigcup_{i=1}^{n}A_i\in\mathfrak{A},$$

$$\operatorname{diam}A_i\leqslant\varepsilon,\ n=1,2,\ \ \},$$

其中下确界取遍 Borel 集 B 的一切有限或可数覆盖 $\{A_i\}$，$A_i\in\mathfrak{A}$，$\forall i, B\subset X$ 且每个 A_i 的直径不超过 ε．用类 $\mathfrak{A}$ 与函数 l 确定的 Hausdorff 测度（Hausdorff measure）λ 是下面的极限

$$\lambda(B)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda(B,\varepsilon)$$

Hausdorff 测度的例．1) 设 $\mathfrak{A}$ 为 X 中一切球族，并令 $l(A)=(\operatorname{diam}A)^\alpha,\alpha>0$ 相应的测度 λ 称为 Hausdorff α 测度（Hausdorff α-measure）（对 $\alpha=1$ 称线性 Hausdorff 测度（linear Hausdorff measure），对 $\alpha=2$ 称平面 Hausdorff 测度（plane Hausdorff measure）．2) 令 $X=\mathbf{R}^{n+1}$ 并令 $\mathfrak{A}$ 为以 $\mathbf{R}^n$ 中球为底而轴平行于坐标轴 Ox_{n+1} 的圆柱体的集合，令 $l(A)$ 为圆柱体 $A\in\mathfrak{A}$ 的 x_{n+1} 轴向截口的 n 维体积，相应的 Hausdorff 测度称为柱测度（cylindrical measure）

Hausdorff 测度为 F Hausdorff（[1]）所引进

参考文献

[1] Hausdorff, F , Dimension and ausseres Mass, *Math Ann* , **79** (1918), 157 − 179

[2] Dunford, N and Schwartz, J T , Linear operators General theory, 1, Interscience, 1958

Р Л Минлос 撰

【补注】 C Carathéodory 于 1914 年引进了在度量空间上构造测度的方法 $\mathfrak{A}$ 中元素可以是随意的且常取作闭的 Hausdorff 测度在 Borel σ 域上是 σ 可加的，但一般不是 σ 有限的，对 X, $\mathfrak{A}$ 与 l 必须附加某些限制以求获得下逼近的好性质．这种限制有，例如，X 是某个紧度量空间的一个 Borel 子集，$\mathfrak{A}$ 是 X 的闭子集类并且 l 取形如 $l(A)=h(\operatorname{diam}A)$ 的集函数，其中 h 为 R_+ 到 R_+ 的连续非减函数．如此得到的 Hausdorff 测度是最常用的，且是 A S Besicovitch 与他的学派（见 [A8]）的主要研究对象，它们被称为（Hausdorff）h 测度（若 $h(t)=t^\alpha,\alpha\in\mathbf{R}_+$，则称为 α 测度或 α 维测度，亦见 **Hausdorff 维数**（Hausdorff dimension）） 当 X 为 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 时，如果 $\alpha=n$，则 α 维测度等于 **Lebesgue 测度**（Lebesgue measure）（精确到一个常因子），并且如果 $\alpha=1,2,\ \ $，则限制于光滑曲线、曲面等时，它等于长度、面积等 0 测度为计数测度（counting measure），它也属于位势理论与描述集合论的研究范围

尽管 Hausdorff 测度不能认为是最基本的概念，但它出现在硬分析与几何学的很多内容中．通过例外集的研究，例如，它被应用于**调和分析**（harmonic analysis）（见 [A5]），**位势论**（potential theory）（见 [A1]），连分数的度量理论（见 [A8]）以及微分几何学（见 **Sard 定理**（Sard theorem））之中 有许多理由表明，它与**容量**（capacity）概念以及更一般地，与**描述集合论**（descriptive set theory）密切相关（见 [A1], [A2], [A8]），R O Davies 是在 G Choquet 之前首先证明了可赋容量性定理）．在随机过程理论中精确研究 **Wiener 过程**（Wiener process）等的路径时，它起着重要的作用（见 [A6] 与那里所引文献） 最后，对于 $\mathbf{R}^n$，当 α 为自然数时，α 维测度是几何测度论中的一个基本概念（见**面积**（area），**极小曲面**（minimal surface）与 [A4]，其中还用了非 h 测度的 Hausdorff 测度（如 **Favard 测度**（Favard measure）等），对于非整数 α，它在**分形集**（fractals）理论（见 [A3], [B1]）中是一个基本概念．

关于 Hausdorff 测度与 **Hausdorff 维数**（Hausdorff dimension）在多维复分析中的作用，例如，可参看 [A9]．

参考文献

[A1] Carleson, L, Selected problems on exceptional sets, v Nostrand, 1967

[A2] Dellacherie, C, Ensembles analytiques, capacites, mesures de Hausdorff, Lecture notes in math, 295, Springer, 1972

[A3] Falconer, K J, The geometry of fractal sets, Cambridge Univ Press, 1985

[A4] Federer, H, Geometric measure theory. Springer, 1969

[A5] Kahane, J-P and Salem, R, Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Hermann, 1963

[A6] Gall, J-F le, Temps locaux d'intersection et points multiples des processus de Levy, in Sém. de Probab XXI, Lecture notes in math, Vol 1247, Springer, 1987, 341-374

[A7] Munroe, M E, Introduction to measure and integration. Addison-Wesley, 1953

[A8] Rogers, C A, Hausdorff measures, Cambridge Univ Press, 1970

[A9] Chirka. E M, Complex analytic sets, Kluwer, 1989 (译自俄文)

【译注】

参考文献

[B1] Falconer, K J, Fractal geometry, Mathematical foundations and applications, John Wiley, Chichester, 1990 (中译本 K 法尔科内, 分形几何——数学基础及其应用, 东北工学院出版社, 1991)

郑维行 译

Hausdorff 度量 [Hausdorff metric, Хаусдорфова метрика], Hausdorff 距离 (Hausdorff distance)

紧集 K 的子集空间中的度量, 定义如下. 设 X, $Y \subset K$, 而 D_{xy} 是所有的数 $\rho(x, Y)$ 和 $\rho(y, X)$ 的集合, 其中 $x \in X$, $y \in Y$, ρ 是 K 中的度量 于是, Hausdorff 度量 (Hausdorff metric) dist (X, Y) 就是 D_{xy} 中诸数的上确界 这是 F Hausdorff 于 1914 年引进的 (见 [1]) 他最重要的结果之一如下 紧集的闭子集空间也是紧的 (П. С Урысон 于 1921 年 - 1922 年独立得到这个定理, 见 [2])

参考文献

[1] Hausdorff, F, Set theory, Chelsea, 1978 (译自德文) (中译本 F 豪斯道夫, 集论, 科学出版社, 1960)

[2] Урысон, П С, Труды по топологии, т 2, М - Л, 1951

М И Войцеховский 撰

【补注】 一般说来, Hausdorff 度量是定义在度量空间 X 的有界闭集构成的空间上的. 于是, 在 X 的紧子集构成的空间 $K(X)$ 上, Hausdorff 度量拓扑与**指数拓扑** (exponential topology) (亦见**超空间** (hyperspace)) 一致

特别参见**超空间** (hyperspace) 中的 [A3]

胡师度、白苏华 译

Hausdorff 运算 [Hausdorff operation, Хаусдорфа операция]

同 $\delta-\sigma$ **运算** ($\delta-\sigma$-operation)

Hausdorff 空间 [Hausdorff space, Хаусдорфово пространство], T_2 空间 (T_2-space)

一个拓扑空间, 其中任何两个 (不同的) 点都有互不相交的邻域 (见 **Hausdorff 公理** (Hausdorff axiom)) Hausdorff 空间不必是正则空间, 更不必是完全正则空间, 即使空间仅由可数多个点组成, 或空间有可数基. 这种空间是 F Hausdorff 于 1914 年首先考虑的, 见 [1]

参考文献

[1] Hausdorff, F, Set theory, Chelsea, reprint, 1978 (译自德文) (中译本 F 豪斯道夫, 集论, 科学出版社, 1960)

[2] Архангельский, А В, Пономарев, В И, Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М, 1974

А В Архангельский 撰 胡师度、白苏华 译

Hausdorff 求和法 [Hausdorff summation method, Хаусдорфа метод суммирования]

数项级数或函数项级数的一种求和方法, 是 F Hausdorff ([1]) 引入的, 它定义如下. 对序列 $s = \{s_n\}$ 相继进行三个线性矩阵变换

$$t = \delta s, \quad \tau = \mu t, \quad \sigma = \delta \tau,$$

其中 δ 是通过三角矩阵 $\{\delta_{nk}\}$ 的变换.

$$\delta_{nk} = \begin{cases} (-1)^k \binom{n}{k}, & k \leq n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

μ 是通过对角矩阵 $\|\mu_{nk}\|$ 的对角变换

$$\mu_{nk} = \begin{cases} \mu_n, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases}$$

其中 μ_n 是一些数值. 变换

$$\sigma = \lambda s,$$

称为一般 Hausdorff 变换 (general Hausdorff transformation), 其中 $\lambda = \delta\mu\delta$, 称为 Hausdorff 矩阵 (Hausdorff matrix), $\{\mu_n\}$ 是任意数值序列. 采用矩阵的写法, 一般 Hausdorff 变换具有下列形式

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{nk} s_k,$$

其中

$$\lambda_{nk}=\begin{cases}\binom{n}{k}\Delta^{n-k}\mu_k, & k\leqslant n,\\ 0, & k>n,\end{cases}$$

$$\Delta\mu_k=\mu_k-\mu_{k+1},\ \Delta^n\mu_k=\Delta^{n-1}\mu_k-\Delta^{n-1}\mu_{k+1}$$

设级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$$

的部分和为 s_n，这个级数按 Hausdorff 法是可和的，其和为 S，如果

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=S$$

Hausdorff 法的范围和正则性取决于序列 $\{\mu_n\}$ 如果 $\{\mu_n\}$ 是实序列，那么为使 Hausdorff 法是正则的，其必要和充分条件为· $\{\mu_n\}$ 是两个绝对单调序列之差，并且

$$\lim_{m\to\infty}\Delta^m\mu_n=0,\ \mu_0=1,$$

或者换句话说，μ_n 是正则矩.

Hausdorff 求和法包括一些其他著名的求和法作为其特殊情况．例如，当 $\mu_n=1/(q+1)^n$ 时，Hausdorff 法成为 Euler 法 (E,q)，当 $\mu_n=1/(n+1)^k$ 时，则成为 Holder 法 (H,k)，而当

$$\mu_n=\frac{1}{\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}}$$

时，则成为 Cesàro 法 (C,k)

参考文献

[1] Hausdorff, F , Summationsmethoden und Momentfolgen I, II, *Math Z*, **9**(1921), 74 − 109, 280 − 299

[2] Hardy, G H , Divergent series, Clarendon, 1949

И И Волков 撰 张鸿林 译

Hausdorff - Young 不等式 [Hausdorff - Young inequalities, Хаусдорфа-Юнга неравенства]

空间 L_p 中的函数的 Fourier 系数的估计，是由 W H Young([1]) 和 F Hausdorff ([2]) 建立的．设 $\varphi_n(t)$ 是 $[a,b]$ 上的函数的**规范正交系** (orthonormal system)，对于一切 $t\in[a,b]$ 和一切 $n=1,2,\cdots$，有 $|\varphi_n(t)|\leqslant M$，并且设 $1<p\leqslant 2$，$1/p+1/p'=1$．如果 $f\in L_p$，则

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}|c_n(f)|^{p'}\right]^{1/p'}\leqslant M^{(2-p)/p}\left[\int_a^b|f(t)|^p dt\right]^{1/p},\quad(1)$$

其中 $c_n(f)$ 是函数 f 的 Fourier 系数 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p$ 收敛，则存在函数 g，使得

$$\left[\int_a^b|g(t)|^{p'}dt\right]^{1/p'}\leqslant M^{(2-p)/p}\left[\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right]^{1/p}\quad(2)$$

可以取 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 作为 g，这个级数在 $L_{p'}$ 中收敛.

Hausdorff - Young 不等式 (1) 和 (2) 是等价的．对于 $p>2$，它们不成立．此外，如果 $b_n\geqslant 0$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2<\infty$，则存在连续函数 f，使得它在三角函数系中的 Fourier 系数 $c_n(f)$ 满足条件 $|c_n(f)|>b_n$ 对于无界正交函数系来说，Hausdorff - Young 不等式的定量表述 (如果 $f\in L_p$，$1<p<2$，则 $\{c_n(f)\}\in L_{p'}$) 一般不成立 对于一大类函数空间，与 Hausdorff - Young 不等式类似的一些不等式成立.

参考文献

[1] Young, W H , On the determination of the summability of a function by means of its Fourier constants, *Proc London Math Soc* (2), **12** (1913), 71 − 88

[2] Hausdorff, F , Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes über Fourierreihen, *Math Z*, **16** (1923), 163 − 169

[3] Бари, Н К , Тригонометрические ряды, М , 1961 (英译本 Bary, N K [N K Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964)

[4] Kaczmarz, S and Steinhaus, H , Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea, reprint, 1951

[5] Zygmund, A , Trigonometric series, 2, Cambridge Univ Press, 1988

[6] Leeuw, K de, Kahane, J P and Katznelson, Y , Sur les coefficients de Fourier des functions continues, *C R Acad Sci Paris*, **285** (1977), 1001 − 1003

[7] Крейн, С Г , Петунин, Ю И , Семенов, Е М , Интерполяция линейных операторов, М , 1978 (英译本 Krein, S G , Petunin, Yu I and Sevenov, E M , Interpolation of linear operators, Amer Math Soc , 1982)

Е М Семенов 撰

【补注】 如果取 $\sum_1^{\infty}a_n\varphi_n$ 作为 g，则对于一切 $n\geqslant 1$，得到 $a_n=c_n(g)$ 张鸿林 译

堆和半堆 [heaps and semi-heaps, груды и полугруды]

带有一个三元运算并且满足某些恒等式的代数．堆是由恒等式

$$[[x_1x_2x_3]x_4x_5]=[x_1x_2[x_3x_4x_5]],$$

$$[x_1x_1x_2]=x_2,\ [x_1x_2x_2]=x_1$$

所定义的，而半堆是由恒等式

$$[[x_1x_2x_3]x_4x_5]=[x_1[x_4x_3x_2]x_5]=[x_1x_2[x_3x_4x_5]]$$

所定义的．所有堆都是半堆.

如果在一个集合 A 到一个集合 B 内所有一一映射所组成的集合 $\Phi(A,B)$ 里，定义三元运算为把映射的一个有序三元组 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 对应于 $\varphi_1,\varphi_2^{-1},\varphi_3$ 的复合映射，则 $\Phi(A,B)$ 就是一个堆．任意一个堆都同构于某个由一一映射所构成的堆．如果在任意群 G 内，引入

三元运算 $[g_1g_2g_3]=g_1g_2^{-1}g_3$，就得到一个堆（与所给的群相关联的堆） 堆的概念是研究在一个 Abel 群上的上述三元运算时引入的（[1]） 堆已经按其抽象的形式被研究（[2]，[3]）．特别，R Baer（[2]）证明了，如果在一个堆 S 里，固定任意一个元素 s_0，那么由方程 $s_1s_2=[s_1s_0s_2]$，$s^{-1}=[s_0ss_0]$ 所定义的运算就在 S 上定义了一个群结构，以 s_0 为单位元，与这个群相关联的堆就是原来的那个堆，同时由一个堆通过固定不同的元素所得到的群是同构的 换句话说，一切堆的簇与一切群的簇是等价的

两个集合 A 和 B 之间的一切**二元关系**（binary relation）的集合 $\mathfrak{P}(A,B)$ 关于三元乘法 $[\rho_1\rho_2\rho_3]=\rho_1\rho_2^{-1}\rho_3$ 来说是一个半堆 A 到 B 内一切可逆的部分映射关于这个三元乘法来说也是封闭的，它是一个广义堆（generalized heap）（[4]），即具有以下恒等式的一个半堆

$$[xxx]=x$$

$$[x_1x_1[x_2x_2x_3]]=[x_2x_2[x_1x_1x_3]],$$

$$[[x_1x_2x_2]x_3x_3]=[[x_1x_3x_3]x_2x_2]$$

广义堆在**微分几何学**（differential geometry）基础中研究坐标图册时找到应用（[5]） 堆与带有对合的半群有紧密的关系 如果在一个半群 S 上定义了一个对合 θ，它是一个反自同构，那么三元运算 $[s_1s_2s_3]=s_1\theta(s_2)s_3$ 将 S 转变成为一个半堆 任意一个半堆都与一个带有对合的半群的一个子半堆同构（[4]）

参考文献

[1] Prufer, H , Theorie der Abelschen Gruppen, *Math Z* , **20** (1924), 165-187

[2] Baer, R , Zur Einfuhrung des Scharbegriffs, *J Reine Angew Math* , **160** (1929), 199-207

[3] Certaine, J , The ternary operation $(abc)=ab^{-1}c$ of a group, *Bull Amer Math Soc* , **49** (1943), 869-877

[4] Вагнер, В В , 《Матем сб》, **32** (1953), 3, 545-632

[5] Вагнер, В В , Основания дифференциальной геометрии и современная алгебра, в кн Тр 4 Всесоюзного матем съезда, т 1, Л , 1963, 17-29

[6] Глускин, Л М , Теория полугрупп и ее приложения, т 1, Саратов, 1965, 179-197, 198-228

В Н Салий 撰 郝钢新 译

重球法 [heavy sphere, method of the , тяжелого шарика метод]

求解在 Euclid 空间 E^n 中可微函数极小化问题的一种方法 这个方法基于研究如下微分方程组

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+\frac{f'(x)}{1+|f'(x)|^2}=0,\ t\geqslant 0, \qquad (1)$$

它描述了一个处于指向负 y 轴方向的引力场中的质点在曲面 $y=f(x)$ 上的运动，附加条件为该质点不能离开这表面而且摩擦正比于其速度，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 在点 x 的梯度，且 $a\geqslant 0$ 是摩擦系数，考虑到 $|f'(x)|^2$ 在平稳点的邻域中是个小量，常常用下面方程组取代（1）

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+f'(x)=0,\ t\geqslant 0 \qquad (2)$$

对 $f(x)$ 附加某些假设并给定初始条件为

$$x(0)=x_0,\quad \frac{dx(0)}{dt}=x_1$$

可以证明，当 $t\to\infty$ 时，（1）或（2）的相应解收敛到 $f(x)$ 的某个平衡点 x^* 如果 $f(x)$ 是个凸函数，那么 x^* 是它的一个极小点 从而重球法是**调节法**（adjustment method）的特殊情况 可以用差分方法数值求解（1）和（2），选用不同差分方法，就得到重球法的不同的离散模拟，其中包括函数只强依赖于很少几个变量的情形，共轭梯度法等等（见**强依赖少数变量函数的极小化方法**（minimization methods for functions depending strongly on a few variables），**共轭梯度法**（conjugate gradients method of）） 差分方法步长及数值 a 的选择强烈影响重球法的收敛速度 代替（1）和（2），还可以用其他的一阶或二阶方程组（见[1]）．在带约束条件

$$g_i(x)\leqslant 0,\ i=1,2,\ \ ,m,$$

$$g_i(x)=0,\ i=m+1,\ \ ,s,$$

函数 $f(x)$ 的极小化问题中，重球法可以结合**罚函数法**（penalty functions, method of），**Lagrange 函数**（Lagrange function）等一起使用（见[2]，[3]）．

参考文献

[1] Бахвалов, Н С , Численные методы, 2 изд , М , 1975（英译本 Bakhvalov, N S , Numerical methods analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977）

[2] Васильев, Ф П , Численные методы решения экстремальных задач, М , 1980

[3] Евтушенко, Ю Г , Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации, М , 1982（英译本 Evtushenko, Yu G , Numerical optimization techniques, Optimization Software, 1985）

Ф П Васильев 撰 蔡大用 译

Heegaard 分解 [Heegaard decomposition, Хегора разбиение]

闭**三维流形**（three-dimensional manifold）的一个表现，这个三维流形是作为有公共边界的两个三维子流形的并，它们都是环柄体（即具有几个指标 1 的环柄的三维球） 这是由 P Heegaard（[1]）在 1898 年定义的．虽然存在分解三维流形为单片（连通和，分层）的其他更有效的方法，Heegaard 分解仍是在三维流形

的研究中最普通的有用工具 每个闭三维流形有一个Heegaard 分解．对于分解的环柄体，例如可以取流形的某个**三角剖分**（triangulation）的一维骨架的正规邻域和它的余集的闭包．一个环柄体的亏格（环柄的数目）总是与另一个环柄体的亏格相同，并称为 Heegaard 分解的亏格 同一流形 M^3 的两个 Heegaard 分解是等价的，是指其中之一的分界曲面（环柄体的公共边界）可以通过流形 M^3 的某个同胚带到另一个的分界曲面

参考文献

[1] Heegaard, P , Sur l'analyse situs, *Bull Soc Math France*, **44**(1916), 161 - 242

C B Матвеев 撰 徐森林 译 薛春华 校

Heegaard 图 [Heegaard diagram, Хегора диаграмма]

表示闭的可定向**三维流形**（three-dimensional manifold）的最通常的方法之一 一个亏格 n 的 Heegaard 图由亏格 n 的闭可定向曲面 F 上的两个简单闭曲线系统组成．每一个系统的曲线满足下列条件 1）系统内曲线的数目是 n，2）系统内的曲线是不相交的，3）用这些曲线切割曲面 F 后，必须得到连通的曲面（具有去掉 $2n$ 个开圆盘的球面） Heegaard 图是与 **Heegaard 分解**（Heegaard decomposition）紧密相关的 每个系统的曲线是一个分解的环柄体的子午线（环柄的圆周的割线）完全系统；第二个系统的曲线是另一个环柄体的子午线的完全系统 两个 Heegaard 图称为等价的（equivalent），如果对应于它们的 Heegaard 分解是等价的．例如，众所周知，三维球面的任何两个 Heegaard 图如果有相同的亏格就是等价的 通过用曲面 F 与二维环面的连通和来代替曲面 F，并将这个环面的子午线和经线加到图的曲线上，总能增加 Heegaard 图的亏格．这种运算称为稳定化（stabilization）同一个流形的任何两个 Heegaard 图是稳定等价的，即对它们的每一个运用几次稳定化运算后变成等价的

参考文献见 **Heegaard 分解**（Heegaard decomposition).

C B Матвеев 撰 徐森林 译 薛春华 校

高（Diophantus 几何中的）[height, in Diophantine geometry, высота в Диофантовой геометрии]

Diophantus 方程（Diophantine equations）的解集上的某个数值函数 在 Diophantus 方程的一个整数解 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的最简单情形下，其高（height）是解的函数，它等于 $\max\|x_i\|$ 在 Fermat 的下降法中遇到的就是这种形式的高．当 X 是定义在整体域 K 上的射影代数簇时，高是一族定义在有理点 P 的集合 $X(K)$ 上且依赖于簇 X 到射影空间 P^n 内的态射 $L: X\to P^n$ 的实值函数 $h_L(P)$． 这个族中任一函数也称为一个高 从估计有理点的个数的观点来看，这个族中的函数之间并没有本质上的区别，因为对任两个函数 h_L' 和 h_L''，存在常数 c', $c''>0$，使得 $c'h_L\leqslant h_L''\leqslant c''h_L$ 这样的函数称为等价的，在这里将这一等价关系记作 $\simeq$.

高的基本性质 函数 $h_L(P)$ 关于 P 具有函子性质，即对任意态射 $f: X\to Y$ 及 $L: Y\to P^n$ 有

$$h_{f*L}(P)\simeq h_L(f(P)),\ P\in X(K)$$

如果态射 L, L_1 和 L_2 分别由可逆层 $\mathscr{L}, \mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ 所定义且 $\mathscr{L}=\mathscr{L}_1\otimes\mathscr{L}_2$，则 $h_L\simeq h_{L_1}h_{L_2}$ 具有有界高的点 $P\in X(K)$ 的集合在下列意义下有限 当基域 K 是代数数域时，这个集合是有限集，当 K 是某个以 k 为常数域的代数函数域时，$X(K)$ 中的元素只依赖于 k 上的有限个参数，特别地，当 k 是有限域时 $X(K)$ 也是有限的．设 $|\cdot|_v$ 跑遍 K 的所有范数的集合，则具有 K 坐标的射影空间 P^n 中任一点 $(x_0 \quad x_n)$ 的高可以定义为

$$\prod_v \sup_i |x_i|_v. \tag{*}$$

这是有确切定义的，因为有积公式 $\prod_v|x|_v=1\ (x\in K)$ 成立．设 X 为 K 上的任一射影簇，L 为 X 到射影空间内的一个闭嵌入，那么高 h_L 可以利用这一嵌入将函数 (*) 转换到集合 $X(K)$ 而得到 对应于同一层 $\mathscr{L}$ 的不同的射影嵌入定义的 $X(K)$ 上的函数等价．作线性扩张即产生所需要的函数 h_L 有时函数 h_L 也用其对数来代替——即所谓的对数高（logarithmic height）.

上述论断有时可从精确等式得到（[3],[4],[5]).有一个高的函数的变形，即 Néron-Tate 高，它定义在 Abel 簇上且关于 Abel 簇之间保存零点的态射具有函子性质．对于局部情形见 [6]，那里构造的高的局部分量在算术中起着相交指数的作用

参考文献

[1] Weil, A , Number theory and algebraic geometry, in Proc Internat Congress Mathematicians Cambridge, 1950, Amer Math Soc , 1952, 90－100

[2] Lang, S , Diophantine geometry, Interscience, 1962

[3] Манин, Ю И , Теорема Морделла-Вейля, в ки Мамфорд, Д , Абелевы многообразия（译自英文），М , 1971, 279－295

[4] Манин, Ю И ,《Изв АН СССР Сер матем》, **28** (1964), 1363－1390

[5] Mumford, D A remark on Mordell's conjecture, *Amer J Math* , **87** (1965), 1007－1016

[6] Néron, A , Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abeliennes, *Ann of Math* (2), **82** (1965), 249－331

А Н Паршин 撰

【补注】 高的概念是算术代数几何学的一个主要的工具．它在 Faltings 给出下列猜想的证明时起了重要的作用 关于数域上的 Abel 簇的自同态的 Tate 猜想（Tate

conjecture), Шафаревич猜想 (Shafarevich conjecture), 即在数域 K上具有给定维数 $g\geq 1$, 在 K的有限多个位 S之外具有好的约化的Abel簇的同构类只有有限多个, Mordell猜想 (Mordell conjecture), 即数域 K上的亏格 $g\geq 2$的光滑曲线的有理点的集合 $X(K)$有限 高在 Аракелов 相交理论 (Arakelov intersection theory)中也起着重要作用, 而通过代数曲线的模空间, 这一相交理论在数学物理的串理论中也变得重要起来了.

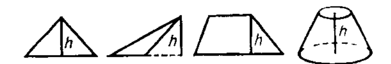
参考文献

[A1] Faltings, G et al , Rational points, Vieweg, 1986

刘先仿 译

高(初等几何中的) [height (in elementary geometry); высота в элементарной геометрии]

从几何图形(三角形、棱锥体、圆锥体)的顶点向其底(底边或底面)或底的延伸上所引的垂直线段, 以及这一线段的长度. 梯形、棱柱体、圆柱体、或者两底平行的球截体、棱锥截体、圆锥截体的高是上底和下底之间的距离. 三角形、梯形和圆锥截体的高 h, 如图所示.



БСЭ 3 张鸿林 译

理想的高 [height of an ideal, высота идеала]

含此理想的素理想高的最小值 环 A 中素理想 $\mathfrak{p}$ 的高 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ (height of a prime ideal)是所有互异素理想链

$$\mathfrak{p}_0\subset\mathfrak{p}_1\subset\quad\subset\mathfrak{p}_h=\mathfrak{p}$$

中的最大数 h(若此数不存在, 则为 ∞) 素理想 $\mathfrak{p}$ 的余高 $\mathrm{coht}(\mathfrak{p})$(co-height of a prime ideal)定义为所有互异素理想链

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_0\subset\mathfrak{p}_1\subset\quad\subset\mathfrak{p}_k\neq A$$

中的最大数 h 换句话说,

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=\dim(A_{\mathfrak{p}}),\ \mathrm{coht}(\mathfrak{p})=\dim(A/\mathfrak{p}),$$

这里 dim 代表所对应的 Krull 环的维数 素理想的高等于该理想定义的簇的余维数, 而余高等于此簇的维数 素理想的高和余高通过不等式

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p})+\mathrm{coht}(\mathfrak{p})\leqslant\dim A$$

相联系. 例如当 A 为局部 **Cohen-Macaulay 环** (Cohen-Macaulay ring) 时上式还成为等式

零高素理想是极小素理想 主理想定理 (principal ideal theorem) 非零主理想的高为1(见 **Krull 环** Krull ring)), 它保证了 Noether 整区中高为1的素理想的存在性 更一般的结果——Krull 定理 (Krull theorem)——道出高与理想的生成元个数的相互关系 在 Noether 环中, r 个元素生成的理想的高不超过 r, 反之, 高 r 的素理想是含某 r 个元素的所有素理想中的最小者. 特别地, Noether 环中任一理想有有限高, 此结论对余高并不成立([2])

参考文献

[1] Krull, W , Primidealketten in allgemeinen Ringbereichen, Berlin-Leipzig, 1928

[2] Nagata, M , Local rings, Interscience, 1962

[3] Zariski, O and Samuel, P , Commutative algebra, 1, Springer, 1975

[4] Serre, J -P , Algèbre locale Multiplicités, Springer, 1965

В И Данилов 撰 朱胜林 译 许永华、牛凤文 校

Heine-Borel 定理 [Heine-Borel theorem, Гейне-Бореля теорема], 开覆盖上的

见 **Borel-Lebesgue 覆盖定理** (Borel-Lebesgue covering theorem)

Heisenberg 绘景 [Heisenberg representation (或 picture), Гейзенберга представление]

量子力学中和量子场论中表示算子 A 和波函数 ψ 对时间 t 的依存关系的主要可能的(与 **Schrodinger 绘景** (Schrodinger representation)和**相互作用绘景** (interaction representation of)一起)等价绘景中的一种. 在 Heisenberg 绘景中, 算子 A_{H} 依赖于 t, 而波函数 ψ_{H} 并不依赖于 t, 它们与 Schrodinger 绘景中相应的不含时算子 A_{S} 和含时波函数 $\psi_{\mathrm{S}}(t)$ 由酉变换

$$A_{\mathrm{H}}(t)=e^{itH/\hbar}A_{\mathrm{S}}e^{-itH/\hbar},\ \psi_{\mathrm{H}}=e^{itH/\hbar}\psi_{\mathrm{S}}(t)\quad(1)$$

相联系, 其中 Hermite 算子 H 是系统的全 **Hamilton 量** (Hamiltonian), 它不依赖于时间. 之所以有可能引进 Heisenberg 绘景, Schrodinger 绘景和相互作用绘景, 以及之所以它们是等价的, 是由于下列事实· 可观察并具有物理意义的不是 A 或 ψ 本身, 而仅是处于态 ψ 时算子 A 的平均值, 它们对(1)类型的酉变换一定是不变的, 平均值不应依赖于绘景的选择. (1)对 t 的求导给出 Heisenberg 绘景中算子 $A_H(t)$ 的一个方程, 它包含关于量子系统的态随时间 t 变化的完全信息·

$$i\hbar\frac{\partial A_H(t)}{\partial t}=A_H(t)H-HA_H(t),$$

其中算子 H 和 $A_H(t)$ 通常并不对易.

W Heisenberg 于1925年在量子力学的矩阵表述中引进, 因以命名.

В Д Кукин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Mehra, J and Rechenberg, H, The historical development of quantum theory, 1 − 4, Springer, 1982

徐锡申 译

螺旋演算 [**helical calculus** 或 screw calculus, **винтовое исчисление**]

向量计算的一个分支，它处理有关螺旋（screws）的运算，这里所谓螺旋是指具有公共起点的两个共线向量 $(\mathbf{r}, \mathbf{r}^0)$ 所构成的有序偶对 向量 $\mathbf{r}$ 称为螺旋向量（screw vector），由此向量所定义的轴称为螺旋轴（screw axis），$\mathbf{r}^0$ 称为螺旋矩（screw moment），而方程 $\mathbf{r}^0 = p\mathbf{r}$ 中的数 p 称为螺旋参数（screw parameter）

螺旋演算处理螺旋间的加法、数乘、标量积和向量积等运算．在此范围内，螺旋演算中的运算被化成对形如

$$\mathbf{r} + \omega\mathbf{r}^0$$

的复向量的运算，这里 $\omega^2 = 0$，复数 $|r|e^{\omega p}$ 称为螺旋的复模（complex modulus），$\alpha + \omega\alpha^0$ 称为两螺旋间的复角（complex angle）（α 是两轴之间的夹角，而 α^0 是两轴间的距离） 如果将向量的模换成螺旋的复模，直线间的通常角换成复角，则螺旋演算的公式恒同于向量演算中的公式

例如，两个螺旋的标量积等于它们的复模和两者之间的复角的余弦（$\cos(\alpha + \omega\alpha^0) = \cos\alpha - \omega\alpha^0\sin\alpha$）的乘积，两个螺旋的螺旋乘积乃是一个螺旋，其轴垂直于原来两螺旋的轴；即其螺旋向量与原来两螺旋向量的向量积同方向，而其复模等于两螺旋复模和两者之间的复角的正弦（$\sin(\alpha + \omega\alpha^0) = \sin\alpha + \omega\alpha^0\cos\alpha$）的乘积．可用类似的方法建立向量分析中的公式与螺旋演算中公式之间的对应，它涉及了复标量函数及以螺旋为变量的螺旋值函数

螺旋演算应用于力学，因为刚体的任意位移或者任意作用在物体上的力系均可用螺旋表出（[4]），也应用于几何学中的直纹曲面理论（[3]，[5]）

螺旋演算是在 19 世纪初期随着 L Poinsot, M Chasles, A. Mobius 和 J Plucker 的研究而诞生的，第一本专著是 R Ball 所写（[1]） 螺旋演算主要是由 А П Котельников 发展起来的（[2]）

参考文献

[1] Ball, R, A treatise on the theory of screws, Dublin, 1876

[2] Котельников, А П, Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике, Казань, 1895

[3] Blaschke, W, Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie Affine Differentialgeometrie, 2, Springer, 1923

[4] Диментберг, Ф М, Винтовое исчисление и его приложения к механике, М, 1965

[5] Зейлигер, Д Н, Комплексная линейчатая геометрия, Л - М, 1934

А Б Иванов 撰 沈纯理 译

螺线 [**helical line**, **винтовая линия**]

处于圆柱或圆锥表面上的空间曲线（相应地称为柱面螺线（cylindrical helical line）和锥面螺线（conical helical line），分别见图 1 和图 2），它与一切母线的交角都相同．

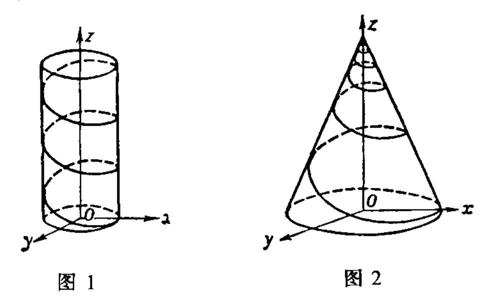


图 1 图 2

圆柱螺线的参数方程是

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = ht,$$

其中 t 与曲线的弧长成正比，a 是圆柱的半径．柱面螺线在平行于圆柱母线的平面上的平行投影是一条正弦曲线．柱面螺线的曲率和挠率都是常数．柱面螺线的主法线与圆柱的轴相交成直角．柱面螺线界于它与同一母线相继的两个交点之间的部分的长度称为螺线的圈长（turn of the helical line），而母线上相应线段的长度称为螺线的螺距（pace of the helical line）

锥面螺线的参数方程是

$$x = ce^{mt}\cos t,\ y = ce^{mt}\sin t,\ z = ce^{mt}\cot\alpha,$$

其中 t 是圆锥基圆上的角参数，α 是圆锥的轴与母线之间的夹角，$m = \sin\alpha/\tan\varphi$，$\varphi$ 是螺线的切线与圆锥的相应母线之间的夹角．锥面螺线在垂直于锥轴的平面上的平行于锥轴的投影是一条对数螺线，其极点是锥顶的投影 锥面螺线的曲率与挠率之比在一切点上保持不变．

螺线分为右旋的（right-hand）和左旋的（left-hand），即当坐标 z 的值增加时，螺线绕轴线沿顺时针方向或反时针方向旋转．广义螺线（generalized helical line）是任意柱面上的一条曲线，它与柱面的一切母线的交角都相同．螺线是**等倾曲线**（curve of constant slope）的特殊情况．

参考文献

[1] Бюшгенс, С С, Дифференциальная геометрия, М - Л, 1940

[2] Blaschke, W, Einführung in die Differentialgeometrie, Springer, 1950

E B Шикин 撰

【补注】 螺线也称为**螺旋线**(helix)

参考文献

[A1] Do Carmo, M, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, 1976

[A2] Berger, M and Gostiaux, B, Differential geometry, Springer, 1988(译自法文)

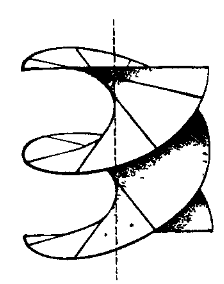
[A3] Blaschke, W and Leichtweiss, K, Einführung in die Differentialgeometrie, Springer, 1973

张鸿林 译

螺旋面 [**helicoid** 或 helicoidal surface, **геликоид**]

当一条直线绕一固定直线以等角速度旋转、与此固定直线的交角α保持不变且沿此固定直线等速移动时所描绘的**直纹曲面**(ruled surface) 如果 $\alpha=\pi/2$,则称为**直螺旋面**(straight(或 right) helicoid)(见图),如果$\alpha\neq\pi/2$,则称为**斜螺旋面**(oblique helicoid) 螺旋面的参数方程是

$$x=\rho\cos t,\ y=\rho\sin t,\ z=\operatorname{cotan}\alpha+kt$$



А Б Иванов 撰

【补注】 每个直螺旋面都是一个**极小曲面**(minimal surface)(有时就把直螺旋面称为极小曲面). 见[A2][A1] 而且,一个极小直纹曲面必定是直螺旋面的一部分.

参考文献

[A1] Do Carmo, M, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice - Hall, 1975

[A2] Spivak, M, A comprehensive introduction to differential geometry, Pubish or Perish, 1979

[A3] O'Neill, B, Elementary differential geometry, Acad Press, 1966

[A4] Berger, M and Gostiaux, B, Differential geometry manifolds, curves and surfaces, Springer, 1988(译自法文).

张鸿林 译

Hellinger 距离 [**Hellinger distance**, **Хеллингера расстояние**]

一种用 **Hellinger 积分**(Hellinger integral)表示的概率测度之间的距离. 假定在可测空间 $(\mathfrak{X},\mathscr{B})$ 上给定一族概率测度 $\{\mathsf{P}_\theta\}$, $\theta\in\Theta$, 它们关于某一在 $\mathscr{B}$上的 σ 有限测度 μ 绝对连续.

两个测度 P_{θ_1} 和 P_{θ_2} $(\theta_1,\theta_2\in\Theta)$ 之间的 Hellinger 距离定义作

$$r(\theta_1,\theta_2)=\{2[1-H(\theta_1,\theta_2)]\}^{1/2}$$

$$=\left\{\int_{\mathfrak{X}}\left[\sqrt{\frac{d\mathsf{P}_{\theta_1}}{d\mu}}-\sqrt{\frac{d\mathsf{P}_{\theta_2}}{d\mu}}\right]^2d\mu\right\}^{1/2},$$

其中

$$H(\theta_1,\theta_2)=\int_{\mathfrak{X}}\sqrt{\frac{d\mathsf{P}_{\theta_1}}{d\mu}}\sqrt{\frac{d\mathsf{P}_{\theta_2}}{d\mu}}\,d\mu$$

是 Hellinger 积分 Hellinger 距离不依赖于测度 μ 的选择,并具有以下性质

1) $0\leqslant r(\theta_1\theta_2)\leqslant\sqrt{2}$,

2) $r(\theta_1,\theta_2)=\sqrt{2}$ 当且仅当 P_{θ_1} 和 P_{θ_2} 相互奇异,

3) $r(\theta_1,\theta_2)=0$, 当且仅当 $\mathsf{P}_{\theta_1}=\mathsf{P}_{\theta_2}$

设

$$\|\mathsf{P}_{\theta_1}-\mathsf{P}_{\theta_2}\|=\sup_{B\in\mathscr{B}}|\mathsf{P}_{\theta_1}(B)-\mathsf{P}_{\theta_2}(B)|$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\mathfrak{X}}\left|\frac{d\mathsf{P}_{\theta_1}}{d\mu}-\frac{d\mathsf{P}_{\theta_2}}{d\mu}\right|d\mu$$

是测度 P_{θ_1} 和 P_{θ_2} 之间的变差距离,则

$$\frac{1}{2}r^2(\theta_1,\theta_2)\leqslant\|\mathsf{P}_{\theta_1}-\mathsf{P}_{\theta_2}\|\leqslant r(\theta_1,\theta_2)$$

参考文献

[1] Kuo, H H Gaussian measures on Banach spaces, Springer, 1975

[2] Cramér, H, Mathematical methods of statistics, Princeton Univ Press, 1946

[3] Ибрагимов, И А, Хасьминеский, Р З, Асимптотическая теорця оценивания, М, 1979(英译本 Ibragimov, I A and Has'minskii, R Z (R Z Khas' minskii), Statistical estimation, asymptotic theory, Springer, 1981)

[4] Золотарев, В М, 《Зап науч семинаров ЛОМИ АН СССР》, **87** (1979), 206 - 212

М С Никулин 撰 刘秀芳 译

Hellinger 积分 [**Hellinger integral**, **Хеллингера интеграл**]

集函数(set function) f 的一种 Riemann 型积分. 设(X,μ)为具有有限、非负、非奇异测度的空间, $f(E)(E\subset X)$ 为全可加函数, 满足性质$f(E)=0$,如果$\mu E=0$, 又设 $\delta=\{E_n\}_1^N$为 X的一个分划, 令

$$S_\delta=\sum_{n=1}^N f^2(E_n)/\mu E_n,$$

那么$f(E)$关于 X的 Hellinger 积分定义为

$$\int_X f^2(dE)/d\mu = \sup_\delta S_\delta,$$

只要上式中上确界为有限 Hellinger 积分也可以看作下列有向分划集上的极限 若 δ_2 为 δ_1 的子分划，规定序关系 $\delta_1 < \delta_2$

若 φ $X \to \mathbf{R}$ 为可积函数使 $f(E)$ 为 **Lebesgue 积分**(Lebesgue integral) $\int_E \varphi d\mu$，则 Hellinger 积分可用 Lebesgue 积分来表示

$$\int_X f^2(dE)/d\mu = \int_X \varphi^2 d\mu$$

E Hellinger 在 [1] 中对 $X=[a,b]$ 用点函数来定义这种积分 .

参考文献

[1] Hellinger, E , Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veranderlichen, *J Reine Angew Math* , **136** (1909), 210－271

[2] Смирнов, В И , Курс высшей математики, т 5, М , 1959 (中译本 В И 斯米尔诺夫，高等数学教程，卷 5，人民教育出版社，1979)

И А Виноградова 撰 郑维行 译

Helly 定理 [Helly theorem , Хелли теорема]

1) 关于具公共点的凸集之交的 Helly 定理 设 K 是 n 维仿射空间 A^n 中一族至少有 $n+1$ 个的凸集，这里的 K 或者有限，或者其中的每个集合都为紧致的，如果族中每 $n+1$ 个集合都有一公共点，那么 K 中所有的集合均有个公共点 .

对于 Helly 定理作过许多研究，有它的应用，各种类似结果的证明，以及与 Helly 定理相似且又对它作出推广的一些命题，例如，**Чебышев 逼近** (Chebyshev approximation) 的一些问题，**照明问题** (illumination problem) 的解，以及**凸体** (convex body) 理论 . Helly 定理经常出现在下列类型的组合命题的证明中 如果在某一族中，每个 k 项的子族具有某一性质，那么整个族就有此性质 例如，若 a 与 b 是集合 $K \subset A^n$ 中的两点，那么该句 "在 K 中 a 可从 b 看到" 的意思是线段 $[a,b]$ 属于 K. 假设紧致集 $K \subset A^n$ 有如下性质 对于 K 中的任何 $n+1$ 个点，都有 K 中的一个点，使得所有这些点均可从此点看到；那么 K 中就存在一个点，使得 K 中的所有点都可从此点看到，即 K 是星形集 (star-shaped set)

大多数 Helly 定理的类似结果与它的一些推广是与 "凸性" 概念的各种提法相联系的 . 例如，设 S^n 是 Euclid 球面，一集合称做是 Robinson 意义下凸的，如果对其中任何一对非对径点，该集合包含由这对点决定的连接它们的大圆劣弧 如果 S^n 中的一族闭集在 Robinson 意义下是凸的，并且族中任何 $2(n+1)$ 个元有非空的交，则该族中的所有元有非空的交

Helly 定理是 E Helly 在 1913 年建立的

参考文献

[1] Danzer, L , Grunbaum, B and Klee, V , Helly's theorem and its relatives, in V Klee (ed) Convexity, Proc Symp Pure Math , Vol 7, Amer Math Soc , 1963, 101－180

П С Солтан 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bryant, V W and Webster, R J , Generalizations of the theorems on Radon, Helly and Caratheodory, *Monatsh Math* , **73** (1969) 309－315

2) 函数论中的 Helly 定理 如果区间 $[a,b]$ 上的有界变差函数序列 $g_n(n=1,2,\quad)$ 在这区间的每点收敛于某个函数 g，并且所有函数 g_n 的变差 $\bigvee_a^b g_n$ 是一致有界的

$$\bigvee_a^b g_n \leqslant c,\ n=1,2,\quad ,$$

那么极限函数 g 在区间 $[a,b]$ 上也是有界变差的，而且

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dg_n(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x)$$

对 $[a,b]$ 上的任何连续函数 f 成立 .

Л Д Кудрявцев 撰

【补注】 Helly 的另一定理称为 Helly 选择定理 (Helly selection theorem) 设 $\{f_n\}_n$ 是 $\mathbf{R} \to [0,1]$ 的单调递增函数序列 那么存在逐点收敛的子序列 $\{f_{n_k}\}_k$ 而且，如果极限函数连续，则这种收敛在 $\mathbf{R}$ 上是一致的

姜国英 译

Helmholtz 方程 [Helmholtz equation ; Гельмгольца уравнение]

偏微分方程

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + cu = 0,$$

其中 c 是一个常数. Helmhotz 方程用于研究平稳振荡过程. 当 $c=0$ 时 Helmholtz 方程变为 **Laplace 方程** (**Laplace equation**). 如果 Helmholtz 方程的右端是一个函数 f，那么这个方程称为非齐次 Helmholtz 方程.

Helmholtz 方程是椭圆型方程，在有界区域中对其提出通常的边值问题 (Dirichlet 问题 , Neumann 问题，以及其他一些问题). 如果对于 c 的某个值，满足齐次边界条件的齐次 Helmholtz 方程有不恒等于零的解，那么这个 c 称为 Laplace 算子 (相应边值问题) 的本征值. 特别地，**Dirichlet 问题** (Dirichlet problem) 的所有本征值都是正的，**Neumann 问题** (Neumann problem) 的所有本征值都是非负的. 显然，当 c 是某个本征值时，Helmholtz 方程的边值问题的解不是唯一的.

然而，如果 c 不是本征值，那么唯一性定理成立.

用椭圆型方程理论中常用的那些方法（化为积分方程，变分方法，有限差分法）来解 Helmholtz 方程的边值问题.

在具有紧边界的无界区域的情形下，对于 Helmholtz 方程可以提出外边值问题，当 $c<0$ 时，此问题有在无穷远处趋于零的唯一解．当 $c>0$ 时，在无穷远处趋于零的解通常不是唯一的　此时，为了得到唯一的解，必须提出一些附加的限制（见**外部和内部边值问题**（exterior and interior boundary value problems），**极限吸收原理**（limit-absorption principle））

对于 Helmholtz 方程在一个区域 G 中正则的解 u，下述中值公式成立

$$\frac{1}{\operatorname{mes}\Omega}\int_{\Omega} u\, d\sigma$$

$$=u(x_0)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{n/2-1}(r\sqrt{c})^{1-n/2}J_{n/2-1}(r\sqrt{c}),$$

其中 Ω 是半径为 r、球心在某点 x_0 处、完全位于 G 内的球，$J_\nu(x)$ 是 ν 阶 **Bessel 函数**（Bessel functions）

Helmholtz 方程最初于 1860 年由 H Helmholtz 研究，他得到了有关这个方程边值问题的解的最早的一些定理

参考文献

[1] Courant, R and Hilbert, D, Methods of mathematical physics, Patial differential equtions, 2, Interscience, 1965（中译本 R 柯朗，D 希尔伯特，数学物理方法，卷 II，科学出版社，1977）

[2] Тихонов, А Н, Самарский, А А, Уравнения математической физики, 3 изд, М, 1966（中译本 А Н 吉洪诺夫，А А 萨马尔斯基，数学物理方程，上、下册，高等教育出版社，1956）

Ш А Алимов, В А Ильин 撰　陆柱家 译

Hensel 引理 [Hensel lemma, Гензеля лемма]

K Hensel（[1]）在创立 p-**adic 数**（p-adic number）理论时得到的一个结论，后来在**交换代数**（commutative algebra）中得到广泛的应用　在具有极大理想 m 的局部环 A 中 Hensel 引理成立，是指任一首一多项式 $P(X)\in A[X]$，若它在模 m 约化下分解为二个互素多项式

$$q_1(X),\ q_2(X)\in(A/\mathrm{m})[X]$$

之积 $\bar{P}(X)=q_1(X)\cdot q_2(X)$，则存在多项式

$$Q_1(X),Q_2(X)\in A[X],$$

使

$$P(X)=Q_1(X)\cdot Q_2(X),\ \bar{Q}_1(X)=q_1(X),\ \bar{Q}_2(X)=q_2(X)$$

（这里“$-$”表示在约化 $A\to A/\mathrm{m}$ 下的象）　特别地，对约化了的多项式 $\bar{P}(X)$ 的任一单根 α，存在 $P(X)=0$ 的一个解 $a\in A$，使 $\bar{a}=\alpha$　例如，对完全局部环，Hensel 引理是成立的　Hensel 引理把完全局部环上的一个代数方程的求解简化为在它的剩余域上对应方程的求解　于是，在 7-adic 数环 $\mathbf{Z}_7$ 上，Hensel 引理确立了方程 $X^2-2=0$ 的可解性，因为在含 7 个元素的域 $\mathbf{F}_7$ 上，该方程有 2 个单根　使 Hensel 引理成立的环称为 **Hensel 环**（Hensel ring）

关于非交换情况的 Hensel 引理，见[3].

参考文献

[1] Hensel, K, Neue Grundlagen der Arithmetik, *J Reine Angew Math*, **127** (1904), 51－84

[2] Bourbaki, N Elements of mathematics Commutative algebra, Addison-Wesley 1972（译自法文）

[3] Zassenhaus, H, Ueber eine Verallgemeinerung des Henselschen Lemmas, *Arch Math (Basel)*, **5** (1954), 317－325

В И Данилов 撰　裴定一 译　赵春来 校

Hensel 环 [Hensel ring; Гензелево колвцо]

在其上可应用 Hensel 引理，或根据另一定义，在其上可应用隐函数定理的局部交换环　前一定义是说，在具有极大理想 m 的局部环 A 上，对任一首一的多项式 $P(X)\in A[X]$ 及方程 $P(X)\equiv 0(\mathrm{mod}\ \mathrm{m})$ 的单解 $a_0\in A$（即 $P(a_0)\in\mathrm{m}$，且 $P'(a_0)\notin\mathrm{m}$），存在 $a\in A$，使 $P(a)=0$，且 $a\equiv a_0(\mathrm{mod}\ \mathrm{m})$

完全局部环，收敛幂级数环（以及更一般的**解析环**（analytic ring）和代数幂级数（algebraic power series）（即 $k[[X_1,\ ,X_n]]$ 中的在 $k[X_1,\ ,X_n]$ 上代数的级数）环都是 Hensel 环的例子．在 Hensel 环上整的局部环是 Hensel 环　特别地，Hensel 环的商环是 Hensel 环．对任一局部环 A，存在一个一般性的构造——一个局部的 Hensel A 代数（Hensel A-algebra）${}^hA$，使得对任一局部 Hensel A 代数 B，都存在唯一的 A 代数同态 ${}^hA\to B$　任一局部环 A 的代数 ${}^hA$ 是严格平坦 A 模，m^hA 是 ${}^hA$ 的极大理想，A 与 ${}^hA$ 的剩余类域典范同构，A 与 ${}^hA$ 的完全化（在局部环的拓扑下）相同．于是 $X_1,\ ,X_n$ 的代数幂级数环是 $k[X_1,\ ,X_n]_{(X_1\ \ X_n)}$ 的 Hensel A 代数　若 A 是 Noether（或分别是可约，正规，正则，优）环，则 ${}^hA$ 也是　反之，若 A 是整环，则 ${}^hA$ 不一定是整环．更确切地说，在 A 的整闭包的极大理想集合与 ${}^hA$ 的极小素理想集合之间存在一一对应．

具有可分闭剩余类域的 Hensel 环称为严格局部的（strictly local）（或严格 Hensel 的（strictly Henselian）），这是由于它的谱在概形的 étale 拓扑中有局部性，类似于 Hensel A 代数 ${}^hA$，有严格 Hensel A 代数函子 ${}^{sh}A$　对于半局部环，甚至在更一般的意义下，对于环-理想对，也可引入 Hensel 环的概念

Hensel环也可以描述为这样的一个环 其上的有限代数都是局部环的直和 Hensel环是在[1]中引进的，[2]中发展了它的一般性理论及Hensel A代数的构造．

在étale态射和étale拓扑理论中，一个Hensel A代数可理解为此环的étale扩张的归纳极限．在交换代数中，Hensel A代数经常代替完全化运算，这在局部性质的研究中起重要作用

参考文献

[1] Azumaya, G , On maximally central algebras, *Nagoya Math J* , **2** (1951), 119－150

[2] Nagata, M , Local rings, Interscience, 1962

[3] Grothendieck, A , Eléments de géometrie algébrique Ⅳ, Publ Math IHES, 1967, 32

B И Данилов 撰

【补注】 环(代数)^{sh}A称为局部环A的Hensel化（Henselization）或Hensel闭包（Hensel closure）.

Hensel性质的理想-环偶对的形式如下．设(A, I)为环A和理想I组成的偶对，若$f \in A[I]$，且$f(0) \in I$，$f'(0)$是A/I的单位，则存在$a \in I$，使$f(a)=0$

关于多项式方程组解的讨论，及Hensel环的隐函数型的描述，可见[A2]，第二章

参考文献

[A1] Raynaud, M , Anneaux locaux Henséliens, Lecture notes in math , 169, Springer, 1970

[A2] Kurke, H , Pfister, G and Roczen, M , Henselsche Ringe, Deutsch, Verlag Wissenschaft , 1975

裴定一 译 赵春来 校

遗传不可分解连续统 [hereditarily indecomposable continuum , наследственно неразложимый континуум], Knaster 连续统 (Knaster continuum)

一个**不可分解连续统** (indecomposable continuum) 使得每个真子连续统也是不可分解的.

A A Мальцев 撰

【补注】 著名的例子是**伪弧** (pseudo-arc), 见 [A1] 和 [A2]

参考文献

[A1] Moise, E E , An indecomposable plane continuum which is homeomorphic to each of its non-degenerate subcontinua, *Trans Amer Math Soc* , **63** (1948), 581 － 594

[A2] Bing, R H , A homogeneous indecomposable plane continuum, *Duke Math J* , **15** (1948), 729 － 742

胡师度、白苏华 译

Herglotz 公式 [Herglotz formula , Герглотца формула]

在两个闭的等距的定向正则曲面之间的一个积分关系式．设在曲面S_1和S_2上导入了局部坐标系u和v，使得坐标相等就是实现了等距映射 设

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

是第一基本形式，在所给的坐标系下，该两个曲面具有相同的系数．令K为Gauss曲率，H_α为平均曲率，且令

$$\sqrt{EG-F^2}\ (\lambda_\alpha du^2 + 2\mu_\alpha dudv + \nu_\alpha dv^2)$$

为曲面S_α的第二基本形式．于是Herglotz公式取下列形式

$$\int_{S_1} \begin{vmatrix} \lambda_2-\lambda_1 & \mu_2-\mu_1 \\ \mu_2-\mu_1 & \nu_2-\nu_1 \end{vmatrix} (\mathbf{n}, \mathbf{x})d\tau =$$

$$= \int_{S_2} H_2 d\tau - \int_{S_1} H_1 d\tau,$$

这里$\mathbf{x}=\mathbf{x}(u, v)$为$S_1$的位置向量，$\mathbf{n}$为$S_1$的单位外法向量，$d\tau$为曲面元素 这是由G. Herglotz证明的([1])

参考文献

[1] Herglotz, G , Ueber die Starrheit von Eiflachen, *Abh Math Sem Univ Hamburg*, **15** (1943), 127 － 129

[2] Ефимов, Н В , 《Успехи матем наук》, **3** (1948), 2(24), 47 － 158

E B Шикин 撰

【补注】 能用这个公式证明曲面的刚性或合同定理．有关的公式及结果可见[A1]

参考文献

[A1] Huck, H , Roitsch, R , Simon, U , Vortisch, W , Wegner, B and Wendland, W , Beweismethoden der Differential geometrie im Grossen, Springer, 1973

[A2] Klingenberg, W , A course in differential geometry, Springer, 1978 (译自德文)

沈纯理 译

Hermite 方程 [Hermite equation , Эрмита уравнение]

二阶线性齐次常微分方程

$$w'' - 2zw' + \lambda w = 0,$$

或者其自伴形式

$$\frac{d}{dz}\left[e^{-z^2}\frac{dw}{dz}\right] + \lambda e^{-z^2} w = 0,$$

其中λ是常数 经过未知函数变换$w = u\exp(z^2/2)$，Hermite方程化为

$$u'' + (\lambda + 1 - z^2)u = 0,$$

而经过变量变换

$$w = v\exp(t^2/4),\ t = z\sqrt{2}\ ,$$

则由Hermite方程得到**Weber方程** (Weber equation)

$$v'' + \left[\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} - \frac{t^2}{4}\right]v = 0.$$

对于$\lambda = 2n$，其中n是自然数，在Hermite方程

的解中，有 n 次 **Hermite 多项式**（Hermite polynomials）

$$H_n(z)=(-1)^n e^{z^2}\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z^2})$$

这说明 Hermite 方程名称的由来 一般地说，Hermite 方程的解能够由一些特殊函数——抛物柱函数（parabolic cylinder functions）或 Weber-Hermite 函数（Weber-Hermite functions）——来表示． H X Розов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Whittaker, E T and Watson, G N, A course on modern analysis, Cambridge Univ Press, 1965

张鸿林 译

Hermite 函数 [Hermite function，Эрмита функции]

Hermite 方程（Hermite equation）

$$w''-2zw'+2\lambda w=0$$

的解．Hermite 函数具有下列形式．

$$P_\lambda(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{C_1}\exp(-t^2+2zt)t^{-\lambda-1}dt,$$

$$Q_\lambda(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{C_2}\exp(-t^2+2zt)t^{-\lambda-1}dt,$$

其中 C_1 是复平面 t 上由射线 $(-\infty,-a)$ 和 (a,∞) 以及半圆 $|t|=a>0$ $(\mathrm{Im}\,t\geqslant 0)$ 组成的周线，$C_2=-C_1$ 对于整数 $\lambda=n\geqslant 0$，这两个解之和的一半

$$H_\lambda(z)=\frac{P_\lambda(z)+Q_\lambda(z)}{2}$$

等于 **Hermite 多项式**（Hermite polynomials）$H_n(x)$ 方程

$$y''-xy'+vy=0$$

也称为 Hermite 方程．当 v 为整数时，这个方程具有**基本解组**（fundamental system of solutions）$H_v(x)$, $h_v(x)$，其中 $H_v(x)$ 是 Hermite 多项式，$h_v(x)$ 是第二类 Hermite 函数（Hermite functions of the second kind），它能够通过**汇合型超几何函数**（confluent hypergeometric function）来表示·

$$he_{2n}(x)=(-2)^n n!\,{}_1F_1\left(-n+\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{x^2}{2}\right),$$

$$he_{2n+1}(x)=-(-2)^n n!\,{}_1F_1\left(-n-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{x^2}{2}\right)$$

下列恒等式成立

$$He_v(x_v)he_v(x)-he_v(x)He_v(x)=v!e^{x^2/2},$$

$$He_v(x)he_{v-1}(x)-He_{v-1}(x)he_v(x)=(v-1)!e^{x^2/2}$$

参考文献

[1] Courant, R and Hilbert, D, Methods of mathematical physics, I, Interscience, 1953（中译本 R 柯朗、D 希尔伯特，数学物理方法，I，科学出版社，1962）

[2] Krazer, A and Franz, W, Transzendente Funktionen, Akademie-Verlag, 1960

M B Федорюк 撰

【补注】 Hermite 函数 P_λ 和 Q_λ 与**抛物柱函数**（parabolic cylinder function）有关．当 v 为非负整数时，关于函数 H_v, h_v 的进一步的结果，见 [A1]

参考文献

[A1] Durand, L, Nicholson-type integrals for products of Gegenbauer functions and related topics, in R A Askey (ed), Theory and Application of Special Functions, Acad Press, 1975, 353－374

张鸿林 译

Hermite 恒等式 [Hermite identity，Эрмита тождество]

Ch Hermite（1873）为了证明数 e 是超越数而应用于某些专门构造的多项式的一个恒等式．在简化的形式下，它是

$$e^x F(0)-F(x)=e^x\int_0^x e^{-t}f(t)dt,$$

其中 $f(x)$ 是 x 的多项式，而

$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}f^{(k)}(x)$$

【补注】 关于 e 的超越性的证明和 Hermite 恒等式的应用，例如见 [A1]，定理 6 4 其中给出了 Hermite 原始证明的一个简化形式．

参考文献

[A1] Stewart, I, Galois theory, Chapman & Hall, 1979

张鸿林 译

Hermite 插值公式 [Hermite interpolation formula，Эрмита интерполяционная формула]

解决在点 x_0, … x_n 插值一个函数 f 及其导数问题的 m 次多项式 H_m 的一个表达式，而该插值问题满足条件

$$\left.\begin{array}{l}H_m(x_0)=f(x_0),\quad \ldots,H_m^{(\alpha_0-1)}(x_0)=f^{(\alpha_0-1)}(x_0),\\ \qquad\ldots\\ H_m(x_n)=f(x_n),\quad \ldots,H_m^{(\alpha_n-1)}(x_0)=f^{(\alpha_n-1)}(x_0),\\ \qquad m=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i-1.\end{array}\right\}\quad(1)$$

该 Hermite 插值公式可写成形式

$$H_m(x)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1}\sum_{k=0}^{\alpha_i-j-1}f^{(j)}(x_i)\frac{1}{k!}\frac{1}{j!}\left[\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)}\right]^{(k)}_{x=x_i}\times\frac{\Omega(x)}{(x-x)^{\alpha_i-j-k}},$$

其中 $\Omega(x)=(x-x_0)^{\alpha_0} \quad (x-x_n)^{\alpha_n}$

参考文献

[1] Березин, И С , Жидков, Н П , Методы вычислений, 3 изд , т 1, М , 1966(英译本 Berezin, I S and Zhidkov, N P , Computing methods, Pergamon, 1973)

М К Самарин 撰

【补注】 Hermite 插值可被认为是 Birkhoff 插值 (Birkhoff interpolation) (也称缺项插值 (lacunary interpolation)) 的一个特殊情形 后者，并非一个函数 f 和它的导数在已给点 $x_0< \quad <x_n$ 上的所有的值都已知 (而在 Hermite 插值情形有完全的信息) 像 (1) 这样的数据自然地产生一个矩阵 E，即所谓的插值矩阵 (interpolation matrix)，构造如下 对于 $k=k(i)=0, \quad ,\alpha_i-1$ 及 $i=0,1, \quad ,n$，记 $f^{(k)}(x_i)=c_{i,k}$ 如果常数 $c_{i,k}$ 已知 (被给定)，记 $e_{i,k}=1$，如若不然，记 $e_{i,k}=0$ (对于 Hermite 插值，所有的 $e_{i,k}=1$) 这时 $E=(e_{i,k})_{i,k}$

这样的一个矩阵 E 称为次序正则的 (order regular)，倘若它联系着一个可解问题 (即对应于 $e_{i,k}=1$ 的 $c_{i,k}$ 的所有选择，(1) 都可解) (类似地，如果插值点集 X 可以在一个给定的类中变化，一个对 E, X 称为正则的 (regular)，倘若对该类中的所有 X 和对应于 $e_{i,k}=1$ 的 $c_{i,k}$ 的所有选择，(1) 都是可解的) Birkhoff 插值中的一个基本主题是找到这些正则对 E, X . 更多的信息可在 [A1] 中找到

参考文献

[A1] Lorentz, G G , Jetter, K and Riemenschneider, S D , Birkhoff interpolation, Addison-Wesley, 1983

[A2] Mysovskih, I P , Lectures on numerical methods, Wolters-Noordhoff, 1969

[A3] Wendroff, B , Theoretical numerical analysis, Acad Press, 1966, Chapt 1

刘永平 译 葛显良 校

Hermite 多项式 [Hermite polynomials , Эрмита многочлены], Чебышев - Hermite 多项式 (Chebyshev - Hermite polynomials)

在 $(-\infty, \infty)$ 上具有权函数 $h(x)=e^{-x^2}$ 的正交多项式. 标准化 Hermite 多项式由 **Rodrigues 公式** (Rodrigues formula)

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}$$

来定义，最常用的一些公式是

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x),$$

$$H_n'(x)=2nH_{n-1}(x),$$

$$H_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k},$$

$$\exp(2xw-w^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}w^n$$

最初几个 Hermite 多项式是

$$H_0(x)=1,\ H_1(x)=2x,\ H_2(x)=4x^2-2,$$

$$H_3(x)=8x^3-12x,\ H_4(x)=16x^4-48x^2+12,$$

$$H_5(x)=32x^5-160x^3+120x,$$

多项式 $H_n(x)$ 满足微分方程

$$y''-2xy+2ny=0$$

规范正交 Hermite 多项式定义为

$$\hat{H}_n(x)=\frac{H_n(x)}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}}$$

首项系数为 1 的 Hermite 多项式具有下列形式

$$\widetilde{H}_n(x)=\frac{1}{2^n}H_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^n}e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}$$

在 $(-\infty, \infty)$ 内部按 Hermite 多项式展开的 Fourier 级数的性质类似于 Fourier 三角级数

在数理统计和概率论中，应用对应于权函数

$$h(x)=\exp(-x^2/2)$$

的 Hermite 多项式

Hermite 多项式的定义在 P Laplace [1] 中已经出现. П Л Чебышев 在 1859 年发表了关于这些多项式的详细研究 (见 [2]) 后来，Ch Hermite ([3]) 也对它们进行了研究. В А Стеклов ([4]) 证明· Hermite 多项式集合在整个实数轴上的具有权 $h(x)=\exp(-x^2)$ 的平方可积函数的空间中是稠密的.

亦见**经典正交多项式** (classical orthogonal polynomials)

参考文献

[1] Laplace, P S , *Mém Cl Sci Math Phys Inst France*, **58** (1810), 279 - 347

[2] Чебышев, П Л , Полн собр соч , т 2 М , - Л , 1947, 335 - 341

[3] Hermite, Ch , *C R Acad Sci Paris* , **58** (1864), 93 - 100, 266 - 273

[4] Стеклов, В А , 《Изв АН》, **10** (1916), 403 - 416

[5] Суетин, П К , Классические ортогональные многочлены, 2 изд , М , 1979

П К Суетин 撰

【补注】 本条正文最后一句中所提到的 Стеклов 的结果至少可以追溯到 H Weyl (1908)，见 [A3]，5 7 节的参考文献.

证明关于 **Fourier 变换** (Fourier transform) 的 Plancherel 公式的一个可能途径是利用 Hermite 多项

式，见[A4] 在热传导方程和Schrodinger方程的解中，在所谓热多项式中，都出现Hermite多项式，见[A1] 对于Heisenberg群的Schrodinger表示来说，表示空间的典则规范正交基由Hermite多项式给出，见[A2]

参考文献

[A1] Miller, Jr W, Symmetry and separation of variables, Addison-Wesley, 1977

[A2] Schempp, W, Harmonic analysis on the Heisenberg nilpotent Lie group, Longman, 1986

[A3] Szego, G, Orthogonal polynomials, Amer Math Soc, 1975

[A4] Titchmarsh, E C, Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford Univ Press, 1948

张鸿林 译

Hermite问题 [Hermite problem, Эрмита проблема]

关于实系数n元正二次型齐次算术最小的问题．它等价于等半径n维球的稠密格填装问题(见**数的几何**(geometry of numbers))．

设$f=f(x)$ $(x\in\mathbf{R}^n)$是$\mathbf{R}$上具有行列式$d=d(f)=\det f\neq 0$的正二次型，令

$$m(f)=\inf_{\substack{x\in\mathbf{Z}^n\\x\neq0}}f(x)=\min_{\substack{x\in\mathbf{Z}^n\\x\neq0}}f(x)$$

是f的齐次算术最小．量

$$\gamma_n=\sup\frac{m(f)}{\{d(f)\}^{1/n}}=\max\frac{m(f)}{\{d(f)\}^{1/n}}$$

称为Hermite常数(Hermite constant)，其中的上确界和最大是关于所有的正二次型f取的，$\gamma_n=\{\gamma(F_n)\}^2$，$F_n=(x_1^2+\quad+x_n^2)^{1/2}$是对应于球的径向函数

最初，人们对Hermite问题的理解，是求出或者估计常数γ_n(上界和下界)．γ_n的精确值只对$n\leqslant 8$是知道的(见[1])．γ_n的估计见[2]或[1]．

后来，Hermite问题常被用来指在系数和它的相应的型f的空间中求出$m(f)/\{d(f)\}^{1/n}$的局部最大 (界或极值)．求出有界型的所有类的算法是知道的 例如，对完全型有Вороной算法(见[1], [3], [4])

这个问题是Hermit在1850年提出的

参考文献

[1] Gruber, P M and Lekkerkerker, C G, Geometry of numbers, North-Holland, 1987

[2] Rogers, C A, Packing and covering, Cambridge Univ Press, 1964.

[3] Делоне, Б Н, Петербургская школа теории чисел, М－Л, ˎ.ˎ+7

[4] Барановский, Е П, в кн, Итоги науки, Математика, Алгебра, Топология Геометрия, 1967, М, 1969, 189－225(英译本 Baranovskii, E P, Packings, coverings, partitionings and certain other distributions in spaces of constant curvature, *Progress in Math*, **9** (1971), 209－253

А В Мальшев 撰 徐广善 译 潘承彪 校

Hermite变换 [Hermite transform, Эрмита преобразование]

积分变换

$$f(n)=H\{F(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_n(x)F(x)dx,$$

$$n=0,1,2,\quad,$$

其中$H_n(x)$是**Hermite多项式**(Hermite polynomials)逆变换公式是

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{f(n)}{2^n n!}H_n(x)=H^{-1}\{f(n)\},$$

$$-\infty<x<\infty,$$

如果级数收敛，Hermite变换可将算子

$$R[F(x)]=e^{x^2}\frac{d}{dx}[e^{x^2}\frac{d}{dx}F(x)]$$

按公式

$$H\{R[F(x)]\}=-2nf(n)$$

化为代数算子

如果$F(x)$及其直到p阶(包括p阶)导数是有界的，则

$$H\{F^{(p)}(x)\}=f(n+p)$$

对于特殊的一类广义函数也引入了Hermite变换(见[2]) 它们可以用来解含算子R的微分方程．

参考文献

[1] Debnath, L, On the Hermite transform, *Mat Vesnik*, **1** (1964), 285－291

[2] Zemanian, A G, Generalized integral transforms, Wiley, 1968

Ю А Брычков, А П Прудников 撰 张鸿林 译

Hermite联络 [Hermitian connection, Эрмитова связность]

Hermite流形M上的一个**仿射联络**(affine connection)，相对于此联络，由复结构及基本2形式$\Omega=\frac{i}{2}g_{\alpha\beta}\omega^\alpha\wedge\bar{\omega}^\beta$所定义的张量$\varphi$是平行的，由此蕴含Hermite形式$ds^2=g_{\alpha\beta}\bar{\omega}^\alpha\omega^\beta$具有相同的性质．如$M$上的仿射联络由局部联络形式$\omega_\beta^\alpha=\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha\omega^\gamma+\Gamma_{\beta\bar{\gamma}}^\alpha\bar{\omega}^\gamma$给出，则这些联络能被表成

$$\omega_{\bar\beta}^{\alpha}=\omega_{\beta}^{\bar\alpha}=0,\ \omega_{\bar\beta}^{\bar\alpha}=\bar{\omega}_{\beta}^{\alpha},$$

$$dg_{\alpha\beta} = \bar{\omega}^{\gamma}_{\alpha} g_{\gamma\beta} + g_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma}_{\beta}$$

在给定的 Hermite 流形 M 上存在着唯一的使 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\bar{\gamma}}=0$ 的 Hermite 联络.

殆 Hermite 联络(almost-Hermitian connection)是它的一个推广，它可在殆-Hermite 流形 $\widetilde{M}$ 上用满足 $g_{kl}\varphi^k_i\varphi^l_j = g_{ij}$ 的张量 φ^i_j 及 g_{ij} 的相似的条件来定义.在给定的 $\widetilde{M}$ 上，存在着殆 Hermite 联络 它可用其挠率张量来唯一确定 如果两个殆 Hermite 联络的挠率张量相同，则此两联络也相同 例如，存在着唯一的殆 Hermite 联络，使其挠率形式为“纯”形式(即(2, 0)型及(0, 2)型)之和，此即第二类典范 Lichnerowicz 联络.

参考文献

[1] Lichnerowicz, A, Global theory of conections and holonomy groups, Noordhoff, 1976 (译自法文)

[2] Yano, K, Differential geometry on complex and almost complex spaces, Pergamon, 1965

Ю Г Лумисте 撰

【补注】 殆 Hermite 流形上第一、第二类典范联络在[1]的 192 页及 194 — 195 页中分别有所叙述

参考文献

[A1] Kobayashi, S and Nomizu, K, Foundations of differential geometrry, 2, Willey (Interscience), 1969

[A2] Wells, jr, R O, Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980

沈纯理 译

Hermite 型 [Hermitian form, Эрмитова форма]，左 R 模 X 上的

对第一个变量为线性且满足条件

$$\varphi(y, x)=\varphi(x, y)^J, \ x, y\in X$$

的映射 φ $X\times X \to R$.这里 R 是一个有单位元的环且有一个对合反自同构 J 特别地，φ 是 X 上的一个半**双线性型**(sesquilinear form) 此时模 X 本身称为一个 Hermite 空间(Hermitian space) 与对双线性型的做法类似，可对 Hermite 型定义等价(equivalence)，用另一术语，即是等距(isometry)，由此可定义 Hermite 空间的同构(isomorphism)，即等距同构(isometry) 特别地，可以定义 Hermite 空间的自同构(automorphism) Hermite 型 φ 的所有自同构构成一个群 $U(\varphi)$，称为与 Hermite 型 φ 相伴的酉群.当 R 为除环时，这个群的结构已有很好的研究，见**酉群**(unitary group)

Hermite 型是 ε-Hermite 型(ε-Hermitian form)的特例(其中 ε 是 R 的中心里的一个元素)，后者是 X 上满足

$$\psi(y, x)=\varepsilon\psi(x, y)^J, \ x, y\in X$$

的一个半双线性型 当 $\varepsilon=1$ 时，ε-Hermite 型就是 Hermite 型，而当 $\varepsilon=-1$ 时，它称为斜 Hermite 的(skew-Hermitian)或反 Hermite 的(anti-Hermitian).如果 $J=1$, Hermite 型就是对称双线性型，而斜 Hermite 型就是斜对称或反对称的双线性型.如果映射

$$X \to \mathrm{Hom}_R(X, R), \ y \mapsto f_y$$

(其中对任何 $x\in X$ 皆有 $f_y(x)=\varphi(x, y)$)是双射，则 φ 称为非退化的 Hermite 型(non-degenerate Hermitian form)或称为 X 上的 Hermite 标量积(Hermitian scalar product)

如果 X 是以 e_1, , e_n 为基的自由 R 模，则矩阵 $\|a_{ij}\|$(其中 $a_{ij}=\varphi(e_i, e_j)$)称为 φ 在给定基下的矩阵(matrix)，它是一个 **Hermite 矩阵**(Hermitian matrix)，即 $a_{ij}=a^J_{ij}$ 一个 Hermite 型 φ 是非退化的，当且仅当 $\|a_{ij}\|$ 可逆 设 R 是除环，如果 $\mathrm{char}R\neq 2$ 且 X 在 R 上是有限维的，那么 X 关于 φ 有正交基(Hermite 型在这组基下的矩阵是对角阵)

如果 R 是有单位元的交换环，$R_0=\{r\in R \ r^J=r\}$，且 φ 的矩阵是确定的，则它的行列式在 R_0 中 在 X 中基的变换之下，行列式就乘上 R 中一个形如 $\alpha\alpha^J$ 的非零元，其中 α 为 R 中的可逆元.相差这种元素相乘的行列式称为 Hermite 型的行列式(dedermınant of the Hermitian form)或 Hermite 空间 X 的行列式(determinant of the Hermitian space X). 这是一个重要的不变量，并被用来对 Hermite 型进行分类

设 R 是交换环，则 X 上一个 Hermite 型 φ 引导出 R_0 上 X 中的一个二次型 $Q(x)=\varphi(x, x)$ 对这种型的分析是以对具有对合的 R 作出其 Witt 群为基础的，见 **Witt 环**(Witt ring)，**Witt 分解**(Witt decomposition)及 **Witt 定理**(Witt theorem) 如果 R 是一个极大有序域，则**惯性律**(law of inertia) 可推广到 Hermite 型(于是可以建立与符号差、惯性指数、正定及负定性相对应的概念).如果 R 是一个域且 $J\neq 1$，则 R 是 R_0 的二次 Galois 扩张，而且 R 上两个非退化 Hermite 型的等距等价于 R_0 上由它们所生成的两个二次型的等距 这就把 R 上非退化的 Hermite 型的分类归结为 R_0 上非退化的二次型的分类.

如果 $R=\mathbf{C}$，而 J 是复共轭的对合，则有限维空间上 Hermite 型的不变量完全组由相应二次型的秩及符号差给出 如果 R 是一个局部域或是有限域上的单变量函数域，则非退化 Hermite 型的不变量完全组由它的秩及行列式给出.如果 R 是有限域，则仅有秩这一个不变量 当 R 是 $\mathbf{Q}$ 的代数扩张的情形，见[3] Ch Hermite 是第一个(1853)把冠以其名的这种型与某种数论问题联系起来加以考虑的人

参考文献

[1] Bourbaki, N, Elements of mathematics Algebra Algebraic

structures Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974, Chapt 1, 2 (译自法文)
[2] Dieudonné, J A, La géométrie des groups classiques, Springer, 1955
[3] Milnor, J and Husemoller, D, Symmetric bilinear forms, Springer, 1973
[4] O'Meara, O T, Introduction to quadratic forms, Springer, 1973
В Л Попов 撰 张明尧 译 徐广善 校

Hermite 核 [Hermitian kernel, эрмитово ядро]

一个在 $[a,b]\times[a,b]$ 上平方可积的复值函数 $K(x,y)$，对几乎所有的 $(x,y)\in[a,b]\times[a,b]$ 满足条件（Hermite 对称性（Hermitian symmetry）条件）

$$\overline{K(x,y)}=K(y,x), \tag{1}$$

式 (1) 中的横线表示复共轭．如果一个 Hermite 核几乎处处不为零，那么它至少有一个本征值，即存在数 λ，使方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy=0$$

有一个非零解（对应于 λ 的本征函数） 所有本征值都是实的且在任何区间上只有有限多个 对应于不同本征值的本征函数是相互正交的

对应于本征值 $\lambda_1,\lambda_2,$ ，这里 $|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant$ ，存在一个规范正交的本征函数序列 $\varphi_1,\varphi_2,\cdot$ (有限的或无限的) 级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k} \tag{2}$$

在 $[a,b]\times[a,b]$ 上平均收敛于核 $K(x,y)$．如果核是连续的且级数 (2) 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上一致收敛，那么它的和是 $K(x,y)$．一个 Hermite 核的本征值和本征函数的个数是有限的充要条件是这个核是退化的（见**退化核**（degenerate kernel)）．

一个 Hermite 核的所有**叠核**（iterated kernel）都是 Hermite 核．

由一个 Hermite 核生成的线性积分算子是自伴的．一个 Hermite 核称为完全的（complete）（或闭的（closed)），如果它的本征函数系在 $L_2[a,b]$ 中是完全的，否则它称为不完全的（incomplete） 一个 Hermite 核称为正的（positive）（负的（negative)），如果它的所有本征值是正的（负的） 一个完全的正（负）核称为正（负）定的（positive (negative) definite）．

以上的区间 $[a,b]$ 能用 n 维 Euclid 空间中的区域 Ω 代替

参考文献

[1] Смирнов, В И, Курс высшей математики, 6 изд, т 4, ч 1, М, 1974 (中译本 В И 斯米尔诺夫，高等数学教程第四卷第一分册，人民教育出版社，1962).
[2] Владимиров, В С, Уравнения математической физики, 4 изд, М, 1981
Б В Хведелидзе 撰

【补注】 另一个和级数 (2) 有关的结果是 Mercer 定理（Mercer theorem）．令核 $K(x,y)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续且设对 $L_2[a,b]$ 中的 f 都有

$$\int_a^b\int_a^b K(x,y)f(y)\bar{f}(x)\,dy\,dx\geqslant 0$$

如果 $\varphi_1,\varphi_2,$ 是对应于本征值 $\lambda_1,\lambda_2,$ 的本征函数（连续的）的规范正交序列，那么级数 (2) 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上绝对且一致收敛，而且 (2) 的和是 $K(x,y)$．

参考文献

[A1] Gohberg, I and Goldberg, S, Basic operator theory, Birkhauser, 1981
[A2] Tricomi, F G, Integral equations, Interscience, 1957.
陈一元 译 郑维行 校

Hermite 矩阵 [Hermitian matrix, эрмитова матрица], Hermite 对称矩阵（Hermitian-symmetric matrix），自共轭矩阵（self-conjugate matrix）

C 上的一个方阵 $A=\|a_{ik}\|$，它等于它的 Hermite 共轭矩阵

$$A^*=\bar{A}^{\mathrm{T}}=\|\bar{a}_{ki}\|,$$

就是说，它的元素满足条件 $a_{ik}=\bar{a}_{ki}$. 如果一切 $a_{ik}\in\mathbf{R}$，则 Hermite 矩阵就是**对称矩阵**（symmetric matrix） 固定阶的 Hermite 矩阵构成 **R** 上一个向量空间．如果 A 和 B 是两个同阶的 Hermite 矩阵，那么 $AB+BA$ 也是 Hermite 矩阵．在运算 $A\cdot B=(AB+BA)/2$ 之下，(n 阶) Hermite 矩阵构成一个 **Jordan 代数**（Jordan algebra）．两个 Hermite 矩阵 A 和 B 的乘积 AB 本身是 Hermite 矩阵当且仅当 A 与 B 可交换

n 阶 Hermite 矩阵是一个 n 维酉空间的 Hermite 变换在一个标准正交基内的矩阵（见**自伴线性变换**（self-adjoint linear transformation)）．另一方面，Hermite 矩阵是一个 n 维复向量空间内 **Hermite 型**（Hermitian form）的矩阵．与 Hermite 型类似，Hermite 矩阵可以在任何具有一个反对合的除环上定义．

一个 Hermite 矩阵的所有本征值都是实数．对于每一个 Hermite 矩阵 A，存在一个酉矩阵 U，使得 $U^{-1}AU$ 是实对角矩阵．一个 Hermite 矩阵称为非负的（non-negative)（或半正定的（positive semi-definite)），如果它的一切主子式都是非负的，称为正定的（positive definite)，如果它的一切主子式都是正的．非负（正定）Hermite 矩阵对应于非负（正定）的 Hermite 线性变换和 Hermite 型

А Л Онищик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gantmacher, F R, Matrix theory, 1-2, Chelsea, reprint, 1959(译自俄文, 中译本 Φ P 甘特马赫尔, 矩阵论, 上、下卷, 高等教育出版社, 1955)

[A2] Noble, B and Daniel, J W, Applied linear algebra, Prentice-Hall, 1979 郝钢新 译

Hermite 度量 [**Hermitian metric**, **Эрмитова метрика**]

1) 复向量空间 V(complex vector space)上的 Hermite 度量 (Hermitian metric) 是 V 上的一个正定 **Hermite 型** (Hermitian form) 赋予 Hermite 度量的空间 V 称为酉 (unitary)或复 Euclid 或 Hermite 向量空间 (complex-Euclidean or Hermitian vector space), 且 V 上的 Hermite 度量称为 Hermite 标量积 (Hermitian scalar product). V 上的任何两个 Hermite 度量可以通过 V 的一个自同构来相互转换. 从而, V 上所有 Hermite 度量的集合是关于群 $GL_n(\mathbf{C})$ 的一个齐次空间, 而且可以等同于 $GL_n(\mathbf{C})/U(n)$, 其中 $n=\dim V$

一个复向量空间 V, 可以看成为一个赋予复结构算子 $J(x)=ix$ 的实向量空间 $V^{\mathbf{R}}$ 如果 h 是 V 上的一个 Hermite 度量, 那么型 $g=\mathrm{Re}\,h$ 是 V 上的一个 Euclid 度量 (一个标量积), 且 $\omega=g_m h$ 是 V 上的一个非退化反称双线性型 这里 $g(Jx,Jy)=g(x,y)$, $\omega(Jx,Jy)=\omega(x,y)$, 且 $\omega(x,y)=g(x,Jy)$. 型 g, ω 中的任何一个唯一地决定了 h

2) 一个复向量丛 (complex vector bundle) π $E\to M$ 上的 Hermite 度量是基 M 上的一个函数 g $p\mapsto g_p$, 它对每个点 $p\in M$ 确定 π 的纤维 $E(p)=\pi^{-1}(p)$ 中的一个 Hermite 度量 g_p, 并满足下面的光滑性条件 对 π 的任何光滑局部截口 e 及 e^*, 函数 $p\to g_p(e_p, e_p^*)$是光滑的

每一个复向量丛有一个 Hermite 度量. 复向量丛 π 上一个**联络** (connection) ∇ 称为与 Hermite 度量 g 是相容的, 如果 g 与 π 的纤维中的复结构算子 J 关于 ∇ 是平行的 (即 $\nabla g=\nabla J=0$), 换句话说, 如果 π 的纤维沿着基上曲线的相应平行位移是作为酉空间的纤维上的一个等距, 就称 ∇ 与 g 是相容的. 对每个 Hermite 度量, 存在着与它相容的联络, 但是一般而言, 后者不是唯一的. 当 π 是复流形 M 上的一个全纯向量丛时 (见**解析向量丛** (vector bundle, analytic)), 则存在 π 的唯一的联络 ∇, 它与某个给定的 Hermite 度量相容, 且满足下列条件 π 的任一全纯截口 e 关于 M 上任何反全纯复向量场 $\overline{X}$ 的共变导数为零 (典范 Hermite 联络 (canonical Hermitian connection)). 这个联系的**曲率** (carvature) 形式可以看成是 M 上一个 $(1,1)$ 型的 2 形式而取值于 π 的自同态的丛中. 典范联络也可以看成是关联于复维数为 n 的全纯向量丛 π 的主 $GL_n(\mathbf{C})$ 丛 $\tilde{\pi}$ $P\mapsto M$ 上的一个联络. 它可以被刻画为在复流形 P 的切空间中具有复水平子空间的 $\tilde{\pi}$ 上仅有的联络.

参考文献

[1] Kobayashi, S and Nomizu, K, Foundations of differential geometry, 2, Wiley (Interscience), 1969

[2] Lichnerowicz, A, Global theory of connections and holonomy groups, Noordhoff, 1976 (译自法文).

[3] Wells, jr, R O, Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980

[4] Weil, A, Introduction à l'étude des variétes kahlériennes, Hermann, 1958 Д В Алексеевский 撰

【补注】 一个复向量丛, 若赋予一个 Hermite 度量, 就称为一个 Hermite 向量丛 王声望 译 郑维行 校

Hermite 算子 [**Hermitian operator**, **Эрмитов оператор**], 对称算子 (symmetric operator)

Hilbert 空间 H 上具有稠密定义域 $D(A)$ 的线性算子 A, 且对任何 $x, y\in D(A)$ 有 $\langle Ax, y\rangle=\langle x, Ay\rangle$ 这个条件等价于 1) $D(A)\subset D(A^*)$, 以及 2) 对所有 $x\in D(A)$, $Ax=A^*x$, 其中 A^* 是 A 的伴随算子, 即等价于 $A\subset A^*$ 一个有界 Hermite 算子, 或者定义于整个 H 上, 或者可由连续性扩张于 H 上, 于是 $A=A^*$, 也就是说, A 是一个**自伴算子** (self-adjoint operator) 一个无界 Hermite 算子可以有, 或者没有自伴扩张. 有时, 任一自伴算子称为 Hermite 的, 而将对称的名称保留给按上面意义下的 Hermite 算子. 在有限维空间中, 一个 Hermite 算子可以用 **Hermite 矩阵** (Hermitian matrix)来描述.

参考文献

[1] Ахиезер, Н И, Глазман, П М, Георня линейных операторов в гильбертовом пространстве, изд, Хар, 1978 (英译本 Akhiezer, N N and Glazman, I M, Theory of linear operators in Hilbert space, 1-2, Pitman, 1981

[2] Riesz, F and Szokefalvi-Nagy, B, Functional analysis, F Ungar, 1955 (中译本 F 黎茨, B 塞克佛尔维-纳吉, 泛函分析讲义, 科学出版社, 1963, 1980) В И Соболев 撰 王声望 译 郑维行 校

Hermite 结构 [**Hermitian structure**; **Эрмитова структура**], 流形 M 上的

由 M 上的一个**复结构** (complex structure) J 及切空间 TM 中的一个 **Hermite 度量** (Hermitian metric) g 所构成的偶对 (J, g), 其中 Hermite 度量是指在 J 下不变的 Riemann 度量 g. 对 M 上任意向量场 X 和 Y, 有

$$g(JX, JY)=g(X, Y)$$

Hermite 结构在任何切向量空间 T_pM 中指定了一个 Hermite 向量空间结构（见 **Hermite 度量**（Hermitian metric）） 具有 Hermite 结构的流形称为 Hermite 流形（Hermitian manifold） Hermite 结构在 M 上定义了一个微分 2 形式 $\omega(X, Y)=g(X, JY)$，称它为 Hermite 流形的典范 2 形式．对 M 上任何复结构 J，能用某个 Riemann 度量 g 使之得出 Hermite 结构 (J, g) 可取度量 $g(X, Y)=g_0(X, Y)+g_0(JX, JY)$，这里 g_0 是一个任意度量．Hermite 度量 g 的典范 Hermite 联络能视为 M 上的一个具有挠率 T 的仿射联络，且相对于此联络而言，场 J 和 g 是平行的．在所有满足这些条件的仿射联络中间，它可用恒等式 $T(JX, Y)=T(X, JY)$ 来唯一确定，这里 T 是**挠率张量**（torsion tensor），X，Y 是任意向量场．典范联络的**曲率张量**（curvature tensor）R 满足条件 $R(JX, JY)=R(X, Y)$ Hermite 流形为 **Kahler 流形**（Kahler manifold）的充要条件是典范 Hermite 联络是无挠率的，于是与 g 的 **Levi-Civita 联络**（Levi-Civita connection）相同．

Hermite 结构这个概念的一个自然的推广是殆 Hermite 结构（almost-Hermitian structure）的概念，它是由 M 上的**殆-复结构**（almost-complex structure）J 及在 J 下不变的 **Riemann 度量**（Riemannian metric）g 所构成的偶对 (J, g) 如果基本 2 形式 $\omega(X, Y)=g(X, JY)$ 是闭的，则殆 Hermite 结构称为殆 Kahler 的（almost Kahlerian） 殆 Hermite 结构的指定等价于切丛的结构群化约至群 $U(n)$，这里 $n=\dim M/2$．流形 M 上任何非退化微分 2 形式是某个殆 Hermite 结构的基本 2 形式．

参考文献可见 **Hermite 度量**（Hermitian metric）

Д В Алексеевский 撰 沈纯理 译

Hermite 对称空间 [Hermitian symmetric space，Эрмитово симметрическое пространство]

一个具有 **Hermite 结构**（Hermitian structure）的连通**复流形**（complex manifold）M，它的每个点 $p\in M$ 是 M 的某个全纯对合等距 s_p 的一个孤立的不动点 M 上的全纯等距变换群 G 的含单位元素的分量可传递地作用在 M 上．设 K 是 G 的关于某点 $0\in M$ 的迷向子群，则按照**整体对称 Riemann 空间**（globally symmetric Riemannian space）G/K 的型称 M 为紧或非紧型．每个 Hermite 对称空间 M 是一个直积 $M=M_0\times M_-\times M_+$，这里所有因子都是单连通的 Hermite 对称空间，$M_0=\mathbf{C}^n$ 且 M_- 和 M_+ 分别是紧和非紧型空间．任何紧或非紧型 Hermite 对称空间都是单连通的并且是不可约 Hermite 对称空间的一个直积．

一个非紧不可约 Hermite 对称空间具有形式 G/K，这里 G 是具有平凡中心的连通非紧单 Lie 群而 K 是 G 的具有非离散中心的一个极大紧子群 紧不可约 Hermite 对称空间都具有形式 G/K，这里 G 是一个具有平凡中心的连通紧单 Lie 群而 K 是 G 的具有非离散中心的一个极大连通真子群

一个非紧型的 Hermite 对称空间在多复变函数论中是以如下方式出现的 设 $\mathbf{C}^n$ 是 n 维复向量空间．一个有界域定义为 $\mathbf{C}^n$ 内的一个有界连通开集．一个有界域称为对称的（symmetric），如果每个点 $p\in D$ 都是 D 到它本身的对合全纯微分同胚的一个孤立不动点．下列定理成立：a）每个具有 Bergman 度量的有界对称域 D（见 **Bergman 核函数**（Bergman kernel function），**齐性有界域**（homogeneous bounded domain））都是一个非紧型的 Hermite 对称空间，特别地，一个对称有界域必定是单连通的，b) 设 M 是一个非紧型的 Hermite 对称空间，则有一个有界对称域 D 和一个从 M 到 D 上的全纯微分同胚．

参考文献见**对称空间**（symmetric space）

А С Феденко 撰 陈志华 译

Heron 公式 [Heron formula，Герона формула]

通过三角形的三个边 a，b，c 表示它的面积 S 的公式：

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

其中 $p=(a+b+c)/2$ 因 Heron（1 世纪）而得名．

А Б Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M , Geometry, Springer, 1987（中译本 M 贝尔热，几何，科学出版社，1987－1991）

[A2] Coxeter, H S M , Introduction to geometry, Wiley, 1961

张鸿林 译

Heron 三角形 [Heron triangle，Герона треугольник]

边长和面积能用整数表示的三角形．因 Heron（1 世纪）而得名，他研究了边长为 13，14，15 和 5，12，13 的三角形，它们的面积分别是 84 和 30．

А Б Иванов 撰

【补注】 Pythagoras 三角形为其特殊情况（见 **Pythagoras 数**（Pythagorean numbers））

张鸿林 译

Hertz 原理 [Hertz principle，Герца принцип]，最直路径原理（straightest-path principle），最小曲率原理（principle of least curvature）

经典力学的微分变分原理（见**经典力学的变分原理**（variational principles of classical mechanics）），H. Hertz [1] 将它作为由他本人所发展的力学的基本定律，与

Newton 力学不同，在此力学中取代力的概念而引进了潜约束和潜运动的概念 根据 Hertz 原理，"所有自由系统或者保持自己的静止状态，或者保持沿着最直路径的匀速运动状态"．Hertz 把不受作用力支配，但只受影响系统中各点相互位置的约束制约的系统称为自由系统 (free system)；最直路径 (straightest path) 被理解为这样的轨道 它的每个元素比与此元素具有公共起始点和切线的任何其他元素有较小的曲率，且它满足约束方程．对于由定常约束制约但不受作用力支配的系统而言，Hertz 原理等价于 **Gauss 原理** (Gauss principle) (见[2])．

参考文献

[1] Hertz, H , Die Prinzipien der Mechanik, in Gesammelte Werke, Vol 3, Barth, Leipzig, 1894

[2] Розе, Н В , Лекции по аналитической механике, ч I, Л , 1938

В В Румянцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lindsay, R B and Margenau, H , Foundations of physics, Dover, reprint, 1957

陆柱家 译

Hesse 曲线（代数曲线的）[Hessian (algebraic curve)；Гессиан, Гессиана, алгебраической кривой]

n **次代数曲线** (algebraic curve) 的 Hesse 曲线就是其极二次曲线能分裂为两条直线的点的集合，也是第一极曲线的二重点构成的集合．n 次非奇异曲线的 Hesse 曲线是一条次数为 $3(n-2)$、类为 $3(n-2)(3n-7)$ 的曲线．设 $f=0$ 是这条 n 次曲线的齐次坐标方程，$f_{ik}=\partial^2 f/\partial x_i \partial x_k$，则它的 Hesse 曲线的定义方程为

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0$$

特征不等于 3 时的三次非奇异曲线的 Hesse 曲线与这条曲线交于 9 个通常拐点 因 O Hesse (1844) 而得名．

А Б Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Coolidge, J L , A treatise on algebraic plane curves, Dover, reprint, 1959

刘先仿 译

Hesse 式（函数 f 的）[Hessian (of a function), Гессиан функции]

二次型

$$H(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

或

$$H(z)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_i \bar{z}_j,$$

其中 $a_{ij}=\partial^2 f(p)/\partial x_i \partial x_j$（或 $\partial^2 f(p)/\partial z_i \partial \bar{z}_j$）而 f 是给定在具坐标 $x_1, \quad , x_n$（或 $z_1, \cdots, z_n$）的 n 维实空间 $\mathbf{R}^n$（或复空间 $\mathbf{C}^n$）上．它由 O Hesse 于 1844 年引进．借用局部坐标系可将此定义转移到定义在 C^2 类实流形（或复空间）上函数的临界点上．在这两种情形中 Hesse 式是定义在切空间上的二次型且与坐标的选择无关．在 **Morse 理论** (Morse theory) 中 Hesse 式可用来定义非退化临界点、Morse 式与 Bott 式等概念．在复分析中 Hesse 式可用来定义伪凸空间（见**伪凸与伪凹** (pseudo-convex and pseudo-concave)）与**多重次调和函数** (plurisubharmonic function)，见有关条目．

参考文献

[1] Постников, М М , Введение в теорию Морса, М , 1971

[2] Gunning, R C and Rossi, H , Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965

Л Д Иванов 撰

【补注】 通常称 $\mathbf{C}^n$ 上式 $H(z)$ 为复 Hesse 式．

如果一实值函数的 Hesse 式是正（半）定的，则函数是凸的，类似地，如果一函数的复 Hesse 式是正(半) 定的，则函数是多重次调和的．

参考文献

[A1] Krantz, S G , Function theory of several variables, Wiley, 1982

郑维行 译

异宿点 [heteroclinic point, гетероклиническая точка]

一个属于 Hamilton 方程组 (Hamiltonian system of equations)

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q},\ \dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p},\ p=(p_1, p_2),\ q=(q_1, q_2) \quad (*)$$

的 Hamilton 函数 $H=H(p, q)$ 定义域的点 ($p=p^*$, $q=q^*$)，使方程组 (*) 过此点的解当 $t \to \infty$ 时渐近趋于某个周期解 T_1，且当 $t \to -\infty$ 时渐近趋于另一个周期解 T_1' 过异宿点的解称为异宿解 (heteroclinic solution)

方程组 (*) 的异宿解与此方程组的二维不变曲面之间有联系．若二维不变曲面分隔周期解 T_1 与 T_1，则不存在连接这两个周期解的异宿解．在很多情形下，其逆亦真．在非退化情形下，在同宿解（见**同宿点** (homoclinic point)）的某个邻域有周期解的一无穷叙列，其中任意两个可用一个异宿解连接．由方程组 (*) 的有限个周期解与异宿解构成的闭路（所谓同宿圈 (homoclinic cycle)）的邻域具有在很多方面与同宿解类似的结构．

异宿点的上述定义可以实际上不加改变地应用于下述情形．具有 $n>2$ 阶自由度的 Hamilton 方程组，

假定周期解 T_1 与 T_1 分别为不变环面 T_k 与 T_k 代替，这里 T_k 与 T_k 的维数分别是 k, k', $0<k$, $k'<n$ 异宿解在研究具有大于2阶自由度的 Hamilton 方程组的不稳定性与结构稳定动力系统（见**粗系统**（rough system)）理论中起重要作用.

参考文献

[1] Poincare, H , Les methodes nouvelles de la mécanique celeste, 1 − 3, Gauthier-Villars, 1892 − 1899

[2] Zehnder, E , Homoclinic points near elliptic fixed points, *Comm Pure Appl Math* , **26** (1973), 131 − 182

[3] Мельников, В К, 《Тр Моск матем об-ва》, **12** (1963), 3 − 52

[4A] Smale, S , Dynamical systems and the topological conjugacy problem for diffeomorphisms, in Proc International Congress Mathematicians Stockholm, 1962, Mittag-Leffler Inst., 1963, 490 − 496

[4B] Smale, S , Diffeomorphisms with many periodic points, in S S Cairns (ed) Differential and Combinatorial Topol , Princeton Univ Press, 1965, 63−80

[5] Щильников, Л П , 《Матем сб》, **74** (**116**) (1967), 3, 378 − 397

[6A] Алексеев, В М , 《Матем сб》, **76** (**118**) (1968), 1, 72 − 134

[6B] Алексеев, В М , 《Матем сб》, **77** (**119**) (1968), 4, 545 − 601

[6C] Алексеев, В М , 《Матем сб》, **78** (**120**) (1969), 1, 3 − 50

В К Мельников 撰

【补注】 上述异宿（同宿）点概念对任意连续时间动力系统（不必是 Hamilton 的）是有意义的. 也可以对离散时间动力系统来定义这种概念 设 f 为流形上的微分同胚，那么异宿点（同宿点）是任何这样的点，即位于一个不变点的稳定流形与另一个（对应的，同一个）不变点的不稳定流形的交中之点.

郑维行 译 沈永欢、陈一元 校

Hewitt 实紧化 [Hewitt realcompactification, Хьюитта расширение], Hewitt 紧化 (Hewitt compactification), Hewitt 扩张 (Hewitt extension)

拓扑空间的一个扩张，关于扩张连续实值函数这一性质是极大的扩张. 这是 E Hewitt 在 [1] 中提出的.

一个同胚嵌入 $v . X \to Y$ 称为函数扩张 (functional extension)，如果 $v(X)$ 在 Y 中稠密，并且对每个连续函数 $f\ X \to \mathbf{R}$，存在一个连续函数 $\tilde{f} . Y \to \mathbf{R}$，使得 $f=\tilde{f}v$ 一个完全正则空间 X 称为 Q 空间 (Q-space) 或函数完全空间 (functionally-complete space)，如果它的每个函数扩张都是同胚映成的，即 $v(X)=Y$. 完全正则空间的函数扩张 $v\ X \to Y$ 称为 Hewitt 扩张 (Hewitt extension)，如果 Y 是一个 Q 空间. 任何完全正则空间都有 Hewitt 扩张，而后者在不区别同胚映射的意义下是唯一存在的

Hewitt 扩张也可以定义为 **Stone-Čech 紧化** (Stone-Čech compactification) βX 的子空间，其中的点 y 满足条件. 每个连续实值函数 $f\ X \to \mathbf{R}$ 均可扩张到 $X \cup \{y\}$

参考文献

[1] Hewitt, E , Rings of real-valued continuous functions, I , *Trans Amer Math Soc* , **64** (1948), 45 − 99

[2] Engelking, R , Outline of general topology, North-Holland, 1968

[3] Архангельский, А В , Пономарев, В И , Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М , 1975

И Г Кошевникова 撰

【补注】 Hewitt 扩张不是一个**紧化** (compactification)，因此很少使用“Hewitt 紧化”的说法.

胡师度、白苏华 译

六面体 [hexahedron, гексаэдр]

具有六个面的立体. 五角棱锥就是一个例子. 正六面体是立方体.

张鸿林 译

Heyting 形式系统 [Heyting formal system, Гейтинга формальная система], Heyting 演算 (Heyting calculus)

由 A Heyting ([1]) 提出的三个构造逻辑的形式系统. 第一个系统是 Heyting 演算或直觉主义演算 (intuitionistic calculus)，命题演算 (propositional calculus)，它是构造命题逻辑的形式化，第二个是 Heyting 演算或直觉主义演算 (intuitionistic calculus)，谓词演算 (predicate calculus)，它是构造谓词逻辑的形式化，第三个是 Heyting 算术 (Heyting arithmetic) 或直觉主义算术 (intuitionistic arithmetic)，它是关于数的基本构造理论原理的形式化. 这些系统原来是作为直觉主义逻辑和数学的一些部分的形式化.

逻辑 Heyting 形式系统（命题演算和谓词演算）是由带逻辑联结词（见**逻辑演算** (logical calculus)) $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\forall$, $\exists$ 的相应经典系统，用**矛盾律** (contradiction, law of) $(A \wedge \neg A) \supset B$ 代替“非构造公设”（这通常是**排中律** (law of the excluded middle) $A \vee \neg A$ 或者**双重否定律** (double negation, law of) $\neg\neg A \supset A$) 得到的. 这也是由经典**形式算术** (arithmetic, formal) 得到 Heyting 算术的方法. Heyting 形式系统的 Gentzen (矢列式）系统（见 **Gentzen 形式系统** (Gentzen formal system)) 通常不同于具有下列限制的经典系统: 推导中的所有**矢列式（逻辑中的）** (sequent (in logic)) 都只有一个后项

Heyting 形式系统关于（各种不同的）数学命题的

构造理解都是可靠的．特别地，在这些系统中可推导的公式是递归可实现的，且有真 **Godel 解释**（Godel interpretation）. Heyting 形式系统允许使用含一个构造问题的具有逻辑联结词运算的**直觉主义**（intuitionism）方法 形式为$\exists x A(x)$（或$A \vee B$）的公式的可推导性蕴涵公式$A(t)$对某个t的（或A或B中的一个）的可推导性．在算术情况下考虑的公式必须是闭的．Марков 规则（Markov rule）也是真的，闭公式$\neg\neg\exists x R(x)$的可推导性蕴涵了$R(N)$对某个N的可推导性，其中R是原始递归公式．

Heyting 算术满足 **Godel 不完全性定理**（Godel incompleteness theorem）的条件．在这个系统中，尽管 Марков 原理对 Марков - Шанин 意义下的命题的构造理解以及在 Godel 解释下是真的，但对某个原始递归公式R却不可能推出Марков 原理$\neg\neg\exists\ x R \supset \exists x R$. 关于可实现性解释的逻辑 Heyting 形式系统的不完全性可由一个非可推导的但可实现的命题公式的存在性得出．相对于 Godel 解释的 Heyting 命题演算的完全性问题仍未解决（1989）

在一个 Heyting 形式系统中可推导的任一公式在相应的经典系统中也可推导 逆命题可由举例（排中律）证明其不成立；然而，存在经典系统在 Heyting 形式系统中的一种解释，在此解释下，如果不考虑它们在经典系统中的等价性，公式保持不变，不仅保持公式可推导性不变，而且保持证明的结构不变 经典系统中公式A由一个公式列Γ的推导可转换为在相应的 Heyting 形式系统中公式A^-由一个公式列Γ^-的推导．这里A^-表示在公式A的所有子公式前加$\neg\neg$所得到的结果（在命题演算情况下只需在A前加上$\neg\neg$）．于是形如A^-的公式是经典可推导的，当且仅当它们在一个 Heyting 形式系统中可推导，这是关于经典系统的相对相容性的一个证明．Heyting 形式系统在经典系统中保持证明结构的解释是不可能存在的，但存在 Heyting 形式系统在含有附加联结词□（“可推导的”）的经典系统中的解释．

在谓词演算中所有联结词是独立的．在算术中，$\neg$可由$\supset$表示．而$\vee$能由$\exists$，$\wedge$，$\supset$表示．可以构造一逻辑联结词，使得所有其他联结词都可由其表示，即$(((p \vee q) \wedge r) \vee (\neg p \wedge (r \equiv \forall x \exists y s(x, y))))$. Heyting 形式系统的模型的集合论理论，包含了内含模型（intensional model）的使用，其中命题的真值不是一次决定的，而是依赖于“时间的推移”的 **仿 Boole 代数**（pseudo-Boolean algebra）用于研究 Heyting 命题演算．

在现代证明论中，主要研究 Heyting 形式系统的包括更强的构造数学原理（Марков 原理，可实现性）或直觉主义数学原理（Brouwer 连续性原理，**坝归纳**（bar induction）等等）的系统．

参考文献

[1A] Heyting, A, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, *Sitzungsber Deutsch Akad Wiss Phys -Math Kl*, **16** (1930), 1, 42 – 56, 57 – 71

[1B] Heyting, A, Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik, *Sitzungsber Deutsch Akad Wiss Phys -Math, Kl*, **16** (1930), 10 – 12, 158 – 169

[2] Kleene, S C, Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951（中译本 S C 克林，元数学导论，科学出版社，1985）

[3] Curry, H B, Foundations of mathematical logic, McGraw-Hill, 1963

[4] Fitting, M C, Intuitionistic logic, model theory and forcing, North-Holland, 1969

Г Е Минц 撰

【补注】 伪 Boole 代数也称为 Heyting 代数（Heyting algebras）.

上面提到的内涵模型通常称为 **Kripke 模型**（Kripke models），它们是由 S Kripke（[A1]）引入的（虽然 E. W. Beth（[A2]）已有类似的思想）．它们也可看做是层模型（sheaf models）的特殊情况（见 [A3]，[A4]）

参考文献

[A1] Kripke, S, Semantic analysis of intuitionistic logic, I, in J N Crossley and M A E Dummett (eds) Formal systems and recursive functions, North-Holland, 1965, 92 – 130

[A2] Beth, E W, Semantic construction of intuitionistic logic, *Med Kon Nederl Akad Weten Afd Letterkunde*, **19** (1956), 357 – 388

[A3] Fourman, M P and Hyland, J M E, Sheaf models for analysis, in M P Fourman, C J Mulvey and D S Scott (eds) Applications of Sheaves, Lecture notes in math, Vol 753, Springer, 1979, 280 – 301

[A4] Fourman, M P and Scott, D S, Sheaves and logic, in M P Fourman, C J, Mulvey and D S Scott (eds) Applications of Sheaves, Lecture notes in math, Vol 753, Springer, 1979, 302 – 401

[A5] Dummett, M, Elements of intuitionism, Oxford Univ Press, 1977

[A6] Troelstra, A and Dalen D van, Constructivism in mathematics, 1, North-Holland, 1988

[A7] Beeson, M J, Foundations of constructive mathematics, Springer, 1985

[A8] Kleene, S C and Vesley, R E, The foundations of intuitionistic mathematics, North-Holland, 1965

眭跃飞 译 卢景波 校

分层 [hierarchy，иерархия]

对某些数学对象按照其定义复杂性进行的分类．最初的分层是在**描述集合论**（descriptive set theory）

(见[3])中构作的．在这些分层中，通过对较简单类中的元素使用集合论运算或拓扑运算来产生更复杂的集类．描述集合论中的最重要的分层是如下定义的．如果 T 是集合 X 的子集族，则 CT 表示由 T 中的所有元素在 X 中的补集组成的集族，且 T_σ 表示由 T 中元素的可数并组成的集族，T_δ 表示由 T 中元素的可数交组成的集族 对一固定的**拓扑空间** (topological space) X，令 F 为 X 的闭子集族，G 为 X 的开子集族 集类序列 $F, F_\sigma, F_{\sigma\delta}, F_{\sigma\delta\sigma}$，· 是按**超限归纳法** (transfinite induction) 定义的，在每一极限序数处取运算 δ 在前边类的并上的运算结果．类似地，处处交换 σ 和 δ，可以得到集类序列 $G, G_\delta, G_{\delta\sigma}, G_{\delta\sigma\delta}$，，其中 $G=CF$, $G_\delta=CF_\sigma$，等等，这样构作的序列形成了 X 的子集的 Borel 分层 (Borel hierarchy)．该分层中的所有类的并称为 X 的 Borel 子集类，记为 B 如果 T 是拓扑空间 X 的子集族，则 PT 表示 T 中元素在 X 到 X 内的连续映射下的所有像组成的集族．则类 $B, PB, CPB, PCPB$，等等，形成了 X 的子集的投影分层 (projective hierarchy)．与此相联系，**解析集** (analytic set，$\mathscr{A}$ 集) 包含 PB，且它的补集 ($C\mathscr{A}$集) 包含 CPB，等等

在数理逻辑中，考察了由逻辑语言公式定义的集合或关系的分层 (见[1], [2], [5])．这些分层中的最重要的例子是基于由如下形式表示的关系 $P(x_1, \quad, x_k)$

$$P(x_1, \quad, x_k) \Leftrightarrow Q_1y_1 \quad Q_ny_nR(x_1, \quad, x_k, y_1, \quad, y_n) \quad (*)$$

这里 $x_1, \quad, x_k, y_1, \quad, y_n$ 是变元，其中一些遍及自然数集 (数变元)．另一些遍及自然数集的子集组成的集合 (集变元)，$Q_1y_1, \cdot, Q_ny_n$ 为量词序列，其中全称量词和存在量词交替出现，也就是说，对任意两个相邻的量词，一个是全称量词，一个是存在量词，$R(x_1, \quad, x_k, y_1, \cdot, y_n)$ 是数变元与集变元之间的任一**递归关系** (recursive relation)．类 Σ_n^0 (Π_n^0，分别地) 是由形如 (*) 表示的所有关系 $P(x_1, \quad, x_k)$ 组成的，其中 $y_1, \cdot, y_n$ 为数变元且 Q_1 为 $\exists$ ($\forall$，分别地)．类 Σ_n^0 和 Π_n^0 ($n=0, 1,$) 形成了 Kleene-Mostowski 算术分层 (Kleene-Mostowski arithmetic hierarchy) (见 **Kleene-Mostowski 分类** (Kleene-Mostowski classification)) 所有这些类的并称为是算术关系类．类 Σ_{n-1}^1 (Π_{n-1}^1，分别地) ($n>1$) 是表示为 (*) 形式的关系 $P(x_1, \quad, x_k)$ 组成的，其中 $y_1, \quad, y_{n-1}$ 是集变元，而 y_n 是数变元，且 Q_1 是 $\exists\forall$，分别地)．算术关系类分别记为 Σ_0^1 和 Π_0^1．类 Σ_n^1, Π_n^1 ($n=0, 1,$) 形成了 Kleene 解析分层 (Kleene analytic hierarchy) $\Delta_1^1=\Sigma_1^1\cap\Pi_1^1$ 中的元素称为超算术的 (hyperarithmetic) (见[2], [5])，他们可被放入它们自己的层次中，且被认为是 Kleene-Mostowski 阶层的扩充

从逻辑语言中的可定义性的观点看，各种分层可以看成是按统一的方式进行的 特别地，Borel 分层中基本类的定义方式与 Kleene-Mostowski 分层中的类的定义方式相类似，而解析分层则类似于投影分层．按照这种方法，有关分层中类的结构的命题具有相同的形式，且常有类似的证明 (见[1])．这种命题的一个例子就是如下的约化原理．设 U 是分层中的类，且设 X, Y 为其中的元素，则存在 U 中的 X_1 和 Y_1，使得 $X_1\subseteq X$, $Y_1\subseteq Y$, $X\cup Y=X_1\cup Y_1$，且 $X_1\cap Y_1=\phi$ 例如，当 U 是 Π_1^1, Σ_2^1 或 CPB, $PCPB$ 时，该原则成立．在**模型论** (model theory) 中，是利用产生类的公式的形式来构作模型的类的分层的 这些分层与上面提及的分层有相似之处 (见[1])．

递归函数 (recursive function) 的分层的构作是在算法论中实现的，构作这种分层的一般方法之一是基于用初始函数与对它的运算 (替换，原始递归，等等) 定义递归函数．在某分层中的前边的类中加上某固定系列递归函数，然后取其在替换和有界递归运算下集合的闭包，可以得到复杂的类 要想得到更复杂的类，除了取在某些运算下的闭包 (如上所述) 之外，还可在 (例如) 简单类的元素上使用原始递归运算 (见[4])．构作递归函数的分层的另一种方法是根据计算复杂性的分类 (见[4])．从递归函数的分层出发，利用集合的特征函数可以构作可判定集的分层．

参考文献

[1] Аддисон, Д Ж, Математическая логика и ее применения, пер с англ, М, 1965, 23–36

[2] Hinman, P, Recursion-theoretic hierarchies, Springer, 1978

[3] Kuratowski, K and Mostowski, A, set theory North-Holland, 1968

[4] Проблемы математической логики, сб переводов, М, 1970

[5] Rogers, jr, H, Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967

А Л Семенов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Barwise, J (ed), Handbook of Mathematical logic, North-Holland, 1977 (especially the article of D A Martin on Descriptive set theory)

[A2] Moschovakis, Y, Descriptive set theory, North-Holland, 1980

张锦文、赵希顺 译

高维几何学 [higher-dimensional geometry; многомерная геометрия]

维数大于三的空间中的几何学，这术语适用于它们的几何学最初是对三维的情形发展起来的，只是后来才对维数 $n>3$ 作推广的那些空间；首先是 Euclid 空间，然后是 Лобачевский, Riemann，射影，仿射，及伪 Euclid等空间 (一般的 Riemann 空间和其他空间是

立即对 n 维定义的．亦见**仿射空间** (affine space); **Euclid 空间** (Euclidean space)，**Лобачевский 空间** (Lobachevskii space)，**射影空间** (projective space); **伪 Euclid 空间** (pseudo-Euclidean space)，**Riemann 空间** (Riemann space, Riemannian space).）现在区分三维几何学和高维几何学主要是有历史上和教学上的意义，因为只要问题是有意义的时候，它们就能对任何维数提出来并予以解决 在提及的这些 n 维空间中建立几何学的做法与三维的情形是类似的．就此而言，直接从三维几何学的几何基础的推广出发，从某些公理系统出发，或是从解析几何的推广（方法是把它在三个坐标情形中的基本结论平移到 n 个任意坐标去）出发来进行就变得可能了 n 维 Euclid 几何学的建立恰好就是这样开始的．

在历史上，高于三维的空间的表示最初是根据乘幂的几何表示逐渐得出的. a^2 是"正方形"，a^3 是"立方体"，但 a^4 等却无图象表示，就说成 a^4 是"双二次的"，a^5 是"立方二次的"等（如同很久以前，Diophantus 在 3 世纪，以及后来一些中世纪的作者所做的那样）．高维空间的思想是由 I. Kant (1746) 表述的，而 J d' Alembert (1764) 则将时间附属于空间写作第四个坐标．建立 n 维几何学的任务是由 A Cayley (1843), H. Grassmann (1844) 与 L Schläfli (1852) 完成的．把这些推广同现实的空间合并所产生的最初的种种怀疑与神秘主义消除了，而 n 维空间作为一种富有成果的正式的数学思想已牢牢地扎根于数学之中

维数 $n\geqslant 3$ 任意的（不排除无限维的情形）Euclid 空间是最容易定义的，它定义成其中有不同的子集，即直线和平面，携有通常的关系 从属关系，序，全等（或用距离或用运动定义），并且其中通常的公理成立，但下列的公理除外 有一公共点的两平面至少还有一公共点．如果这也成立，则该空间必定是三维的；如果这不成立，从而存在有唯一公共点的两平面，则该空间至少是四维的．

平面的概念是以下面的方式推广的 平坦集 (flat) 即包含经过其中任何两点的直线的点集，在这意义上说，所有的空间也都是平坦集．包含给定集合 M 的所有平坦集的交是"M 张成的"平坦集（M 的仿射包）．如果一平坦集由 $m+1$ 个点张成，但不由其中任何较少的点张成，则它称作是 m 维的 (m-dimensional) 或简单地是一 m 平坦集 (m-flat)．一点是 0 平坦集，直线是 1 平坦集，普通的平面是 2 平坦集，三维空间是 3 平坦集．如果一空间是个 n 平坦集，则它就称作是 n 维的．这就是说，对任何给定的 $n\geqslant 3$, 为了定义 n 维 Euclid 空间 E_n，只要增加公理 该空间是一 n 平坦集就足够了．其中对每个 $0\leqslant m\leqslant n-1$，都有一 m 平坦集．满足 $m\geqslant 2$ 的每个 m 平坦集是个 m 维的 Euclid 空间 E_m 因为 4 点总落在一 3 平坦集中，故任何两直线落在一 3 平坦集，即 E_3 中．

在 E_n 中过任何点能画 n 条，但不能再多，相互垂直的直线，并能引入对应的直角坐标 $x_1,\cdots,x_n$，由此，线段 XY 的长度便能用公式

$$XY=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2} \qquad (*)$$

表示．公式 (*) 能用作 E_n 的坐标定义法的基础，它与前面的定义是相等价的 即 E_n 是其中已引进坐标 $x_1,\cdots,x_n$（取一切可能的值）的点集，对每一对点 $X(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $Y(y_1,\cdots,y_n)$，对应一"距离"，它就是数 (*)；这里，我们把那些且仅仅是那些能用距离归结的定义和说法作为 E_n 的几何学．例如，线段 AB 是满足 $AX+XB=AB$ 的所有 X 点的集合，而直线 AB 则是满足 $\pm AX\pm XB=AB$ 的所有 X 点的集合．

与在 E_3 中一样，在 E_n 中可建立向量演算（从几何定义或从坐标定义出发），其区别只是 E_n 中的向量有 n 个分量（相应地，n 个向量可以是无关的） 例如，**内积** (inner product) 是

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\alpha=\sum a_ib_i$$

但**向量积** (vector product) 对 $n>3$ 不能定义，因为一 2 平坦集有不同方向的垂线（过一点的那些垂线填满一个 $(n-2)$ 平坦集）．**双向量** (bivector) 的概念就用来替代向量积 直接的几何法，坐标法与向量法的结合为 E_n 中几何学的发展提供了最完备的种种方法．几何探讨使人们能立即把平面几何学与立体几何学，即 2 与 3 平坦集的几何学，移到 E_n，进而建立起 E_n 自身的立体几何学，它自然地推广了 E_3 的立体几何学 有关垂线，平行平面的一些定理等等．例如，垂直于一 m 平坦集中 m 条直线的一直线垂直于该平坦集中的任何直线．对于 E_n，许多定义和证明是用对 n 施行归纳法的方法给出的．例如，一 n 维的多胞形，或 n 多胞形，是一个体（E_n 中的一有界闭域），其边界由有限个 $(n-1)$ 多胞形构成（亦见**多边形** (polygon)，**多面体** (polyhedron)，**正多边形** (regular polygon)，**正多面体** (regular polyhedra)）．最简单的一些多胞形是 棱柱，它由从一 $(n-1)$ 多胞形的所有点引等长的平行线段构成，棱锥，它由从一点到一 $(n-1)$ 多胞形的所有点引的线段构成，其中最简单的是 n 方体，直棱柱，它的面全是 $(n-1)$ 方体（2 方体是正方形），及以一 $(n-1)$ 单形为底的 n 单形（2 单形是三角形） 用与 E_3 中的体积相同的方法可定义容度．于是，在 E_n 中有 n 种容度 1 容度是长度，2 容度是面积，等等 对一棱柱，n 容度是 $V=Sh$，而对一棱锥，$V=Sh/n$，这里 S 是底的 $(n-1)$ 容度，h 是高．E_n 的几何学中一个广阔的，研究得相当好的领域是凸体的

理论

有关高维几何学的三类事实是能够区分的 1) 从 E_3 直接推广而来的那些事实（例如，刚才提到的有关容度定理），2) 与在各种维数 $m \leqslant n$ 时的类似事实相对应的那些事实（例如，有对称中心的**凸体** (convex body) 由其 m 维射影的 m 容度唯一确定，这里的 $m \geqslant 1$ 且 $m<n$ 是任取的），以及 3) 反映了不同的 E_n 之间本质差异的那些事实（例如，E_3 中的正多胞形的个数等于 5，在 E_4 中它等于 6，而在 E_n 中，$n \geqslant 5$，有三种正多胞形 单形，方体和交叉多胞形，后者是**八面体** (octahedron) 的类似物，又如 E_3 中的凸多面（不是三面）角是不稳定的，在 $n>3$ 的 E_n 中它总是刚性的，E_3 与 $n>3$ 的 E_n 中的曲面论是根本不一样的）

Лобачевский 空间 Λ_n 和仿射空间 A_n 的定义与 E_n 完全类似 将平行公理作如同 Λ_2 中的改动，Λ_n 便满足与 E_n 相同的公理，而在 A_n 中，除了全等的那些公理以外，E_n 的所有公理也都成立，且全等概念本身也去掉了，类似地，用变更关联公理的方法能定义 n 维射影空间 P_n 定义这种空间的另一个方法引入坐标并给出它的变换群，这时，几何关系就是且仅是那些在该群下不变的关系．在 E_n 的情形这个群是相似群（正交变换与伸缩的复合），对 A_n，这是所有线性（非齐次）变换构成的群，亦见**射影几何学** (projective geometry)，**Лобачевский 几何学** (Lobachevskiĭ geometry)

伪 Euclid 空间能用坐标来定义 E_n^{n-m} 是携有坐标 $x_1, \quad, x_n$ 的集合，而两点 X 与 Y 之间的“间距”是

$$(x_1-y_1)^2+\quad+(x_m-y_m)^2-(x_{m-1}-y_{m-1})^2-\quad-(x_n-y_n)^2$$

的平方根，能用间距的术语归结的那些定义和说法看成是几何的，即关于保持间距关系的变换群不变的那些定义和说法 在狭义相对论中**时空** (space-time)（即 **Minkowski 空间** (Minkowski space)）定义成 E_4^1，间距是

$$c^2(t_1-t_2)^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2$$

的平方根，其中 t 是时间，x, y, z 是给定参考标架中的空间坐标，$c=$ 常数是光速

А Д Александров 撰

【补注】 换言之，平坦集即仿射子空间（亦见**仿射空间** (affine space)）.

参考文献

[A1] Sommerville, D M Y, An introduction to the geometry of n dimensions, Methuen, 1929

[A2] Coxeter, H S M, Introduction to geometry, Wiley, 1969, 185-186, 396-404

姜国英 译 杨 路 校

Hilbert 代数 [Hilbert algebra, Гильбертова алгебра]

复数域上具对合的代数 A（见**对合代数** (involution algebra)），其上定义了非退化标量积 $(\,|\,)$，该标量积满足如下公理 1) 对一切 $x, y \in A$, $(x|y)=(y^*|x^*)$, 2) 对一切 $x, y \in A$, $(xy|z)=(y|x^*z)$; 3) 对所有 $x \in A$, 从 A 到 A 的映射 $y \to xy$ 连续，4) 形若 xy, $x, y \in A$ 的元素之集合在 A 中处处稠密．Hilbert 代数的例子包括代数 $L_2(G)$（关于卷积），其中 G 是紧拓扑群，以及给定的 Hilbert 空间上的 **Hilbert-Schmidt 算子** (Hilbert-Schmidt operator) 的代数.

设 A 是 Hilbert 代数，H 是 A 的完全化 **Hilbert 空间** (Hilbert space)，U_x, V_x 是 H 上有界线性算子代数中的元素，它们是 A 中元素 x 的左乘和右乘算子的连续扩张 映射 $x \to U_x$（相应地，$x \to V_x$）是 A（相应地，反代数）在 H 上的非退化表示 算子族 U_x（相应地，V_x）的弱闭包是 H 中的 **von Neumann 代数** (von Neumann algebra)，它称为给定的 Hilbert 代数 A 的左（相应地，右）von Neumann 代数，记作 $U(A)$（相应地，$V(A)$），$U(A)$ 和 $V(A)$ 互为换位子，它们是半有限的 von Neumann 代数 任何 Hilbert 代数明确决定 von Neumann 代数 $U(A)$ 上的某个特定的正规半有限迹（见 **C^* 代数上的迹** (trace on a C^*-algebra)） 反之，如果一个 von Neumann 代数 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 上具体的半有限迹给定，那么有可能构造一个 Hilbert 代数使该 Hilbert 代数的左 von Neumann 代数同构于 $\mathfrak{A}$，且由 $\mathfrak{A}$ 上该 Hilbert 代数决定的迹和原来的迹一致 ([1]) 于是 Hilbert 代数是研究半有限 von Neumann 代数和其上迹的工具．Hilbert 代数概念的一个推广使得可以用类似的工具研究不必半有限的 von Neumann 代数 ([2])

参考文献

[1] Dixmier, J, Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien algèbres de von Neumann, Gauthier-Villars, 1957

[2] Takesaki, M, Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Springer, 1970

А И Штерн 撰 余庆余 译

Hilbert 立方体 [Hilbert cube, Гильбертов кирпич]

Hilber 空间 (Hilbert space) l_2 的子空间，它的点 $x=(x_1, x_2, \quad)$ 满足条件 $0 \leqslant x_n \leqslant (\frac{1}{2})^n$, $n=1, 2, \cdots$ Hilbert 立方体是一个**紧统** (compactum)，拓扑等价（同胚）于可数多个区间的 Тихонов 积，即 **Тихонов 立方体** (Tikhonov cube) $I^{\aleph_0}$ 这是具有可数基的度量空间类中的**万有空间** (universal space)（Урысон 度量化定理 (Urysohn metrization theorem)）

Б А Пасынков 撰

【补注】 Hilbert 立方体的拓扑结构是在无穷维拓扑这一领域内得到研究的（见**无穷维空间** (infinite-dimen-

sional space)) 这是一个内容丰富成果丰硕的研究领域.

[A1] 中有绝好的介绍及参考文献

参考文献

[A1] Mill, J van, Topology, with an introduction to infinite-dimensional spaces, North-Holland, 1988

胡师度、白苏华 译

Hilbert-Euler 问题 [Hilbert-Euler problem, Гильберта-Эйлера проблема]

Goldbach-Euler 问题(见 **Goladbach 问题** (Goldbach problem)) 的一种推广 根据 Goldbach-Euler 问题, 任何大于 2 的偶自然数皆可表为两个素数的和.

Hilbert-Euler 问题 (Hilbert-Euler problem) 是作为关于素数的一个问题 (Hilbert 第八问题) 的一部分由 D Hilbert ([1]) 明确予以表述的. 实际上, Hilbert 提出了一个假设, 根据这一假设, 解决素数分布问题既可以解决 Goldbach-Euler 问题, 又可以解决系数是给定的互素整数的线性 Diophantus 方程

$$ax+by+c=0$$

关于素数的可解性这一更为一般的问题

Hilbert-Euler 问题的一个特例是**孪生素数问题** (problem of twins) 除了一些平凡的情形外, 到 1989 年为止, Hilbert-Euler 问题的所有特殊情形都还没有获得解决. 亦见**加性问题** (additive problems)

参考文献

[1] Hilbert problems, *Bull Amer Math Soc*, **8** (1902), 437-479

С М Воронин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Browder, F (ed), Mathematical developments arising from Hilbert problems, Proc Symp Pure Math, **28** Amer Math Soc, 1976

张明尧 译 徐广善 校

Hilbert 几何学 [Hilbert geometry, Гильберта геометрия]

具度量 $h(x, y)$ 的完全度量空间 H 的几何学, 对其中任意两个不同的点 x 与 y, 空间 H 还含有点 z 与 t, 使得 $h(x, z)+h(z, y)=h(x, y)$, $h(x, y)+h(y, t)=h(x, t)$, 并且空间 H 同胚于 n 维仿射空间 A^n 中的一凸集, 使得测地线 $\gamma\in H$ 映到 A^n 中的直线 于是, 设 K 是 A^n 中的一凸体, 其边界 ∂K 不含两条非共线的线段, 并设 $x, y\in K$ 位于交 ∂K 于 a 与 b 的直线 l 上, 设 $R(x, y, a, b)$ 是 x, y, a, b 的交比 (从而若 $x=(1-\lambda)a+\lambda b$, $y=(1-\mu)a+\mu b$, 则 $R(x, y, a, b)=\mu(1-\lambda)/\lambda(1-\mu)$) 这时,

$$h(x, y)=\frac{1}{2}\,|\ln R(x, y, a, b)|$$

是一种 Hilbert 几何学的度量 (Hilbert 度量 (Hilbert metric)). 如果 K 是中心对称的, 则 $h(x, y)$ 是一 Minkowski 度量 (见 **Minkowski 几何学** (Minkowski geometry)), 如果 K 是椭球, 则 $h(x, y)$ 便定义 Лобачевский 几何学.

使测地线为直线的 K 的所有度量化的确定问题是 Hilbert 第四问题, 它已被完全解决 (见 [4]).

测地几何学 (geodesic geometry) 是 Hilbert 几何学的一种推广.

Hilbert 几何学最早是在 1894 年, D. Hilbert 在给 F. Klein 一封信中提及的.

参考文献

[1] Hilbert, D, Grundlagen der Geometrie, Springer, 1913 (中译本 D 希尔伯特, 几何基础, 科学出版社, 1987)

[2] Hilbert problems, *Bull Amer Math Soc*, **8** (1902), 437-479

[3] Busemann, H, The geometry of geodesics, Acad Press, 1955

[4] Погорелов, А В, Четвертая проблема Гильберта, М, 1974 (英译本 Pogorelov, A V, Hilbert's fourth problem, Winston & Wiley, 1974)

М И Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Busemann, H and Kelly, P, Projective geometry and projective metrics, Acad Press, 1953

[A2] Berger, M, Geometry, 1, Springer, 1987 (中译本 M 贝尔热, 几何, 第一卷, 1987)

姜国英 译

Hilbert 不等式 [Hilbert inequality, Гильберта неравенство]

D Hilbert 关于二重级数的一条定理·

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n b_m}{n+m}<\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left[\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p\right]^{1/p}\left[\sum_{m=1}^{\infty}b_m^q\right]^{1/q}, \quad (*)$$

其中

$$p>1,\ q=\frac{p}{p-1},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ a_n, b_m\geqslant 0,$$

并且假定右边级数有有限正和. 常数 $\pi/\sin(\pi/p)$ 是精确的, 即它不能减小 (*) 对 $p=2$ 的正确性, 被 Hilbert 在他的积分方程课程中证明, 那里未考虑常数的精确性. 它的证明被 H Weyl ([1]) 发表 精确常数由 I. Schur ([2]) 找到, 而对任意 $p>1$ 不等式 (*) 首先被 G H. Hardy 与 M Riesz 在 1925 年引用. (*) 有积分类似与推广, 例如

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}K^{\lambda}(x, y)f(x)g(y)\,dx\,dy\leqslant K^{\lambda}\left[\int_0^{\infty}f^p(x)dx\right]^{1/p}\left[\int_0^{\infty}g^r(y)dy\right]^{1/r},$$

其中 $K(x, y)$ 为 -1 次齐次的非负核, $p>1$, $r>1$, $\lambda=p^{-1}+r^{-1}\leqslant 1$, $f, g\geqslant 0$ 且

$$K=\int_0^{\infty} u^{-1/\lambda q}K(1,u)du,$$

并且以前曾得到此不等式关于核 $K(x+y)=1/(x+y)$(所谓双参数 Hilbert 不等式)与常数 $K^\lambda=(\pi/\sin\lambda q)^\lambda$ 的特例([4]). 此常数的精确性曾对 $p=r/(r-1)$ 证明 它对任意容许的固定值 r 当 $p\to 1$ 时也是渐近精确的 对有限和 ($1\leqslant n$, $m\leqslant N$) (*) 中常数的渐近性态问题至今(1988) 尚未解决，只知道对 $p=q=2$ 时，此常数是

$$\pi-\frac{1}{2}\pi^5(\ln N^2)+O(\ln\ln\{N(\ln N)^{-3}\}).$$

参考文献

[1] Weyl, H, Singulare Integralgleichungen mit besonderer Berucksichtigung des Fourierschen Integraltheorems, Gottingen, 1908 Thesis

[2] Schur, I, Bemerkungen zur Theorie der beschrankten Bilinearformen mit unendlich vielen Veranderlichen, *J Reine Angew Math*, **140** (1911), 1-28

[3] Hardy, G H, Littlewood, J E and Pólya, G, Inequalities, Cambridge Univ Press, 1934 (中译本 G H 哈代, J E 李特伍德, G 波利亚, 不等式, 科学出版社, 1965)

[4] Bonsall, F F, Inequalities with non-conjugate parameters, *Quart J Math Oxford* (2), **2** (1951), 135-150

[5] Levin, V, On the two-parameters extension and analogue of Hilbert's inequality, *J London Math Soc* (1), **11** (1936), 119-124

[6] Bruijn, N G de and Wilf, H S, On Hilbert's inequality in n dimensions, *Bull Amer Math Soc*, **68** (1962), 70-73

[7] Walker, P L, A note on an inequality with non-conjugate parameters, *Proc Edinburgh Math Soc*, **18** (1973), 293-294

E K Годунова 撰 郑维行 译

Hilbert 不变积分 [Hilbert invariant integral, Гильберта инвариантный интеграл]

对一个闭**微分形式** (differential form) 的曲线积分，这个闭微分形式是变分学中的一个泛函的作用的导数. 对泛函

$$J(x)=\int L(t,x^i,\dot{x}^i)\,dt$$

求称作**场** (field) 的向量函数 $U^i(t,x^i)$，使得积分

$$J^*=\int_\gamma\left[(L(t,x^i,U^i(t,x^i))-\sum_{k=1}^n U^k(t,x^i)\frac{\partial L(t,x^i,U^i(t,x^i))}{\partial\dot{x}^k}\right]dt+\sum_{k=1}^n\frac{\partial L(t,x^i,U^i(t,x^i))}{\partial\dot{x}^k}dx^k$$

不依赖于积分路径. 如果这样的函数存在，那么称 J^* 为 Hilbert 不变积分 (Hilbert invariant integral). 积分号下微分形式的闭性条件产生一个一阶偏微分方程组

Hilbert 不变积分用最自然的方式统一了 Weierstrass 理论和 Hamilton-Jacobi 理论. 由于 J^* 的不变性, Hilbert 不变积分在连结两点 $P_0=(t_0,x_0^i)$ 和 $P_1=(t_1,x_1^i)$ 的曲线上的值就成为这对点的称作**作用** (action) 的函数 $S(P_1,P_2)$ 等位线 $S=$ 常数称作场 $U^i(t,x^i)$ 的**横截** (transversal). 方程 $\dot{x}^i=U^i(t,x^i)$ 的解是泛函 $J(x)$ 的**极值曲线** (extremals) 反之，如果某个区域被一个极值曲线场所覆盖，那么由函数 $U^i(t,x^i)$ (它等于通过点 (t,x^i) 的极值曲线的导数) 所构造的积分 J^* 是 Hilbert 不变积分. 类似的周线的可能性，也就是说，构造 Hilbert 不变积分的可能性，通常就作为 **Jacobi 条件** (Jacobi condition).

如果由极值曲线 $x_0^i(t)$ 所连结的点 P_0 和 P_1 位于一个场中，而曲线 $x^i(t)$ 在这个场所覆盖的区域中经过，那么从 Hilbert 不变积分的不变性和等式 $dx_0^i/dt=U^i(t,x_0^i(t))$ 就可得到有关泛函增量的 **Weierstrass 公式** (Weierstrass formula), 因而也得到极值的 Weierstrass 充分条件 (见 **Weierstrass 条件 (对变分极值的)** (Weierstrass conditions (for a variational extremum))).

对一定点 P_0，作用 $S(P_0,P)$ 是点 $P=(t,x^i)$ 的函数 $S(t,x^i)$，且 $J^*=\int dS$. 转化到标准坐标

$$p_k(t,x^i)=\frac{\partial L(t,x^i,U^i(t,x^i))}{\partial\dot{x}^k},$$

就可将 Hilbert 不变积分写成

$$J^*=\int dS=\int-H(t,x^i,p_i(t,x^i))\,dt+\sum_{k=1}^n p_k(t,x^i)dx^i,$$

其中

$$H=\sum_{k=1}^n p_kU^k-L,$$

$$\frac{\partial S(t,x^i)}{\partial t}+H(t,x^i,p_i(t,x^i))=0;$$

$$\frac{\partial S(t,x^i)}{\partial x^i}=p_i(t,x^i).$$

这些关系式等价于 Hamilton-Jacobi 方程 (见 **Hamilton-Jacobi 理论** (Hamilton-Jacobi theory)).

对测地线场的积分 J^* 由 E Beltrami ([1]) 在 1868 年引进，而对一般情形则由 D Hilbert ([2]-[4]) 于 1900 年引进.

参考文献

[1] Beltrami, E, *Rend R Istor Lombardo Sci Let.*, **1** (1868),

2, 708 – 718

[2] Hilbert, D, Mathematische probleme, *Nachr Ges Wiss Göttingen* (1900), 253 – 297

[3] Hilbert problems, *Bull Amer Math Soc*., **8** (1902), 437 – 479

[4] Hilbert, D, Zur Variationsrechnung, *Math Ann*, **62** (1906), 351 – 370

[5] Ахиезер, Н И, Лекции по вариационному исчислению, М, 1955, 55 – 56 (英译本 Akhiezer, N I, The calculus of variations, Blaisdell, 1962)

[6] Гельфанд, И М, Фомин, С В, Вариационное исчисление, М, 1961, 135 – 146 (英译本 Gel'fand, I M and Fomin, S V, Calculus of variations, Prentice-Hall, 1963)

[7] Carathéodory, C, variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Teubner, 1956.

[8] Young, L, Lectures on the calculus of variations and optimal control theory, Saunders, Philadelphia, 1969.

В М Тихомиров 撰 孙和生 译 陆柱家 校

Hilbert-Kamke 问题 [Hilbert-Kamke problem; Гильберта-Камке проблема]

Waring 型 **Diophants 方程** (Diophantine equations) 组

$$\left.\begin{aligned} x_1^n + \quad + x_s^n &= N_n, \\ x_1^{n-1} + \quad + x_s^{n-1} &= N_{n-1}, \\ & \\ x_1 + \quad + x_s &= N_1 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

的相容性问题，其中 $x_1, \quad, x_s$ 取非负整数值，对于数 $N_n, \cdot, N_1$ 有某些附加的限制([3])，而 s 是一个充分大的数，它只与一个预先给定的自然数 n 有关．

Hilbert-Kamke 问题由 D. Hilbert 于([1])于 1900 年提出，而为 E Kamke 解决 他证明了 事实上(*)有解存在．1937 年 К К Марджанишвили ([3]) 利用估计三角和的 **Виноградов 法** (Vinogradov method) 求得了这个方程组解数的渐近公式

参考文献

[1] Hilbert, D, Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n^ter Potenzen (Waringsches Problem), *Math Ann*, **67** (1909), 281 – 300

[2] Виноградов, И М, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М, 1971 (英译本 Vinogradov, I M, The method of trigonometric sums in the theory of numbers, Interscience, 1954)

[3] Марджанишвили, К К, 《Изв АН СССР Сер матем》, 1937, 609 – 631

Б М Бредихин 撰 张明尧 译 徐广善 校

Hilbert 核 [Hilbert kernel, Гильберта ядро]

Hilbert 奇异积分 (Hilbert singular integral) 的核，即函数

$$\cot an\,\frac{x-s}{2}, \quad 0 \leqslant x,\ s \leqslant \pi$$

在单位圆的情况下，Hilbert 核与 **Cauchy 核** (Cauchy kernel) 之间存在下列关系式

$$\frac{dt}{t-\tau} = \frac{1}{2}\left[\cot an\,\frac{x-s}{2} + i\right] dx,$$

其中 $t = e^{ix}$, $\tau = e^{is}$

Б В Хведелидзе 撰

【补注】

参考文献

[A1] Moiseiwitsch, B L, Integral equations, Longman, 1977

张鸿林 译

Hilbert 多项式 [Hilbert polynomial; Гильберта многочлен]，分次模 $M = \oplus_n M_n$ 的

对于大自然数 n，将该模齐次分量的维数表示为 n 的函数的多项式．更确切地说，本质上是由 D Hilbert 证明的下述定理成立．设 $A = K[X_0, \cdot, X_m]$ 是域 K 上的多项式环，X_i 为一次齐次元．设 $M = \oplus_n M_n$ 是有限型分次 A 模，则存在一个有理系数多项式 $P_M(t)$，当 n 充分大时，$\dim_K M_n = P_M(n)$ 这个多项式称为 Hilbert 多项式 (Hilbert polynomial)．

意义最大的 Hilbert 多项式是分次环 R 的这种多项式，这里的 R 为 A 对其齐次理想 I 的商环．这时 Hilbert 多项式给出了 I 所定义的射影簇 $X = \operatorname{Proj}(R) \subset P^m$ 的射影不变量 特别地，$P_R(t)$ 的次数即为 X 的维数，而 $p_a(X) = (-1)^{\dim X}(P_R(0) - 1)$ 称为 X 的**算术亏格** (arithmetic genus) Hilbert 多项式也可用于表示嵌入 $X \subset P^m$ 的次数．环 R 的 Hilbert 多项式也称为射影簇 X 关于嵌入 $X \subset P^m$ 的 Hilbert 多项式．若 $\mathcal{O}_X(1)$ 是对应这个嵌入的可逆层，则当 n 充分大时，

$$P_R(n) = \dim_K H^0(X, \mathcal{O}_X(1)^{\otimes n}).$$

参考文献

[1] Hilbert, D, Gesammelte Abhamdlungen, 2, Springer, 1933

[2] Baldassarri, M, Algebraic varieties, Springer, 1956

[3] Zariski, O and Samuel, P, Commutative algebra, I, Springer, 1975

В И Данилов 撰 裴定一 译 赵春来 校

Hilbert 概形 [Hilbert scheme, Гильберта схема]

代数几何学中一种构造，用这种构造对射影空间的具有给定的 **Hilbert 多项式** (Hilbert polynomial) 的闭子簇的集合赋予**代数簇** (algebraic variety) 的结构．准确地讲，设 X 是在局部 Noether 概形 S 上的射影概形，设 $\mathrm{Hilb}_{X/S}$ 是这样的函子，对每一个 S 概形 S'，

对应于在 S^* 上平坦的闭子概形的集合 $X^* = X \times_S S^*$ 函子 $\mathrm{Hilb}_{X/S}$ 可局部地用一个 Noether 概形表示，称这个概形为 S 概形 X 的 Hilbert 概形，记为 Hilb(X/S)([4]) 由**可表示函子** (representable functor)的定义，对任一 S 概形 S^* 有一个一一映射 $\mathrm{Hilb}_{X/S}(S^*) = \mathrm{Hom}_S(S^*, \mathrm{Hilb}(X/S))$. 特别地，当 S 为一个域 k 的谱（见**环的谱** (spectrum of a ring))，而 $X = P_k^n$ 为 k 上的射影空间时，$\mathrm{Hilb}(P_k^n/k)$ 的有理 k 点的集合与 P_k^n 的闭子簇的集合一一对应.

对任一有理系数多项式 $P \in \mathbf{Q}[x]$，函子 $\mathrm{Hilb}_{X/S}$ 包含一个子函子 $\mathrm{Hilb}_{X/S}^P$，它在集合 $\mathrm{Hilb}_{X/S}(S^*)$ 中分离出这样的子概形的子集 $Z \subset X \times_S S^*$，使得对任何点 $s^* \in S^*$，Z 在 S^* 上的投影的纤维 Z_{s^*} 以 P 为其 Hilbert 多项式．函子 $\mathrm{Hilb}_{X/S}$ 可用 Hilbert 概形 $\mathrm{Hilb}^P(X/S)$ 来表示，后者在 S 上是射影的．概形 Hilb(X/S) 是对所有 $P \in \mathbf{Q}[x]$ 取的概形 $\mathrm{Hilb}^P(X/S)$ 的直和．当基概形 S 连通时，概形 $\mathrm{Hilb}^P(X/S)$ 也连通（[2]）.

参考文献

[1] Mumford, D , Lectures on curves on an algebraic surface, Princeton Univ Press, 1966

[2] Mumford, D, Geometric invariant theory, Springer, 1965

[3] Grothendieck, A , Techniques de construction et théorèmes d'existence en geométrie algébrique, IV Les schémas de Hilbert, in Sem Bourbaki, Vol 13 1960－1961

[4] Hartshorne, R , Connectedness of the Hilbert scheme, *Publ Math IHES*, **29** (1966), 5－48

[5] Итоги науки , Алгебра Геометрия Топология, т 10, 1972, 47－113　　　И В Долгачев 撰　刘先仿 译

Hilbert - Schmidt 积分算子 [Hilbert - Schmidt integral operator, Гильберта-Шмидта интегральный оператор]

一个由空间 $L_2(X, \mu)$ 到 $L_2(X, \mu)$ 中的有界线性**积分算子** (integral operator) T，且可表示成形式

$$(Tf)(x) = \int_X K(x, y) f(y) \mu(dy), \quad f \in L_2(X, \mu),$$

其中 $K(\cdot, \cdot) \in L_2(X \times X, \mu \times \mu)$ 是算子的核（见**积分算子的核** (kernel of an integral operator)) ([1])

D Hilbert 及 E. Schmidt 于 1907 年首先研究了这类算子 Hilbert - Schmidt 积分算子是**完全连续算子** (completely - continuous operator) ([2]) 它的伴随是以 $K(y, x)$ 为核的 Hilbert - Schmidt 积分算子([3]) Hilbert - Schmidt 积分算子是**自伴算子** (self - adjoint operator)，当且仅当对几乎所有的 $(x, y) \in X \times X$, $K(x, y) = K(y, x)$ (关于 $(\mu \times \mu)$) 对于自伴的 Hilbert - Schmidt 积分算子以及它的核，下面的展开式成立

$$(Tf)(x) = \sum_n \lambda_n (f, \varphi_n) \varphi_n, \quad f \in L_2(X, \mu), \quad (1)$$

$$K(x, y) = \sum_n \lambda_n \varphi_n(x) \varphi_n(y), \quad (2)$$

其中 $\{\varphi_n\}$ 是 T 对应于本征值 $\lambda_n \neq 0$ 的本征函数的规范正交系．级数 (1) 关于 $L_2(X, \mu)$ 的范数收敛，而级数 (2) 则关于 $L_2(X \times X, \mu \times \mu)$ 的范数收敛 ([4]) 在 **Mercer 定理** (Mercer theorem) 的条件下，级数 (2) 绝对且一致收敛 ([5])

如果

$$\int_X |K(x, y)|^2 \mu(dy) \leqslant C, \text{ 对所有 } x \in X,$$

那么级数绝对且一致收敛 ([4])

如果 μ 是一个 σ 有限测度，那么线性算子

$$T \; L_2(X, \mu) \to L_2(X, \mu)$$

是一个 Hilbert - Schmidt 积分算子，当且仅当存在函数 $M(\cdot) \in L_2(X, \mu)$，使得不等式

$$|(Tf)(x)| \leqslant M(x) \, \|f\|$$

对几乎所有的 $x \in X$ 成立（关于测度 μ) ([7]). 这样，Hilbert - Schmidt 积分算子构成了由 $L_2(X, \mu)$ 到 $L_2(X, \mu)$ 中的所有有界线性算子的 Banach 代数中的一个双边理想．

Hilbert - Schmidt 积分算子在积分方程理论以及边值问题的理论中起着重要作用 ([8], [9])，这是因为在数学物理的很多问题中出现的算子，要么它们本身是 Hilbert - Schmidt 积分算子，要么它们的某一阶迭代是这样的算子 Hilbert - Schmidt 积分算子的一个自然推广是 **Hilbert - Schmidt 算子** (Hilbert - Schmidt operator).

参考文献

[1] Dunford, N and Schwartz, J T , Linear operators, Spectral theory, 2, Interscience, 1963

[2] Yosida, K , Functional analysis, Springer, 1980 (中译本 吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1981)

[3] Stone, M H , Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, Amer Math Soc , 1932

[4] Riesz, F and Szokefalvi - Nagy, B , Functional analysis, F Ungar, 1955 (中译本 F 黎茨，B 塞克佛尔维 - 纳吉，泛函分析讲义，科学出版社，1963，1980)

[5] Dieudonné, J A , Foundations of modern analysis, Acad Press, 1961 (中译本 J 迪厄多内，现代分析基础，第一、二卷，科学出版社，1982，1986)

[6] Канторович, Л В [и др] , Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М , - Л , 1950 (中译本 Л В 康托洛维奇，半序空间泛函分析，上、下册，高等教育出版社，1960)

[7] Weidmann, J , Carleman operatoren, *Manuscripta Math* , **2** (1970), 1, 1 － 38

[8] Moren, K , Methods of Hilbert spaces, PWN, 1967 (译自波兰文)

[9] Березанский, Ю М , Разложение по собственным функ-

циям самосопряженных операторов, К , 1965(英译本 Berezanskii, Yu M , Expansion in eigenfunctions of self-adjoint operators, Amer Math Soc , 1968

В Б Коротков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gohberg, I and Goldberg, S , Basic operator theory, Birkhauser, 1977

[A2] Ахиезер, Н И , Глазман, И, М , Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, изд Хар , 1978 (英译本 Akhiezer, N I and Glazman, I. M , Theory of linear operators in Hilbert space, 1-2, Pitman, 1981)

王声望 译 郑维行 校

Hilbert-Schmidt 范数 [Hilbert-Schmidt norm, Гильберта-Шмидта норма]

由等式 $|T| = (\sum_{\alpha\in A} \| Te_\alpha \|^2)^{1/2}$ 给出的从 Hilbert 空间 H 到 Hilbert 空间 H_1 中的线性算子 T 的范数，其中 $\{e_\alpha\ \alpha\in A\}$ 为 H 中的一个规范正交基. Hilbert-Schmidt 范数满足范数的全部公理而且不依赖于基的选择. 它的性质是 $\|T\| \leqslant |T|, |T| = |T^*|, |T_1T_2| \leqslant \|T_1\| \, |T_2|$，其中 $\|T\|$ 是 T 在 Hilbert 空间中的范数. 如果 $H_1 = H$，那么

$$|T| = \left\{ \sum_{\alpha,\beta\in A} |(Te_\alpha, e_\beta)|^2 \right\}^{1/2}$$

参考文献

[1] Dunford, N and Schwartz, J T , Linear operators, Spectral theory, 2, Interscience, 1963

[2] Гельфанд, И М , Виленкин, Н Я , Некоторые применения гармонического анализа, Оснащенные гильбертовы пространсва, М , 1961 (中译本 И М 盖尔芳特等, 广义函数, IV, 科学出版社, 1965)

В Б Коротков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ахиезр, Н И , Глазман, И М , Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд М , 1966 (英译本 Akhiezer, N I and Glazman, I M , Theory of linear operators in Hilbert Space, 1-2, Pitman, 1981)

王声望 译 郑维行 校

Hilbert-Schmidt 算子 [Hilbert-Schmidt operator, Гильберта-Шмидта оператор]

一个作用于 Hilbert 空间 H 上的算子，使得对 H 中的任何规范正交基 $\{x_i\}$，下述条件满足

$$\|A\|^2 = \sum_i \|Ax_i\|^2 < \infty$$

(然而，这只需对某个基成立). 一个 Hilbert-Schmidt 算子是**紧算子**(compact operator)，对于它，条件

$$\sum_i |\lambda_i(A)|^2 \leqslant \sum_i s_i^2(A) = \|A\|^2 = \mathrm{Tr}(A^*A)$$

适用于它的 s 数 $s_i(A)$ 以及它的本征值 $\lambda_i(A)$，其中 A^*A 是一个迹类算子 (A^* 是 A 的伴随，而 $\mathrm{Tr}\, C$ 是算子 C 的迹) 一个固定的空间 $H^{(1)}$ 上所有的 Hilbert-Schmidt 算子的集合构成一个具有标量积

$$<A, B> = \mathrm{Tr}(AB^*)$$

的 Hilbert 空间 如果 $R_\lambda(A) = (A - \lambda E)^{-1}$ 是 A 的预解式，且

$$\det{}_2(E - zA) = \prod_i (1 - z\lambda_i(A)) e^{z\lambda_i(A)}$$

是它的正则化特征行列式(regularized characteristic determinant)，那么 Carleman 不等式 (Carleman inequality)

$$\left\| \det{}_2 \left[E - \frac{1}{\lambda} A \right] R_\lambda(A) \right\| \leqslant |\lambda| \exp\left[\frac{1}{2} \left[1 + \frac{\|A\|^2}{|\lambda|^2} \right] \right]$$

成立

Hilbert-Schmidt 算子的一个典型代表是 **Hilbert-Schmidt 积分算子** (Hilbert-Schmidt integral operator) (它说明了名称的起源).

М И Войцеховский 撰

【补注】 A 的 s 数或奇异值(singular values)是自共轭算子 A^*A 的 (正) 本征值 代替 Hilbert-Schmidt 算子，人们也说 "Hilbert-Schmidt 类的" 算子. Hilbert 空间上的有界算子称为属于迹类 (trace class)，如果对于任意的完全规范正交系 $\{\varphi_j\}, \{\psi_j\}$ 有 $\sum < T\varphi_j, \psi_j > < \infty$ 等价地，T 属于迹类，如果 $\sum s_i(T) < \infty$ 这样一个算子的迹定义为 $\sum < T\varphi_j, \varphi_j >$，其中 $\{\varphi_j\}$ 是任意一个规范正交基. 两个 Hilbert-Schmidt 算子的乘积是一个迹类算子，而且其逆也成立

以上条目中的范数 $\|A\|$ 不是通常的算子范数，而是它的 **Hilbert-Schmidt 范数** (Hilbert-Schmidt norm)

参考文献

[A1] Reed, M and Simon, B , Methods of mathematical physics, 1 Functional analysis, Acad Press, 1972

[A2] Gohberg, I and Goldberg, S , Basic operator theory, Birkhauser, 1977

[A3] Akhiezer, N I and Glazman, I M , Theory of linear operators in Hilbert space, 1-2, Pitman, 1981 (译自俄文)

王声望 译 郑维行 校

Hilbert-Schmidt 级数 [Hilbert-Schmidt series, Гильберта-Шмидта ряд]

函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(x), \qquad (*)$$

其中$\{\lambda_n\}$是由对称核（见**积分算子的核**（kernel of an integral operator））$K(x, s)$ $(a\leqslant x, s\leqslant b)$ 的一切本征值组成的序列，$\{\varphi_n(x)\}$是对应的规范正交本征函数序列，而(f, φ_n)是一个任意平方可和函数f和函数φ_n的标量积.

Hilbert-Schmidt 定理（Hilbert-Schmidt theorem） 如果核$K(x, s)$是两个变量的可和函数，则级数(*)平均收敛于函数

$$\int_a^b K(x, s)f(s)ds$$

如果存在一个常数C，使得对一切$x\in(a, b)$不等式

$$\int_a^b |K(x, s)|^2 ds \leqslant C$$

成立，则 Hilbert-Schmidt 级数绝对和一致收敛.

Б В Хведелидзе 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gohberg, I and Goldberg, S , Basic operator theory, Birkhauser, 1981

张鸿林 译

Hilbert 奇异积分 [Hilbert singular integral, Гильберта сингулярный интеграл]

反常积分（在 Cauchy 主值的意义下）

$$\widetilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cot\frac{x-t}{2}\,dt,$$

其中周期函数f称为 Hilbert 奇异积分的密度（density），而$\cot\{(x-t)/2\}$称为这个积分的核（kernel） 如果f是可和的，则$\widetilde{f}$几乎处处存在，如果f满足指数为$\alpha(0<\alpha<1)$的 Lipschitz 条件，则对于任何x，$\widetilde{f}$存在，并且也满足这个条件．如果f的$p(p>1)$次幂是可和的，则$\widetilde{f}$具有同样的性质，且有

$$\left\{\int_0^{2\pi}|\widetilde{f}(x)|^p dx\right\}^{1/p} \leqslant M_p\left\{\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\right\}^{1/p},$$

其中M_p是与f无关的常数．此外，Hilbert 奇异积分的反演公式（inversion formula）成立

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\widetilde{f}(t)\operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$$

函数$\widetilde{f}$称为与f是共轭的（conjugate）

参考文献

[1] Hilbert, D , Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Chelsea, reprint, 1953

[2] Riesz, M , Sur les fonctions conjugées, *Math Z* , 27 (1927), 218 - 244

[3] Бари, Н К , Тригонометрические ряды, М , 1961 (英译本 Bary, N K , A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964)

[4] Мусхелишвили, Н И , Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд , М , 1968 (中译本 Н И 穆斯海里什维里，奇异积分方程，上海科学技术出版社，1966)

Б В Хведелидзе 撰

【补注】 亦见 **Hilbert 核**（Hilbert kernel），**Hilbert 变换**（Hilbert transform）

参考文献

[A1] Zygmund, A , Trigonometric series, 1 - 2, Cambridge Univ Press, 1988

[A2] Moiseiwitsch, B L , Integral equations, Longman, 1977

张鸿林 译

Hilbert 空间 [Hilbert space, Гильбертово пространство]

复（或实）数域上的**向量空间**（vector space）H，带有一个定义在$H\times H$上的复值（或实值）函数(x, y)，具有以下性质

1) $(x,x)=0$ 当且仅当 $x=0$，

2) 对一切$x\in H$，有 $(x,x)\geqslant 0$，

3) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$, $x,y,z\in H$;

4) $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$, $x,y\in H$, α为复（或实）数，

5) $(x,y)=\overline{(y,x)}$, $x,y\in H$,

6) 如果 $x_n\in H$, $n=1,2,$ ，且

$$\lim_{n\ m\to\infty}(x_n-x_m,\ x_n-x_m)=0,$$

则存在元素$x\in H$，使得

$$\lim_{n\to\infty}(x-x_n,\ x-x_n)=0,$$

此元素x称为序列(x_n)的极限，

7) H是无限维向量空间．

满足公理 (1)-(5) 的函数(x,y)称为x和y的标量积（scalar product）或内积（inner product）．对$x\in H$，数量$\|x\|=(x,x)^{1/2}$称为x的范数（norm）或长度（length）．不等式$|(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$成立．如果在$H$中由等式$\rho(x,y)=\|x-y\|$引入两元素$x, y\in H$之间的距离，则$H$成为**度量空间**（metric space）.

两个 Hilbert 空间H和H_1称为同构的（isomorphic）或等距同构的（isometrically isomorphic），如果在H和H_1之间存在一一对应$x\Leftrightarrow x_1$, $x\in H$, $x_1\in H_1$，且保持线性运算和标量积．

Hilbert 空间是在应用上最广泛的而且最重要的一类无限维向量空间 它们是具有标量积的有限维向量空间（即有限维 Euclid 空间或有限维酉空间）概念的自然推广．事实上，如果在（实数或复数域上的）有限维向量空间中给定了一个标量积，则称为 Hilbert 空间完全性（completeness）的性质 (6) 自然满足．带有标量积的无限维向量空间称为准 Hilbert 空间（pre-Hilbert

spaces)，存在不满足性质（6）的准 Hilbert 空间．任何准 Hilbert 空间能完全化而成为 Hilbert 空间．

在 Hilbert 空间的定义中，无限维的条件通常可略去，即准 Hilbert 空间是指带有标量积的复数（或实数）域上的向量空间，而完全的准 Hilbert 空间称为 Hilbert 空间．

Hilbert 空间的例子．1）复空间 l_2（或 l^2）．此 Hilbert 空间的元素是平方可和的复数无穷序列 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdot\}$，$y=\{\eta_1,\eta_2,\ \}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2<+\infty,\ \sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^2<+\infty$$

标量积由以下等式定义

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\bar{\eta}_k$$

2）空间 $l_2(T)$（例 1）的一个推广） 设 T 是一个任意集合．Hilbert 空间 $l_2(T)$ 的元素是 T 上的复值函数 $x(t)$，至多在可数多个点 $t\in T$ 上不为零，且级数

$$\sum_{t\in T}|x(t)|^2$$

收敛．标量积由以下等式定义

$$(x,y)=\sum_{t\in T}x(t)\overline{y(t)}$$

任何 Hilbert 空间同构于某一空间 $l_2(T)$，只要适当选取 T

3）空间 $L_2(S,\Sigma,\mu)$（或 $L^2(S,\Sigma,\mu)$）．其元素是定义在集合 S 上的复值函数 $x(s)$，集合 S 带有一个（在由 S 的子集构成的 σ 代数 Σ 上给定的）完全可加正测度 μ，且 $x(s)$ 是可测的，其平方模可积

$$\int_S|x(s)|^2d\mu(s)<+\infty.$$

在此 Hilbert 空间中，标量积由下式定义

$$(x(s),y(s))=\int_S x(s)\overline{y(s)}\ d\mu(s)$$

4）**Соболев 空间**（Sobolev space）$W_2^l(\Omega)$，也可表示成 $H_{(l)}$（见**嵌入定理**（imbedding theorems））

5）取值于某个 Hilbert 空间中的函数构成的 Hilbert 空间．设 H 是某个 Hilbert 空间，带有标量积 (x,y)，$x,y\in H$ 又设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个任意区域，且设 $f(x)$（$x\in\Omega$）是取值于 H 中的 Bochner 可测函数（见 **Bochner 积分**（Bochner integral））且

$$\int_\Omega\|f(x)\|_H^2\,dx<\infty,$$

其中 dx 是 Ω 上的 Lebesque 测度（也可取任何其他正可数可加测度来代替 Lebesque 测度）．如果在此函数集上定义标量积

$$(f(x),g(x))_1=\int_\Omega(f(x),g(x))\ dx,$$

则得到新的 Hilbert 空间 H_1

6）实直线上连续的 **Bohr 殆周期函数**（Bohr almost-periodic functions）的集合构成准 Hilbert 空间，如果由下式定义标量积

$$(x(t),y(t))=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)\overline{y(t)}\,dt$$

此极限的存在性可由殆周期函数理论推出．这个空间的完全化是 **Besicovitch 殆周期函数**（Besicovitch almost-periodic functions）类 B^2

D. Hilbert（[1]）在他的关于积分方程和无穷二次型理论的奠基性工作中引入并研究了 l_2 和 L_2 空间．Hilbert 空间的定义是由 J von Neumann（[3]），F. Riesz（[4]）和 M H Stone（[13]）给出的，他们也为系统的研究工作奠定了基础．

Hilbert 空间是 Euclid 几何学中通常的三维空间的自然推广，而且很多几何概念在 Hilbert 空间中都可阐明，因此可以讨论 Hilbert 空间几何学（geometry of Hilbert space） Hilbert 空间 H 中两个向量 x 和 y 称为正交的（orthogonal）（$x\perp y$），如果 $(x,y)=0$. H 中两个线性子空间 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 称为正交的（$\mathfrak{M}\perp\mathfrak{N}$），如果 $\mathfrak{M}$ 中每个元素与 $\mathfrak{N}$ 中每个元素是正交的．集合 $A\subset H$ 的正交补（orthogonal complement）是指集合 $B=\{x\cdot(x,A)=0\}$，即与 A 中所有元素都正交的元素 $x\in H$ 的集合 它表成 $H\ominus A$，如果 H 是不言而喻的，则表成 $A^\perp$ H 中任一集合 $\mathfrak{M}$ 的正交补 $\mathfrak{N}$ 是闭线性子空间．如果 $\mathfrak{M}$ 是 Hilbert 空间中的一个闭线性子空间（它也可称为 Hilbert 子空间（Hilbert subspace）），则任何元素 $x\in H$ 都能唯一地表示成和式 $x=y+z$（$y\in\mathfrak{M}$，$z\in\mathfrak{N}$） 这种分解称为正交补定理（theorem on orthogonal complements），且通常写成

$$H=\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{N}.$$

集合 $A\subset H$ 称为规范正交集（orthonormal set）或规范正交系（orthonormal system），如果 A 中任何两个不同的向量都是正交的，而且每个向量 $y\in A$ 的范数都等于 1 一个规范正交集称为完全规范正交集（complete orthonormal set），如果 H 中没有与此集合的所有向量都正交的非零向量 如果 $\{y_i\}$ 是一规范正交序列，而 $\{\alpha_i\}$ 是标量序列，则级数

$$\sum_i\alpha_i y_i$$

收敛，当且仅当

$$\sum_i|\alpha_i|^2<\infty,$$

还有

$$\|\sum_i \alpha_i y_i\|^2=\sum_i |\alpha_i|^2$$

(Hilbert 空间中的 Pythagoras 定理 (Pythagoras theorem))

设 A 是 Hilbert 空间 H 中一个规范正交集，而 x 是 H 中任意的向量，则除了 A 中一有限集或可数集外，对所有的 $y\in A$，都有 $(x, y)=0$ 级数

$$Px=\sum_{y\in A}(x, y)y$$

收敛，且其和与非零项的次序无关 算子 P 是在由 A 生成的 (闭) Hilbert 子空间上的正交投影算子 (orthogonal projection operator) 或简称投影算子 (projector).

集合 $A\subset H$ 称为线性子空间 $\mathfrak{N}\subseteq H$ 的规范正交基 (orthonormal basis of a linear subspace) , 如果 A 包含在 $\mathfrak{N}$ 中且对任何 $x\in\mathfrak{N}$，等式

$$x=\sum_{y\in A}(x,y)y$$

成立，即任何向量 $x\in\mathfrak{N}$ 都能对系 A 展开，也就是说，能用 A 中的向量来表示 . 数集 $\{(x, y)\ \ y\in A\}$ 称为元素 x 关于基 A 的 Fourier 系数集 (set of Fourier coefficients) Hilbert 空间 H 的每一个子空间 (特别是 H 本身) 都有规范正交基 .

在 $l_2(T)$ 中由公式

$$x_t(s)=\begin{cases}1, & \text{当 } s=t \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } s\neq t \text{ 时}\end{cases}$$

定义的函数 x_t 的集合 $\{x_t\ \ t\in T\}$ 是 $l_2(T)$ 中的一个规范正交基 . 在空间 $L_2(S,\Sigma,\mu)$ 中，一个向量关于一个基的展开采用关于正交函数系的展开形式，这展示了一种解决数学物理问题的重要方法

对规范正交集 $A\subset H$，下列诸命题是等价的 A 是完全的，A 是 H 的规范正交基，对任何 $x\in H$，有 $\|x\|^2=\sum_{y\in A}\|(x, y)\|^2$

一个给定的 Hilbert 空间的所有规范正交基具有相同的基数 . 由此可定义 Hilbert 空间的维数 事实上，Hilbert 空间的维数 (dimension) 是其中任意一个规范正交基的基数 . 此维数有时称为 Hilbert 维数 (Hilbert dimension) (区别于 Hilbert 空间的线性维数 (linear dimension) , 即 Hamel 基 (见基 (basis)) 的基数——此概念不涉及 Hilbert 空间的拓扑结构) 两个 Hilbert 空间是同构的，当且仅当它们的维数相等 与维数概念有联系的是 Hilbert 子空间的亏格 (deficiency of a Hilbert subspace) 的概念，Hilbert 子空间的亏格也称为 Hilbert 子空间的余维数 (codimension of a Hilbert subspace) 事实上，Hilbert 空间 H 的 Hilbert 子空间 H_1 的余维数是其正交补 $H_1^{\perp}=H\ominus H_1$ 的维数 . 余维数等于 1 的 (即其正交补是一维的) Hilbert 子空间称为超空间 (hyperspace) 超空间的平移称为超平面 (hyperplane)

有些几何概念要用到 Hilbert 空间中线性算子的术语，特别是，其中包括线性子空间的开度 (opening) 的概念 . Hilbert 空间 H 中两子空间 M_1 和 M_2 的开度是 H 到这两线性子空间的闭包上的投影算子之差的范数 $\theta(M_1, M_2)$

开度的最简单性质是

a) $\theta(M_1, M_2)=\theta(\bar{M}_1, \bar{M}_2)=\theta(H\ominus\bar{M}_1, H\ominus\bar{M}_2)$,

b) $\theta(M_1, M_2)\leqslant 1$，且当严格不等式成立时，$\dim M_1=\dim M_2$

Hilbert 空间中很多问题仅涉及 Hilbert 中向量的有限集，即 Hilbert 空间中有限维线性子空间的元素 这说明在 Hilbert 空间理论中，线性代数的概念和方法起着重要作用 Hilbert 空间中的向量组 $g_1,\ \ ,g_n$ 称为线性无关的 (linearly independent) ，如果方程

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k g_k=0,$$

仅当 α_k 全为零时成立，这里 α_k 为标量 一个向量组是线性无关的，如果其 **Gram 行列式** (Gram determinant) 不为零 向量的可数序列 $g_1,\ \ ,g_n,\ \ $，称为线性无关序列 (linearly independent sequence), 如果其所有有限子集是线性无关的 每个线性无关序列都可规范正交化，即可以构造一个规范正交系 $e_1,e_2,\ \ $，使对所有的 n，集合 $\{g_k\}_{k=1}^{n}$ 和 $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ 的**线性包** (linear hull) 相同 . 这种构造方法称为 Gram-Schmidt 正交化 (规范正交化) 步骤 (Gram-Schmidt orthogonalization (orthonormalization) process), 其过程如下

$$e_1=\frac{g_1}{\|g_1\|},\ h_2=g_2-(g_2,e_1)e_1,\ e_2=\frac{h_2}{\|h_2\|},\ \ ,$$

$$h_n=g_n-\sum_{k=1}^{n-1}(g_n,e_k)e_k,\ e_n=\frac{h_n}{\|h_n\|},\ \ .$$

对若干个 Hilbert 空间构成的集合，可定义直和与张量积 Hilbert 空间 $H_i(i=1,\ \ ,n)$ (每个 H_i 具有相应的标量积) 的直和 (direct sum) 是 Hilbert 空间

$$H=H_1\oplus\ \ \oplus H_n,$$

定义如下 在向量空间 $H_1,\ \ ,H_n$ 的**直和** (direct sum) $H_1+\ \ +H_n$ 中，由下式定义标量积

$$([x_1,\ \ ,x_n],[y_1,\ \ ,y_n])=\sum_{i=1}^{n}(x_i,y_i)_{H_i}$$

如果 $i\neq j$，则 H_i 和 H_j 的元素在直和

$$H=\sum_{i=1}^{n}\oplus H_i$$

中是相互正交的，且 H 到 H_i 上的投影与 H 到 H_i 上的正交投影是重合的 . Hilbert 空间的直和的概念已推广到无穷多个空间构成的直和的情况 . 对某指标集 A 中的

每个 v, H_v 表示一个确定的 Hilbert 空间 这些 Hilbert 空间的**直和**（记为 $\sum_{v\in A}\oplus H_v$）是指在 A 上定义的、具有下列性质的所有函数 $\{x_v\}$ 构成的集合 H 对每个 $v\in A$, 有 $x_v\in H_v$, 且 $\sum_{v\in A}\|x_v\|^2<\infty$ H 中的线性运算定义如下

$$\{x_v\}+\{y_v\}=\{x_v+y_v\}, \quad \alpha\{x_v\}=\{\alpha x_v\},$$

而标量积由下式定义

$$(\{x_v\}, \{y_v\})=\sum_{v\in A}(x_v, y_v)_H$$

如果线性运算和标量积由这种方式定义，则直和

$$H=\sum_{v\in A}H_v$$

成为 Hilbert 空间

在 Hilbert 空间集合中，另一种重要的运算是张量积 Hilbert 空间 H_i ($i=1,\quad, n$) 的**张量积**（tensor product）定义如下 设 $H_1\odot\quad\odot H_n$ 是向量空间 $H_1,\quad, H_n$ 的**张量积**（tensor product） 在向量空间 $H_1\odot\cdot\odot H_n$ 中，存在唯一的标量积，使得对所有的 $x_i, y_i\in H_i$, 有

$$(x_1\odot\quad\odot x_n, y_1\odot\quad\odot y_n)=\prod_{i=1}^{n}(x_i, y_i)_{H_i}$$

这样，此向量空间成为准 Hilbert 空间，其完全化是 Hilbert 空间，记为 $H_1\otimes\quad\otimes H_n$, 或 $\prod_{i=1}^{n}H_i$, 称为 Hilbert 空间 H_i 的**张量积**.

Hilbert **空间**构成重要的一类 Banach 空间，任何 Hilbert 空间 H 是带有范数 $\|x\|=(x,x)^{1/2}$ 的 **Banach 空间**（Banach space），且对任意两个向量 $x, y\in H$, 以下的平行四边形恒等式成立

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

平行四边形恒等式把 Hilbert 空间类从 Banach 空间中区分出来，即如果在一个实赋范空间 B 中对任何一对元素 $x, y\in B$, 平行四边形恒等式成立，则函数

$$(x, y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2)$$

满足标量积公理，且使 B 成为准 Hilbert 空间（如果 B 是 Banach 空间，则成为 Hilbert 空间）. 由平行四边形恒等式推出 每一个 Hilbert 空间都是一致凸空间. 正如在任何 Banach 空间中那样，在一个 Hilbert 空间中可以给定两个拓扑——强（范数）拓扑和弱拓扑 这两个拓扑是不同的. Hilbert 空间按强拓扑是可分的，当且仅当它按**弱拓扑**（weak topology）是可分的. 在 Hilbert 空间中，一个凸集（特别是，一个线性子空间）是强闭的，当且仅当它是弱闭的

正如在一般的 Banach 空间理论中那样，在 Hilbert 空间理论中可分性概念也起重要作用. 一个 Hilbert 空间是可分的，当且仅当它有可数的维数 Hilbert 空间 l_2 和 $H_{(l)}$ 是可分的，Hilbert 空间 $l_2(T)$ 是可分的，当且仅当 T 是至多可数的，Hilbert 空间 $L_2(S, \Sigma, \mu)$ 是可分的，当且仅当测度 μ 有可数基. Hilbert 空间 B^2 是不可分的

在可分的 Hilbert 空间 H 中任何规范正交基同时也是 H 中的无条件 Schauder **基**（basis），如果把 H 看成 Banach 空间 然而，在可分的 Hilbert 空间中也存在非正交的 Schauder 基 因而以下定理成立（[7]） 设 $\{f_k\}$ 是 Hilbert 空间 H 中向量的完全系，又设 λ_n 和 Λ_n 是 **Gram 矩阵**（Gram matrix）

$$\{\alpha_{jk}\}_{j,k=1}^{n}, \alpha_{jk}=(f_k, f_j)$$

的最小和最大的本征值. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\inf\lambda_n>0 \text{ 且 } \lim_{n\to\infty}\sup\Lambda_n<\infty,$$

则 1) 序列 $\{f_k\}$ 是 H 中的一个基，2) 存在一个与 $\{f_k\}$ 双正交的序列 $\{g_k\}$, 它也是 H 中的一个基

正如在任何 Banach 空间中那样，描述 Hilbert 空间上上线性泛函集合并研究这些泛函的性质是很重要的. Hilbert 空间上的线性泛函有一个特别简单的结构 Hilbert 空间 H 上的任何线性泛函 f 对所有的 $x\in H$ 都能唯一地表成 $f(x)=(x, x^*)$, 这里 $x^*\in H$, 且 $\|f\|=\|x^*\|$ H 上的线性泛函 f 构成的空间 H^* 等距反同构于 H（即对应 $f\to x^*$ 是等距的、可加的和反齐次的 $\alpha f\to\bar{\alpha}x^*$） 特别是，Hilbert 空间是自反的（见**自反空间**（reflexive space）），且由此以下的两命题成立 Hilbert 空间是弱序列完全的，Hilbert 空间中子集是相对弱紧的，当且仅当它是有界的

Hilbert 空间理论的主要内容是这些空间上的线性算子理论 Hilbert 空间概念本身是在 Hilbert（[2]）和 E Schmidt（[14]）关于积分方程论的论著中提出的，而 Hilbert 空间的抽象定义是由 von Neumann（[3]），F Riesz（[4]）和 Stone（[13]）在他们对 Hermite 算子的研究工作中给出的 基于以下两个理由，Hilbert 空间上的算子理论是一般算子理论的基本分支.

第一，Hilbert 空间上的自伴算子和酉算子理论不但是一般线性算子理论中最发展的部分，而且在泛函分析的其他部分和数学及物理的许多其他部分中有广泛应用. Hilbert 空间上的线性算子理论使数学物理中各种不同的问题有可能从一个统一的观点来考察，首先是涉及本征值和本征函数的问题. 此外，Hilbert 空间上的自伴算子理论是量子力学中的数学工具，在描述一个量子力学系统时，观测量（能量、动量、位置等等）可以解释为某一 Hilbert 空间上的自伴算子，而此系统的状态是该空间的元素 反过来，量子力学的问题迄今一直影响着自伴算子理论的发展，也影响

Hilbert空间上的算子代数理论.

第二,深入发展的Hilbert空间上的**自伴算子**(self-adjoint operator)理论(特别是,循环算子、幂零算子、胞腔算子、可缩算子、谱算子和标量算子理论)是更一般的空间上的线性算子理论的重要模型

Hilbert空间上的线性算子中重要的一类是处处有定义的连续算子,也称有界算子 如果在H上有界线性算子组成的集合$\mathfrak{A}(H)$中按通常的规则引入加法、标量乘法、算子乘法等运算,并引入算子范数(见**线性算子**(linear operator)),又在$\mathfrak{A}(H)$中定义**对合**(involution),即一算子到其**伴随算子**(adjoint operator)的转移,则$\mathfrak{A}(H)$成为带有对合的**Banach代数**(Banach algebra) Hilbert空间上的有界算子中重要的几类是**自伴算子**(self-adjoint operator),**酉算子**(unitary operator)和**正规算子**(normal operator),因为它们有关于标量积的一些重要性质.对这些算子类已作了充分的研究,对它们进行研究时基本的工具是最简单的有界自伴算子,例如正交投影算子或简称**投影算子**(projector) 复Hilbert空间上的任何自伴算子、酉算子或正规算子由投影算子构成的方法由**线性算子的谱分解**(spectral decomposition of a linear operator)给出,在可分Hilbert空间的情况,特别简单

Hilbert空间上的线性算子理论的更复杂的分支是无界算子理论 Hilbert空间上的最重要的无界算子是具有稠定义域的闭线性算子,其特例是无界的自伴和正规算子.Hilbert空间上的自伴算子与酉算子之间,有一一对应的关系,由**Cayley变换**(Cayley transform)来定义.Hilbert空间上的**对称算子**(symmetric operator)类以及这种算子的自伴扩张理论有重要意义(特别在线性微分算子理论中).

复Hilbert空间H上的无界自伴算子和正规算子也有谱分解.谱分解是Hilbert空间上的自伴算子和正规算子理论中最大的成就 它相应于n维酉空间上Hermite和正规复矩阵的经典约化理论 正是谱分解和与其有关的对自伴和正规算子的算子演算保证了Hilbert空间上的算子理论在数学各领域中有广泛应用.

对l_2上的有界自伴算子,谱分解是Hilbert([1])发现的,他也引入了自伴算子的**单位分解**(resolution of the identity)这一重要概念.现今已有研究自伴和正规算子谱理论的几种不同途径 最深刻的观点之一是由Banach代数理论给出的.无界自伴算子的谱分解是由von Neumann([3])发现的.他的研究工作高于T Carleman([8])的重要探索,后者对对称积分算子情况得到了谱分解,也发现了对称的有界和无界算子之间不完全类似.自伴算子概念的重要性首先是Schmidt(见[3])注意到的.

必须指出,不论对Hilbert的研究工作,还是对更晚的研究工作,П Л. Чебышев, А А. Марков和Th J Stieltjes关于矩量(见**矩问题**(moment problem)),**Jacobi矩阵**(Jacobi matrix)和**连分数**(continued fraction)(见[9])的工作有极大的重要性.

参考文献

[1] Hilbert, D, Grundzuger einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Chelsea, reprint, 1953

[2] Besicovitch, A S, Almost periodic functions, Cambridge Univ Press, 1932

[3] Neumann, J von, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitischer Funktionaloperatoren, *Math Ann*, **102** (1929), 49 – 131

[4] Riesz, F, Ueber die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes, *Acta Sci Math Szeged*, 5(1930), 1, 23–54

[5] Dieudonné, J A, Foundations of modern analysis, Acad Press, 1961(中译本 J 迪厄多内,现代分析基础,第一卷,第二卷,科学出版社,1982,1986)

[6] Bourbaki, N, Elements of mathematics Topological vector spaces, Addison-Wesley, 1977(译自法文)

[7] Ахиезер, Н И, Глазман, И М, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд, Москва, 1966

[8] Carleman, T, Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symmétrique, Uppsala, 1923

[9] Ахиезер, Н И, Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею, М, 1961(英译本 Akhiezer, N I, The classical moment problem and some related questions in analysis, Oliver & Boyd, 1965)

[10] Dunford, N and Schwartz, J T, Linear operators, 1 – 3, Interscience, 1958 – 1971

[11] Riesz, F and Szokefalvi-Nagy, B, Functional analysis, F Ungar, 1955(译自法文,中译本 F 黎茨,B 塞克佛尔维-纳吉,泛函分析讲义,科学出版社,第一卷,1980,第二卷,1981)

[12] Наймарк, М А, Линейные дифференциальные операторы, 2 изд, М, 1969(中译本 M A 纳依玛克,线性微分算子,科学出版社,1964)

[13] Stone, M H, Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, Amer Math Soc, 1932

[14] Колмогоров, А Н, фомин, С В, Элементы теории функций и функционального анализа, 3 изд, М, 1972(中译本 A H 柯尔莫果洛夫,C B 佛明,函数论与泛函分析初步,高等教育出版社,1992)

Б М Левитан 撰

【补注】 对文中提到的各种基请参看**基**(basis)和[A2]

参考文献

[A1] Weidmann, J Linear operator in Hilbert spaces, Springer, 1980

[A2] Singer, I M, Bases in Banach spaces, 1–2, Springer,

1970－1981 葛显良 译

带不定度规的 Hilbert 空间 [Hilbert space with an indefinite metric，Гильбертово пространство с индефинитной метрикой]

赋予一个连续的双线性(更确切地说，半双线性)形式 G 的复数域上的 **Hilbert 空间** (Hilbert space) E，一般地说，G不是正定的 形式 G常称为 G度规 (G-metric)．带不定度规的 Hilbert 空间的最重要的例子是所谓 J空间(J-space)——带不定度规 G 的 Hilbert 空间，其中 G是由 E上某个 Hermite 对合 J按公式 $G(x,y)=(Jx,y)$定义．因而形式 G也用字母 J表示且称为 J度规 (J-metric) 对合 J可表成 $J=P_+-P_-$，这里 P_+ 和 P_-是 E中的正交投影，且$P_++P_-=I$，数 $\kappa=\min(\dim P_+, \dim P_-)$称为 J度规或 J空间的不定性秩 (rank of indefiniteness)．若 $\kappa<+\infty$，则带不定度规的 Hilbert 空间 (E, J) 称为 **Понтрягин 空间** (Pontryagin space) Π_κ；也可参看**不定度规空间** (space with an indefinite metric)

两个带不定度规的Hilbert空间 (E,G) 和 (E_1,G_1)称为度规等价的 (metrically equivalent)，如果存在一个 E到 E_1上的线性同胚把 G变换成 G_1 由可逆的 Hermite 算子 G按公式 $G(x,y)=(Gx,y)$生成的 G度规称为正则的 (regular)，在引入一个与老的标量积度规等价的新标量积后，正则 G度规变成 J度规 任一带由 Hermite 形式 G生成的不定度规的 Hilbert 空间可 G等距地 (即保持 G) 嵌入到某 J空间中 ([2]，[3])

带不定度规的 Hilbert 空间理论的主要趋势与一般的不定度规空间理论相同，但更着重谱理论．带不定度规的 Hilbert 空间上的几何学比带不定度规的普通空间的几何学丰富得多．对 J 空间的情况，在所有非负 (非正、零性) 的子空间中的极大子空间 L有以下的有效描述 这些 L满足 $P_+L=P_+E$ (或对应地，$P_-L=P_-E$，这些等式中至少有一个必须成立) 这样类似于二次型的惯性定律 如果 $E=L_+\dot{+}L_-$ 是 J空间分成半定子空间和的典范分解，则 $\dim L_\pm=\dim P_\pm E$ 子空间 L是极大非负的当且仅当 L有关于 E_+ 的角算子 K，即 $L=\{x+Kx \ x\in E_+\}$ 且 $\|K\|\leqslant 1$

J空间中基的理论已得到发展，此理论有助于研究带不定度规 Hilbert 空间的几何学和其上的算子．J空间 (E, J) 的 J规范正交基 (J-orthonormal basis) 是 Hilbert 空间 E 中满足条件 $(Je_k,e_n)=\delta_{kn}$ $(k,n=1,2,\ )$的基 J规范正交序列 $\mathscr{E}$ 是 E的 Riesz 基的必要充分条件是 $E=M_+\dot{+}M_-$，这里 $M_\pm$是向量组 $\{e_k \ (Je_k,e_k)=\pm1\}$ 的闭线性包 如果 $\mathscr{E}$是 E中 J规范正交基，则分解式 $E=M_+\dot{+}M_-$ 是 J空间 E 的典范分解式．带不定度规的 Hilbert 空间中的一大批几何问题是与所谓带不定度规 Hilbert 空间 (E,J) 的子空间对偶对 (dual pairs) 的结构和性质相关联的，即与 E中的子空间对 N，P 相关联，这里 N和 P是相互正交的，且 N是非正的而 P是非负的空间．一个对偶对称为极大的 (maximal) 如果 N和 P是极大半定子空间．

带不定度规的 Hilbert 空间中的算子理论．设所讨论的度规 G是Hermite 和非退化的，而所讨论的算子是稠定的 对有定义域 D_T的算子 T，由以下的方程定义 G伴随算子 T^c

$$G(Tx,y)=G(x,T^cy),\ x\in D_T,\ y\in D_{T^c},$$

这里 $T^c=G^{-1}T^*G$且

$$D_{T^c}=G^{-1}\{GE\cap T^{*-1}(TE\cap GE)\}$$

算子 T称为 G自伴的 (G-self-adjoint)，如果 $T=T^c$，T称为 G对称的 (G-symmetric)，如果 $G(Tx,y)=G(x,Ty)$, $x,y\in D_T$ G对称算子 T的根子空间 $L_\lambda(T)$和 $L_\mu(T)$ $(\lambda\neq\mu)$ 是 G 正交的，特别的，如果 $\lambda\neq\bar{\lambda}$，则 $L_\lambda(T)$是零性子空间

如果 G是正则度规，则 G自伴算子 T的谱 $\sigma(T)$关于实轴是对称的，如果它不是正则的，通常不是如此．算子 T的 J自伴性等价于 JT的自伴性．如果 ζ，$\bar{\zeta}\in\sigma(T)$，则 **Cayley 变换** (Cayley transform) $U=(T-\bar{\zeta}I)(T-\zeta I)^{-1}$是 J酉算子 (J-unitary operator)，即满足 $UJU^*=U^*JU=J$ U的谱关于圆周 $S=\{\lambda\in\mathbf{C}\ |\lambda|=1\}$ 对称

由 Л С Понтрягин ([1])的研究工作开始，此理论的主要问题是半定不变子空间的存在性．设 T是 J空间 E中的有界算子，且设对满足 $(Jx,x)\geqslant0$的 $x\in E$，有 $(JTx,Tx)\geqslant0$ (称为加算子 (plus-operator))，如果 P_+TP_- 是**完全连续算子** (completely-continuous operator)，则存在极大非负 T不变子空间 L 这个结果是有用的，特别可用于空间 Π_κ上的 J 酉算子，它是所谓界定方法 (definization method) 的基础，此方法是构造一个算子多项式 $P(U)$使它把 E映射到一半定子空间中．这方法能得出对 Π_κ上 J 酉和 J自伴算子有类似于普通谱展开的结果．

带不定度规的 Hilbert 空间上算子理论应用于常微分方程的典则组理论，起着实质性的作用，例如对这种方程组的稳定性判别准则可借助于**单值算子** (monodromy operator) U表述如下 稳定性成立当且仅当存在极大的 U不变子空间对偶对．此理论的另一重要应用是在二次算子束的谱理论中，后者在数学物理的许多问题中是重要的．

带不定度规的 Hilbert 空间中的表示理论见[4].

参考文献

[1] Понтрягин, Л С,《Изв АН СССР Сер матем》, **8** (1944), 243－280

[2] Гинзбург, Ю П , Иохвидов, И С ,《Успехи матем наук》, 17(1962), 4, 3-56
[3] Азизов, Т Я , Иохвидов, И С ,《Успехи матем наук》, 26(1971), 4, 43-92
[4] Наймарк, М А , Исмагилов, Р С , Итоги науки Математический анализ, 1968, М , 1969, 73-105
[5] Функциональный анализ, 2 изд , Москва, 1972 (Справочная математическая библиотека)

Н К Никольский, Б С Павлов 撰

【补注】 设 V 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的向量空间．V 上的半双线性形式 (sesquilinear form) 是复值函数 (,) $V\times V\to\mathbf{C}$，满足

$$(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2, y)=\alpha_1(x_1, y)+\alpha_2(x_2, y), \qquad (A1)$$

$$\overline{(x, y)}=(y, x), \qquad (A2)$$

对所有的 $x_1, x_2, x, y\in V$, $\alpha_1, \alpha_2\in\mathbf{C}$ 这里上面加的横线表示共轭复数．装备有这样的二次形式的向量空间 V 称为内积空间 (inner product space) 在内积空间中，可区分出正、负和零性元素，分别由条件 $(x,x)>0$, $(x,x)<0$, $(x,x)=0$ 定义．不定内积空间 (indefinite inner product space) 是同时有正元素和负元素的内积空间．

内积空间 V 中的迷向向量 (isotropic vectors) 是 $V^{\perp}=\{x\in V\ (x,y)=0$, 对所有的 $y\in V\}$ 中的元素 子空间 $V^{\perp}$ 称为 V 的迷向部分 (isotropic part) 内积空间是非退化的 (non-degenerate)，如果它的迷向部分是零

内积空间是可分解的 (decomposable)，如果它能表示成正交直和

$$V=V^{+}\oplus V^{0}\oplus V^{-}, \qquad (A3)$$

其中 V^0 由零性元素组成，$x\in V^{+}\Rightarrow(x,x)>0$ 或 $x=0$; $x\in V^{-}\Rightarrow(x,x)<0$ 或 $x=0$ 空间 V^0 因而必须是 V 的迷向部分．并不是每一个内积空间是可分解的，但每一有限维内积空间是可分解的．每一个形如 (A3) 的分解称为基本分解 (fundamental decomposition)．

V 的定子空间 (definite subspace) 是指这样的子空间 U, (,) 在 U 上的限制或者是正定的或者是负定的．在这样的子空间 U 上，函数 $|x|_U=|(x,x)|^{1/2}$ 定义了一个范数 (norm)．定子空间 U 称为内在完全的 (intrinsically complete) 如果它按照由此范数定义的拓扑是完全的．

Крейн 空间 (Krein space) 是非退化内积空间且有一基本分解式

$$V=V^{+}\oplus V^{-}, \qquad (A4)$$

其中 V^{+} 和 V^{-} 都是内在完全的 (因而对每一基本分解式都是这种情况)

这些是内积空间的最重要类型．Понтрягин 空间 (Pontryagin space) 是一种特殊的 Крейн 空间，即是具有以下性质的 Крейн 空间 在它的一个基本分解式 (A4) 中，两个子空间之一的维数等于 $n<\infty$ (因而对每一个基本分解式都是如此)

关于 Крейн 空间的几何学和算子理论见 **Крейн 空间** (Krein space) 和 [A1]-[A5] 关于其应用，例如可参看 [A6]-[A8]

术语"内积空间"狭义上是指装备有一个半双线性形式的向量空间，此形式除了满足 (A1) 和 (A2) 外还满足以下的条件 (A5) 和 (A6)．

$$(x,x)\geqslant 0, \text{对所有的 } x\in V, \qquad (A5)$$

$$(x,x)=0 \ = \ x=0 \qquad (A6)$$

也就是说，内积空间狭义上即是准 Hilbert 空间 (pre-Hilbert space)．半双线性形式仅满足 (A1), (A2) 和 (A5) 的情况，用术语"准内积"．带有满足 (A1) 和 (A2) 的半双线性形式的空间则称为不定内积空间 (indefinite inner product space) ([A8]) 这样，在 [A1] 和 [A8] 之间所用术语的对照表如下 内积——不定内积，半正定内积——准内积，正定内积——内积

最后指出，术语"内积"和"内积空间"在代数和数论的二次型理论中还在别的不同意义下使用 ([A9])．在那种情况下，有单位元的交换环 R 上的模 M 上的内积是一个双线性映射

$$\beta \ \ M\times M\to R$$

满足以下的强非退化条件 (strong non-degeneracy conditions) 由 $x\mapsto\varphi_x$, $\varphi_x(y)=\beta(x,y)$, $y\mapsto\psi_y$, $\psi_y(x)=\beta(x,y)$ 给出的两个 $M\to\mathrm{Hom}_R(M,R)$ 的同态是一一映射．内积模 (inner product module) 则是装备内积的模，而内积空间是一个内积模 (M,β) 且 M 又是**投射模** (projective module)

而在 [A8] 中，在 Banach 代数理论中，内积模是指 C^* **代数** (C^*-algebra) B 上的模 X 且装备有一个映射 $\langle , \rangle$. $X\times X\to B$，满足

$$\langle x,x\rangle\geqslant 0, \qquad (A7)$$

$$\langle x,x\rangle=0 \Leftrightarrow x=0, \qquad (A8)$$

$$\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle^{*}, \qquad (A9)$$

$$\langle x_1b_1+x_2b_2, y\rangle=\langle x_1, y\rangle b_1+\langle x_2, y\rangle b_2, \qquad (A10)$$

对所有的 $x, x_1, x_2, y\in X$, $b_1, b_2\in B$ 这里 $\geqslant 0$ 按通常在 C^* 代数 B 中定义的 元素 $b\in B$ 是 $\geqslant 0$ 的，当它是 Hermite 的 (即 $b^*=b$) 且有形式 $b=aa^*$ 对某个 $a\in B$.

参考文献

[A1] Bognar, J , Indefinite inner product spaces, Springer,

1974

[A2] Iohvidov, I S, Krein, M G and Langer, H, Introduction to the spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric, Akademie-Verlag, 1982

[A3] Gohberg, I, Lancaster, P and Rodman, L, Matrices and indefinite scalar products, Birkhauser, 1983

[A4] Iokhvidov, I S and Krein, M G, Spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric I, *Transl Amer Math Soc* (2), **13** (1960), 105-176

[A5] Iokhvidov, I S and Krein, M G, Spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric II, *Transl Amer Math Soc* (2), **34** (1963), 283-374

[A6] Daletskiĭ, Yu L and Kreĭn, M G, Stability of solutions of differential equations in Banach space, Amer Math Soc, 1974 (译自俄文)

[A7] Bracci, L, Morchio, G and Strocchi, F, Wigner's theorem on symmetries in indefinite metric spaces, *Comm Math Phys*, **41** (1975), 289-299

[A8] Istrătescu, V I, Inner product spaces Theory and applications, Reidel, 1987

[A9] Milnor, J and Husemoller, D, Symmetric bilinear forms, Springer, 1973

[A10] Azizov, T Ya and Iokhvidov, I S, Linear operators in spaces with indefinite metric and their applications, *J Soviet Math*, **15** (1981), 438-490

葛显良 译

Hilbert公理系统 [Hilbert system of axioms, Гильберта система аксиом], Euclid几何学的

由Hilbert于1899年提出，随后由他修改而使之更清晰的一个公理系统 ([1]).

在Hilbert公理系统中，初始（未定义的）概念是点、直线、平面、以及它们之间用“属于”、“之间”和“合同”等词表示的关系．初始对象的性质和对象之间的关系是任意的，只要这些对象和关系满足所列出的公理

Hilbert系统包含20条公理，分为五组．

第Ⅰ组由八条关联公理组成，描述关系“属于”

$Ⅰ_1$ 对于任何两点，存在通过它们的一条直线

$Ⅰ_2$ 仅存在一条直线通过任何不同的两点

$Ⅰ_3$ 在任一直线上至少有两点 至少存在三点不在同一直线上

$Ⅰ_4$. 对于不在同一直线上的任何三点，存在一平面通过它们 在任一给定的平面上至少有一点

$Ⅰ_5$ 对于不在同一直线上的任何三点，仅存在一个平面通过它们．

$Ⅰ_6$ 如果直线 a 的两点 A, B 在平面 α 上，那么直线 a 的所有点都在 α 上

$Ⅰ_7$. 如果两平面有一公共点，那么它们至少还有另一公共点．

$Ⅰ_8$ 至少存在四点不在同一平面内

第Ⅱ组由四条顺序公理组成，描述关系“之间”

$Ⅱ_1$. 如果点 B 在点 A 和点 C 之间，那么 A,B,C 是一条直线上的不同点，而且点 B 也在点 C 和点 A 之间．

$Ⅱ_2$ 对于两点 A,B, 在直线 AB 上至少存在一点 C, 使点 B 在 A, C 之间．

$Ⅱ_3$ 在同一直线上的任意三点中，至多有一点在另两点之间

$Ⅱ_4$ (Pasch公理 (Pasch axiom)) 设 A, B 和 C 是不在同一直线上的三点，a 是平面 ABC 上的一条直线，但不通过三点 A,B,C 中的任何一个 如果直线 a 通过线段 AB 的一内点，那么它或者是通过线段 AC 的一内点，或者通过线段 BC 的一内点．

第Ⅲ组由五条合同公理组成，描述关系“合同”(Hilbert用符号≡来表示这个关系)

$Ⅲ_1$ 给定线段 AB 和射线 OX，在 OX 上存在点 B', 使得线段 AB 合同于线段 OB', 即 $AB\equiv OB'$

$Ⅲ_2$ 如果 $A'B'\equiv AB$ 且 $A''B''\equiv AB$, 那么 $A'B'\equiv A''B''$.

$Ⅲ_3$ 设 AB 和 BC 是一直线上的两个线段，没有公共内点，$A'B'$ 和 $B'C'$ 是同一条或另一条直线上的两个线段，也没有公共内点 如果 $AB\equiv A'B'$, $BC\equiv B'C'$, 那么 $AC\equiv A'C'$.

$Ⅲ_4$ 给定角 AOB． 射线 $O'A'$ 和由直线 $O'A'$ 界定的一个半平面 Π，则 Π 包含一条且仅包含一条射线 $O'B'$, 使得 $\angle AOB\equiv\angle A'O'B'$. 此外，每个角合同于自身．

$Ⅲ_5$ 对于两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$, 如果有 $AB\equiv A'B'$, $AC\equiv A'C'$, $\angle BAC\equiv\angle B'A'C'$, 那么 $\angle ABC\equiv\angle A'B'C'$

第Ⅳ组由两条连续公理组成

$Ⅳ_1$ (Archimedes公理 (Archimedes axiom))．对于任意两个线段 AB 和 CD, 在直线 AB 上存在有限个点 $A_1,A_2,\ ,A_n$, 使点 A_1 在 A 和 A_2 之间，点 A_2 在 A_1 和 A_3 之间，等等，使线段 $AA_1,\ ,A_{n-1}A_n$ 都合同于线段 CD, 而且点 B 在 A 和 A_n 之间

$Ⅳ_2$ (Cantor公理 (Cantor axiom)) 在任一直线 a 上，给定线段的一无穷序列 $A_1B_1,A_2B_2,\ $, 它满足两个条件 a) 序列中的每个线段形成其前一线段的一部分，b) 对于每个预先给定的线段 CD, 可以找到一自然数 n, 使得 $A_nB_n<CD$ 这时，a 包含一点 M, 它属于这个序列的所有线段

第Ⅴ组由一个平行公理组成 如果 a 是任意直线，A 是不在 a 上的一点，那么在 a 和 A 确定的平面上，只有一条通过 A 且不与 a 相交的直线．

(Hilbert 把平行公理归入第Ⅳ组，而把连续公理归入第Ⅴ组)

Euclid 几何学的所有其他公理都可由 Hilbert 公理系统的基本概念来确定，而有关几何图形的性质和不包含在 Hilbert 系统中的所有陈述，都必定可从这些公理或从由这些公理演绎的陈述逻辑地加以推断

Hilbert 公理系统是完全的，如果实数的算术是相容的，那么它也是相容的 如果在 Hilbert 系统中，平行公理由其否定来代替，那么由此而得的新的公理体系也是相容的 (Лобачевский 几何学的公理系统)．这意味着在 Hilbert 系统中，平行公理独立于其他公理．也可以证实这个系统的一些别的公理独立于其他公理

Hilbert 公理系统是 **Euclid 几何学** (Euclidean geometry) 的第一个完全严谨的基础

参考文献

[1] Hilbert, D, Grundlagen der Geometrie, Springer, 1913 (中译本 D 希尔伯特，几何基础（上册），科学出版社，1987)

[2] Ефимов, Н В, Высшая геометрия, 5 изд, М, 1971 (中译本 Н В 叶菲莫夫，高等几何学，高等教育出版社，1954)

В Т Базылев 撰

【补注】 在公理 II_1 中，点 B 也称作线段 AC 的一个内点 (记着这一点，就可以读 Pasch 公理)

又，Hilbert 最初使用不同的连续公理 Archimedes 公理和他自己的一个完全性公理

参考文献

[A1] Forder, H G, Foundations of Euclidean geometry, Dover, reprint, 1958

[A2] Aleksandrov, A D, Foundations of geometry, Siberian Math J **28** (1987), 523－539 (*Sibirsk Mat Zh.*, **28** (1987), 9－28)

杨 路、侯晓荣 译 张景中 校

Hilbert 定理 [**Hilbert theorem**, **Гильберта теорема**]

1) Hilbert 基定理 (Hilbert basis theorem)．若 A 是交换 **Noether 环** (Noetherian ring)，$A[X_1, \ldots, X_n]$ 是系数在 A 中的变元为 $X_1, \ldots, X_n$ 的多项式环，则 $A[X_1, \ldots, X_n]$ 也是 Noether 环．特别地，在一个域上或一个整数环上的有限个变量的多项式环中，任一理想是由有限个元素生成的 (具有有限基)，这是 D Hilbert ([1]) 引进该定理时的形式．在 Hilbert 不变量定理的证明中，用它作辅助定理 (见以下 8) 后来，Hilbert 基定理在交换代数中得到广泛应用．

参考文献

[1] Hilbert, D, Ueber die Theorie der algebraischen Formen, *Math Ann*, **36** (1890), 473－534

В И Данилов 撰

2) Hilbert 不可约性定理 (Hilbert irreducibility theorem) 设 $f(t_1, \ldots, t_k, x_1, \ldots, x_n)$ 是有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的不可约多项式，则存在变量 $t_1, \ldots, t_k$ 的无穷组值 $t_1^0, \ldots, t_k^0 \in \mathbf{Q}$，使 $f(t_1^0, \ldots, t_k^0, x_1, \ldots, x_n)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约．这样，多项式 $f(t,x)=t-x^2$ 对所有 $t^0(t^0 \neq a^2,\ a \in \mathbf{Q})$ 且仅对它们是不可约的 Hilbert 在 1892 年得到这个定理，后来被推广到其他一些域上 (例如在其素子域上为有限型的域上 ([2]))

Hilbert 不可约性定理应用于与 **Galois 理论的反问题** (Galois theory, inverse problem of) 和**代数簇的算术** (algebraic varieties, arithmetic of) 有关的研究中．设 $K=k(t_1, \ldots, t_n)$ 是变元为 $t_1, \ldots, t_n$ 的有理函数域，若存在以 G 为 Galois 群的扩张 E/K，使 k 在 E 中代数闭，且 Hilbert 不可约性定理可应用于 k，则有可能在 k 中选取 $t_1, \ldots, t_n$ 的值，使所得到的 k 的扩张以 G 为 Galois 群 借助于这个观念，Hilbert 构造了 $\mathbf{Q}$ 上以对称群和交错群为 Galois 群的扩张 在对称群的情况下，E 取为 n 个变量的有理函数域，K 是由对称函数组成的子域，它本身也是有理函数域 将这个方法推广，E Noether 考虑任一子群 $G \subset S_n$，把 E 看作 E 中关于 G 的不变量所成子域的扩张 ([3])．只要 E^G 是 $\mathbf{Q}$ 上的有理函数域，利用 Hilbert 不可约性定理就有可能构造以 G 为 Galois 群的 $\mathbf{Q}$ 的扩张 这个条件是否满足的问题 (Noether 问题 (Noether problem) 与 Lüroth 问题 (Lüroth problem) 密切相关 直到 1969 年，R Swan 证明了这个问题的回答在大部分情况下都是否定的 ([4], [6])

Hilbert 不可约性定理也可用于构造有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的 Abel 簇 A 的有理点．由 Mordell-Weil 定理，A 的有理点群是有限生成的，因而提出了关于它的秩 r 的值的问题．利用 Hilbert 不可约性定理，A Neron 构造了维数为 g，秩大于或等于 $3g+6$ 的簇 A ([2])

参考文献

[1] Hilbert, D, Ueber die Irreducibilitat genzer rationaler Funktionen mit ganzzahligen Koefficienten, *J Reine Angew Math*, **110** (1892), 104－129

[2] Lang, S, Diophantine geometry, Interscience, 1962

[3] Чеботарев, Н Г, Теория Галуа, М -Л, 1936, 18－32, 90－94

[4] Martinet, J, Un contre-exemple à une conjecture d'E Noether (d'apres R Swan), in Sem Bourbaki, Vol 22, 1969－1970

[5] Schinzel, A, Reducibility of polynomials, in Actes du Congrès Internat, Mathématiciens Nice, 1970, Vol 1, Gauthier-Villars, 1971, 491－496

[6] Воскресенский, В Е,《Тр матем ин-та АН СССР》, **82** (1973), 151－161

А Н Паршин 撰

3) Hilbert 零点定理 (Hilbert zero theorem)，Hilbert 根定理 (Hilbert root theorem) 设 k 为域，$k[X_1, \ldots, X_n]$ 为 k 上的多项式环，$\bar{k}$ 是 k 的代数闭域，$F, F_1, \ldots, F_m$ 为 $k[X_1, \ldots, X_n]$ 中的多项式 多项式 $F(X_1, \ldots, X_n)$ 的根是指 $\bar{k}$ 中一组元 $(c_1, \ldots, c_n)$，它适合 $F(c_1, \ldots, c_n)=0$ 若多项式 $F_1, \ldots, F_m$ 的每个公共根都是多项式 F 的根，则存在

一个仅依赖于 F_1, $\quad$, F_m 的整数 r, 使 F^r 属于由 F_1, $\quad$, F_m 生成的理想，即

$$F^r = A_1F_1 + \quad + A_mF_m,$$

其中 A_1, $\quad$, A_m 为多项式　这个结果是 D Hilbert 得到的([1])

这个定理也可等价地叙述为　若 $\mathfrak{a}$ 为环 $k[X_1, \quad, X_n]$ 中任一真理想，则 $\mathfrak{a}$ 中所有多项式一定有一个公共根　所以，这个定理可看作**代数学基本定理** (algebra, fundamental theorem of) 的一个深远的推广　这个定理也可叙述为环 $k[X_1, \quad, X_n]$ 中任一素理想是包含它的所有极大理想的交，这导致 **Jacobson 环** (Jacobson ring) 的概念

在几何的解释中，理想 $\mathfrak{a} \subset k[X_1, \quad, X_n]$ 的根对应 $\mathfrak{a}$ 所定义的仿射簇的代数点　Hilbert 定理意味着任一非空仿射簇一定有一个代数点　于是，代数点集在簇上处处稠密，因而唯一决定这簇．这就是人们在研究代数簇时，经常仅限于研究它的代数点的原因

参考文献

[1] Hilbert, D , Ueber die vollen Invariantensysteme, *Math Ann* , **42** (1893), 313－373

[2] Waerden, B L van der, Algebra, 2, Springer, 1971 (译自德文　中译本　B L 范德瓦尔登，代数学，Ⅰ－Ⅱ，科学出版社，1978)

[3] Zariski, O and Samuel, P , Commutative algebra, 1, Springer, 1975

[4] Lang, S , Algebra, Addison-Wesley, 1974

[5] Bourbaki, N , Elements of mathematics Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972 (译自法文)

В И Данилов 撰

4) Hilbert 负曲率曲面定理 (Hilbert theorem on surface of negative curvature)　在 3 维 Euclid 空间中，不存在具有常数负曲率的完全正则曲面．这是 Hilbert ([1]) 在 1901 年证明的

参考文献

[1] Hilbert, D, Grundlagen der Geometrie, Springer, 1913

Ф В Шикин 撰

5) Hilbert 合冲定理 (Hilbert syzygies theorem)．关于多项式环上的分次模的合冲链（见**合冲** (syzygy)) 的有限性定理（经典形式见 [1])

设 A 为 **Noether 环** (Noetherian ring), M 为 Noether A 模，x_1, $\quad$, x_n 为 M 的生成元系，M 的合冲（关系）模 (module of syzygies) $S(M)$ 是 x_1, $\quad$, x_n 的关系的模，即由适合 $a_1x_1 + \cdot + a_nx_n = 0$ 的向量 $(a_1, \quad, a_r)$, $a_i \in A$ 生成的 A 模．利用 $S_i(M) = S(S_{i-1}(M))$ $(S_1(M) = S(M))$, 归纳定义第 i 次合冲模 (i-th module of syzygies)．它也可以用正合序列即合冲链 (chain of syzygies)

$$0 \to S_i(M) \to F_{i-1} \to \quad \to F_0 \to M \to 0,$$

来描述，其中 F_0, $\quad$, F_{i-1} 为有限型的自由 A 模　Hilbert 合冲定理的现代表述形式是　若 A 是维数为 m 的局部正则环，则任意 Noether A 模的 m 次合冲模是自由模．这相当于说，任一 A 模有长为 m 的自由化解或 A 有整体射影维数 m　这性质是正则环的刻画性质 ([2])．

Hilbert 合冲定理的整体变种 (global variant of Hilbert syzygies theorem)　在正则环 A(例如，多项式环) 上任一有限型 A 模具有有限长的射影（不一定是自由的）化解

参考文献

[1] Hilbert, D , Ueber die Theorie der algebraischen Formen, *Math Ann* , **36** (1890), 473－534

[2] Serre, J -P , Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noetheriens, in S Iyanaga and Y Kawada (eds)　Proc Internat Symp Algebraic Number Theory, Sci Council Tokyo, 1955, 175－189

[3] Serre, J -P , Algèbre locale, Multiplicites, Springer, 1965

[4] Zariski, O and Samuel, P , Commutative algebra, 1, Springer, 1975

В И Данилов 撰

6) Hilbert 循环扩张定理 (Hilbert theorem on cyclic extension)（Hilbert 定理 90 (Hilbert theorem 90)）　设域 K 为域 k 的具有循环 Galois 群 $G(K/k)$ 的循环扩张，σ 为 $G(K/k)$ 的生成元，则元素 $\beta \in K$ 的范数 $N_{K/k}(\beta) = 1$ 当且仅当存在非零元素 $\alpha \in K$, 使 $\beta = \alpha \cdot \sigma(\alpha)^{-1}$　类似地，迹 $\mathrm{Tr}_{K/k}(\beta)$ 为零，当且仅当 β 可表为 $\beta = \alpha - \sigma(\alpha)$, $\alpha \in K$ ([1], [2], [3])

Hilbert 定理可看作是关于 Galois 群的上同调的一个更一般性的定理的推论 ([4])　事实上，若 K 是 k 上具有 Galois 群 G 的 **Galois 扩张** (Galois extension), 则 K 的乘法群 K^* 具有 G 模的结构，且一阶上同调群 $H^1(G, K^*)$ 为零　同样，若 $q \geq 1$, 则 $H^q(G, K) = 0$（见 **Galois 上同调** (Galois cohomology))

Hilbert 定理的另一个推广是 Grothendieck 下降定理，它在**艾达尔拓扑** (étale topology) 上的一个应用，也称为 Hilbert 定理 90, 是指取值于乘法群 G_m 的一个层的概形 X 的艾达尔上同调群 $H^1(X_{et}, G_m)$ 与 X 上的可逆层类的 Picard 群同构 ([5])

参考文献

[1] Hilbert, D, Die Theorie der algebraischen Zahlkorper, Jahresber Deutsch Math -Verein, **4** (1897), 175－546

[2] Lang, S , Algebra, Addison - Wesley, 1974

[3] Bourbaki, N , Elements of mathematics Algebra Algebraic structures Linear algebra, 1, Addison - Wesley, 1974, Chapt 1, 2 (译自法文)

[4] Serre, J -P , Cohomologie Galoisienne, Springer, 1964

[5] Artin, M , Grothendieck, A. and Verdier, J L , Theorie des topos et cohomologie étale des schemas 1963－1964 SGA4, Lecture notes in math 269, 270, 305, Springer, 1972－1973

В И Данилов 撰

7) Hılbert 绝对极值存在性定理 (Hılbert theorem on the exıstence of absolute extremum) 设

$$I=\int F dt$$

是参数变分问题的泛函，其中 $F=F(x,y,\dot{x},\dot{y})$ 是 $(\dot{x},\dot{y})$ 的一次正定函数，当 (x,y) 在区域 G 中，$(\dot{x},\dot{y})$ 适合 $\dot{x}^2+\dot{y}^2\neq 0$ 时，F 对所有的变量三次连续可微．又设对所有的 $(x,y)\in G$ 及适合 $\xi^2+\eta^2=1$ 的所有的 (ξ,η)，都有 $F(x,y,\xi,\eta)>0$ (即泛函 I 正定)，再设对一个闭凸子区域 G_0 中的所有 (x,y)，集合 $\Phi(x,y)=\{(\xi,\eta)\ F(x,y,\xi,\eta)\leq 1\}$ 关于 (ξ,η) 是严格凸的 (即泛函 I 是正则的，或椭圆的)．

在上述假设下，对 G_0 中任意二个点 (x_0,y_0)，(x_1,y_1)，有可能找到一曲线，它在所有可求长曲线中关于 I 是绝对极小的

这个定理是 D Hılbert 在 1899 年得到的

参考文献

[1] Ахиезер, Н И, Лекции по вариационному исчислению, М, 1955 (Akhıezer, N I, The culculus of varıatıons, Blaısdell, 1962)

В М Тихомиров 撰

8) Hılbert 不变量定理 (Hılbert theorem on ınvarıants) 以变量的线性替换定义一般线性群 GL$(r,\mathbf{C})$ 在 r 个变量的 d 次齐式组成的复向量空间上的作用．这个定理是说，在 GL$(r,\mathbf{C})$ 作用下不变的所有多项式组成的代数是有限生成的．利用 Hılbert 基定理 (Hılbert basıs theorem) 以及不变量理论的形式处理，[1] 中给出了这个定理的第一个证明 (亦见**不变量理论** (ınvarıants, theory of)　D Hılbert ([2]) 给出了这个定理的构造性证明．

Hılbert 定理是 GL$(r,\mathbf{C})$ 标准表示的 d 次对称不变量理论的第一个基本定理．Hılbert 定理的证明导致了 GL$(r,\mathbf{C})$ 子群的不变量代数的有限生成问题以及 Hilbert 第十四问题的提出　H Weyl 利用群上积分的理论，证明了任一紧 Lıe 群或复半单 Lıe 群的有限维表示的不变量代数都是有限生成的

下述推广通常也称为 Hılbert 定理　设 R 为域 k 上的有限型代数，G 是它的 k 自同构的几何**约化群** (reductıve group)，R^G 是 R 中所有 G 不变量组成的子代数，则 R^G 在 k 上也是有限型的 ([4]，[5])

参考文献

[1] Hılbert, D, Ueber dıe Theorıe der algebraıschen Formen *Math Ann*, **36** (1890), 473－534

[2] Hılbert, D, Ueber dıe vollen Invarıantensysteme, *Math Ann*, **42** (1893), 313－373

[3] Weyl, H, The classıcal groups, theır ınvarıants and representatıons, Prınceton Unıv Press, 1946

[4] Mumford, D, Geometrıc ınvarıant theory, Sprınger, 1965

[5] Nagata, M, Invarıants of a group ın an affıne rıng, *J Math Kyoto Unıv*, **3** (1964), 369－377

В Л Попов 撰　裴定一 译　赵春来 校

Hilbert 积分方程理论 [Hilbert theory of integral equations, Гильберта теория интегральных уравнений]

第二类线性积分方程

$$\varphi(x)+\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=f(x) \qquad (1)$$

的一般理论，是由 D Hılbert ([1]) 根据他的无穷多变量的线性和双线性型理论建立起来的．这个理论的基本思想如下所述　设给定了区间 (a,b) 上的一个完全规范正交函数系 $\{\omega_n(x)\}$，并且设

$$\varphi_p=\int_a^b \varphi(t)\omega_p(t)dt,\ f_p=\int_a^b f(t)\omega_p(t)dt,$$

$$a_{pq}=\int_a^b\int_a^b K(x,t)\omega_p(t)\omega_q(t)dxdt$$

这时，解积分方程(1)相当于解无穷多个线性代数方程的方程组

$$\varphi_p+\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\varphi_q=f_p,\ p=1,2, \qquad (2)$$

这里，只考虑这个方程组的使得

$$\sum_{p=1}^{\infty}\varphi_p^2<+\infty$$

的那些解，即在 **Hilbert 空间** (Hılbert space) 中来讨论这个方程组　在 Hılbert 空间中研究方程组 (2)，就有可能研究方程 (1) 的性质

Hılbert 积分方程理论给出了具有 **Hermite 核** (Hermıtıan kernel) 的积分方程特征值的极值性质的依据

参考文献

[1] Hılbert, D, Grundzuge eıner allgemeınen Theorıe der lınearen Integralgleıchungen, Chelsea, reprınt, 1953

Б В Хведелидзе 撰

【补注】　如果 K 是 Hermıte 核，$\{\omega_n\}$ 是对应于(1)中的积分算子的特征值 λ_n 的特征函数的完全规范正交系，则方程组(2)成为对角型的，求解后得到表示式

$$\varphi=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{f_p}{1+\lambda_p}\omega_p,$$

如果 **Fredholm 抉择定理** (Fredholm alternatıve) 的条件被满足．如果代替方程 (1)，考虑更一般的方程

$$\lambda\varphi(x)+\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=f(x),$$

则有

$$\varphi=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{f_p}{1+\lambda_p}\omega_p,$$

对于 $\lambda=0$，即对于第一类积分方程，此式也成立 (见 **Hilbert-Schmidt 级数** (Hılbert-Schmıdt serıes)

重要的是把具体的积分方程(1)作为Hilbert空间$L_2[a, b]$上的一个抽象线性算子方程来考虑，于是可以得到整个Hilbert空间理论，本条目中讨论的内容只是其中一个方面

细节及补充文献，见对称核积分方程(integral equation with symmetric kernel) 张鸿林 译

Hilbert 变换 [**Hilbert transform**, **Гильберта преобразование**]，函数f的反常积分

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt \qquad (1)$$

如果$f\in L(-\infty, \infty)$，则对于几乎所有x值，函数g存在．如果$f\in L_p(-\infty, \infty)$，$p\in(1, \infty)$，则函数$g$也属于$L_p(-\infty, \infty)$，并且反演公式

$$f(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{g(x+t)-g(x-t)}{t}dt \qquad (2)$$

几乎处处成立 这里

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2dx\leqslant M_p\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx, \qquad (3)$$

其中常数M_p仅依赖于p

公式(1)和(2)等价于公式

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-x}dt, \qquad (4)$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)}{t-x}dt, \qquad (5)$$

其中积分被理解为主值意义下的

在主值意义下考虑的积分

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cot\text{an}\,\frac{t-x}{2}dt \qquad (6)$$

也称为f的Hilbert变换．这个积分通常称为**Hilbert奇异积分**(Hilbert singular integral) 在Fourier级数的理论中，由(6)定义的函数g称为与f是共轭的(conjugate)

如果$f\in L(0, 2\pi)$，则g几乎处处存在，而如果f满足$\alpha(\alpha\in(0, 1))$阶Lipschitz条件，则对于任何x，g存在，并且也满足同样条件．如果$f\in L_p(0, 2\pi)$，$p\in(1, \infty)$，则g具有同样性质，并且存在类似于(3)的不等式，其中积分取在区间$(0, 2\pi)$上．因此，由Hilbert变换生成的积分换子是相应空间L_p上的有界(线性)算子．

如果f满足Lipschitz条件，或者$f\in L_p(0, 2\pi)$，并且还有

$$\int_0^{2\pi}g(x)dx=0,$$

则下列反演公式成立．

$$f(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t)\cot\text{an}\,\frac{t-x}{2}dt, \qquad (7)$$

并且

$$\int_0^{2\pi}f(x)dx=0$$

在满足Lipschitz条件的函数类中，等式(7)处处成立，而在p次幂可积的函数类中，等式(7)几乎处处成立．

可以把上述各对公式中的一个公式，例如(4)或(5)，看成一个第一类积分方程，这时，另一个公式给出这个方程的解

如果把函数$\cot\text{an}\{(t-x)/2\}$和$1/(t-x)$看成积分算子的核，则它们常常称为**Hilbert 核**(Hilbert kernel)和**Cauchy 核**(Cauchy kernel) 在单位圆的情况下，在这两个核之间存在简单关系

$$\frac{d\tau}{t-\xi}=\frac{1}{2}\left[\cot\text{an}\,\frac{t-x}{2}+i\right]dt,$$

其中$\xi=e^{ix}$，$\tau=e^{it}$

参考文献

[1] Hilbert, D, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Chelsea, reprint, 1953

[2] Riesz, M, Sur les fonctions conjugées, *Math Z*, **27** (1927), 218－244

[3] Titchmarsh, E C, Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford Univ Press, 1948

[4] Н И Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд, М, 1968 (中译本 Н И 穆斯海里什维里，奇异积分方程，上海科学技术出版社，1966)

[5] Бари, Н К, Тригонометрические ряды, М, 1961 (英译本 Bary, N K [N K Bari, A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964)

Б В Хведелидзе 撰

【补注】

参考文献

[A1] Zygmund, A, Trigonometric series, 1－2, Cambridge, Univ Press, 1988

张鸿林 译

Hill 方程 [**Hill equation**; **Хилла уравнение**]

带有周期函数$p(z)$的二阶常微分方程

$$w''(z)+p(z)w(z)=0,$$

其中所有的量都可以是复数．方程以G.Hill([1])命名，他在研究月亮的运动中获得带有实数θ_0，θ_2， ，的方程

$$w''(z)+\left[\theta_0+2\sum_{r=1}^{\infty}\theta_{2r}\cos 2rz\right]w(z)=0,$$

其中级数 $\sum_{r=1}^{\infty}|\theta_{2r}|$ 收敛．

Hill 利用无限阶行列式给出了解这个方程的一种方法 这是建立这种行列式理论以及后来由 E Fredholm 建立的积分方程理论的起源（见 **Fredholm 定理**（Fredholm theorems））．对于 Hill 方程，最重要的是解的稳定性及周期解存在与否的问题 如果在实数情形下，在 Hill 方程中引进参数

$$x''+\lambda p(t)x=0,$$

那么，在[2]中 A M. Ляпунов 得到，存在一个无限序列

$$<\lambda_{-1}\leqslant\lambda_0=0<\lambda_1\leqslant\lambda_2<\quad<\lambda_{2n-1}\leqslant\lambda_{2n}<\lambda_{2n+1}\leqslant\quad,$$

使得对于 $\lambda\in(\lambda_{2n},\lambda_{2n+1})$ Hill 方程是稳定的而且对于 $\lambda\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$ 是不稳定的 这里 λ_{4n} 和 λ_{4n+3} 是周期边值问题的本征值，λ_{4n+1} 和 λ_{4n+2} 是半周期边值问题的本征值 对 Hill 方程的研究已很充分了（见[3]）．

参考文献

[1] Hill, G, *Acta Math*, **8** (1886), 1

[2] Ляпунов, A M, Собр соч, **2** (1956), M, 407－409

[3] Якубович, B A, Старжинский, B M, Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, M 1972 (英译本 Yakubovich, V A and Starzhinskii, V M, Linear differential equations with periodic coefficients, Wiley, 1975)

Ю В Комленко 撰

【补注】 形如 $Q=D^2+q$ 的算子称为 Hill 算子（Hill operator），其中 q 是周期函数 设 q 的周期为 1 Q 的周期谱（periodic spectrum）和反周期谱（anti-periodic spectrum）（或半周期谱（semi-periodic spectrum））可由解 $Qf=\lambda f$ 和 $f(x+1)=\pm f(x)$ 得到 这些谱由一个简单周期基态 λ_0，接着是单重的或双重特征值

$$\lambda_0<\lambda_1\leqslant\lambda_2<\lambda_3\leqslant\lambda_4<$$

的交替的反周期对和周期对所构成 区间 $(-\infty,\lambda_0)$ 和 $[\lambda_{2i-1},\lambda_{2i}]$ 称为空隙（lacunae）或间隔（gaps）．这个术语来自这样一个事实，即考虑为作用于 $L_2(\mathbf{R})$ 上的 Q 的谱是在这些区间的并集的闭补集中．

Hill 算子和它的谱数据的研究在解（周期的）**Korteweg-de Vries 方程**（Korteweg-de Vries equation）的逆散射法（inverse scattering method）中很重要．这里，一个关键的结果是 Borg 定理（Borg theorem），该定理指出，势 q 能从周期和半周期谱，辅助谱（auxiliary spectrum）（它由解 $Qf=\mu f$，$f(0)=f(1)=0$ 得到），以及从有关的本征函数得到的某些规范常数而得到恢复．更多的详情见[A2]．μ_i 位于间隔之中，$\mu_i\in[\lambda_{2i-1},\lambda_{2i}]$，$i=1,2,$

在[A3]中，名词 Borg 定理指的是不同的结果，它属于“共存性问题”的范围，即确定周期为 1 和 2 的两个线性无关的周期解何时能共存的问题（见[A3]，第 2 6 节）．

关于周期谱和反周期谱的相对位置的结果，以及关于在不同的区间上 $Qy=\lambda y$ 的解的稳定性的相应叙述，一起称为振动定理（oscillation theorem）．

参考文献

[A1] Eastham, M S P, The spectral theory of periodic differential equations, Scottish Acad Press, 1973

[A2] McKean, H P, Integrable systems and algebraic curves, in M Grmela and J E Marsden (eds) Global Analysis, Lecture notes in math, Vol 755, Springer, 1979, 83－200

[A3] Magnus, W and Winkler, S, Hill's equation, Dover, reprint, 1979

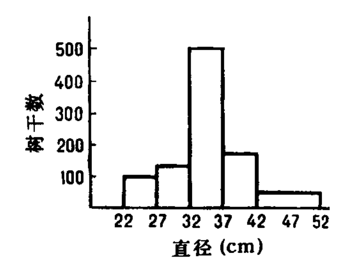
周芝英 译 叶彦谦 校

直方图 [histogram，гистограмма]

描绘试验数据的一种方法．直方图的构造如下．将某随机变量 X 的观测值 $X_1,\quad,X_n$ 的整个变动范围用点 $x_1,\quad,x_{k+1}$ 分为 k 个分组区间（通常是等长度的），计算出落入每个区间 $[x_i,x_{i+1})$ 的观测值个数 m_i 和频率 $h_i=m_i/n$ 将分点 $x_1,\quad,x_{k+1}$ 标在横坐标轴上，并以线段 $x_ix_{i+1}(i=1,\quad,k)$ 为底，作高为 $h_i/(x_{i+1}-x_i)$ 的矩形．如果诸区间 $[x_i,x_{i+1})$ 的长度相等，则矩形的高可取为 h_i 或 m_i 例如，对 1000 根冷杉树干的测量结果（分组区间长度为 5cm）如下

直径(cm)	22－27	27－32	32－37	37－42	42－52
树干数	100	130	500	170	100

下图即为该例的直方图



B H Чугуева 撰

【补注】 直方图可作为密度估计（density estimation）的一种方法（亦见**概率分布的密度**（density of a probability distribution）），有很多文献将它作为未知概率密度的一种统计估计，讨论在 $n\to\infty$ 和分组区间越来越小时它的性质（分组区间的长度 $\approx n^{-1/3}$ 看来是最优的）．

参考文献

[A1] Freedman, D and Diaconis, P, On the histogram as a density estimator L_2 theory, *Z Wahrsch Verw Geb.*, **57** (1981), 453－476

陶 波 译 李国英 校

Hodge 猜想 [**Hodge conjecture**, **Ходжа гипотеза**]

一个猜想·对复数域 **C** 上任何光滑射影簇 X 及任何整数 $p\geqslant 0$，**Q** 空间 $H^{2p}(X,\mathbf{Q})\cap H^{p,p}$ 由 X 上的余维数 p 的代数闭链的上同调类生成，这里 $H^{p,p}$ 是 Hodge 分解

$$H^{2p}(X,\mathbf{Q})\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{C}=\bigoplus_{r=0}^{2p}H^{r,2p-r}$$

中的 (p,p) 型分量 这一猜想由 W V D Hodge 在 [1] 中提出

当 $p=1$ 时 Hodge 猜想等价于关于 (1,1) 型上同调的 **Lefschetz 定理** (Lefschetz theorem)．对以下的簇类，Hodge 猜想均已获证

1) X 是四维光滑单直纹簇 (unıruled varıety)，即存在有限次有理映射 $P^1\times Y\to X$ 的簇 X，这里 Y 是一光滑簇 (见 [2])．例如· 单有理簇和具有丰富反典范类的四维完全交是单直纹簇 (见 [3])

2) X 是素数阶的光滑 Fermat 超曲面 (见 [4],[5])．

3) X 是五维单 Abel 簇 (见 [6])

4) X 是 d 维单 Abel 簇，且 $\mathrm{End}(X)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}=\mathbf{R}^l$，当 d/l 是一个奇数，或者 $\mathrm{End}(X)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}=[M_2(\mathbf{R})]^l$，当 $d/2l$ 是一个奇数

参考文献

[1] Hodge, W V D , The topologıcal ınvarıants of algebraıc varıetıes, ın Proc Internat Congress Mathematıcıans Cambrıdge, 1950, Vol 1, Amer Math Soc , 1952, 182－192

[2] Conte, A and Murre, J P , The Hodge conjecture for four-folds admıttıng a coverıng by ratıonal curves, *Math Ann* , **238** (1978), 79－88

[3] Conte, A and Murre, J P , The Hodge conjecture for Fano Complete ıntersectıons of dımensıon four, ın J de Geometrıe Algébrıque d'Angers, juıllet 1979, Sythoff & Noordhoff, 1980, 129－141

[4] Ran, Z , Cycles on Fermat hypersurfaces, *Composıtıo Math* , **42** (1980－1981), 1, 121－142

[5] Shıoda, T , The Hodge conjecture and the Tate conjecture for Fermat varıetıes, *Proc Japan Acad Ser A*, **55** (1979), 3, 111－114

[6] Танкеев, С Г , 《Изв АН СССР Сер матем》, **45** (1981), 4, 793－823

С Г Танкеев 撰

【补注】 光滑复射影簇 X 上的一个 Hodge 类 (Hodge class) 是指对某个 p，$H^{2p}(X,\mathbf{Q})\cap F^pH^{2p}(X,\mathbf{C})$ 中的任一元素，这里 $F^jH^m(X,\mathbf{C})=\sum_{i\geqslant j}H^{i,m-i}$ 是 Hodge 滤过，见 **Hodge 结构** (Hodge structure) Hodge 猜想与 Hodge 类的代数性有关．

Hodge 猜想的一个较弱的形式是变分 Hodge 猜想 (varıatıonal Hodge conjecture) 设有一复射影簇的光滑族以及一个在纤维上局部常值的上同调类，它处处是一个 Hodge 类且在一条纤维上是代数的，则它在邻近纤维内也是代数的 这个猜想在某些情形已得到证明 ([A1],[A2])．

数域上的射影族的一个绝对 Hodge 类 (absolute Hodge class) 是一组在 Bettı, de Rham 和艾达尔上同调中相容的上同调类 在 Abel 簇上每一 Hodge 类均是某个绝对 Hodge 类的 Bettı 分量 ([A3])．绝对 Hodge 类被用来定义代数簇的主题 (motıf) 的弱概念．

Hodge 曾提出过一个后来为 A Grothendıeck ([A4]) 所改正了的更一般的猜想 设 X 为一光滑复射影簇，$M\subseteq H^m(X,\mathbf{C})$ 是一使得对 $i\leqslant p$，有 $M^{i,m-i}=0$ 的 Hodge 子结构，则存在 X 的一个余维数 p 的代数子集 Z 使得 $M\subseteq\mathrm{Ker}\,(H^m(X,\mathbf{C})\to H^m(X\setminus Z,\mathbf{C}))$

这种类型的更一般的猜想由 A Beılınson ([A5]) 提出

参考文献

[A1] Bloch, S , Semı-regularıty and de Rham cohomology, *Invent Math* , **17** (1972), 51－66

[A2] Steenbrınk, J H M , Some remarks about the Hodge conjecture, ın E Cattanı, F Guıllán and A Kaplan et al (eds) Hodge theory, Lecture notes ın math , Vol 1246, Sprınger, 165－175

[A3] Delıgne, P , Mılne, J S and Ogus, A , et al , Hodge cycles, motıves and Shımura varıetıes, Lecture notes ın math 900, Sprınger, 1982

[A4] Grothendıeck, A , Hodge's general conjecture ıs false for trıvıal reasons, *Topology*, **8** (1969), 299－303

[A5] Beılınson, A A , Notes on absolute Hodge cohomology, *Contemp Math* , **55** (1986), 1, 35－68

刘先仿 译

Hodge 结构 [**Hodge structure**, **Ходжа структура**], (纯粹) 权 n 的

一种对象由实向量空间 $H_{\mathbf{R}}=H_{\mathbf{Z}}\otimes\mathbf{R}$ 中的格 $H_{\mathbf{Z}}$ 及复向量空间 $H_{\mathbf{C}}=H_{\mathbf{Z}}\otimes\mathbf{C}$ 的一个分解 $H_{\mathbf{C}}=\bigoplus_{p+q=n}H^{p,q}$ (Hodge 分解 (Hodge decomposıtıon)) 组成．这里条件 $\overline{H}^{p,q}=H^{q,p}$ 必须满足，其中横线表示 $H_{\mathbf{C}}=H_{\mathbf{R}}\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ 中的复数共轭． Hodge 分解的另一种描述是给定一个递降滤过，即在 $H_{\mathbf{C}}$ 中给定 $F^r=\bigoplus_{p\geqslant r}H^{p,q}$ (Hodge 滤过 (Hodge filtratıon))，当 $r+s\neq n$ 时，满足 $\overline{F}^s\cap F^r=0$，则子空间 $H^{p,q}$ 可从公式 $H^{p,q}=F^p\cap\overline{F}^q$，重新给出．

紧 **Kähler 流形** (Kähler manıfold) X 的 n 维上同调向量空间 $H^n(X,\mathbf{C})$ 上的 Hodge 结构就是一个例子，它是首先为 W V D Hodge (见 [1]) 研究的．在这个情形下，子空间 $H^{p,q}$ 可取作 (p,q) 型调和形式的

空间（见**调和形式**（harmonic form）），或看作全纯微分形式层 Ω^p 的上同调空间 $H^q(X, \Omega^p)$（[2]）$H^n(X, \mathbf{C})$ 的 Hodge 滤过来自以子复形 $\sum_{p\geq r}\Omega^r$ 为滤过的层复形 $\Omega^{\bullet}=\sum_{p\geq 0}\Omega^p$，后者以 $H^n(X, \mathbf{C})$ 为其 n 维超上同调群

一个更广的概念是混合 Hodge 结构（mixed Hodge structure）这是一个对象具有如下的构成要素 $H_{\mathbf{R}}=H_{\mathbf{Z}}\otimes\mathbf{R}$ 中的格 H_L，$H_{\mathbf{Q}}=H_{\mathbf{Z}}\otimes\mathbf{Q}$ 中的递增滤过（权滤过）W_n 以及 $H_{\mathbf{C}}=H_{\mathbf{Z}}\otimes\mathbf{C}$ 中的递减滤过（Hodge 滤过）F^p，使得在空间 $(W_{n+1}/W_n)\otimes\mathbf{C}$ 上，滤过 F^p 与 $\overline{F}^p$ 决定一个权为 n 的纯粹 Hodge 结构 复**代数簇**（algebraic variety）（不一定紧或光滑）的上同调空间上的混合 Hodge 结构类似于艾达尔上同调中的 Galois 模的结构（见[3]）Hodge 结构在代数几何（见**周期映射**（period mapping））以及光滑映射的奇点理论（见[4]）中有重要应用

参考文献

[1] Hodge, W V D, The theory and applications of harmonic integrals, Cambridge Univ Press, 1952

[2] Griffiths, P A and Harris, J E, Principles of algebraic geometry, 1, Wiley, 1978

[3] Deligne, P, Poids dans la cohomologie des varietes algebriques, in R James (ed) Proc Internat Congress Mathematicians Vancouver, 1974, Vol 1, Canad Math Congress, 1975, 79 − 85

[4] Варченко, А Н, в сб Современные проблемы математики, т 22, М, 1983, 130 − 166

亦见**周期映射**（period mapping）所附文献

А И Овсеевич 撰

【补注】 权 n 的 Hodge 结构包含 i）一个有限生成的交换群 H_L，ii）在 $H_{\mathbf{C}}=H_{\mathbf{Z}}\otimes\mathbf{C}$ 上的一个递减的过滤 F 使得当 $p+q=n+1$ 时 $F^p\oplus\overline{F}^q=H_{\mathbf{C}}$ 权 n 的 Hodge 结构的极化（polarization）是 $H_{\mathbf{Z}}$ 上的一个 $(-1)^n$ 对称的 $\mathbf{Z}$ 值双线性型 S 使得 $S(x, y)=0$ 对于 $x\in F^p$，$y\in F^{n-p+1}$，并且 $i^{p-q}S(x, \overline{x})>0$ 当 $0\neq x\in F^p\cap\overline{F^{n-p}}$ 代数几何学中出现的 Hodge 结构总是可极化的

对于具有给定数据的极化 Hodge 结构必有分类空间存在（[A1]），同样对于混合 Hodge 结构而在权滤过的分次商中有极化的情形也如此（[A2]）．混合的 Hodge 结构形成一个 **Abel 范畴**（Abelian category），在其中每个态射同时严格相容于 Hodge 滤过与权滤过 纯粹极化 Hodge 结构形成一个 Tannaka 范畴（[A3]）在下列各群上存在典范的与函子型混合 Hodge 结构 在代数簇的（局部）上同调群（[A4]），有理同伦群（[5]），函数芽的消隐循环之群（[A6]，[A7]），以 Hodge 结构的可极化变动为系数的，代数簇的交截同调群（[A8]，[A9]）在最后一种情形下，甚至有纯 Hodge 结构 到目前为止（1989），最远的推广似乎是混合 Hodge 模（mixed Hodge module）（[A10]，[A11]）

参考文献

[A1] Griffiths, P, Periods of integrals on algebraic manifolds, *Amer J Math*, **90** (1968), 568 − 625, 805 − 865

[A2] Carlson, J, Cattani, E and Kaplan, A, Mixed Hodge structures and compactifications of Siegel's space, in A Beauville (ed) Algebraic Geometry Angers, 1979, Sijthoff & Noordhoff, 1980, 77 − 105

[A3] Saavedra Rivano, N, Categories Tannakiennes, Lecture notes in math, 265, Springer, 1972

[A4A] Deligne, P, Théorie de Hodge Ⅱ，Ⅲ，*Publ Math IHES*, **40** (1971), 5 − 58

[A4B] Deligne, P, Theorie de Hodge Ⅳ, *Publ Math IHES*, **44** (1975), 5 − 77

[A5] Hain, R M, The de Rham homotopy theory of complex algebraic varieties Ⅰ，Ⅱ，*K-theory*, **1** (1987), 271 − 324, 481 − 497

[A6] Steenbrink, J H M, Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology, in P Holm (ed) Real and complex singularities Oslo, 1976, Sijthoff & Noordhoff, 1977, 525 − 563

[A7] Navarro Aznar, V, Sur la théorie de Hodge-Deligne *Invent Math*, **90** (1987), 11 − 76

[A8] Cattani, E, Kaplan, A and Schmid, W, L^2 and intersection cohomologies for a polarizable variation of Hodge structure, *Invent Math*, **87** (1987), 217 − 252

[A9] Kashiwara M and Kawai, T, The Poincare lemma for variations of Hodge structure, *Publ RIMS Kyoto Univ*, **23** (1987), 2, 345 − 407

[A10] Saito, M, Modules de Hodge polarizables, *Preprint RIMS*, **553** (Oct 1986)

[A11] Saito, M, Mixed Hodge modules, *Preprint RIMS*, **585** (July 1987)

孙以丰 译

Hodge 定理 [Hodge theorem, Ходжа теорема]

1）Hodge 指标定理（Hodge index theorem）复维数为 $2n$ 的紧致 **Kahler 流形**（Kahler manifold）M 的指标（**符号差**（signature））$\sigma(M)$ 能用公式

$$\sigma(M)=\sum_{p,q}(-1)^p h^{p,q}\quad(p+q\text{ 为偶数})$$

来计算，这里 $h^{p,q}=\dim H^{p,q}(M)$ 是 M 上 (p, q) 型**调和形式**（harmonic form）空间的维数．这是由 W V D Hodge 所证明的（[1]）

2）紧致流形上椭圆复形的光滑截面空间分解成调和正合及余正合截面的正交直和的 Hodge 定理（见 **Laplace 算子**（Laplace operator））对可定向紧致 Rie-

mann 流形 M 上的 de Rham 复形

$$E^{*}(M)=\sum_{p\geqslant 0}E^{p}(M),$$

这定理是由 W V D Hodge 证明的 在此情形下，Hodge 定理断言，对任何 $p\geqslant 0$，M 上的调和形式空间 $H^{p}(M)$ 是有限维的，且存在唯一的算子 G $E^{p}(M)\to E^{p}(M)$ (Green-de Rham 算子 (Green-de Rham operator)) 满足条件

$$G(H^{p}(M))=0,\ Gd=dG,\ G\delta=\delta G,$$

$$E^{p}(M)=H^{p}(M)\oplus d\delta GE^{p}(M)\oplus\delta dGE^{p}(M)$$

(Hodge 分解 (Hodge decomposition)) 特别地，$H^{p}(M)$ 同构于 M 的实上同调空间 $H^{p}(M,\mathbf{R})$ 另一个重要的特殊情形是关于紧致复流形 M 上的 Dolbeault 复形的 Hodge 定理 (见**微分形式** (differential form)) ([3]) 这些结果导致了紧致 Kahler 流形的上同调空间中的经典 **Hodge 结构** (Hodge structure)

参考文献

[1] Hodge, W V D, The topological invariants of algebraic varieties, in Proc Internat Congress Mathematicians Cambridge, 1950, Vol 1, Amer, Math Soc, 1952, 182 - 192

[2] Hodge, W V D, The theory and application of harmonic integral, Cambridge Univ Press, 1962

[3] Griffiths, P and Harris, J, Principles of algebraic geometry, 1, Willey, 1978

[4] Rham, G de, Differentiall manifollds, Springer, 1984 (译自法文) А Л Онищик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Wells, jr, R O, Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980 沈纯理 译

Hodge 簇 [Hodge variety, Ходжа многообразие], Hodge 流形 (Hodge manifold)

一个**复流形** (complex manifold)，在其上能给出 Hodge 度量 (Hodge metric)，即其基本形式定义了整数上同调类的 **Kahler 度量** (Kahler metric). 紧复流形为 Hodge 流形的充要条件是它同构于某个复射影空间中的一个光滑代数子簇 (小平射影嵌入定理 (Kodaira projective imbedding theorem))

亦见 **Kahler 流形** (Kahler manifold)

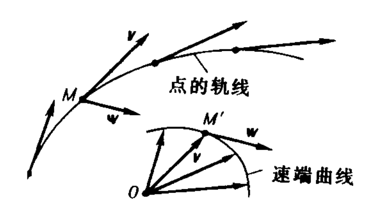
参考文献

[1] Griffiths, P A and Harris, J E, Principles of algebraic geometry, 1, Wiley, 1978

А Л Онищик 撰 沈纯理 译

速端曲线 [hodograph, годограф], 沿一曲线的向量函数 $x(t)$ 的

表示变向量 $x(t)$ (t 是实变量，例如时间) 的端点的曲线，对于一切 t，向量 (x) 的原点均处于一固定点 O 速端曲线给出了变向量随时间的变化及变化



速端曲线的作图

率的直观几何表示 其变化的方向就是速端曲线切线的方向 例如，如果变向量 $\mathbf{v}$ 表示动点的速度，从原点 O 画出不同时刻的 v 的值，就得到速度的速端曲线 (velocity hodograph) 在某一点 M 上的速度变化率即在该点上的加速度 $\mathbf{w}$，在任何时刻，其方向都是速端曲线在对应点上的切线方向.

张鸿林 译

速端曲线变换 [hodograph transform, годографа преобразовние]

把某些数学物理微分方程变换为其线性形式的映射

由正压气体 ($\rho=F(p)$) 的平面平行位势定常运动的 **Bernoulli 积分** (Bernoulli integral) 和**连续性方程** (continuity equation)

$$\rho=\rho_{0}\left(1-\frac{u^{2}+v^{2}}{2\alpha}\right)^{\beta},\quad \frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}=0,$$

其中

$$\alpha=\frac{c^{2}}{\gamma-1},\ \beta=\frac{1}{\gamma-1}\ (c\ 为\ \rho=\rho_{0}\ 时的声速),$$

得到方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{v^{2}}{2\alpha}\right)^{\beta}u\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(1-\frac{v^{2}}{2\alpha}\right)^{\beta}v\right]=0, \qquad (*)$$

它可以用来决定速度位势

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

其中 u 和 v 是速度分量 引入新的自变量 $\tau=v^{2}/2\alpha$，而 θ 等于速度向量对 x 轴的倾角，方程 (*) 化为线性形式

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}{1-(2\beta+1)\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right]+\frac{(1-\tau)^{\beta}}{2\tau}\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial\theta^{2}}=0$$

这是第一速端曲线变换 (first hodograph transform) 或第一 **Чаплыгин** 变换 (first Chaplygin transform)

第二速端曲线变换（second hodograph transform）或第二**Чаплыгин**变换（second Chaplygin transform）可以应用切向**Legendre 变换**（Legendre transfom）而得到．选取函数

$$\Phi = x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \varphi,$$

作为新的未知函数，按下列公式引入新的自变量 u，v 来代替 x，y．

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \ v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

这时，方程（*）具有线性形式·

$$\left[1-\frac{v^2}{2\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}v^2\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{2\beta}{\alpha}uv\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v} + \left[1-\frac{v^2}{2\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}u^2\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} = 0$$

速端曲线变换用于解决射流理论问题，以及曲线边界的气体绕流问题．

参考文献

[1] Чаплыгин, С А, О газовых, струях, М -Л, 1949（中译本 С А 查浦雷金，论气体射流，科学出版社，1955）

[2] Кочин, Н Е, Кибель, И А, Розе, Н В, Теоретическая гидромеханика, 4 изд, М, 1963（中译本 Н Е．柯琴等，理论流体力学，高等教育出版社，1956）

Л Н Сретенский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Curle, N and Davies, H J, Modern fluid dynamics, 1 – 2, v Nostrand Reinhold, 1971

张鸿林 译

Hölder 条件［Holder condition，Гёльдера условие］

关于函数增量用它的自变元增量来估计的不等式．定义在 n 维 Euclid 空间中区域 E 上的函数 f 称为在点 $y\in E$ 满足具指标 α（α 阶，$0<\alpha\leqslant 1$）与系数 $A(y)$ 的 Holder 条件，如果对一切充分接近 y 的 $x\in E$ 有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant A(y)|x-y|^{\alpha} \tag{1}$$

f 称为在集合 $E'\subset E$ 上满足具指数 α 的（迷向 Holder 条件（isotropic Holder condition）），如果（1）对一切 $Y\in E'$ 满足．且若 $A=\sup_{y\in E}A(y)<\infty$，则称 Holder 条件在 E 上是一致的（uniform），而 A 称为 f 在 E 上的 Hölder 系数．满足 Hölder 条件的函数称为 Hölder 连续的（Holder continuous）量

$$|f|_{\alpha} = |f, E|_{\alpha} = \sup_{x\ y\in E}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}, \quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1$$

称为集合 E 上有界函数 f 的 Hölder α 半范数（Hölder α-semi-norm） Holder 半范数作为 α 的函数是对数凸的

$$|f|_{\alpha t+\beta(1-t)}\leqslant|f|_{\alpha}^{t}|f|_{\beta}^{1-t}, \quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

类似于条件（1）可引进非迷向 Holder 条件（non-isotropic Holder condition），它取下列形式

$$|f(x)-f(y)|\leqslant A\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_j^i(x^j-y^j)\right|^{\alpha_i},$$

其中 $0<\alpha_i\leqslant 1$ 且 $\det(a_j^i)\neq 0$ 满足非迷向 Holder 条件的函数为连续且在余向量 $a^i=(a_1^i, \cdot, a_n^i)$ 的方向有 Hölder 指数 α_i，$1\leqslant i\leqslant n$

对一元函数形如（1）的条件为 R. Lipschitz 于 1864 年在研究三角级数问题时引进．在此情形 Hölder 条件常称为具有 Lipschitz 常数 A 的 α 阶 Lipschitz 条件．对实 n 元函数，$n\geqslant 2$，Hölder 条件为 O Hölder 在研究 Newton 位势的微分性质时引进．

Hölder 条件可自然推广到度量空间中映射的情形．度量空间 X 到度量空间 E 中的映射 f $X\to E$ 称为在点 $x_0\in X$ 满足具有指数 α 与系数 $A(x_0)$ 的 Hölder 条件，如果存在 x_0 的邻域 $U(x_0)\subset X$，使对任何 $x\in U(x_0)$，不等式

$$\rho_E(f(x), f(x_0))\leqslant A(x_0)\rho_X^{\alpha}(x, x_0)$$

成立 这里 ρ_X 与 ρ_E 分别是空间 X 与 E 中的度量．

可以类似地定义在集合 $X'\subset X$ 上的 Hölder 条件，X 上一致 Hölder 条件以及 Hölder α 半范数．

满足任一 Hölder 条件的函数组成的向量空间称为 **Holder 空间**（Holder space）．

Л П Купцов 撰 郑维行 译

Hölder 不等式［Hölder inequality，Гёльдера неравенство］

1）关于和的 Holder 不等式 设 $\{a_s\}$ 与 $\{b_s\}$ 为复数的集合，$s\in S$，这里 S 为有限或无限指标集 下面的 Holder 不等式成立

$$\left|\sum_{s\in S}a_sb_s\right|\leqslant\left[\sum_{s\in S}|a_s|^p\right]^{1/p}\left[\sum_{s\in S}|b_s|^q\right]^{1/q}, \tag{1}$$

其中 $p>1$，$1/p+1/q=1$，(1) 成为等式当且仅当 $|a_s|^p=C|b_s|^q$，且 $\arg(a_sb_s)$ 与 C 均与 $s\in S$ 无关 在极限情形，$p=1$，$q=+\infty$，Hölder 不等式取下列形式

$$\left|\sum_{s\in S}a_sb_s\right|\leqslant\left[\sum_{s\in S}|a_s|\right]\sup_{s\in S}|b_s|$$

若 $0<p<1$，Holder 不等式将取反向形式．关于和的 Hölder 不等式的逆命题也成立（M Riesz）· 若对一切

满足 $\sum_{s\in S}|a_s|^p\leqslant A^p$ 的 $\{a_s\}$ 有

$$\left|\sum_{s\in S}a_sb_s\right|\leqslant AB,$$

则

$$\sum_{s\in S}|b_s|^q\leqslant B^q$$

关于更一般形式的和的 Hölder 不等式取下列形式· 如果

$$1/p_1+\quad+1/p_m=1,\ p_1,\quad ,p_m>1, \tag{2}$$

则有

$$\left|\sum_{s\in S}\rho_s a_{1s}\quad a_{ms}\right|\leqslant\prod_{k=1}^{m}\left[\sum_{s\in S}\rho_s|a_{k_s}|^{p_k}\right]^{1/p_k},\quad \rho_s\geqslant 0$$

2) 关于积分的 Hölder 不等式　设 S 为 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中的 Lebesgue 可测集，并设函数

$$a_k(s)=a_k(s^1,\quad ,s^n),\ 1\leqslant k\leqslant m,$$

均属于 $L_{p_k}(S)$，这里 p_k 满足条件 (2)　那么，下列 Hölder 不等式成立

$$\left|\int_S a_1(s)\quad a_m(s)ds\right|\leqslant\prod_{k=1}^{m}\left[\int_S|a_k(s)|^{p_k}ds\right]^{1/p_k}$$

若 $m=p=q=2$，则得到 **Буняковский 不等式** (Bunyakovskiĭ inequality)．对 Holder 不等式 (1) 所作的类似附注（关于极限情形与关于指标的范围）关于积分情形也成立

在 Hölder 不等式中集合 S 可以是带有可加函数 μ (例如测度)的某个子集类所成的代数中的任一集合，而函数 $a_k(s)$ $(1\leqslant k\leqslant m)$ 均是 μ 可测与 p_k 次 μ 可积的．

3) 广义 Hölder 不等式 (generalized Hölder inequality)．设 S 为任一集合，令（有限或无限）泛函 $\varphi\quad a\rightarrow\varphi(a)$ 定义于一切正函数 $a\quad S\rightarrow\mathbf{R}^1$ 的类上并令此泛函满足下列条件　a) $\varphi(0)=0$，b) 对一切数 $\lambda>0$ 有 $\varphi(\lambda a)=\lambda\varphi(a)$，c) 若 $0<a(s)\leqslant b(s)$ 则有 $\varphi(a)\leqslant\varphi(b)$，且 d) $\varphi(a+b)\leqslant\varphi(a)+\varphi(b)$　若条件 (2) 也满足，则对泛函的广义 Hölder 不等式成立

$$\varphi(|a_1\quad a_m|)\leqslant\prod_{k=1}^{m}[\varphi(|a_k|^{p_k})]^{1/p_k}$$

参考文献

[1] Hölder, O, Ueber einen Mittelwerthsatz, *Nachr Ges Wiss Göttingen* (1889), 38-47

[2] Hardy, G H, Littlewood, J E and Pólya, G, Inequalities, Cambridge Univ Press, 1934 (中译本　G H 哈代，J E 李特伍德，G 波利亚，不等式，科学出版社，1965).

[3] Beckenbach, E F and Bellman, R, Inequalities, Springer, 1961　　Л П Купцов 撰

【补注】 在英文文献中 Буняковский 不等式常称为 Cauchy-Schwarz 不等式 (Cauchy-Schwarz inequality)

参考文献

[A1] Dunford, N and Schwartz, J T, Linear operators, General theory, 1, Interscience, 1958　　郑维行 译

Hölder 空间 [Hölder space, Гёльдерово пространство]

定义在 n 维 Euclid 空间中集合 E 上并满足 E 上 **Hölder 条件** (Hölder condition) 的有界连续函数 $f(x)=f(x^1,\quad ,x^n)$ 所构成的 **Banach 空间** (Banach space)

对于整数 $m\geqslant 0$，Hölder 空间 $C_m(E)$ 由 E 上 m 次连续可微（对 $m=0$，连续）函数构成．

对于整数 $m\geqslant 0$，Holder 空间 $C_{m+\alpha}(E)$ $(0<\alpha\leqslant 1)$ 由 E 上 m 次连续可微（对 $m=0$，连续）且 m 阶导数满足具有指数 α 的 **Hölder 条件** (Hölder condition) 的函数构成

对有界集 E，空间 $C_m(E)$ 与 $C_{m+\alpha}(E)$ 上的范数可引进如下

$$|f|_m=\|f,E\|_m=\sum_{|k|=0}^{m}\sup_{x\in E}|f^{(k)}(x)|,$$

$$|f|_{m+\alpha}=\|f,E\|_{m+\alpha}=|f|_m+\sum_{|k|=m}\|f^{(k)},E\|_\alpha,$$

其中 $k=(k_1,\quad ,k_n)$ $(k_j\geqslant 0)$ 为整数，

$$|k|=k_1+\quad\cdot+k_n,\ f^{(k)}(x)=\partial^{|k|}f(x)/\partial x_1^{k_1}\quad\partial x_n^{k_n}$$

对有界连通域（$\bar{E}$ 表示 E 的闭包），Hölder 空间的基本性质有

1) 若 $0\leqslant k+\alpha\leqslant m+\beta$，$k,m$ 为整数，$0<\alpha\leqslant 1$，$0\leqslant\beta\leqslant 1$，则 $C_{m+\beta}(\bar{E})$ 被嵌入 $C_{k+\alpha}(\bar{E})$ 中　这里 $|f|_{k+\alpha}\leqslant A|f|_{m+\beta}$ 并且常数 A 与 $f\in C_{m+\beta}(\bar{E})$ 无关．

2) 若 $0<\alpha<\beta$，则 $C_{m+\beta}(\bar{E})$ 中的单位球(面)在 $C_{m+\alpha}(\bar{E})$ 中是紧的．因此，$C_{m+\beta}(\bar{E})$ 中函数的任何有界集含有函数序列，依 $C_{m+\alpha}(\bar{E})$ 的度量收敛于 $C_{m+\alpha}(\bar{E})$ 中的一函数

参考文献

[1] Miranda, C, Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970 (译自意大利文)　　Л П Купцов 撰

【补注】 若上述指数满足 $0<\alpha<1$，则 $\|f,E\|_\alpha$ 为 f 在 E 上的 Hölder α 半范数，即

$$\|f,E\|_\alpha=\sup_{x\ y\in E}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

见 **Hölder 条件** (Hölder condition)，那里此范数记为 $|f,E|_\alpha$

Hölder 空间在偏微分方程，位势理论，复分析，泛函分析（见**嵌入定理** (imbedding theorems)）等方面都有重要作用．　　郑维行 译

Holder 求和法 [Holder summation methods, Гёльдера

методы суммирования]

数项级数的一组求和法，是由O Holder([1])作为**算术平均求和法**(anthmetical averages, summation method of)的推广而引入的．级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

按Holder法(H, k)是可和的(summable)，其和为s，如果

$$\lim_{n\to\infty} H_n^k = s,$$

其中

$$H_n^0 = s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

$$H_n^k = \frac{H_0^{k-1} + \cdots + H_n^{k-1}}{n+1},$$

$k=1, 2,$ 特别是，级数的(H, 0)可和性说明它在通常意义下是收敛的，(H, 1)是算术平均法．对于任何k，Holder法(H, k)都是**正则求和法**(reguler summation methods)，对于一切k，它们是相容的(见**求和法的相容性**(compatibility of summation metheds))．随着k的增加，这种求和法的效力也增加 如果一个级数按Holder法(H, k)是可和的，其和为s，则它按Holder法(H, k')($k'>k$)也是可和的，其和为s 对于任何k，Holder法(H, k)与相同阶数k的**Cesàro求和法**(Cesàro summation methods)是等价的和相容的．如果一个级数按Holder法(H, k)是可和的，则它的各项a_n必须满足条件$a_n = o(n^k)$

参考文献

[1] Holder, O, Grenzwerthe von Reihen an der Konvergenzgrenze, *Math Ann*, **20** (1882), 535 – 549

[2] Hardy, G H, Divergent series, Oxford Univ Press, 1949

И И Волков 撰 张鸿林 译

群的全形 [**holomorph of a group**, **голоморф группы**]

在群论中与以下问题相关联而产生的一个概念．能否将任意给定的群G作为一个正规子群包含在另一个群内，使得G的所有自同构都是这个大群的内自同构的限制? 为了解决这个问题，利用G和它的**自同构**(automorphism)群$\Phi(G)$来构造一个新的群Γ Γ的元素是对(g, φ)，这里$g\in G$, $\varphi\in\Phi(G)$，对的复合由公式

$$(g_1, \varphi_1)(g_2, \varphi_2) = (g_1 g_2^{\varphi_1^{-1}}, \varphi_1\varphi_2)$$

定义，这里$g_2^{\varphi_1^{-1}}$是g_2在φ_1^{-1}之下的象 群Γ(或者与它同构的群)称为G的全形(holomorph)．形如(g, ε)的对所成的集合，这里ε是$\Phi(G)$的单位元，构成一个与原来的群G同构的子群．类似地，形如(e, φ)的对所成的集合，这里e是G的单位元，构成一个与群$\Phi(G)$同构的子群 公式

$$(e, \varphi^{-1})(g, \varepsilon)(e, \varphi) = (g^{\varphi}, \varepsilon)$$

表明，Γ的确是上述问题的一个解．

В Н Ремесленников 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hall, M Jr, The theory of groups, Macmillan, 1959 (中译本 M 赫尔，群论，科学出版社，1981)

[A2] Курош, А Г, Теория групп, 3 изд, М, 1967 (中译本 А Г 库洛什，群论，高等教育出版社，上册，1987，下册，1982)

郝锕新 译

全纯包 [**holomorphic envelope**, envelope of holomorphy, **голоморфности оболочка**], (Riemann) 区域D的

具有如下性质的最大区域$H(D)$ 任一在D内的全纯函数都能全纯地延拓到$H(D)$ 对一个给定的区域D，构造它的全纯包的问题是由复空间$\mathbf{C}^n(n\geqslant 2)$中不是所有的区域都是**全纯域**(domain of holomorphy)这一事实产生的，即存在这样的区域，在这区域内的任一全纯函数都可全纯延拓到一个更大的(通常不是单叶的)区域 全纯包$H(D)$是一个全纯域，当D是全纯域时，$H(D)=D$

在公理化量子场论应用中产生了构造一个特殊类型的全纯包的非平凡问题，它反映了谱性，局部交换性和Lorentz共变的物理需要 在这方面，关于楔边的**Боголюбов定理**(Bogolyubov theorem)和**连续性定理**(continuity theorem)是特别有用的．

参考文献

[1] Владимиров, В С, Методы теории функций многих комплексных переменных, М, 1964 (英译本 Vladimirov, V S, Methods of the theory of functions of several complex variables, M I T, 1966)

[2] Шабат, Б В, Введение в комплексный анализ, 2 изд, ч 1, 2, М, 1976

В С Владимиров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gunning, R C and Rossi, H, Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965, Chapt 1, Sect G

陈志华 译

全纯形式 [**holomorphic form**, **голоморфная форма**], 复流形M上p次的

一个$(p, 0)$型**微分形式**(differential form)α，满足条件$d''\alpha=0$，即用M上局部坐标$z_1, \ldots, z_n$能写成

$$\alpha = \sum_{i_1, \ldots, i_p} a_{i_1 \cdots i_p} dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_p}$$

的形式，其中 $a_{i_1 \cdots i_p}$ 均为**全纯函数**(holomorphic function) p 次全纯形式构成域 **C** 上的向量空间 $\Omega^p(M)$，$\Omega^0(M)$ 是 M 上的全纯函数空间.

对紧 **Kahler 流形**(Kahler manifold) M，空间 $\Omega^p(M)$ 与 $(p, 0)$ 型**调和形式**(harmonic form) 的空间 $H^{p,0}(M)$ 相同，因此 $2\dim\Omega^1(M)$ 是 M 的第一 **Betti 数**(Betti number) ([1]) **Riemann 曲面**(Riemann surface) M 上的全纯形式也称为第一类微分(differential of the first kind)，若 M 是紧的，则 $\dim\Omega^1(M)$ 等于它的亏格(见**曲线的亏格**(genus of a curve))

空间 $\Omega^p(M)$，$p=0, \cdots, \dim_{\mathbf{C}} M$ 构成关于算子 d 的局部正合复形，即所谓全纯 de Rham 复形(holomorphic de Rham complex) 若 M 为 **Stein 流形**(Stein manifold)，则此复形的上同调空间同构于复上同调空间 $H^p(M, \mathbf{C})$，且对 $p > \dim_{\mathbf{C}} M$ 有 $H^p(M, \mathbf{C}) = 0$ ([2])

取值于 M 上某一**解析向量丛**(vector bundle, analytic) 的全纯形式可类似地定义(这里，全纯 0 形式是丛的全纯截口). 取值于 E 的 p 次全纯形式的芽构成局部自由解析层 Ω_E^p. 取值于 E 的 (p, q) 型的形式 $(q=0, \cdots, \dim_{\mathbf{C}} M)$ 的 Dolbeault 复形为此层的细分解，因此

$$H^{p,q}(M, E) \cong H^q(M, \Omega_E^p)$$

(Dolbeault-Serre 定理(Dolbeault-Serre theorem) [1], [4])

全纯形式的定义可推广到复解析空间 这只须对局部模型来进行，即对空间 X 为区域 $G \subset \mathbf{C}^n$ 的解析子空间的情形来进行. X 中全纯 p 形式的芽层 Ω_X^p 定义为

$$\Omega_G^p / K^p|_X,$$

其中 Ω_G^p 为 G 中全纯 p 形式的芽层，而 K^p 由形如

$$\sum_{k=1}^{r} f_k \alpha_k + \sum_{l=1}^{s} dg_l \wedge \beta_l,$$

$$f_k,\ g_l \in I,\ \alpha_k \in \Omega_G^p,\ \beta_l \in \Omega_G^{p-1}$$

的形式的芽组成，其中 I 为确定 X 的理想的层. X 的全纯 de Rham 复形也可定义，但它不是局部正合的. 为了此复形成为在点 $x \in X$ 由 k 次开始为局部正合的，只须 X 在 x 的一邻域有一个到局部解析集 $Y \subset X$ 上的全纯压缩映射，这里 $\operatorname{em}\dim_x Y = k$([3])

参考文献

[1] Chern, S S, Complex manifolds without potential theory, Springer, 1979

[2] Gunning, R C and Rossi, H, Analytic functions of several complex variables, Printice-Hall, 1965

[3] Reiffen, H J, Das Lemma von Poincaré fur holomorphe Differentialformen auf komplexen Raumen, *Math Z*, **101** (1967), 269 – 284

[4] Wells, jr, R O, Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980

А Л Онищик 撰 郑维行 译 沈永欢 校

全纯函数 [holomorphic function, голоморфная функция] 同**解析函数** (analytic function).

全纯映射 [holomorphic mapping, голоморфное отображение]

一个区域 $D \subset \mathbf{C}^n$ 到一个区域 $D' \subset \mathbf{C}^m$ 的映射 f $D \to D'$，在此映射下

$$z = (z_1, \cdots, z_n) \to (f_1(z), \cdots, f_m(z)),$$

这里所有的坐标函数 $f_1, \cdots, f_m$ 都是在 D 内全纯的 当 $m=1$ 时，一个全纯映射就是一个全纯函数(见**解析函数**(analytic function))

一个全纯映射称为在点 $z \in D$ 是非退化的(non-degenerate)，如果 Jacobi 矩阵 $\|\partial f/\partial z\|$ 的秩在点 z 是最大的(因此等于 $\min(n, m)$) 如果一个全纯映射在 D 的所有点都是非退化的，就称它在区域 D 内是非退化的. 当 $m=n$ 时，f 的非退化性就等价于条件

$$\det\|\partial f/\partial z\| \neq 0$$

当 $n=m=1$ 时，一个非退化的全纯映射是一个保形映射 当 $n=m \geqslant 2$ 时，一个非退化的全纯映射一般不再保持两个方向之间的夹角不变. 当一个全纯映射 f 在一点 $a \in D$ 非退化而且 $m=n$ 时，f 是局部可逆的(locally invertible)，即存在邻域 U, U'，$a \in U \subset D$，$f(a) \in U' \subset D'$ 和一个全纯映射 f^{-1}: $U' \to U$ 使得 $f^{-1} \circ f(z) = z$，对所有的 $z \in U$ 如果一个全纯映射 f 将 D 一一对应地映为 $f(D)$，并且 $m=n$，则 f 在 D 内是非退化的，当 $m>n$ 时，此结论不再成立，例如 $z \to (z^2, z^3)$，$D=\mathbf{C}$，$D'=\mathbf{C}^2$ 当 $m \leqslant n$ 和 f 在 D 内非退化时，D 的象亦是 $\mathbf{C}^m$ 中的一个区域，当 $m>1$，映射在某些点退化时，区域的不变性原理不再成立，例如 $(z_1, z_2) \to (z_1, z_1 z_2)$，$D = D' = \mathbf{C}^2$

如果 M 和 M' 都是复流形，$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 和 $\{(U_\beta, \varphi'_\beta)\}$ 是它们的局部坐标系的坐标卡集(φ_α $U_\alpha \to D_\alpha \subset \mathbf{C}^n$，$\varphi_\beta$ $U_\beta \to D_\beta \subset \mathbf{C}^m$ 都是同胚，见**流形**(manifold))，则一个映射 f $M \to M'$ 称为全纯的(holomorphic)，如果 $\varphi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ $D_\alpha \to D_\beta$ 对所有的 α 和 β 都是全纯映射. 复空间之间的全纯映射用类似的方法定义(见**解析映射**(analytic mapping)) 亦见**双全纯映射**(biholomorphic mapping)

参考文献

[1] Gunning, R C and Rossi, H, Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965

Е Д Соломенцев, Е М Чирка 撰

【补注】 一个非退化映射也称为非奇异的(non-singular)

参考文献

[A1] Rudin, W, Function theory in the unit ball of C^n, Springer, 1980, Chapt 15

[A2] Krantz, S G Function theory of several complex variables, Wiley (interscience), 1982

陈志华 译

全纯凸复空间 [holomorphically-convex complex space; голоморфно выпуклое комплексное пространство]

一个**复空间**(complex space) X，它满足如下条件 对每个紧统 $K\subset X$，集合

$$\{x\in X \ |f(x)|\leqslant \sup_K |f| \ (f\in A)\}$$

是紧的，这里 A 是 X 上的全纯函数代数．一个空间 X 是全纯凸的，当且仅当它允许有一个到某个 **Stein 空间**(Stein space)(全纯完全空间) $\hat{X}$ 上的真满全纯映射 φ，它诱导了这两个空间上的全纯函数代数之间的一个同构 映射 $\varphi \ X\rightarrow \widetilde{X}$ (X 的全纯约化(holomorphic reduction))是唯一确定的且有连通纤维([1]) 对全纯凸复空间 X 上的任一**凝聚解析层**(coherent analytic sheaf) F，上同调空间 $H^p(X, F)$ 和 $H_c^p(X, F)$ ($p\geqslant 0$) 都是可分拓扑向量空间([2])

全纯凸复空间的一个特殊类是由那些复空间 X 形成的，它们的全纯约化映射在某个紧解析集之外是一一映射(这样的空间是由一个 Stein 空间用真**修正**(modification)将有限个点吹大得到的)．一个复空间具有这个性质，当且仅当对 X 上的任一凝聚解析层 F，有

$$\dim H^p(X, F) < +\infty, \ p>0,$$

([3])．这个复空间类也重合于严格 1 凸复空间类(见**伪凸与伪凹**(pseudo-convex and pseudo-concave))

参考文献

[1] Cartan, H, Quotients of complex analytic spaces, in Contributions to function theory Internat Colloq Function Theory, Bombay 1960, 1-15

[2] Ramis, J P, Theorèmes de séperation et de finitude pour l'homologie et la cohomologie des espaces (p, q)-convexes-concaves, *Ann Scuola Norm Sup Pisa Ser* 3, **27** (1973), 933-997

[3] Narasimhan, R, The Levi problem for complex spaces II, *Math Ann*, **146** (1962), 195-216

А Л Онищик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gunning, R C and Rossi, H, Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall 1965

[A2] Grauert, H and Remmert, R, Theory of Stein spaces, Springer, 1979 (译自德文).

[A3] Grauert, H and Remmert, R, Komplexe Raume, *Math Ann*, **136** (1958), 245-318

陈志华 译

完整系统 [holonomic system, голономная система]

不受任何约束或只受几何约束限制的质点系统．后者对系统质点的位置加以限制，并可由如下类型的关系

$$f_S(x_1, \ , x_{3N}, t)=0, \ s=1, \ , k, \qquad (1)$$
$$f_S(x, t)\in C^2,$$

来表示．这里 t 是时间，x_i 是质点的 Descates 坐标，N 是系统的质点数．如果 $\partial f_S/\partial t\equiv 0$，则约束称为定常的(stationary)，否则，称为非定常的(non-stationary) 质点坐标服从方程(1)的系统的任何位置称为在给定时刻 t 是可能的 约束(1)不仅对质点位置 x_v，还对质点的速度 v_v 和加速度 w_v 加以限制

$$\left.\begin{aligned}\frac{df_S}{dt}&=\sum_{v=1}^N \operatorname{grad} f_S\cdot \ v_v+\frac{\partial f}{\partial t} \ =0,\\ \frac{d^2 f_S}{dt^2}&=\sum_{v=1}^N \operatorname{grad} f_S\cdot \ w_v+ \qquad =0\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

满足方程(2)的速度和加速度称为在系统给定位置 x_v 在给定时刻 t 的运动学可能的．满足下列条件

$$\sum_{v=1}^N \operatorname{grad} f_S\cdot \delta r_v=0, \ s=1, \cdot, k, \qquad (3)$$

的无穷小位移 δr_v 是系统的可能(虚)位移，以区别于真实位移 dr_v，这是系统在时间 dt 内，在作用于它的力的影响下完成的，并满足下列条件

$$\sum_{v=1}^N \operatorname{grad} f_S\cdot dr_v+\frac{\partial f_S}{\partial t}dt=0, \ s=1, \ , k \qquad (4)$$

对定常约束，真实位移是从可能位移中找到的，而对非定常约束，一般说来，它们不是从可能位移中找到的 可能位移能够将完整系统由一个在给定 t 可能的系统位置转换至在同一时刻 t 可能的另一无限接近的可能位置

质点系统的独立变分数称为系统的自由度(degrees of freedon)数，对完整系统，它与独立任意参数 q_i 的数 $n=3N-k$ 相符，通过它们方程(1)可表示成下列形式的关系

$$\begin{aligned}x_v&=x_v(q_1, \ , q_n, t), \ v=1, \ , 3N,\\ x_v&(q, t)\in C^2\end{aligned} \qquad (5)$$

参数 q_i 称为系统的广义坐标(generalized coordinates),或 Lagrange 坐标(Lagrangian coordinates),它们又称为完整坐标(holonomic coordinates),以区别于非完整坐标(non-holonomic coordinates),或拟坐标(quasi-coordinates)π_S,它由下述类型的不可积关系引入

$$d\pi_S=\sum_{a=1}^{n}a_{si}dq_i,\quad a_{si}(q_i,t)\in C^1 \qquad (6)$$

能由(1)解析地表示的约束称为保持约束(retaining constraints),或双侧约束(two-sided constraints),以区别于非保持约束(non-retaining constraints),或单侧约束(one-sided constraints),后者由下述类型的不等式来表示

$$f(x,t)\geqslant 0,$$

并对可能位移加以下述条件.

$$\sum_{\nu=1}^{N}\operatorname{grad}f_S\cdot\delta r_\nu\geqslant 0$$

具有双侧约束的系统的可能位移是可逆的,在具有单侧约束的系统的可能位移中有不可逆的位移([1])

完整系统的运动由第一类和第二类 **Lagrange 方程(力学中的)**(Lagrange equations)(in mechanics))、**Lagrange** 坐标和冲量的 **Hamilton 方程**(Hamilton equations)、**Appell 方程**(Appell equations)、Poincaré 方程或 Lagrange 坐标和拟坐标中的 **Четаев 方程**(Chetaev equations)来描述

参考文献

[1] Суслов, Г К, Теоретическая механика, 3 изд, М, 1944　　В В Румянцев 撰

补注】

参考文献

[A1] Rutherford, D E, Classical mechanics, Oliver & Boyd, 1957

[A2] Taylor, Th T, Mechanics classical and quantum, Pergamon, 1976

[A3] Landau, L D and Lifshitz, E M, A course of theoretical physics, 1, Mechanics, Pergamon, 1976 (译自俄文)

[A4] Hylleraas, E A, Mathematical and theoretical physics, 1, Wiley (Interscience), 1970　　唐福林 译

和乐群[holonomy group, голономии группа],亦称完整群

纤维丛上联络的一个特征.对其上已给定了一个无穷小联络 Γ 的具有 Lie 结构群 G 及(满足第二可数公理)底空间 B 的主纤维丛 P,可定义和乐群.对与 P 相配的其纤维是 G 的某个表示空间 F 的任何纤维丛也可定义和乐群.

对 B 中任何逐段光滑的曲线 L,P 上(或相应地,在 E 上)的联络 Γ 定义了在相应于 L 的起点和终点的纤维之间的一个同构映射 ΓL 对 B 中每一条起点和终点都在点 $x\in B$ 的逐段光滑闭曲线 L 对应了在过点 x 的纤维 G_x(或相应地,F_x)中的一个自同构.这些自同构形成了一个 Lie 群 Φ_x,称为联络 Γ 在 x 处的和乐群.

如果底空间是(弧式)连通的,则对 B 中任何的 x 和 x',Φ_x 和 $\Phi_{x'}$ 是同构的 因而人们能谈及具有联络 Γ 及具有(弧式)连通底空间的丛 P(或 E)的和乐群.

和乐群 Φ_x 是结构群 G 的子群.在 P 上线性联络的情形下,此子群可直接地定义.给定在过点 x 的纤维 G_x 之中的点 $p\in P$ 所有使点 p 和 pg^{-1} 能用 P 中的水平曲线相连通的元素 $g\in G$ 的集合形成了 G 的一个子群 Φ_p,它同构于 Φ_x

极限(限制)和乐群 Φ_x^0 是和乐群 Φ_x 的子群,它是由同伦于零的闭曲线所生成的.它与 Φ_x 的单位元素的弧式连通分支相一致,进而,Φ/Φ^0 至多是可数的

和乐群在纤维丛微分几何中的作用可通过关于 P 上联络的下列定理来解释.

约化定理(reduction theorem) 设 $P(B,G)$ 是满足第二可数基公理的主纤维丛,设 Φ 是定义在 P 上的联络 Γ 的和乐群,则结构群 G 可约化到其子群 Φ,且联络 Γ 约化至约化纤维丛 $P'(B,\Phi)$ 上的一个联络,其和乐群与 Φ 相同

和乐定理(holonomy theorem).和乐代数(限制和乐群的代数)是 G 的代数的子代数,它是由所有向量 $\Omega_y(Y,Y')$ 所生成的,这里 Ω_y 是 y 点处的曲率形式,而 y 取遍能用水平路径与初始点 y_0 相连的所有的点集,Y 和 Y' 是任意水平向量.

参考文献

[1] Gromoll, D, Klingenberg, W and Meyer, W, Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968

[2] Bishop, R L and Crittenden, R J, Geometry of manifolds, Acad Press, 1964

[3] Sternberg, S, Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964　　Г Ф Лаптев 撰 沈纯理 译

同胚[homeomorphism, гомеоморфизм]

两个拓扑空间之间的一一对应,使得该对应定义的两个互逆的映射都是连续的.这些映射称为同胚映射(homeomorphic mapping)或拓扑映射(topological mapping),也称同胚(homeomorphism),而这两个空间则称为属于同一个拓扑型(topological type)或称为同胚等价的(homeomorphic equivalent)或拓扑等价的(topologically equivalent) 它们是拓扑空间及连续映射的范畴中同构的对象.同胚映射不能和凝聚映射(condensation)(一一映成的连续映射)混为一谈,不

过，把紧统映成 Hausdorff 空间的凝聚映射则是同胚映射

例 1) 函数 $1/(e^x+1)$ 建立了实数直线 **R** 与区间 (0, 1) 之间的同胚，2) 闭圆周同胚于任何闭凸多边形，3) 三维投影空间同胚于空间 $\mathbf{R}^3$ 绕原点的旋转构成的群，也同胚于球面 S^2 的单位切向量构成的空间，4) 所有具有可数基的零维紧群均同胚于 Cantor 集，5) 所有无限维可分 Banach 空间，甚至所有的 Fréchet 空间都是彼此同胚的，6) 球面与环面不同胚

"同胚"一词是 H Poincaré ([3]) 于 1895 年引进的，他用来研究 $\mathbf{R}^n$ 中的区域及子流形的（分段）可微映射 可是，这个概念 F Klein 早就知道了 (1872)，A Mobius 也知道其雏形（称为基本相似性，1863） 20 世纪初，由于集合论及公理方法的发展，同胚映射开始在不假定可微性的情况下得到研究．这个问题是 D Hilbert ([7]) 第一次明白提出的，构成 Hilbert 第五问题的内容．特别重要的是 L E J Brouwer 的发现 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^m$ 不同胚，如果 $n\neq m$ 这个发现使数学家重新树立起对几何直观的信念 这个信念曾经由于 G. Cantor 和 G Peano 的结果而动摇，前者说 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^m$ 有同样的基数，后者说可以建立一个连续映射把 $\mathbf{R}^n$ 映成 $\mathbf{R}^m$，$n<m$ M. Fréchet 及 F Hausdorff 引进的度量空间（或拓扑空间）的概念为同胚的概念奠定了坚实的基础，从而有可能提出拓扑性质 (topological property)（在同胚映射下保持不变的性质）、拓扑不变性 (topological invariance) 等等概念，并提出各种类型的拓扑空间按同胚映射加以分类的问题．可是，这样提出的问题，甚至对很狭窄的空间类也变得非常复杂 除了二维流形这一经典情形外，只是对某些类型的图、二维多面体以及几类流形才有这样的分类．一般的分类问题根本不可能利用算法加以解决，因为不可能得到一种算法以区分，例如维数大于三的流形．因此，分类问题通常是在一种较弱的等价关系的框架下提出的，例如代数拓扑中考虑**同伦型** (homotopy type) 的分类问题，或者换个提法，对具有某种指定结构的空间加以分类的问题．即便如此，同胚问题仍然是非常重要的．就流形拓扑而言，只是在 20 世纪 60 年代末才建立了在同胚映射下研究流形的方法．这些研究是与同伦结构、拓扑结构、分段线性结构以及光滑结构密切联系的情况下进行的

第二个问题是个别空间以及空间类的拓扑刻画 (topological characterization) 问题（即是对它们特有的拓扑性质用一般拓扑的语言提出的说明，见**一般拓扑学** (topology, general)） 这个问题已经解决，例如对一维流形，二维流形，Cantor 集，Sierpiński 曲线，Menger 曲线，伪弧，Bair 空间，等等．谱理论为空间的拓扑刻画提供一个普遍适用的工具，Александров 的同胚定理就是利用谱理论得到的 ([4]) 球面，以及一般的局部 Euclid 空间类，是用一系列越来越细的重分来刻画的 ([5]) 利用谱理论来说明局部紧的 Hausdorff 群见 [6] 另一种方法是考虑与映射有关的各种代数结构．例如，紧 Hausdorff 空间同胚于定义在该空间上的实函数代数的极大理想组成的空间 许多空间是用映入自身的连续映射组成的半群来刻画的（见**同胚群** (homeomorphism group)） 在一般拓扑学中，一个拓扑刻画往往是对几类拓扑空间提出的，但对既定的一类空间进行刻画也是有意义的．例如，把球面说成是两个开胞腔覆盖的紧流形，这是非常有用的．空间的算法识别问题研究不多，在撰写本条目时 (1977)，对于球面 $S^n(n\geqslant 3)$ 尚未解决

一般说来，证明两个拓扑空间不同胚，可以通过说明某个拓扑性质（紧性、连通性，等等）仅由其中之一表现出来（例如，线段不同于圆周就在于线段可以用一个点分成两条线段），不变量方法在这方面特别有意义 不变量可以用公理方法对整个一类空间同时定义，也可以按照对空间的某种具体表示用算法定义，例如，**三角剖分** (triangulation)，**Heegaard 图** (Heegaard diagram)，分解成环柄（见**环柄理论** (handle theory)），等等 前者在于计算不变量，后者在于证明不变性 中介情形也是可能的，例如，光滑流形的**示性类** (characteristic class) 开头定义为构造向量标架场的障碍，后来又定义为切丛在把 *KO* 函子映成上同调函子的映射下的象，但是在两种情况下，所说的问题都不能按定义解决 历史上，证明拓扑不变性的第一个例子（$\mathbf{R}^n$ 的线性维数）是 Brouwer 于 1912 年给出的．属于 Poincaré 的经典方法则是先给出两个定义"可计算"与"不变"，然后证明它们是一致的．这个方法在**多面体的同调** (homology of a polyhedron) 理论中被证明是特别有用的．另一个方法则是证明在空间表示的初等变换（例如三角剖分产生的重分）下，不变量保持不变 如果知道这样可以得到已知类型的所有表示，就算达到了目的．例如，组合拓扑学中所谓的"主猜测" (hauptvermutung) 就是由此而在多面体拓扑中产生的 这种方法（也是 Poincaré 提出的）在二维及三维拓扑中，特别是在**扭结理论** (knot theory) 中，证明是非常有用的，但现在（除了结构性方向外）已弃而不用，这与其说是因为"主猜测"已被证明不成立，倒不如说是因为范畴理论的发展可以给出更符合实际的定义，与主题更加一致，且使计算问题以及拓扑不变性的问题有了更精确的提法．同调群，就空间而言是利用函子来定义而对复形则是以计算方式来定义的，它的不变性则是把复形与单纯映射同伦类这个范畴同连续映射同伦类的范畴加以比较而得，所以不

必对大的范畴给出单独的定义，而可以对小的范畴加以推广（这个思想起源于 Brouwer 的映射度理论）．联系到示性类作为函子变换的上述第二定义，新方法的优越性是特别明显的．这样一来，拓扑不变性的问题自然就是 K 函子及其拓扑推广之间的关系问题的一部分

如果两个空间同胚，则谱（以及加细重分）方法是唯一对建立同胚映射具有普遍意义的方法．另一方面，如果分类已经建立，问题就是对不变量加以比较来解决．实际上，建立同胚关系往往是一个很困难的几何问题，必须使用特殊的工具才能解决．例如，Euclid 空间及其某些商空间的同胚就是利用伪同痕建立的

参考文献

[1] Hilbert, D and Cohn-Vossen, S E, Anschauliche Geometrie, Springer, 1932

[2] Болтянский, В Г, Ефремович, В А, 《Матем просвещение》, **2** (1957), 3 − 34

[3] Poincaré, H, Oeuvres, 2, Gauthier-Villars, 1952

[4] Александров, П С, 《Тр Матем ин-та АН СССР》, **54** (1959), 1 − 136

[5] Harrold, O G, A characterization of locally Euclidean spaces, *Trans Amer Math Soc*, **118** (1965), 1 − 16

[6] Понтрягин, Л С, Непрерывные группы, 3 изд, М, 1973 (中译本 Л С 邦德列雅金，连续群，科学出版社，上册，1957，下册，1958)

[7] Hilbert problems, *Bull Amer Math Soc*, **8** (1902), 437 − 479

А В Чернавский 撰 胡师度、白苏华 译

同胚群 [homeomorphism group, гомеоморфизмов группа]

把拓扑空间 X 映成自身的所有同胚映射组成的群 $\mathfrak{M}(X)$（亦见**同胚**（homeomorphism））．若 X 为紧流形，则除了同胚不计外，X 由 $\mathfrak{M}(X)$ 的代数性质，特别是 $\mathfrak{M}(X)$ 的正规子群的结构所确定（[1]）．特别，当 $n \neq 4$ 时，已知 $\mathfrak{M}(S^n)$ 是**单群**（simple group） 对于 **Cantor 集**（Cantor set），**Menger 曲线**（Menger curve），**Sierpiński 曲线**（Sierpiński curve）以及实数直线上的有理点集与无理点集也都是如此（[2]） 就流形 M 而言，$\mathfrak{M}(M)$ 中的最小正规子群是在 M 的外部区域为恒同映射的那些同胚产生的子群．

群 $\mathfrak{M}(X)$ 有各种不同的拓扑结构（见**拓扑映射空间**（space of mappings, topological））具有基本重要性的有**紧开拓扑**（compact-open topology）以及精细的 C^0 拓扑（X 是可度量化空间），其中恒同映射的邻域 O_f 由严格正函数 $f\ X \to (0, \infty)$ 定义，并且 $h \in \mathfrak{M}(X)$ 属于 O_f，如果对所有 x 有 $\rho(hx, x) < f(x)$，这里 ρ 是 X 中的度量 可是在这些拓扑结构下，$\mathfrak{M}(X)$ 不必是一个**拓扑群**（topological group），因为映射 $h \to h^{-1}$ 并不总是连续的，即使连续，$\mathfrak{M}(X)$ 也不必是变换的拓扑群（亦见**变换群**（transformation group）），即是映射 $(h, x) \to hx$ 可以不连续（[3]） 不过若 X 是流形，则 $\mathfrak{M}(X)$ 在这两种拓扑结构下都是变换的拓扑群．研究 $\mathfrak{M}(X)$ 的拓扑性质是有意义的，首先是**齐性空间**（homogeneous space）X 的情形，即 $\mathfrak{M}(X)$ 在 X 上的作用是传递的 可是，即使就简单的流形而言，这样的研究是远不完全的．例如，（截至 1977 年）还不知道 $\mathfrak{M}(X)$ 是否是无限维流形，即使（就可度量化流形而言）在精细的 C^0 拓扑下，它是局部可缩成一点的（[4]） 特别是，两个充分接近的同胚可以用一个同痕（见**同痕（拓扑学中的）**（isotopy (in topology)））联结起来．对于在紧流形内部的开流形而言，这在紧开拓扑下也是对的

$\mathfrak{M}(X)$ 对恒同映射的连通区 $\mathfrak{M}_0(X)$ 的商群 $\Gamma(X)$ 称为 X 的同胚合痕群（homeotopy group）．一般来说，$\mathfrak{M}_0(X)$ 并不等同于那些同伦于恒同映射的同胚组成的群，但对二维以及某些三维流形（例如 S^3, $S^2 \times S^1$, 等等）而言，两者是相同的．$\mathfrak{M}_0$ 的同伦性质对二维流形已经得到研究，这对建立辫群的同调性质是有用的（见**辫论**（braid theory））

在流形理论中特别重要的是对群 $\mathfrak{M}(\mathbf{R}^n)$ 的某些子群进行的研究，例如，对微分同胚子群的研究 由于子群并不都是闭的，而商空间的拓扑并不令人满意，所以进行这种研究较为困难．因此，考虑半单群（ss 群）Top_n，其中成为 k 维单形的是 $\Delta^k \times \mathbf{R}^n$ 的纤维化的同胚，在零截面上保持不动（这里 Δ^k 是标准的 k 维单形）．边缘同胚及退化则借助于标准映射 $\Delta^l \times \mathbf{R}^n \to \Delta^l \times \mathbf{R}^n$ 来定义．ss 群 PL_n, Diff_n, O_n（$\mathbf{R}^n$ 的逐段线性映射、光滑映射及正交映射的 S^{n-1} 的同伦等价）等的 ss 幺半群 G_n 同样定义，

$$G_n \supset \mathrm{Top}_n \supset \mathrm{PL}_n \supset \mathrm{Diff}_n \supset O_n,$$

而商群 G_n / Top_n 等等具有自然的 ss 复形结构，从而可以研究这些嵌入的同伦性质．

研究流形 M 的 $\mathfrak{M}(M)$ 的各种子群是许多学科的主题．特别是，研究保持某些确定结构的同胚则与相应的数学分支有关．与树形图以及其他图的自同构群有关的代数问题也有相当意义．

参考文献

[1] Whittaker, J V, On isomorphic groups and homogeneous spaces, *Ann of Math* (2), **78** (1963), 1, 74 − 91

[2] Anderson, R D, The algebraic simplicity of certain groups of homeomorphisms, *Amer J Math*, **80** (1958), 955 − 963

[3] Arens, R F , Topologies for homeomorphism groups, *Amer J Math* , **68** (1946), 4, 593 - 610
[4] Чернавский, А В ,《Матем сб》, **79** (1969), 3, 307 - 356

А В Чернавский 撰 胡师度、白苏华 译

同宿点 [homoclinic point, гомоклиническая точка]

属于 **Hamilton 系统** (Hamiltonian system)

$$p=-\frac{\partial H}{\partial q}\ ,\ \dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}\ ,\ p=(p_1,p_2),\ q=(q_1,q_2)\ (*)$$

的 Hamilton 函数 $H=H(p,q)$ 的定义域的一个点 $(p=p^*,\ q=q^*)$，使得经过该点的系统 (*) 的解当 $t\to\pm\infty$ 时渐近地趋向某个周期解 T_1 通过同宿点的解称为同宿的 (homoclinic) .

设 S_+ 是由 (*) 当 $t\to\infty$ 时渐近地趋向于周期解 T_1 的解组成的曲面，并且设 S_- 是 (*) 的当 $t\to-\infty$ 时渐近地趋向于 T_1 的解组成的曲面 那么集合 $S_0=S_+\cap S_-$ 由同宿解构成 . 如果曲面 S_+ 和 S_- 至少沿一个同宿解相交 (或产生奇阶接触)，那么 S_0 将包含无穷多个不同的解 S_0 含有可数个解的情形是结构稳定的情形，即如果函数 H 有微小的改变则 S_0 是保持的 . S_0 含有不可数个不同解的情形是非结构稳定的，即退化的情形 以上假设对于函数 H 的微小改变，周期解 T_1 本身及曲面 S_+ 和 S_- 仍是保持的 例如，周期解 T_1 是双曲型时就是这种情况 (见**双曲点** (hyperbolic point))

寻找带有一个任意 Hamilton 函数 H 的系统 (*) 的同宿解是困难的 . 然而，如果可能选择变量 (p,q) 使得方程

$$H=H_0(p)+\varepsilon H_1(p,q)$$

成立，其中 ε 是一个小参数且函数 H_1 关于变量 q 以 2π 为周期，那么 (*) 的同宿解能以收敛级数的形式找到 (见**异宿点** (heteroclinic point) 中的参考文献 [3]) (*) 的同宿解的存在性已经在对 (*) 中的 Hamilton 函数大大减弱限制的情况下证明了 .

上面的同宿点的定义能照搬到自由度 $n>2$ 的 Hamilton 系统，只要用 k 维不变环面 $T_k\ (0<k<n)$ 代替周期解 T_1 已经知道，$(n-1)$ 维不变环面有同宿解，如果它是双曲型的

同宿解的邻域具有复杂的结构 例如，对 (*) 的情形已经证明，在同宿解的邻域内存在可数个具有任意大周期的周期解，并且任意两个这样的解能用一个异宿解连接 同宿解在光滑动力系统的一般理论中起着重要作用 .

参考文献

[1] Poincare, H , Les methodes nouvelles de la mecanique celeste, 1 - 3, Gauthier-Villars, 1892 - 1899
[2] Takens, F , Homoclinic points in conservative systems, *Invent Math* , **18** (1972), 267 - 292
[3] Мельников, В К ,《Докл АН СССР》, **211** (1973), 5, 1053 - 1056
[4] Nitecki, Z , Differentiable dynamics An introduction to the orbit structure of diffeomorphisms, M I T , 1971 .

亦见**非同宿点** (heteroclinic point) 的参考文献

В К Мельников 撰

【补注】 同宿点概念并不限于 Hamilton 动力系统，最新发展的综述见 [A1]

参考文献

[A1] Takens, F , Homoclinic bifurcations, in A M Gleason (ed), Proc Internat Congress Mathematicians Berkeley, 1986, Amer Math Soc , 1987, 1229 - 1236
[A2] Guckenheimer, J and Holmes, P , Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields, Springer, 1983

周芝英 译

齐性有界域 [homogeneous bounded domain, однородная ограниченная область]

一个同构于 $\mathbf{C}^n$ 内的一个有界域的**齐性复流形** (homogeneous complex manifold) 齐性有界域的一个例子是"复单位球"

$$\{z\in\mathbf{C}^n\ \ |z_1|^2+\quad+|z_n|^2<1\},$$

它在伪酉群 $\mathrm{SU}_{n,1}$ 作用下是可传递的，伪酉群 $\mathrm{SU}_{n,1}$ 可表为 $\mathbf{C}^n$ 空间中的射影变换

如果 D 是 $\mathbf{C}^n$ 内的任一有界域，则 Hermite 微分形式

$$d'd''\ln K(z,\overline{z})=\sum_{ij}\frac{\partial^2\ln K(z,\overline{z})}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}\,dz_i d\overline{z}_j$$

称为 Bergman 度量 (Bergman metric)，它是在 D 的所有自同构下不变的，这里 K 是 D 的 **Bergman 核函数** (Bergman Kernal function)，它定义 D 上的一个 **Kahler 度量** (Kahler metric) (见 [1], [2]) D 的所有自同构的群 $G(D)$ 是一个不包含非平凡连通复子群的实 Lie 群 如果 D 是齐性的，则 Bergman 度量是完全的 (见**完全度量空间** (complete metric space))

在齐性有界域中人们可以区分出对称域. 一个有界域称为对称的 (symmetric)，如果对任一点 $z\in D$，存在一个以 z 为其孤立不动点的 D 的对合自同构. 每个对称域是齐性的并且关于 Bergman 度量是一个 **Hermite 对称空间** (Hermitian symmetric space). 对称空间的分类已经得到 ([3]) 有相关于经典单 Lie 群的 4 类不可约对称域和 16 维及 27 维的两个特殊区域. 经典的对称域特别地包括复球和 Siegel 上半平面 (见 **Siegel 域** (Siegel domain)) 每个**对称域** (symmetric do-

main）同构于不可约对称域的一个直积（[1]）

每个维数 ≤3 的齐性有界域是对称的（[3]） 从 4 维开始，存在非对称的齐性有界域（见[4]） 而且，当 $n \geq 7$ 时，存在一个 n 维齐性有界域的连续统，其中只有有限多个是对称的．每个齐性有界域同胚于一个胞腔，且解析同构于一个仿射齐性的 Siegel 域，它在仿射同构之下是唯一确定的．齐性有界域的分类已由代数方法实现（[5]）

关于齐性有界域，有 Euler 积分到多维的推广（第一类和第二类 Siegel 积分），也有超几何函数（[6]）到多维的推广．

参考文献

[1] Helgason, S, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad Press, 1978

[2] Фукс, Б А, Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М, 1963（英译本 Fuks, B A, Special chapters in the theory of analytic functions of several complex variables, Amer Math Soc, 1965）

[3] Cartan, E, Domains bornes homogènes de l'espace de n variables complexes, *Abh Math Sem Univ Hamburg*, **11** (1935), 116 − 162

[4] Пятецкий-Шапиро, И И, Геометрия классических областей и теория автоморфных функций, М, 1961（英译本 Pyatetskii-Shapiro, I I, Automorphic functions and the geometry of classical domains, Gordon & Breach, 1969）

[5] Винберг, Э Б, Гиндикин, С Г, Пятецкий-Шапиро, И И, 《Тр Моск матем об-ва》, **12** (1963), 359 − 388（英译本 Vinberg, E B, Gindikin, S G, and Pyatetskii-Shapiro, I I, On the Classification and canonical realization of complex bounded homogeneous domains, *Trans Moscow Math Soc*, **12** (1963), 404 − 437

[6] Гиндикин, С Г, 《Успехи матем наук》, **19** (1964), 4, 3 − 92

Э Б Винберг 撰 陈志华 译

齐性复流形 [homogeneous complex manifold, однородное комплексное многообразие]

一个**复流形**（complex manifold）M，它的自同构群作用是可传递的．所有单连通一维复流形——Riemann 球面，复平面和上半平面——都是齐性的．一个复 **Lie 群**（Lie group）G 对其复闭子群 H 的陪集的流形 G/H 是一个齐性复流形．

在紧齐性流形中有复旗流形，它包括了所有的紧 Hermite **对称空间**（symmetric space）（[8]） 复旗流形能被刻画为单连通的紧 **Kahler 流形**（Kahler manifold）（[4]），也可刻画为流形 G/P，这里 G 是一个半单复 Lie 群（见**半单 Lie 群**（Lie group, semi-simple）），且 P 是一个**抛物子群**（parabolic subgroup）．每个紧齐性复流形允许有一个旗流形上的齐性全纯纤维丛结构，它的纤维同构于一个复 Lie 群关于其一离散子群的陪集的流形（见 **Tits 丛**（Tits bundle），亦见 [6]，[9]）

另一类重要的齐性复流形是由**齐性有界域**（homogeneous bounded domain）构成的，特别是它包含了对偶于紧 Hermite 对称空间的对称域．

旗流形和齐性有界域代表齐性 Kahler 流形（homogeneous Kahler manifold）的特殊情况（即这样的 Kahler 流形，在其上保持 Kahler 度量的解析自同构群的作用是可传递的） 有一个猜想（[2]）认为每一个齐性 Kahler 流形都允许有一个齐性全纯纤维丛结构，它以齐性有界域为底，以一个旗流形和一个复向量空间关于一个离散子群的陪集的流形的直积为纤维．这个猜想对允许有一个半单（[1]）或完全可解的（[2]）可传递自同构群的齐性 Kahler 流形已经被证明，对同构于旗流形和复环面的直积的紧齐性 Kahler 流形也已被证明（[10]），且最近有完满的推广（[12]）．

在齐性复流形的理论中典范 Hermite 形式（canonical Hermitian form）h_μ 扮演了一个重要的角色．对于一个复流形 M 上由外微分形式

$$i^n K dz_1 \wedge \quad \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_1 \wedge \quad \wedge d\bar{z}_n$$

给出的测度 μ，Hermite 微分形式

$$h_\mu = d'd'' \ln K = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \ln K}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i d\bar{z}_j$$

能被构造出来（一般来讲它是退化的）．它和坐标系的选取无关，且在 μ 乘上一个常数之后是不变的．如果测度 μ 是关于 M 上某个 Kahler 度量以标准方式定义的，则形式 $(-h_\mu)$ 是这个度量的 Ricci 形式（[7]）．如果需要 μ 是关于 M 的某个可传递自同构群不变的，则它在差一个常数倍数的意义下由这个群唯一决定，并且形式 h_μ 是唯一决定的．当 M 是齐性有界域时，Hermite 形式 h_μ 是正定的且等同于 Bergmann 度量．对旗流形，形式 h_μ 是负定的．

一个齐性复流形的典范 Hermite 形式可以借助对应的 Lie 代数来计算（[3]） 这对于齐性有界域和其他齐性复流形理论的代数化是基本的．

齐性复流形理论的一个方向是借助 Lie 群的线性表示的工具研究其上的全纯函数 例如用这个方法已经证明（[5]） 半单复 Lie 群 G 关于一个连通闭复子群 H 的陪集流形 G/H 是一个 **Stein 流形**（Stein manifold），当且仅当 H 是约化的（见**约化群**（reductive group））

存在这样的齐性复流形，它们不允许有可传递自同构 Lie 群（[11]）

参考文献

[1] Borel, A , Kahlerian coset spaces of semi simple Lie groups, *Proc Nat Acad Sci USA*, **40** (1954), 1147 – 1151
[2] Винберг, Э Б , Гиндикин, С Г ,《Матем сб》, **74** (1967), 3, 357 – 377
[3] Koszul, J L , Sur la forme Hermitienne canonique des espaces homogènes complexes, *Canad J Math* , **7** (1955), 4, 562 – 576
[4] Lichnerowicz, A , Espaces homogènes Kahleriens, CNRS, 1953, 171 – 184
[5] Онищик, А Л ,《Локл АН СССР》, **130** (1960), 726 – 729
[6] Tits, J , Espaces homogènes complexes compacts, *Comment Mat Helv* , **37** (1962 – 1963), 111 – 120
[7] Фукс, Б А , Специальные главы теории аналиничеcких Функций многих комплексрых переменных, M , 1963 (英译本 Fuks, B A , Special chapters in the theory of analytic functions of several complex variables, Amer Math Soc , 1965)
[8] Helgason, S , Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Acad Press, 1978
[9] Wang, H - C , Closed manifolds with homogeneous complex structure, *Amer J Math* , **76** (1954), 1, 1 – 32
[10] Borel, A and Remmert, R , Ueber kompakte homogene Kahlersche Mannigfaltigkeiten, *Math Ann* , **145** (1962), 5, 429 – 439
[11] Kaup, W , Reelle Transformationsgruppen und invariante Metriken auf komplexe Raume, *Invent Math* , **3** (1967), 1, 43– 70
[12] Dorfmeister, J and Nakajima, K , The fundamental conjecture for homogeneous Kahler manifolds, *Acta Math* , **161** (1988), 1-2, 23 – 70

Э Б Винберг 撰 陈志华 译

齐性凸锥 [homogeneous convex cone , однородный выпуклый конус]

向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开的、关于线性变换群 $GL_n(\mathbf{R})$ 是齐性的严格凸锥 V, 对于 $\alpha\in GL_n(\mathbf{R})$, $\alpha V=V$ (所谓的锥 V 的自同构) 两个齐性凸锥 V_1 与 V_2 称为同构的, 如果存在环绕向量空间中的一个同构, 把 V_1 映到 V_2 上.

例 1) 球面锥

$$K_n=\{x\in\mathbf{R}^{n+1}\ \ x_0^2>x_1^2+\ \ +x_n^2\}$$

K_n 的自同构群是 Lorentz 群 $O_{n\ 1}(\mathbf{R})$ 的指标为 2 的子群 (同构于 n 维 Лобачевский 空间的运动群) 与具正系数的相似群 $\mathbf{R}^+$ 的直积

2) n 阶正定实对称矩阵的锥 $P_n(\mathbf{R})$ 此锥的自同构群由变换

$$x\to\ gxg^t,\ g\in GL_n(\mathbf{R})$$

组成.

3) n 阶正定复 Hermite 矩阵的锥 $P_n(\mathbf{C})$

4) n 阶正定四元数 Hermite 矩阵的锥 $P_n(\mathbf{H})$

对偶于齐性凸锥 V 的凸锥 V' (亦即对偶空间中的、在 V 上为正定的所有线性式组成的锥) 也是齐性的 齐性凸锥 V 称为自对偶的 (self-dual), 如果存在环绕向量空间 $\mathbf{R}^n$ 上的一个 Euclid 距离, 使当 $\mathbf{R}^n$ 与其对偶在此距离下视为等同时, 有 $V=V'$ 上面所有齐性凸锥的例子都是自对偶的

自对偶齐性凸锥的分类基于它们与紧 **Jordan 代数** (Jordan algebra) 的关系 (见 [1], [2]), 一个实 Jordan 代数 A 称为紧的 (compact), 如果对所有 $a\in A$, $a\neq0$, 有 $\mathrm{Tr}T(a)^2>0$, 其中 $T(a)$ 是代数 A 中乘以 a 的乘法算子 复化方法建立了同构紧 Jordan 代数类与同构半单复 Jordan 代数之间的一一对应. 紧 Jordan 代数的可逆元的平方所成的集是一个自对偶齐性凸锥, 并且所有自对偶齐性凸锥都能由此法得到 由此可以推知, 每个自对偶齐性凸锥同构于上述四种类型锥与一个同例外单 Jordan 代数相关的 27 维锥的直积

任意的齐性凸锥能表示为在某一广义矩阵代数中正定 Hermite 矩阵的锥 (见 [3]) 非自对偶齐性凸锥的最简单的例子是满足条件 $x_{23}=x_{32}=0$ 的正定对称 3 阶实距阵 $x=[x_{ij}]$ 的 5 维锥 从 $n=11$ 开始, 存在 $\mathbf{R}^n$ 中的非同构齐性凸锥的连续统

在每个齐性凸锥中, 完全 **Riemann 度量** (Riemannian metric) 可由典则方式来定义, 并且它关于它的所有自同构是不变的 自对偶齐性凸锥能被表征为 它们关于这个距离是**对称空间** (symmetric space). 齐性凸锥中任一点的**稳定化子** (stabilizer) 是它的自同构群的极大紧子群. 紧 Jordan 代数 A 的单位元在与 A 相关联的齐性凸锥的自同构群中的稳定子恰好与 A 的自同构群重合. 每个齐性凸锥都有一个单可迁自同构群, 在某个基之下可化为三角式

齐性凸锥在**齐性有界域** (homogeneous bounded domain) 理论中有特殊意义, 因为这些域可视为 **Siegel 域** (Siegel domain), 并且对于第一类或第二类 Siegel 域为齐性的必要条件是 与之相关的凸锥为齐性的. 齐性凸锥及其相关 Siegel 域对于一定的解析结构是自然的**承载集** (carriers), 特别是对于 Euler 积分与超几何函数的推广 (见 [8]). 对每个齐性凸锥, 存在一个相关的多参数 Riemann - Liouville 积分群, 包括一定的双曲微分算子 (例如, 在圆锥情形下, 波算子可以用此法获得). 加强 Huygens 原则可对这些算子成立 (见 [9])

自对偶齐性凸锥的离散自同构群的研究, 对于局部对称空间 (见 [4]) 奇性的紧化与约化很重要. 经典

约化理论中关于作用在锥 $P_n(\mathbf{R})$ 上的群 $SL_n(\mathbf{Z})$ 的许多结果都能推广到任意自对偶齐性锥上去（见 [5],[6]）.

参考文献

[1] Koecher, M, Die Geodätischen von Positivitätsbereichen, *Math Ann*, **135** (1958), 3, 192－202

[2] Винберг, Э Б, 《Докл АН СССР》, **133** (1960), 1, 9－12

[3A] Винберг, Э Б, 《Тр Моск матем об-ва》, **12** (1963), 303－358

[3B] Винберг, Э Б, 《Тр Моск матем об-ва》, **13** (1965), 56－83

[4] Ash, A, et al, Smooth compactification of locally symmetric varieties, Math Sci Press 1975

[5] Helwig, K H Zur Koecherschen Reduktionstheorie in Positivitätsbereichen I－III, *Mat Z*, **91** (1966), 152－168, 169－178, 355－362

[6] Ash, A, On entactic forms, *Canad J Math*, **29** (1977), 5, 1040－1054

[7A] Rothaus, O S, The construction of homogeneous convex cones, *Ann of Math*, **83** (1966), 358－376

[7B] Rothaus, O S, Correction to The construction of homogeneous convex cones, *Ann of Math*, **87** (1968), 399

[8] Гиндикин, С Г, 《Успехи матем наук》, **19** (1964), 4, 3－92

[9] Вайнберг, Б Р, Гиндикин, С Г, 《Тр Моск матем об-ва》, **16** (1967), 151－180

Э Б Винберг 撰

【补注】

参考文献

[A1] Faraut, J and Korányi, A, Fonctions hypergéométriques associées aux cônes symétriques, *C R Acad Sci Paris*, **307** (1988), 555－558

苏维宜 译

齐次坐标 [homogeneous coordinates, однородные координаты]

具有如下性质的坐标 如果用同一个非零数乘所有这些坐标，那么由它们确定的对象并不改变 例如，**射影坐标** (projective coordinates)，**Plücker 坐标** (Plücker coordinates) 和**五球坐标** (pentaspherical coordinates) 便是这种坐标．

Д Д Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hodge, W V D and Pedoe, D, Methods of algebraic geometry, 1－3, Cambridge Univ Press, 1947－1954

姜国英 译

齐次函数 [homogeneous function, однородная функция], λ次的

一个函数 $f(x_1, \cdot, x_n)$，对于其定义域中的一切点 $(x_1, \quad, x_n)$ 和一切实数 $t>0$，等式

$$f(tx_1, \quad, tx_n)=t^\lambda f(x_1, \quad, x_n)$$

均成立，其中 λ 是一个实数，这里假设 对于函数 f 的定义域中的每一点 $(x_1, \quad, x_n)$ 和任何 $t>0$，点 $(tx_1, \quad, tx_n)$ 也属于这个定义域．如果函数

$$f(x_1, \quad, x_n)=\sum_{0\leqslant k_1+\quad+k_n\leqslant m} a_{k_1 \quad k_n} x_1^{k_1} \quad x_n^{k_n},$$

也就是说，f 是不超过 m 次的多项式，则当且仅当一切满足 $k_1+\quad+k_n<m$ 的系数均为零时，f 是 m 次齐次函数．齐次函数的概念可以推广到任何具有单位元的交换环上的 n 个变量的多项式的情况．

假设 f 的定义域 E 处在第一象限 $x_1>0, \cdot\cdot, x_n>0$ 中，并且只要它包含点 $(x_1, \cdot, x_n)$，就包含整条射线 $(tx_1, \quad, tx_n)$，$t>0$ 这时，f 是 λ 次齐次函数，当且仅当存在定义于形如 $(x_2/x_1, \cdot, x_n/x_1)$（这里 $(x_1, \quad, x_n)\in E$）的各点的集合上的 $n-1$ 个变量的函数 φ，使得对于一切点 $(x_1, \quad, x_n)\in E$，等式

$$f(x_1, \quad, x_n)=x_1^\lambda \varphi\left[\frac{x_2}{x_1}, \quad, \frac{x_n}{x_1}\right]$$

均成立．

如果 f 的定义域 E 是一个开集，且 f 在 E 上是连续可微的，则函数 f 是 λ 次齐次的，当且仅当对于定义域 E 的一切点 $(x_1, \quad, x_n)$，它满足 Euler **公式** (Euler formula)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f(x_1, \quad, x_n)}{\partial x_i}=\lambda f(x_1, \quad, x_n)$$

Л Д Кудрявцев 撰 张鸿林 译

齐次算子 [homogeneous operator, однородный оператор]

向量空间 X 到向量空间 Y 内这样的一个映射 A 存在一个对称**多重线性映射** (multilinear mapping)

$$B \quad X\times \quad \times X\to Y,$$

使得 $B(x, \cdot, x)=A(x)$ 变量 x 的个数 n 称为**齐次算子 A 的次数** (degree of the homogeneous operator) 线性算子 $L. X\to Y$ 是次数为 1 的齐次算子（通常就称为齐次的）．将 $(x, \quad, x)$ 简写作 x^n，它表示 $X\times\cdot\times X$ 中所有坐标都相同的元素，而不是一个元素的幂，后一概念在任意向量空间里都是没有定义的．如果 A 是一个 n 次齐次算子，则

$$A(tx)=t^n A(x)$$

更一般地，

$$A(t_1x_1+\cdot+t_kx_k)=\sum_{\substack{n_1+\quad+n_k=n \\ n_i\geqslant 0}} \frac{n!}{n_1!\cdot\cdot n_k!} t_1^{n_1}\cdot\cdot t_k^{n_k} B(x_1^{n_1}, \quad, x_k^{n_k}).$$

如果 X 和 Y 都是赋范向量空间，则 A 是连续的当且仅当 A 是有界的，并且如果 A 在零点连续，则它就在整个 X 上连续

参考文献

[1] Люстерник, Л А, Соболев, В И, Элементы функционального анализа, 2 изд, М, 1965 (中译本 Л А 刘斯铁尔尼克，В И 索伯列夫，泛函分析概要，第二版，科学出版社，1985)

[2A] Cartan, H, Calcul differentiel, Hermann, 1967

[2B] Cartan, H, Differential forms, Kershaw, 1983 (译自法文)

В И Соболев 撰 郝钢新 译

齐性空间 [homogeneous space, однородное пространство]

具有一个给定的传递群作用的集合 准确地讲，M 是一个具有群 G 的齐性空间，如果给出一个从集合 $G\times M$ 到 M 中的映射

$$(g,x)\to gx,$$

使得

1) $(gh)x=g(hx)$,

2) $ex=x$,

3) 对 M 中任何两元素 x,y，存在 $g\in G$ 使得 $gx=y$

集合 M 中的元素称为这一齐性空间的点，群 G 称为齐性空间的运动群 (group of motions of the homogeneous space) 或基本群 (basic (fundemental) group)

M 的任一点 x 确定了 G 的一个子群

$$G_x=\{g\in G \ \ gx=x\},$$

称之为点 x 的**迷向群** (isotropy group)，或稳定子群，或者点 x 的稳定化子 (stabilizer) 不同的点的稳定化子关于 G 的内自同构共轭．

对于 G 的任一子群 H 有一个相应的 G 的齐性空间 $M=G/H$，即 H 在 G 中的左陪集的集合，其中 G 在 M 上的作用由公式

$$g(aH)=(ga)H,\quad g,a\in G$$

给出 这一齐性空间称为 G 关于 H 的商空间 (quotient space)，这时子群 H 是该空间的点 $eH=H$ 的稳定化子，这里 e 为 G 的单位元．任何具有群 G 的齐性空间 M 可与 G 关于 M 的某固定点 x 的稳定化子群 $H=G_x$ 的商群按下列一一映射等同起来

$$M\ni y\Leftrightarrow gH\in G/H,$$

这里 g 是 G 中使得 $gx=y$ 的任何元素．

如果 G 是一个**拓扑群** (topological group) H 为其子群 (或者 G 是 **Lie 群** (Lie group) 而 H 是 G 的闭子群)，则可典范地赋予 $M=G/H$ 一个拓扑空间 (相应的，微分流形) 的结构，使得对此拓扑 G 在 M 上的作用是连续的 (相应的，可微的) 如果 Lie 群 G 可传递且可微地作用在微分流形 M 上，则对 M 中任何点 x_0，子群 $H=G_{x_0}$ 是闭子群且上述一一映射 $gH\to gx_0$ 是可微的，如果此时 G 的连通分支的个数至多可数，那么这个一一映射是微分同胚

其他被研究过的情形有 G 是代数群而 M 是一个代数簇 (见**代数群的齐性空间** (homogeneous space of an algebraic group))，M 是一个复流形而 G 是实 (或复) Lie 群 (见**齐性复流形** (homogeneous complex manifold))

下面总假定 M 是微分流形而 G 是 Lie 群．

齐性空间的几何学 (geometry of homogeneous space) 按照 F Klein 的**埃尔兰根纲领** (Erlangen program) 的观点，齐性空间的几何学所研究的就是该空间的运动群作用下的不变量 这里经典的研究范围是齐性空间的各种子集，特别是子流形及其并、子流形的簇等在运动群 G 的作用下的分类．这种分类可通过构造给定类型的子集的完全的不变量系来完成 (这样的不变量系的例子有 三维 Euclid 空间中三角形的边长，或光滑曲线的曲率和挠率等) Lie 群的任一齐性空间的完全的局部不变量系的构造的一个一般方法 (**活动标架法** (moving-frame method)) 是 E Cartan 所发展的 (见 [6], [16])

另一研究方向是齐性空间上的不变几何对象 (见齐性空间上的**不变对象** (invariant object)) 的发现和研究．基 Lie 群 G 在齐性空间 M 上的作用导出 G 在 M 的各种各样几何对象 (函数、向量及张量场、联络、微分算子等) 的空间上的作用 在这一作用下不变的几何对象称为不变对象 这种对象的例子有 Euclid 空间看作 Euclid 运动群的齐性空间时的 Euclid 度量，共形空间中给出曲线间夹角的共形度量等等．与这种研究密切相关的是具有特定不变量的齐性空间的描述和研究问题．例如 Riemann 空间 (Riemannian space) 和伪 Riemann 空间 (pseudo-Riemannian space)、仿射联络空间 (space with an affine connection)、辛齐性空间 (sympletic homogeneous spaces) 及齐性复流形 (homogeneous complex manifold) 分别是具有下述不变量的齐性空间 Riemann 或伪 Riemann 不变度量、**仿射联络** (affine connection)、**辛结构** (symplectic structure) 及**复结构** (complex structure)．亦见**齐性 Riemann 空间** (Riemannian space, homogeneous)、**辛齐性空间** (symplectic homogeneous space) 和**齐性复流形** (homogeneous complex manifold)

一类重要的齐性空间就是约化齐性空间 (reductive homogeneous spaces) 类，它是使得 Lie 群 G 的 **Lie 代**

数 (Lie algebra) $\mathfrak{g}$ 有如下分解式的齐性空间 G/H

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{f}+\mathfrak{m},\ \mathfrak{f}\cap\mathfrak{m}=\{0\}, \qquad (*)$$

这里 $\mathfrak{f}$ 为 H 的 Lie 代数，$\mathfrak{m}$ 为 H 在 $\mathfrak{g}$ 中的伴随表示（见 **Lie 群的伴随表示** (adjoint representation of a Lie group)）的作用下不变的子空间．这样的分解定义了 G/H 上一个具有平行曲率和挠率张量且测地完全的线性联络，反过来，任一具有有平行曲率和挠率张量的完全线性联络的单连通流形是关于这一联络的自同构群的约化齐性空间（见 [5]）．约化齐性空间的特例是对称空间，其分解式 (*) 还要满足附加条件 $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subseteq\mathfrak{f}$. 几何上讲，这一条件的意义是对应的联络的挠率为 0 对称空间的例子有**整体对称 Riemann 空间** (globally symmetric Riemannian space) 及任意 Lie 群的空间，其上的运动群由左或右平移生成

齐性丛和表示论 (homogeneous bundles and representation theory) G 的作用不仅可以扩充到几何对象的丛上，而且也可以扩充到更大的一类所谓齐性丛 (homogeneous bundle) 上．齐性空间 G/H 上的齐性丛 π 由子群 H 在任一流形 F（典型纤维）上的左作用给出，且定义为自然投射

$$\pi: G\times_H F\to G/H,$$

这里 $G\times_H F$ 是纤维积，即直积 $G\times F$ 按等价关系

$$(g,f)\sim(gh^{-1},hf),\ g\in G,\ h\in H,\ f\in F$$

所做的商. 如果 P 是一个 H 线性作用于其上的向量空间，那么对应的齐性丛 π 是一个向量丛，且在其截面空间 $\Gamma(\pi)$ 中有一个由子群 H 在 F 里的表示诱导的 G 的线性表示．对**诱导表示** (induced representation)（诱导表示的性质与对应的齐性空间的几何学有密切的关系）及其推广的研究在 Lie 群的表示论中起着重要的作用（见 [7]）

齐性空间上的分析 (analysis on homogeneous spaces) 被研究得最多的领域有 1) 齐性空间上各种函数空间的研究（函数空间，齐性向量丛的截面空间，在适当层中取值的上同调空间），2) 作用于这些空间上的不变微分算子的研究，3) 与齐性空间有关的各种动力系统的研究．

第一个领域包括球面函数理论（及更一般的球面截面），它研究齐性空间上关于基群不变的有限维函数空间（见**表示函数** (representation function)），数学物理中的很多特殊函数都可看作某个齐性空间上的球面函数，而对于基群在这样的函数空间中的表示的研究使人能够统一地得到特殊函数理论中的基本结果（整表示、递推公式、加法定理等，见 [2]） Fourier 级数和 Fourier 积分理论的自然推广是齐性空间上的**抽象调和分析** (harmonic analysis, abstract)．其基本问题之一是齐性空间上平方可积函数空间分解为一些在基群作用下不可约的子空间的和的描述．这里得到的大多数结果都与齐性空间为半单 Lie 群的空间时的情形有关（见 [4]）

自守函数理论导致齐性空间 G/H 上的齐性向量丛的关于离散子群 $\Gamma\subset G$ 不变的平方可积截面空间分解为不可约分支这个更一般的问题

与函数空间一样，齐性空间上的各种测度空间，如在概率论中有所应用的测度空间，都已得到了研究（见 [3], [9]）

第二个领域包括齐性空间上**不变微分算子** (invariant differential operator) 的描述问题，其性质的研究，找出谱与基本解，及对应的偏微分方程的解的研究（见 [8], [15]）.

第三个领域包含与齐性空间有关的各种**动力系统** (dynamical system) 的研究．如．由基群的单参数子群生成的流，由 Lie 群的典范联络生成的流，及齐性 Riemann 空间的**测地流** (geodesic flow) 等等 流的遍历性条件已作了研究，且其第一类积分的描述已经给出（见 [1]）.

积分几何学 (integral geometry) 也与齐性空间上的分析有关，它就是齐性空间及与它们有关的流形上的不变测度理论，这些流形的点就是这种或那种类型的子流形．

齐性空间的拓扑学 (topology of homogeneous space)．很多情形中代数拓扑学的方法将齐性空间的基本拓扑不变量（上同调环，示性类，K 函子，同伦群等）的计算问题归结为某些与齐性空间的基群和迷向群的代数结构有关的代数问题．已对几类齐性空间得到了这种明确的结果 例如 H Cartan 的一个定理给出了一种利用 G 和 H 的 **Weyl 群** (Weyl group) 的不变量计算当 G 和 H 为连通紧 Lie 群时的实上同调代数 $H^*(G/H,\mathbf{R})$ 的算法（见 [10]）．特别地，若 G/H 有非零 **Euler 示性数** (Euler characteristic)（这等价于 G 和 H 有相同的秩），则流形 G/H 的 Poincaré 多项式（见 **Künneth 公式** (Künneth formula)）具有如下形式

$$P(G/H,t)=\prod_{i=1}^{r}\frac{1-t^{2k_i}}{1-t^{2l_i}},$$

这里 $k_1,\ \ldots,k_r$ 及 $l_1,\ \ldots,l_r$ 分别为 G 和 H 的 Weyl 群的基本不变多项式的次数（Hirsch 公式 (Hirsch formula)）

紧 Lie 群的齐性空间、对称空间及**可解流形** (solvmanifold)（可解 Lie 群的齐性空间）的拓扑结构都已有详尽的研究 Mostow-Карпелевич 定理 (Mostow-Karpelevich theorem) 表明具有有限基群的 Lie 群齐性空间微分同胚于一个紧 Lie 群的齐性空间上的向量丛，它

把齐性空间的拓扑的研究极大程度地归结到基群是紧的情形．

齐性空间的分类 这方面的基本问题在于确定哪些流形是一个连通 Lie 群的齐性空间，及列举连通 Lie 群在这些流形上的一切传递作用 例如 2 维的齐性空间仅有平面、柱面、球面、环面、Mobius 带、射影平面和 Klein 瓶 到 1982 年为止，3 维齐性空间的分类及在有限重覆叠意义下所有维数 ≤6 的紧齐性空间的分类也已完成（见 [11]）

对很多重要的高维齐性空间 M 的类，Lie 群在 M 上的所有传递作用的分类已清楚（见 [12]） 例如 紧 Lie 群在球面上所有的传递作用的分类具有下列形式 连通紧 Lie 群在 S^n 上的任何连续、传递和有效作用均可通过球面 S^n 的一个同胚转换为群 $SO(n+1)$ 或者下列子群之一在其上的标准线性作用

$G=SU(k)$ 或 $U(k)$ 当 $n=2k-1$ 时，

$G=Sp(k)$, $Sp(k)\times U(1)$ 或 $Sp(k)\times Sp(1)$ 当 $n=4k-1$ 时，

$G=Spin(7)$ 或 $Spin(9)$ 当 $n=7,15$ 时，

$G=G_2$ 当 $n=6$ 时 （Montgomery-Samelson-Borel 定理（Montgomery-Samelson-Borel theorem），见 [10]） 至于非紧 Lie 群在球面 S^n 上的传递作用，当 n 为偶数时本质上仅有的作用是 $SL(n+1)$ 的射影作用和 $SO(1,n+1)$ 的共形作用．而当 n 为奇数时，结果要复杂得多，存在具有任意高维数的根基的 Lie 群的传递与有效的作用

参考文献

[1] Auslander, L, Green, L and Hahn, F, Flows on homogeneous spaces, Princeton Univ Press, 1963

[2] Виленкин, Н Я, Специальные функции и теория представлений групп, М, 1965（英译本 Vilenkin, N Ya, Special functions and the theory of group representations, Amer Math Soc, 1968)

[3] Grenander, U, Probabilities on algebraic structures, Wiley, 1963

[4] Желобенко, Д П, Гармонический анализ на полупростых комплексных группах Ли, М, 1974

[5] Cartan, E, Groupes de Lie, in Oeuvres complètes, Partie I, Vol 1-2, Gauthier-Villars, 1952

[6] Cartan, E, La théorie des groupes finis et continus et la geometrie differentielle traitées par la méthode du repere mobile, Gauthier-Villars, 1951

[7] Кириллов, А А, Элементы теории представлений, 2 изд, М, 1978（英译本 Kirillov, A A, Elements of the theory of representations, Springer, 1976)

[8] Helgason, S, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad Press, 1978

[9] Hannan, E J, Group representations and applied probability, Methuen, 1965

[10] Borel, A, Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, *Ann of Math*, **57** (1953), 115-207

[11] Горбацевич, В В, в сб Геометрические методы в задачах алгебры и анализа, Ярославль, 1980, 37-60

[12A] Онищик, А Л,《Матем сб》, **60** (1963), 4, 447-485

[12B] Онищик, А Л,《Матем сб.》, **75** (1968), 2, 255-263

[13] Итоги науки Алгебра Топология, 1963, М, 1964

[14] Итоги науки и техники Алгебра Топология Геометрия, т 11, М, 1974

[15] Helgason, S, Groups and geometric analysis, Acad Press, 1984

[16] Jensen, G, Higher order contact of submanifolds of homogeneous spaces, Springer, 1977

[17] Kobayashi, S and Nomizu, K, Foundations of differential geometry, 2, Interscience, 1969

[18] Wolf, J A, Spaces of constant curvature, Publish or Perish, 1974

[19] Vinberg, E B and Onishchik, A L, Fundamentals of the theory of Lie groups, in Foundamental Directions, Vol 20 Lie groups and Lie algebras 1, VINITI, 1988, 5-101（俄文）

[20] Gorbatsevich, V V, and Onishchik, A L,, Lie groups of transformations, in Fundamental Directions, Vol 20 Lie groups and Lie algebras 1, VINITI, 1988, 103-240（俄文）

[21] Kirillov, A A, Introduction to representation theory and noncommutative harmonics, in Fundamental Directions, Vol 22 Noncommutative harmonic analysis 1, VINITI, 1988, 5-162（俄文）

[22] Neretin, Yu A, Representations of the Virasoro algebra and of affine algebras, in Fundamental Directions, Vol 22 Noncommutative harmonic analysis 1, VINITI, 1988, 163-224（俄文）

Д В Алексеевский 撰 刘先仿 译

代数群的齐性空间 [homogeneous space of an algebraic group, однородное пространство алгебраической группы]

一个代数簇（algebraic variety）M 连同一个代数群（algebraic group）G 在其上正则传递的作用 如果 $x\in M$，则迷向群（isotropy group）G_x 在 G 中是闭的．反之，如果 H 是代数群 G 的一个闭子群，那么左陪集的集合 G/H 具有一个代数簇结构，使其成为代数群 G 的一个齐性空间，此处自然映射 π $G\to G/H$ 是正则的，可分的并且具有以下的泛性质 对于任意在陪集上取常值的态射 φ $G\to X$ 来说，存在一个态射 ψ $G/H\to X$ 使得 $\psi\pi=\varphi$ 如果 M 是代数群 G 的任意一个齐性空间而 $H=G_x$，对某个 $x\in M$，则自然一一映射 ψ $G/H\to M$ 是正则的，并且当基域 K 的特

征为零时，ψ是双正则的（见[1]，[3]）

假设在某个子域 $k \subset K$上，连通群 G，齐性空间 M 以及 G在 M上的作用均已被定义，那么 k有理点的群 $G(k)$将 $M(k)$变到自身内且对于任意 $x \in M(k)$来说，$G(k)_x = G_x(k)$ 如果 k是有限域，则$M(k) \neq \emptyset$，再者，如果迷向群 G_x是连通的，则$G(k)$在 $M(k)$上传递地作用 在一般情形，对 M中 k有理点的研究归结到 **Galois 上同调**（Galois cohomology）理论中的问题（见[2]）

一个代数群 G的齐性空间总是一个光滑的拟射影簇（见[5]） 如果 G是一个仿射代数群，则簇 G/H是射影簇，当且仅当 H是 G中一个**抛物子群**（parabolic subgroup）（见[3]）. 如果 G是可约化的，则 G/H是仿射簇，当且仅当子群 H是可约化的（参见**松岛判别法**（Matsushima criterion）） 关于特征为 0 的代数闭域上一个线性代数群 G的闭子群 H使得 G/H是拟仿射的描述是已知的（见[4]，[6]）

参考文献

[1] Borel, A , Linear algebraic groups, Benjamin, 1969(second enlarged edition, Springer, 1991)

[2] Serre, J -P , Cohomologie Galoisienne, Springer, 1964

[3] Humphreys, J E , Linear algebraic groups, Springer, 1975

[4] Сyханов, А А , 《Успехи матем наук》, 33 (1978), 2, 182－183

[5] Chow, W , On the projective embedding of homogeneous varieties, in Algebraic topology, symposium in honour of S Lefschetz, Princeton Univ Press, 1957, 122－128

[6] Hochschild, G P , Basic theory of algebraic groups and Lie algebras, Springer, 1981

А Л Онищик 撰 郝钢新 译

同调代数 [homological algebra , гомологическая алгебра]

代数学的一个分支，它主要研究在代数对象的各种范畴（给定环上的模，层，等）上的导出函子 .

同调代数的来源之一是拓扑空间的（奇异）**同调论**（homology theory） 在那里，对每个拓扑空间 X，有一个 Abel 群 $H_n(X)$（同调群）的序列与之对应，若有空间的连续映射 f $X \to Y$，则相应地有一组同调群之间的同态 f_n $H_n(X) \to H_n(Y)$. 拓扑空间 X的每一个 n 维奇异单纯形 T 有一个由$n-1$ 维奇异单纯形组成的边界 . 设 K_n是由所有 n维单纯形生成的自由 Abel 群，考虑函数 ∂，它将 T映为 ∂T，后者是 T的边界单纯形的交错和 . 于是定义了一个同态 ∂ $K_n \to K_{n-1}$，使得

$$\xrightarrow{\partial} K_n \xrightarrow{\partial} K_{n-1} \xrightarrow{\partial} K_{n-2} \xrightarrow{\partial}$$

是一个 Abel 群的复形，而且空间的连续映射诱导出它们对应的复形的同态 空间 X以及映射 f $X \to Y$的某些性质可以由上述复形的同调群 H_n，或对应于这些同调群的同态 f_n推导出来 . 这就使我们在很多情况下可以将拓扑对象的研究转为某些代数对象的研究，正像在解析几何中已作过的那样（其中的区别是在同调论中从几何向代数的转变是不可逆的）.

在代数学里，对**群扩张**（extension of a group）的研究中，事实上人们也已看到了第一和第二同调群及上同调群. 在结合代数论、Lie 代数论、有限维代数论、环论及二次型理论中都已发展了广泛的预备资料.

同调代数的语言主要来自于同调群的研究过程中 . 这里出现了用箭头作为映射的记号，还有交换图式（commutative diagrams）（如果在一个**图式**（diagram）中，任意具相同的起点及终点的两条道路给出相同的合成映射，则这图式称为交换的）. 在一同态序列中，如果在每处映出的同态的核恰是映入的同态的象，则这个序列就称为正合的（exact）（见**正合序列**（exact sequence））. 在给出数学对象的同时也给出它们之间的映射，已成为一种习惯 保持对象间映射的对应最受关注，这种对应被称为**函子**（functor）. 人们很快就认识到了这种语言的优越性，即自然、清晰地表达信息的总体. 例如，同调代数的语言已被应用于代数拓扑基础的公理化表述 现在，这种语言在很多领域中被采用，包括那些尚未使用同调方法的领域 .

到 20 世纪 40 年代中期，同调代数已变成代数中一门独立的分支 同调代数应用的主要领域是环上模的范畴 已知的大量关于模的结果都可应用在带有某些限制的 Abel 范畴之上（这是因为这种范畴可以嵌入到模的范畴中） 同调代数应用领域的最富于成果的扩展在 [4] 中可以看到，它将同调代数应用于有足够内射对象的任意 Abel 范畴，从而使其应用领域拓广到算术代数几何与多变元函数论（见 **Grothendieck 范畴**（Grothendieck category））

同调代数的主要函子是 Hom(A, B)（模 A到模 B的同态群）和模的**张量积**（tensor product）$A \otimes B$ 理论的基础是研究**导出函子**（derived functor），它可如下构造 任意一个模 A可以表为一个自由模 F_0的商模，然后对这个表示的核有类似的表示 F_1，等等 . 这样便得到一个正合序列

$$\to F_n \to \quad F_1 \to F_0 \to A \to 0.$$

在一个正合序列

$$\to P_n \to \quad \to P_0 \to A \to 0$$

中，如果所有模 P_i都是投射模，则此正合序列称为模 A的投射分解（projective resolution of the module）. 利用共变加性函子 T产生一个复合形，它的同调群称为 T的左导出函子（left derived functor），记为 L_nT 一种

对偶的构造方法是（对于反变函子）使用内射模及对反变函子的内射分解，得到右导出函子 R^nT 在某种意义下，导出函子是函子与正合性偏差的一种度量 构造分解时的任意性不会影响导出函子 对每个正合序列

$$0 \to A \to B \to C \to 0,$$

对应两个导出函子的无限正合序列

$$\begin{aligned}&\to L_{n+1}T(C) \to L_nT(A) \to L_nT(B) \to\\&\to L_nT(C) \to L_{n-1}T(A) \to\\&\to R^{n-1}T(C) \to R^nT(A) \to R^nT(B) \to\\&\to R^nT(C) \to R^{n+1}T(A) \to\end{aligned}$$

对于基本函子的导出函子，人们采用下述记号

$$L_n(A \otimes_R B) = \mathrm{Tor}_n^R(A, B),$$
$$R^n\mathrm{Hom}_R(A, B) = \mathrm{Ext}_R^n(A, B)$$

这两个函子都是两变元 A 和 B 的函子，因此，上面所描述的导出函子的构造法不能直接适用于它们．此时，我们可以固定一个变元，对另一变元构造分解，或者对两变元构造了分解后，构作一个二元复形 在所有情形中都将得到同样结果 群 $\mathrm{Ext}_R^1(A, B)$ 同构于模 B 通过模 A 的扩张群（在这个形式下它已被研究了多年） 新关系的建立相当大地扩展和推进了模的扩张理论 群 $\mathrm{Tor}_1^Z(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ 相当于群 A 的扭部分 这种看法的推广导致了一般扭理论的发展

代数系统的同调论是导出函子的一般概形的一部分 例如，设 $\Lambda = \mathbf{Z}G$ 是一乘法群在整数环 $\mathbf{Z}$ 上群环 (group ring)，并设 A 是左 Λ 模，B 是右 Λ 模 对下列群

$$H^n(G, A) = \mathrm{Ext}_{ZG}^n(\mathbf{Z}, A),$$
$$H^n(G, B) = \mathrm{Tor}_n^{ZG}(B, \mathbf{Z}),$$

的研究就是群的同调与**群的上同调** (cohomology of groups) 理论，这里 $\mathbf{Z}$ 被视为平凡左 $\mathbf{Z}G$ 模 设 L 是一个域 k 上的 **Lie 代数** (Lie algebra)，设 UL 是 L 的**泛包络代数** (universal enveloping algebra)，A 是一 UL 模群

$$H^n(L, A) = \mathrm{Ext}_{UL}^n(k, A)$$

的研究就是 **Lie 代数的上同调** (cohomology of Lie algebras) 论，这里 k 被视为一个平凡 UL 模 关于幺半群、Abel 群、代数、分次代数、环等等的适当的上同调群与同调群都是用类似的方法来定义的 每一种情况的指导思想都是这样一个事实，即第二上同调群是所考虑的代数系统的扩张群

代数系统的同调群也是**相对同调代数** (relative homological algebra) 研究的对象

在具体情况下，函子的导出函子通常是利用一个精确的**分解** (resolution) 来计算的 这个分解是有限的（例如，一个任意 Abel 群分解的长度不超过 1）. 最短分解的长度（称为**同调维数** (homological dimension)) 长期以来一直引起人们的兴趣．这方面第一个重要结果是关于合冲的 **Hilbert 定理** (Hilbet theorem) (19 世纪末） 同调维数理论是同调代数中活跃发展的分支之一 从带有各种有限性限制的模转化到一般情形常常是通过取**归纳极限** (inductive limit) $\varinjlim$ 和**投射极根** (projective limit) $\varprojlim$ 这两个函子完成的．例如，任一群都是它的有限生成子群的归纳极限 每一个紧的全不连通群都可表为它的有限商群的投射极限．这些群的好处在于它和 Galois 理论的关系．这些函子的导出函子在同调维数理论中很有用

非加性函子的导出函子也已经在研究（例如，把 Abel 群与它的群环或它的对称代数联系起来的函子）.

在同调代数中主要的计算方法除了上面提到的分解以外就是**谱序列** (spectral sequence) 和**同调积** (homology product) 谱序列是研究导出函子的最有效的工具，它是通过一个群的子群和商群的同调群来逼近该群本身的同调群 同调积是研究下面类型的同态的

$$L_nT \times L_mT \to L_{n+m}T,$$

它把导出函子相互合并起来

同调代数的方法现在已广泛地用到数学的各不同分支上，如泛函分析、单复变函数论、微分方程等等；代数学的一些分支，如代数 K 论、代数几何或代数数论，若缺少同调代数，更是无法想象．

参考文献

[1] Cartan, H and Eilenberg, S, Homological algebra, Princeton Univ Press, 1956
[2] MacLane, S, Homology, Springer, 1963
[3] Bass, H, Algebraic K-theory, Benjamin, 1968
[4] Grothendieck, A, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math J*, **9** (1957), 119－221
[5] Eilenberg, S and Steenrod, N E, Foundations of algebraic topology, Princeton Univ Press, 1952
[6] Итоги науки Сер Математика Алгебра 1964, M, 1966, 203－236
[7] Steenrod, N E (ed), Reviews of papers in algebraic and differential topology, topological and homological algebra, 2, Amer Math Soc, 1968, 1174－1364

В Е Говоров, А В Михалев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hilton, P J and Stammbach, U, A course in homological algebra, Springer, 1971

冯绪宁 译 裴定一 校

环的同调分类 [homological classification of rings, гомологическая классификация колец]

关于描述环的一些性质的结果的一个总称（通常是指结合环或有幺元的环），这些性质是从环上某些模的性质，特别是从环上所有左（或右）模的范畴的性质导出来的（见 **Morita 等价**（Morita equivalence），**模**（module））.

以下是这些结果的最重要的例子

1) 经典的环的半单性，等价于环之上所有左模的内射性和投射性，也等价于环上所有左理想的内射性（见[1]）

2) 一个交换的 Noether 局部环是正则的，当且仅当它具有有限的整体同调维数

3) 一个环是正则的（在 von Neumann 意义下），当且仅当它上面的所有模都是平坦的，即环的弱同调维数是零.

4) 所有平坦左模的投射性等价于主右理想的极小条件（见**完满环**（perfact ring））

5) 一环是左 Noether 的，当且仅当环上的内射左模类可用模论语言作一阶谓词演算的公式来描述（见[4]）.

还可见 **Artin 环**（Artinian ring），**拟 Frobenius 环**（quasi-Frobenius ring），**凝聚环**（coherent ring），**半完满环**（semi-perfect ring），**自内射环**（self-injective ring）.

参考文献

[1] Cartan, H and Eilenberg, S, Homological algebra, Princeton Univ Press, 1956

[2] Lambek, J, Lectures on rings and modules, Blaisdell, 1966

[3] Скорняков, Л А, 《Математички весник》, 4(1967), 4, 415－434

[4] Eklof, P, and Sabbagh, G, Model-completions and modules, *Ann Math Logic*, 2(1971), 3, 251－295

[5] MacLane, S, Homology, Springer, 1963

А В Михалев, Л А Скорняков 撰

冯绪宁 译　裴定一 校

同调包含 [homological containment, гомологическое опоясывание]

对于 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中的紧统，利用补空间的度量性质来刻画其维数的一种方法　紧统 $\Phi\subset\mathbf{R}^n$ 中循环 z 的本质测度定义为满足下述条件的那些 $\varepsilon>0$ 的上确界　可以选出循环 z 的一个紧支集 $\Phi_1\subseteq\Phi$，使得该循环在 $O(\Phi_1,\varepsilon)$ 中不同调于零　开集 $\Gamma=\mathbf{R}^n\setminus\Phi$ 中循环 z 的 p 维**同调直径**（homological diameter）$\alpha_\Gamma^p z$ 定义为在 Γ 中同调于 z 的所有循环的实体的 p 维直径的下确界　这里一个紧统 $X\subset\mathbf{R}^n$ 的 p 维直径（p-dimensional diameter）$\alpha^p X$ 是具有下述性质的那些 $\varepsilon>0$ 的下确界　存在一个把 X 映入一个 p 维紧统（因而映入一个多面体）的连续 ε 位移.

开集 $\Gamma=\mathbf{R}^n\setminus\Phi$ 中与紧统 Φ 的每一点链结的任何 $(n-1)$ 维循环称为围绕 Φ 的一个袋形（pocket）

袋形定理（pocket theorem）. 设 $r=\dim\Phi\leqslant n-1$. 那么存在一个 $\alpha>0$，使得围绕 Φ 的任何袋形，其 $(r-1)$ 维同调直径大于 α，而 Γ 中任何循环的 r 维同调直径为零　这时总是存在围绕 Φ 的袋形，具有任意小的本质测度　另一方面，若 $\dim\Phi=n$，则存在一个 $\alpha>0$，对于围绕 Φ 的任何袋形 z^{n-1}，不等式 $\mu z^{n-1}>\alpha$ 成立　（这里，对任何袋形 z^{n-1} 有 $\alpha_\Gamma^{n-2}z^{n-1}>0$ 而 $\alpha_\Gamma^{n-1}z^{n-1}=0$）

袋形定理可以利用围绕紧统的带形（zone around a compactum）的概念进一步得到加强

带形定理（zone theorem）　设 $\Phi\subset\mathbf{R}^n$ 是一个 r 维紧统. 于是存在一个 $\gamma>0$，使得对任何 $k=1,\quad,r+1$ 和任何 $\varepsilon>0$，$\Gamma=\mathbf{R}^n\setminus\Phi$ 中存在一个 $(n-k)$ 维循环 v（围绕 Φ 的 $(n-k)$ 维带形），$k>1$ 时成为 Γ 中的边缘链，使得 $\beta^{r-k+1}v<\varepsilon$, $\tau v<\varepsilon$　此外，对于在后者关于 Γ 的 γ 邻域中同调于 v 的任何循环 w，不等式 $\beta^{r-n+1}w>\gamma$ 成立，对于 Γ 中以循环 v 为边缘的任何链 x 有 $\beta^{r-n+1}x>\gamma$　这里 $\beta^p x\,(p\geqslant0)$ 定义为具有下述性质的那些 $\varepsilon>0$ 的下确界　存在链 x 诸顶点的 ε 位移，使 x 直到维数 p 都是退化的，τx 定义为具有下述性质的那些 $\varepsilon>0$ 的下确界　存在 x 诸顶点的 ε 位移，使 x 变成零链

另一方面，若 $s>r$ 且 $k=1,\quad,s+1$，则对任何 $\gamma>0$，Γ 中任何 $(n-k)$ 维循环 z，如果当 $\tau z<\gamma$ 时，z 在其（关于 Γ 的）γ 邻域中同调于某个循环 z'，而 $\beta^{s-k}z'$ 任意小　此外，若 $s>r$，并且 $k=2,\quad,s+1$，则对任何 $\gamma>0$，任何 $(n-k)$ 维循环 z，如果是 Γ 中的边缘链且 $\beta^{s-k+1}z<\gamma$（并且当 $s=n-1$ 时 $\tau z<\gamma$），那么它就是 Γ 中一个链 x 的边缘，而 $\beta^{s-n+1}\cdot x<\gamma$

参考文献

[1] Александров, П С, Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М, 1975

А А Мальцев 撰

【补注】 Euclid 空间 $\mathbf{R}^m$ 中子空间 X 的 ε 移位（ε-shift）是一个映射 $f\ X\to\mathbf{R}^m$，使得对所有的 $x\in X$ 而言，x 到 $f(x)$ 的距离小于 ε　胡师度、白苏华 译

同调维数 [homological dimension, гомологическая размерность]

在一个**范畴**（category）中，一个对象关于此范畴中某类特定对象的一种数量特征　一个环上的模的范

畴是应用这个概念的主要方面．

设 $\mathfrak{B}$ 是一个 **Abel 范畴**（Abelian category）$\mathfrak{A}$ 中固定的一类对象，而 A 是 $\mathfrak{A}$ 中的一个对象，那么，A 关于 $\mathfrak{B}$ 的（投射）同调维数（homological dimension）定义为最小的数 n，使存在如下形式的**正合序列**（exact sequence）

$$0\to B_n\to B_{n-1}\to\quad\to B_0\to A\to 0\ ,$$

这里所有的 B_i 都取自 $\mathfrak{B}$ 如果这样的 n 不存在，我们就说 A 的同调维数等于 ∞

设 ${}_R\mathfrak{M}$（相应地，$\mathfrak{M}_R$）为一个具有单位元的结合环 R 上的左（相应地，右）模之范畴，则 a）如果 $\mathfrak{B}$ 是所有投射左 R 模的类，那么 A 的相应的同调维数也称为投射维数（projective dimension），并表以 $\mathrm{pd}_R(A)$，b）如果 $\mathfrak{B}$ 是所有平坦左 R 模的类，则相应的 A 的同调维数称为弱维数（weak dimension），并表以 $\mathrm{wdim}_R(A)$ 如果 $\mathfrak{A}$ 是一个分次环 R 上的左**分次模**（graded module）的范畴，而 $\mathfrak{B}$ 是所有左投射分次 R 模的类，则一个分次 R 模 A 的相应同调维数称为分次投射维数（graded projective dimension）并表以 $\mathrm{gr\text{-}pd}_R(A)$

可以考虑对偶的构造．如果 $A\in{}_R\mathfrak{M}$，则最小的数 n，使有正合序列

$$0\to A\to Q_0\to Q_1\to\quad\to Q_n\to 0$$

且诸 Q_i 都是内射的，称为 A 的内射维数（injective dimension）并记为 $\mathrm{id}_R(A)$

对于 $A\in{}_R\mathfrak{M}$，下列的条件是等价的

a）$\mathrm{id}_R(A)\leqslant n$，

b）$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(B,A)=0$，对所有的 $B\in{}_R\mathfrak{M}$（见**函子**（functor）Ext），

b′）$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(B,A)=0$，对所有的循环模 B，

c）$\mathrm{Ext}_R^n(B,A)$ 是自变量 B 的一个右正合函子，

d）若

$$0\to A\to Y_0\to\quad\to Y_{n-1}\to Y_n\to 0$$

是一个正合序列，且对 $0\leqslant k<n$，Y_k 都是内射的，则 Y_n 是一个**内射模**（injective module）

下列条件也都是等价的

a）$\mathrm{pd}_R A\leqslant n$，

b）$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,C)=0$，对所有的 $C\in{}_R\mathfrak{M}$，

c）$\mathrm{Ext}_R^n(A,C)$ 对于自变量 C 是一个右正合函子，

d）若

$$0\to X_n\to X_{n-1}\to\quad\to X_0\to A\to 0$$

是一个正合序列，且所有的 X_k 都是投射的，$0\leqslant k<n$，则 X_n 也是**投射模**（projective module）

如果序列

$$0\to A'\to A\to A''\to 0$$

是正合的，这里 $A',A,A''\in{}_R\mathfrak{M}$，且若

$$d'=\mathrm{pd}_R(A'),\ d=\mathrm{pd}_R(A),\ d''=\mathrm{pd}_R(A''),$$

则

$$d'\leqslant\sup(d,d''-1),$$
$$d''\leqslant\sup(d'+1,d),$$
$$d\leqslant\sup(d',d'')$$

如果 $d<\sup(d',d'')$，则 $d''=d'+1$

数

$$\mathrm{l.gl-dim}(R)=\sup\{\mathrm{pd}_R(A)\ \ A\in{}_R\mathfrak{M}\}$$

称为环 R 的左整体维数（left global dimension）．

$$\begin{aligned}\mathrm{l\ gl-dim}(R)&\\ &=\sup\{\mathrm{pd}_R(A)\ \ A\text{ 是一个左循环 }R\text{ 模}\}\\ &=\sup\{\mathrm{id}_R(A)\ \ A\in{}_R\mathfrak{M}\}\end{aligned}$$

如果环 R 有一个左理想的合成列，则

$$\mathrm{l.gl-dim}(R)=\sup\{\mathrm{pd}(S)\ \ S\in{}_R\mathfrak{M},\ S\text{ 是一个单 }R\text{ 模}\}.$$

数

$$\mathrm{gl-wdim}(R)=\sup\{\mathrm{wdim}(A)\ \ A\in{}_R\mathfrak{M}\}$$

称为环 R 的整体弱维数（global weak dimension），且

$$\mathrm{gl-wdim}(R)=\sup\{\mathrm{wdim}_R(A)\ \ A\in\mathfrak{M}_R\}$$

数

$$\mathrm{l.f\ gl-dim}(R)=\sup\{\mathrm{pd}(A)\ \ A\in\mathfrak{M}_R,\ \mathrm{pd}_R(A)<\infty\}$$

称为环 R 的左有界整体维数（left bounded global dimension）

下列的维数与这些维数相近．如果 R 是一个交换环 K 上的一个代数，则 R 的 R 双模（就是左模 $R\otimes_K R^{\mathrm{op}}$，而 R^{op} 是 R 的逆环）的投射维数称为代数 R 的双维数（bidimension），并表以 $\mathrm{bid}\,R$，如果 G 是一个群，而 K 是一个交换环，则群 G 的（上）同调维数（（co）homological dimension），按定义，是群环 KG 上的模 K 之平坦（投射）维数，这里的模 K 是将 G 的元素平凡地作用于 K 上而成的．这个维数将表以 $(\mathrm{hd}_K(G))\mathrm{cd}(G)$

许多著名的定理都可以用同调维数的术语来重新表达．例如，**Wedderburn-Artin 定理**（Wedderburn-Artin theorem）就有下列形式　一个环 R 是古典单纯

的，当且仅当 $\mathrm{gl}-\dim(R)=0$ 一个环是在 von Neumann 意义下正则的当且仅当 $\mathrm{gl}-\mathrm{wdim}(R)=0$ 对于域 K 上的一个代数 R，等式 $\mathrm{bid}_K R=0$ 等价于它在 K 上的可分性 "一个自由 Abel 群的子群仍然自由" 这样的一句话等价于说 $\mathrm{gl}-\dim(Z)=1$，这里 Z 是整数环 若环 R 有 $1\cdot\mathrm{gl}-\dim(R)\leqslant 1$，则 R 称为一个左遗传环．

环 R 的左右整体维数不一定一致 另一方面，如果 R 是既左且右 Noether 环，则

$$\mathrm{l.gl}-\dim(R)=\mathrm{r.gl}-\mathrm{wdim}(R)=\mathrm{gl}-\mathrm{wdim}(R).$$

如果 $R\to S$ 是一个环同态，则任何 S 模 $_S(A)$ 也都可看成一个 R 模，且

$$\mathrm{pd}_R(A)\leqslant\mathrm{pd}_S(A)+\mathrm{pd}_R(S),$$

$$\mathrm{wdim}_R(A)\leqslant\mathrm{wdim}_S(A)+\mathrm{wdim}_R({}_RS),$$

$$\mathrm{id}_R(A)\leqslant\mathrm{id}_S(A)+\mathrm{wdim}_R(S_R)$$

如果环 R 是滤过的，则

$$\mathrm{l.gl}-\dim(R)\leqslant\mathrm{l\ gr\ gl}-\dim G(R),$$

这里 $G(R)$ 是相伴的分次环

在许多情况，同调维数的研究是同所考虑的模的基数相关的 特别，这使得估计一个模的弱与投射维数之差与环的左右整体维数之差成为可能 **连续统假设**(continuum hypothesis)等价于

$$\mathrm{pd}_{\mathbf{R}[x,y,z]}(\mathbf{R}(x,y,z))=2,$$

这里 $\mathbf{R}$ 是实数域，$\mathbf{R}(x,y,z)$ 是有理函数域，而 $\mathbf{R}[x,y,z]$ 是 $\mathbf{R}$ 上的多项式环

同调维数的大部分研究都是关于发现这些维数间的关系的，以及模与域的其他的特征的．例如，根据 Hilbert 合冲定理（见 **Hilbert 定理**(Hilbert theorem)），

$$\mathrm{gl}-\dim K[x_1,\ ,x_n]=n,$$

这里 K 是一个域，而 $K[x_1,\ ,x_n]$ 是 K 上变量 $x_1,\cdot,x_n$ 的多项式环．现在这条定理已经被大大地推广了 一个可解群的群代数的同调维数密切地联系于这个群的可解系列之长与其因子群之秩．方程 $\mathrm{cd}(R)=1$ 蕴涵着 G 是一个自由群(Stalling 定理(Stalling theorem)) 所研究的另外的一个课题是模与环的同调维数与其他维数间的联系 例如，一个交换环 R 的 Krull 维数重合于 $\mathrm{gl}-\dim(R)$ 当且仅当 R 对于素理想的所有局部化都有有限 Krull 维数 任何一个有 $\mathrm{gl}-\dim(R)<\infty$ 的交换 Noether 环都可分解成整环的有限直和．在代数几何中，一个正则点的局部环称为一个正则局部环(regular local ring) 这样的环的整体维数与其 Krull 维数恒等，也与其极大理想之生成元的极小个数相等（正则局部环是整环，具有唯一的素因分解式，它们在素理想处局部化后，仍然是正则的）．

参考文献

[1] Cartan, H and Eilenberg, S, Homological algebra, Princeton Univ Press, 1956

[2] Osofsky, B L, Homological dimensions of modules, Amer Math Soc, 1973

В Е Говоров, А В Михалев 撰

【补注】 关于环的其他维数，见**维数**(dimension)的补注．对于投射与内射维数的记号有 projdim, pdim, injdim, idim

参考文献

[A1] Năstăsescu, C and Oystaeyen, F van, Dimensions of rings, Reidel, 1988

周伯埙 译

空间的同调维数[homological dimension of a space, гомологическая размерность пространства]，空间 X 关于系数群 G 的

使得对某个闭集 $A\subset X$，Александров-Čech 同调群 $H_n(X,A,G)$ 非零的最大整数 n 同调维数记为 $\dim_G X$ 上同调维数(cohomological dimension)同样定义 使得对所有闭集 $A\subset X$，映射 $H^n(X,G)\to H^n(A,G)$ 是满同态的最小整数 n 维数的同调理论(homological demension theory)通常是指它的上同调不变性，已经研究得相当彻底了 这是因为 Александров-Čech 上同调满足所有的 **Steenrod-Eilenberg 公理**(Steenrod-Eilenberg axioms)，包括正合公理，所以使用上同调是比较有效的 就可度量化紧流形的范畴而言，群 $H_p(X,A,G)$ 和 $H^p(X,A,G^*)$ 之间有 **Понтрягин 对偶性**(Pontryagin duality)，所以以紧群 G 作为系数群的同调处理等价于以对偶数 G^* 作为系数群的上同调处理 同样，如果以同一个域 G 的元素作为系数，两种处理也是等价的

维数的同调理论起源于 П С Александров 的一个定理 关系 $\dim X\leqslant n$，其中 dim 表示 **Lebesgue 维数**(Lebesgue dimension)，等于是说，把任意闭集 $A\subset X$ 映入 n 维球面 S^n 的任何连续映射均可扩张为把整个 X 映入 S^n 的映射．由此可见，如果 $\dim X<\infty$ 而 $\mathbf{Z}$ 是整数群，则 $\dim X=\dim_{\mathbf{Z}}X$ 后来，Л С Понтрягин 指出，关于不同系数群的同调维数不必相同（万有系数公式蕴涵的一般结果是，对任何紧统 X 有 $\dim_G X\leqslant\dim X$） 同调维数，和 Lebesgue 维数一样是空间 X 的拓扑不变量．

同调维数 $\dim_G X$ 具有平常维数 dim 的许多性质 事实上，若 A 是 X 的闭子集，则 $\dim_G A\leqslant\dim_G X$，若 $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}X_i$，其中每个 X_i 都闭于 X，则

$$\dim_G X=\max_i\dim_G X_i,$$

等等．Александров **阻碍定理**（Aleksandrov obstruction theorem）成立 Euclid 空间 E^n 中同调维数为 r 的子集是由$(n-r-1)$维圆周（局部）扭结而成．亦见**维数**（dimension）

研究不同系数群的同调维数间的关系在维数的同调理论中占有中心地位．这个方向上出现的问题对维数论有许多直接的应用，与变换群理论中某些最重要的问题有密切的关系．对乘积维数的分析非常重要，例如，若 G 是有理数域或素数模的剩余类域，则

$$\dim_G(X\times Y)=\dim_G X+\dim_G Y,$$

对于任何紧统 Y，

$$\dim(X\times Y)=\dim X+\dim Y$$

$(\dim X<\infty)$成立的充要条件是 所有的维数 $\dim_G X$ 均与 $\dim X$ 相同

维数的同调理论，在引进**层论**（sheaf theory）作为研究工具后，其基本面貌发生了实质性的变化，系数在一个层中的维数的上同调理论也有独立的发展（基本定理是一样的）．这些新方法可以用来解决与维数在连续映射下的性态有关的许多问题，也可以使理论的应用领域扩大到仿紧空间的范畴（见**仿紧空间**（paracompact space））

参考文献

[1] Hurewicz, W and Wallman, H, Dimension theory Princeton Univ Press, 1948

[2] Кузьминов, В И, 《Успехи матем наук》, **23** (1968), 5 (143), 3 − 49

Е Г Скляренко 撰

【补注】 最近，А Н Дранишников 构造了一个紧空间 X，使得 $\dim X=\infty$ 而 $\dim_Z X=3$，所以，条件 $\dim X<\infty$ 是等式 $\dim_Z X=\dim X$ 的必要条件

参考文献

[A1] Dranishnikov, A N, On a problem of P S Aleksandrov, *Mat Sb*, **135** (1988), 551 − 557 (俄文)

[A2] Nagata, J, Modern dimension theory, Noordhoff, 1965

胡师度、白苏华 译

透射 [**homology**, **гомология**]，射影几何学中的

射影平面的一个自同构，它使得一给定直线（**透射轴**（homology axis））的所有点保持不动，且把恰好通过一固定点（**透射中心**（homology centre））的所有直线映射到它们自身 如果透射中心不在透射轴上，那么该透射就称作是**非奇异的**（non-singular）（或**双曲的**（hyperbolic）），如果透射中心在透射轴上，则称其为**奇异的**（singular）（或**抛物的**（parabolic））．通常一个透射被一个中心、一条轴和在该透射之下对应的一对点所确定 在仿射平面上，具有有限中心和无穷远轴的透射是一位似，具有无穷远中心和不通过该中心的有限轴的透射是一向轴的扩张或收缩，中心和轴两者都是无穷远的透射称为一平行移动，具有有限轴和无穷远中心的奇异透射是一个移位

参考文献

[1] Hartshorne, R Foundations of projective geometry, Benjamin, 1967

А Б Иванов 撰

【补注】 透射也称为**中心直射变换**（central collineation），双曲透射称为**膨胀**（dilation），抛物透射称为**伸缩**（elation）或**平延**（transvection）．

参考文献

[A1] Busemann, H and Kelly, P, Projective geometry and projective metrics, Acad Press, 1953

[A2] Coxeter, H S M, Projective geometry, Blaisdell, 1964

杨 路、侯晓荣 译 张景中 校

同调基 [**homology base**, **гомологии база**]，一个复形或拓扑空间关于给定系数群的

具有下述性质的一组闭链 z_1, … , z_n 它们的任何非平凡线性组合必不同调于零，并且任何**闭链**（cycle）同调于它们的一个线性组合

А А Мальцев 撰 孙以丰 译

同调函子 [**homology functor**, **гомологический функтор**]

Abel 范畴（Abelian category）上的函子，定义此范畴上的某些同调结构．从 Abel 范畴 $\mathscr{A}$ 到 Abel 范畴 $\mathscr{A}_1$ 的一系列共变加性函子 $H=(H_i)_{i\in Z}$ 称为一个**同调函子**（homology functor），如果满足下列的公理

1）对每一个正合序列

$$0\to A'\to A\to A''\to 0$$

并对每一个 i，在 $\mathscr{A}$ 中给出一个态射 $\partial_i\ H_{i+1}(A'')\to H_i(A')$，称为**连接态射**（connecting morphism）或**边缘态射**（boundary morphism）

2）序列

$$\to H_{i+1}(A')\to H_{i+1}(A)\to H_{i+1}(A'')\xrightarrow{\partial_i}$$

$$\xrightarrow{\partial_i} H_i(A')\to$$

称为**同调序列**（homology sequence），是正合的．

于是，设 $\mathscr{A}=K(\mathrm{Ab})$ 为 Abel 群的链复形的范畴，并设 Ab 为 Abel 群的范畴．函子 $H_i\ K(\mathrm{Ab})\to\mathrm{Ab}$ 将复形 $K_\bullet$ 对应同调群 $H_i(K_\bullet)$，就定义一个同调函子

设 $F\ \mathscr{A}\mapsto\mathscr{A}_1$ 为一个加性共变函子，对 F 可定义其左**导出函子**（derived function）R_iF $(R_iF=0, i<0)$，那么，系统 $(R_iF)_{i\in Z}$ 将定义从 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{A}_1$ 的一个同调函子

同调函子的另一个例子是**超同调函子**(hyperhomology functor)

上同调函子(cohomology functor)可用对偶方式来定义.

参考文献

[1] Grothendieck, A, Sur quelques points d'algebre homologique, *Tohoku Math J*, 9(1957), 119-221

И В Долгачев 撰 周伯埙 译

同调群[**homology group**, **гомологии группа**], 拓扑空间的

配给每个拓扑空间的一种群,旨在用代数的方式研究空间的拓扑性质 这个对应关系应满足某些条件,其中最重要的是 **Steenrod-Eilenberg 公理**(Steenrod-Eilenberg axioms)(亦见**同调论**(homology theory)). H Poincaré(1895)对于多面体以及它们的三角剖分——表示为单纯复形(见**多面体的同调**(homology of a polyhedron))提出了同调的想法,同调群就是在这个基础之上发展起来的.同调的概念得以推广,在任意空间上可以引出多种同调论,虽然到处都涉及复形的概念,但情况比三角剖分要复杂得多了.最基本的理论有两种 奇异同调论与谱同调论.前者是基于将多面体映入给定空间的映射,其应用范围多半也是多面体映入任意空间的场合,后者则基于将任意空间映入多面体的映射,对于涉及这类映射的问题特别有用.

奇异同调(singular homology)的概念源于O Veblen(1921),他关于空间同调群的定义是基于一系列多面体,它们映入该空间的映射以及这些多面体本身的同调群.这种想法导致了两种理论的兴起.它的直接发展引出连续同调类群.真正的奇异同调群则是S Lefschetz(1933)基于定向单形到已给空间的映射而定义的.这种理论后来显得更为有用,由于它是在链群的基础上建立的,进一步发展是S Eilenberg(1944)以有序单形代替定向单形,以及(J P Serre, 1951)用方体代替单形而建立的方体奇异同调论 所有这些奇异同调论在很一般的条件下全都互相同构.

任意空间的每个覆盖确定一个单纯复形,即所谓覆盖的神经(见**集合族的神经**(nerve of a family of sets)) 空间各覆盖的神经之间有自然的单纯映射,从而产生了谱,由此而引出**谱同调**(spectral homology) 这是 П С Александров (1925-1928)首先对于紧致度量空间中有限覆盖的神经序列而引入的.后来Čech(1932)将这个理论推广到任意空间中任意一系开覆盖的神经,但他仍然用有限覆盖,这对非紧致空间并不总是适当的.因此,在40年代中期,开始使用无穷覆盖.这样引进的同调群被称为Александров-Čech群(见**Александров-Čech 同调与上同调**(Aleksandrov-Čech homology and cohomology)) L. Vietoris(1927)用极限过程给出紧致度量空间的另一种同调群定义(见 **Vietoris 同调**(Vietoris homology)).任意空间Vietoris 同调群的定义是基于考虑一串内接覆盖的复形(所谓Vietoris 复形(Vietoris complexes)),它的单形是同属于覆盖中某一成员的有限多个点.А Н Колмогоров 与J W Alexander 1935年互相独立地引进了以上链为基础的上同调群,这些上链是空间里点的有序集的函数.Колмогоров 还建议了一种依靠集函数来构作同调的办法,对偶于前述的上同调构作,对任何系数群,这种同调群同构于 Steenrod 同调群(见 **Steenrod 对偶性**(Steenrod duality)),并且,若系数群为紧的,还同构于 Александров-Čech 同调群.Александров-Čech 同调群与 Vietoris 同调群是同构的.Vietoris 同调群与 Alexander-Колмогоров 上同调群分别为给出在同一个 Vietoris 复形谱上一对对偶谱的反向与正向极限,从而它们是对偶的 按照在构造谱同调群的过程中取神经上的同调还是取 Vietoris 复形上的同调而得出两种类型——射影的与谱的.在射影的情形下,取的是一个链复形的同调群,这个链复形是将神经中有限子复形的链复形取极限得到的,在谱的情形下则是对 Vietoris 复形中有限子复形的同调群取极限而得到的.用离散系数群时,这些群是互相同构的,对于上同调群,构造是对偶的.

对于仿紧 Hausdorff 同调局部连通空间,奇异同调论与谱同调论同构 所谓同调局部连通性是指每点的任何一个已给的邻域必可找到更小些的邻域使得后者到前者的含入映射所诱导的奇异同调群的同态为平凡(对于所有各维数的整数同调群,当维数为0时,用约化同调群),换句话说,每个点在空间的嵌入均为绷紧的.例如,局部可缩空间,特别是多面体,具有这种性质

显出这些理论之间差异的有下述诸性质 奇异(但不是谱)同调论有正合的同调序列并且是**具有紧支集的同调**(homology with compact support) 若限定在紧致空间对与紧致系数群则谱同调论为正合的 最早的谱同调论是针对这种特款的.谱(但不是奇异)同调论具有连续性质(continuity property),即若给定的紧致空间对是某一由紧致空间对所构成谱的反向极限,则这个空间对的同调群是那个谱中空间对的同调群所构成谱的反向极限,还有绷紧性(tautness property),即子空间的同调群是它的邻域的同调群所构成谱的极限.这些理论也由于它们不同的切除性质而有区别.给定系数群,在CW复形范畴上,奇异理论是唯一的具有可加性(additivity property)同调论 拓扑和的同调群是各项的同调群的直和.在紧致空间对的范畴上,谱同调是唯一具有连续性的偏正合同调

论

在众多的其他同调与上同调论及它们的推广之中还可以举出用同调代数方法造出的异常同调论，系数为层的同调与上同调群，具有局部系数的同调，具有正合同调序列的谱式同调论，模于各种适当的子空间的同调群，等等

参考文献

[1] Steenrod, N E and Eilenberg, S, Foundations of algebraic topology, Princeton Univ Press, 1966

[2] Hilton, P J and Wylie, S, Homology theory An introduction to algebraic topology, Cambridge Univ Press, 1960

[3] Александров, П С, 《Матем сб》, **21** (1947), 2, 161 - 232

[4] Александров, П. С, 《Матем АН СССР Сер матем》, **6** (1942), 227 - 282

[5] Spanier, E H, Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966

[6] Godement, R, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, 1958

[7] Bredon, G, Sheaf theory, McGraw-Hill, 1967

[8] Teleman, C, Grundzüge der Topologie und differenzierbare Mannigfaltigkeiten, Deutsch Verlag Wissenschaft, 1968 (译自罗马尼亚文)

[9] Switzer, R, Algebraic topology-homotopy and homology, Springer, 1975

Г С Чогошвили 撰 孙以丰 译

同调流形 [**homology manifold**, **гомологическое многообразие**], 广义流形 (generalized manifold)

局部紧的拓扑空间，它的局部同调结构类似于通常拓扑流形的局部结构，其中包括带边流形 更精确地，在系数为群或模 G 上的同调 n 流形 (homology n-manifold) (广义 n 流形(generalized n-manifold)) 是 G 上具有有限同调维数 (见**空间的同调维数** (homological dimension of a space)) 的局部紧拓扑空间 X，使得它的所有的局部同调群 (见**局部同调** (local homology)) H_p^x 当 $p \neq n$ 时是平凡的，而当 $p=n$ 时或者同构于 G，或者同构于零 这里 H_p^x 是群 $H_p(X, X\setminus U, G)$ 在点 $x \in X$ 的所有邻域 U 上取的方向极限，并且 H 是满足所有 **Steenrod-Eilenberg 公理** (Steenrod-Eilenberg axioms) 包括正合性公理的**同调论** (homology theory) 在局部可缩空间的范畴里，考虑有紧支柱的理论 H 同构于奇异理论 (见**奇异同调** (singular homology)) 群 H_n^x 自动地产生称为流形 X 的定向层 (orienting sheaf) 的某层 $\mathscr{H}_n$ 的茎 (见**层论** (sheaf theory)) 当层 $\mathscr{H}_n$ 同构于常数层 $X \times G$ 时，同调流形 X 就称为可定向的 (orientable)，而当 $\mathscr{H}_n$ 在 $\mathscr{H}_n^x \neq 0$ 的点处是局部常数时，X 称为局部可定向的 (locally orientable) 如果 G 是一个**主理想环** (principal ideal ring)，且所有的 H_n^x 是非零的，则 G 上的同调流形总是局部可定向的 如果群 G 上的同调流形是局部可定向的，则所有适合 $H_n^x=0$ 的点 $x \in X$ 的集合是闭的，无处稠密的且形成同调流形 X 的边界 局部可定向的同调流形 X 有如通常流形一样的同调性质

例如，关于保区域性的定理对 X，$h\dim_G X = n$ 是有效的，集合 A' 在 X 中无处稠密，当且仅当 $h\dim_G A \leqslant n-1$，等等

对 G 上的任何同调流形有自然同构 (**Poincaré 对偶性** (Poincaré duality))

$$H_p(X, G) = H^{n-p}(X, \mathscr{H}_n)$$

(系数在层中的上同调). 这里 p 是任一整数; 可是，G 上的同调流形 X 的同调维数是 n，因此，只有当 $0 \leqslant p \leqslant n$ 时，这些同构的容度是非平凡的. 对于支柱在任何仿紧族中的同调和上同调 (特别对有紧支柱的同调和上同调空间)，相似的同构是有效的 在层 $\mathscr{H}_n$ 的非零茎 H_n^x 与群 G 之间同构的条件是不重要的 也可考虑用茎 G (伴随 $\mathscr{H}_n$ 中的一个改变) 的系数 $\mathscr{G}$ 的任何局部常数层来代替群 G 任何开子集 $U \subset X$ 是同调流形，因为这个理由，使用方程

$$H_p(U, G) = H_p(X, X\setminus U; G),\ p \neq 0, n,$$

$$H_c^q(U, G) = H^q(X, X\setminus U, G),$$

在其中的第二个方程，U 有紧闭包，而指标 c 表示支柱的紧性，使得同构

$$H_p(X, X\setminus U, G) = H^{n-p}(U, \mathscr{H}_n),$$

$$H_p^c(U, G) = H^{n-p}(X, X\setminus U, \mathscr{H}_n)$$

作为 Poincaré 对偶的特殊情形成为可能. 各自的对的正合同调和上同调序列的组合，使有可能考虑同构

$$H_p(X\setminus U, G) = H^{n-p}(X, U, \mathscr{H}_n)$$

和

$$H_p(X, U, G) = H^{n-p}(X\setminus U, \mathscr{H}_n)$$

(后一个方程是 **Alexander 对偶性** (Alexander duality) 的推广——作为 Poincaré 对偶的特殊情形). 对具有支柱在已给固定族中的同调和上同调，类似的关系也是有效的.

设

$$H_p(X, G) = H_{p+1}(X, G) = 0,$$

再设 X 是紧的，Y 是闭的或者是开的子集. 前面的同构、同调及上同调的正合性的结果是一个同构

$$H_p^c(X\setminus Y, G) = H^{n-p-1}(Y, \mathscr{H}_n),$$

它对闭集 Y 表示了 **Понтрягин 对偶性** (Pontryagin duality)而对开集 Y 表示了 **Steenrod 对偶性** (Steenrod duality) 由此及上同调群的连续性的性质蕴涵着对任何子集 $Y \subset X$, 同构

$$H_p^c(X \setminus Y, G) = H^{n-p-1}(Y, \mathscr{H}_n)$$

是有效的 (Ситников 对偶性 (Sitnikov duality)) 如果 X 是非紧的, 则必须考虑 X 的所有闭支柱的同调而不是用紧支柱的同调 如果 X 是紧的, 则对 $p=0$ 必须使用约化同调群

同调流形的非平凡例子包含像 Euclid 空间那样的通常流形的"因子". 如果对一个拓扑空间 X, 存在 Y 使得 Descartes 积 $X \times Y$ 是同调流形, 则 X 和 Y 也是同调流形. 有同调流形的例子, 在它们的任何一点处都不是局部 Euclid 的 同调流形在**变换群** (transformation group)的一些问题中起着重要的作用, 在那里它们以**轨道** (orbit)空间或不动点的集合出现.

有广义流形的定义的上同调的变形. 在主理想环上的任何上同调流形 (cohomology manifold)是 G 上的同调流形, 并且如果 G 是至多可数的, 那么逆命题也成立.

参考文献

[1] Čech, E , Théorie generale des variétes et de leurs theorèmes de dualité, *Ann of Math* (2), **34**(1933), 621 - 730

[2] Lefschetz, S , On generalized manifolds, *Amer J Math* , **55**(1933), 469 - 504

[3] Aleksandroff, P S , On local properties of closed sets, *Ann of Math* (2), **36**(1935), 1, 1 - 35

[4] Aleksandroff, P S and Pontryagin, L S , Les variétes à n dimensions generalises, *C R Acad Sci Paris Sér I Math* , **202**(1936), 1327 - 1329

[5] Smith, P A , Transformations of finite period, *Ann of Math* (2), **40**(1939), 3, 690 - 711

[6] Begle, E G , Locally connected spaces and generalized manifolds, *Amer J Math* , **64**(1942), 553 - 574

[7] Wilder, R , Topology of manifolds, *Amer Math Soc* , 1949

[8] Borel, A , The Poincaré duality in generalized manifolds, *Michigan Math J* , **4**(1957), 227 - 239

[9] Yang, C T , Transformation groups on a homological manifold , *Trans Amer Math Soc* , **87**(1958), 261 - 283

[10] Conner, P E and Floyd, E E , A characterization of generalized manifolds, *Michigan Math J* , **6**(1959), 33 - 43

[11] Raymond, F., Separation and union theorems for generalized manifolds with boundary, *Michigan Math J* , **7**(1960), 7 - 21

[12] Bredon, G E , Orientation in generalized manifolds and application to the theory of transformation groups, *Michigan Math J* , **7**(1960), 35 - 64

[13] Borel, A , Homology and duality in generalized manifolds, in A Borel (ed) Seminar on transformation groups, Princeton Univ Press, 1960, 23 - 33

[14] Bredon, G E Wilder manifolds are locally orientable, *Proc Nat Acad Sci USA*, **63**(1969), 4, 1079 - 1081

Е Г Скляренко 撰 徐森林 译 薛春华 校

复形的同调 [**homology of a complex**, **гомологии комплекса**]

各种同调构造的起点. 设 A 为一个 Abel 范畴, 并设 $K_\bullet = (K_n, d_n)$为 A 中的一个链复形 (chain complex), 即 A 中的一族对象 $K = (K_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ 与态射 $d \,.\, K_n \to_n K_{n-1}$ 使对所有的 $n \in \mathbf{Z}$ 有 $d_{n-1} \circ d_n = 0$ 商对象 $\operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}$ 称为复形 $K_\bullet$ 的第 n 个同调, 并记为 $H_n(K)$ 族 $(H_n(K))_{n \in \mathbf{Z}}$ 也以 $H_\bullet(K_\bullet)$ 来表示

复形的同调的概念是同调代数, 交换代数, 代数几何, 与拓扑学中的许多重要构造的基础. 例如, 在拓扑学中, 每一个拓扑空间 X 在 Abel 群的范畴 (Ab)中定义一个链复形 ($C_n(X)$, ∂_n) 此处 $C_n(X)$是 X 的 n 维奇异链的群, 而 ∂_n 是边缘同态. 这个复形的第 n 个同调称为 X 的第 n 个奇异同调群 (singular homology group), 并记为 $H_n(X)$ 上链复形的上同调的概念是用对偶方式来定义的.

参考文献

[1] MacLane, S , Homology, Springer, 1963

И В Долгачев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Spanier, E H , Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966

周伯埙 译

动力系统的同调 [**homology of a dynamical system**, **гомологии динамической системы**], 动力系统的上同调 (cohomology of a dynamical system)

遍历理论 (ergodic theory) 中的一个不变量, 它的构造须回顾群的上同调 ([1]) 的构造 考察最简单的情形. 设 T为测度空间 X的自同构, $H^1(T,x)$为由 T 的迭代得到的瀑布的一维 (上) 同调群, 则定义与下述的等价 设 $Z(X)$为 X上一切可测函数的加群 (或对应地, 一切满足 $|f(x)|=1$ a e 的可测函数 f的乘群). 函数 f的加 (乘) 性 (上) 边界 (additive (multiplicative) (co) boundary) 指的是函数 $g(x)=f(Tx)-f(x)$ (或相应地, $g(x)=f(Tx)/f(x)$). 若用 $B(T,X)$表示一切 (上) 边界的集合, 则可定义加法 (或对应地, 乘法) (上) 同调群 $H^1(T,X)$为商群 $Z(X)/B(T,X)$ 可以考虑较可测函数

类更狭的类．动力系统的同调群便是轨道同构的不变量（关于 H^1 上详情见[2]）

动力系统的同调甚至连一个非平凡例子也未计算出来（1977）．在遍历理论中采用“同调”概念是由于下列事实 在很多实情形，知道（有时确实知道）某些给定函数是否是上边界可能是重要的

参考文献

[1] Кириллов, А А, Динмические системы, факторы и представления групп,《Успехи матем наук》, **22**(1967), 5, 67－80

[2] Степин, А М,《Функциональн анализ и его прило-жения》, **5**(1971), 2, 91－92

Д В Аносов 撰

【补注】 关于上闭链（副圈，cocycle）的有关结果，可见，例如[A1]以及那里所引文献（例如，G W Mackey 的工作）

对于抽象（最小）拓扑动力系统（即由作用于一紧空间上任意拓扑群所组成的动力系统）的上同调的研究始于[A3] 关于进一步发展，见[A2]

参考文献

[A1] Golodets, V Ya and Sinelshchikov, S D, Locally compact groups appearing as ranges of cocycles of ergodic **Z**-actions, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **5**(1985), 47－57

[A2] Ellis, R, Cohomology of groups and almost periodic extensions of minimal sets, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **1**(1981), 49－64

[A3] Petersen, K E, Extension of minimal transformation groups, *Math Systems Theory*, **5** (1971), 365－375

郑维行 译

多面体的同调［homology of a polyhedron, гомологии полиэдра］

拓扑空间为多面体时的**同调论**（homology theory）（见**多面体**（polyhedron, abstract）） 多面体的同调首先出现在 H Poincaré（1895）研究 Euclid 空间里的流形的工作中．他考虑已给流形中的 r 维闭子流形，看作 r 维闭链或循环．若这个流形包含一个有边界的（$r+1$）维子流形以所给的闭链为边界，那个闭链就称为在该流形中同调于 0 比如，一个圆周与另一同心圆周共同构成一个环形域的边界，在这个环形域中不同调于 0，而一个圆周如果是环形域内一个圆盘的边界，则在环形域中同调于 0 Poincaré 将原先解析定义的流形概念，用由单形（simplex）与边界所共同构成的复形（complex）来代替．这种方法可以用来研讨任何可剖分为**单纯复形**（simplicial complex）的空间上的同调，也就是那种可以看作直的多面体的空间，或它们的同胚象——弯曲多面体．闭链以及它们的同调等的几何意义仍然可以保持．于是，1 维闭链就是一个封闭的折线段，它的每个线段是一个 1 维单形．如果它是该复形中某 2 维子复形的边缘，则同调于零．两个同样维数的闭链互相同调假如它们共同构成该已给复形的一个子复形的边缘．这是一个等价关系，将所有同一维数的闭链分成等价类．在类中任意取代表闭链，定义两个类的和为两个代表闭链之和的类，则在全体类上定义了加法，从而引入了代数结构．引入行进的方向，即定向单形，可得到每个类的逆，将这些直观概念给以严谨的说明就可定义多面体同调群的概念．

设已给多面体 P 的一个**三角剖分**（triangulation）K 以及交换群 G．复形 K 在系数群 G 上的一个 r 维链是一个函数 c_r，它对于 K 的每个定向的 r 维单形 t^r 对应以 G 的一个元素，仅对 K 中有限多个单形此对应值非 0，并且 $c_r(-t^r)=-c_r(t^r)$ 使 r 维链如同线性形式那样相加，得到 K 关于系数群 G 的 r 维链群，它显然是交换群，$C_r(K,G)$．从单形的边缘概念出发，按可加性而定义链的边缘，得到同态

$$\partial_r \quad C_r(K,G)\to C_{r-1}(K,G)$$

满足 $\partial_{r-1}\partial_r=0$，以及链复形

$$\{C_r(K,G),\partial_r\}$$

链 c_r 称为闭链（cycle），假如它的边缘是 0 链．$\partial_r c_r=0$ 闭链 z_r 称为边缘的（bounding），假如 K 上有（$r+1$）维链 c_{r+1} 使得 $z_r=\partial_{r+1}c_{r+1}$ 同态 ∂_r 的核，也即全体 r 维闭链构成的群 $Z_r(K,G)$，包含有同态 ∂_{r+1} 的象，也即 r 维边缘全体所构成的子群 $B_r(K,G)$ $Z_r(K,G)$ 关于 $B_r(K,G)$ 的商群 $H_r(K,G)$ 就称为 K 在 G 上的 r 维同调群 由于可以证明 P 的所有三角剖分给出同构的以 G 为系数的 r 维同调群，它们可以取作多面体 P 关于系数 G 的 r 维同调群（r-dimensional homology group）$H_r(P,G)$ 按万有系数定理，关于任意系数群 G 的同调 $H_r(P,G)$ 可由整数加群 $\mathbf{Z}$ 上的同调群 $H_s(P,\mathbf{Z})$ 决定．不仅如此，若多面体为有限，则整系数同调群为有限生成的交换群，从而有数值不变量的一个完全系——**Betti 数**（Betti number）与挠系数，即群 $H_r(P,\mathbf{Z})$ 的秩与挠系数．

参考文献

[1] Александров, П С, Комбинаторная топологии, М-Л, 1947

[2] Понтрягин, Л С, Основы комбинаторной топологии, 2 изд, М, 1976

[3] Seifert, H and Threlfall, W, A textbook of topology, Acad Press, 1980（译自德文）（中译本 江泽涵译，拓扑学，商务印书馆，1948）

[4] Hilton, P J and Wylie, S, Homology theory, An introduction to algebraic topology, Cambridge Univ Press, 1960

Г С Чогошвили 撰

【补注】

参考文献

[A1] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966

孙以丰 译

同调积 [homology product, гомологические умножения]

在群 Tor 与 Ext 上定义的一种运算. 考虑一个交换环 K 上的 K 代数 R, S 与 $T=R\otimes_K S$. 在这些代数上的**导出函子** (derived functor) Tor 与 Ext 彼此可以由四个同态,称为同调积 (homology product), 来并合

$$\perp\ \mathrm{Tor}_p^R(A,A')\otimes\mathrm{Tor}_q^S(C,C')\to\mathrm{Tor}_{p+q}^T(A\otimes C,A'\otimes C'),$$

$$\perp\quad \mathrm{Ext}_T^{p+q}(A\otimes C,\ \mathrm{Hom}(A',C'))\to$$

$$\to \mathrm{Hom}(\mathrm{Tor}_p^R(A',A),\mathrm{Ext}_S^q(C,C')),$$

$$\vee.\ \mathrm{Ext}_R^p(A,A')\otimes\mathrm{Ext}_S^q(C,C')\to\mathrm{Ext}_T^{p+q}(A\otimes C,A'\otimes C'),$$

$$\wedge\quad \mathrm{Tor}_{p+q}^T(\mathrm{Hom}(A,C),A'\otimes C')\to$$

$$\to \mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}_R^p(A,A'),\mathrm{Tor}_q^S(C,C'))$$

这里, A 与 A' 是右或左 R 模, C 与 C' 是右或左 S 模, 而在所有的函子中, 符号 K 都被省掉. 后两个同态只有在 R 与 S 这两个代数都是 K 上投射的, 且当 $n>0$ 时 $\mathrm{Tor}_n^K(A,C)=0$ 才有定义. 如果再加上某些附加的条件, 还可以得到一些实质的积来在同一个环上连结 Tor 与 Ext.

所有的四个积都可以从表示函子 × 与 Hom 的公式来得到, 只要将变量换成相应的分解式 ([1]). 乘法∨可允许用米田积 (Yoneda products)的术语来作出下列解释. 设

$$0\to A'\to X_1\to\cdots\to X_p\to A\to 0,$$
$$0\to C'\to Y_1\to\cdots\to Y_q\to C\to 0$$

相应为 R 与 S 模的正合序列, 它们是 $\mathrm{Ext}_R^p(A,A')$ 与 $\mathrm{Ext}_S^q(C,C')$ 中所对应的等价类的代表. 对前者, 从右边由 C' 取张量积, 对后者, 由 A 从左取张量积, 得正合序列

$$0\to A'\otimes C'\to X_1\otimes C'\to\cdots\to X_p\otimes C'\to A\otimes C'\to 0,$$
$$0\to A\otimes C'\to A\otimes Y_1\to\cdots\to A\otimes Y_q\to A\otimes C\to 0,$$

它们可以合并成下列的正合序列

$$0\to A'\otimes C'\to X_1\otimes C'\to\cdots\to A\otimes Y_q\to A\otimes C\to 0$$

这个序列可以看成群

$$\mathrm{Exp}_{R\otimes S}^{p+q}(A\otimes C,\ A'\otimes C')$$

中的一个等价类的代表.

一个拓扑空间 X 的一个以整数环 $\mathbf{Z}$ 为系数的上同调空间 $H(X,\mathbf{Z})$ 中, 积∨被称为 Колмогоров-Alexander 积, 或积∪积.

参考文献

[1] Cartan, H. and Eilenberg, S., Homological Algebra, Princeton Univ. Press, 1956
[2] MacLane, S., Homology, Springer, 1963

В. Е. Говоров 撰 周伯埙 译

同调序列 [homology sequence, гомологическая последовательность]

一个两端伸向无穷的**正合序列** (exact sequence), 由联成短正合序列的三个复形的同调群组成. 设 $0\to K.\to L.\to M.\to 0$ 为某一 Abel 范畴中的链复形正合序列, 则有对一切 n 有定义的态射

$$\partial_n: H_n(M.)\to H_{n-1}(K.)$$

称它们为联接态射 (conneting morphism) (或边缘态射 (boundary morphism)). 它们在模的范畴中的定义颇为简单. 对于 $h\in H_n(M.)$, 选取一个反象 $x\in L_n$, 则 dx 为某个元素 $z\in Z_{n-1}(K.)$ 的象, 它的同调类即 $\partial_n(h)$. 利用联接同态构作出的同调群序列

$$\cdots\xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(K.)\to H_n(L.)\to H_n(M.)\xrightarrow{\partial_n}$$
$$\xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(K.)\to\cdots$$

是正合的, 称为同调序列 (homology sequence). 于是, 同调群在复形的范畴上构成一个**同调函子** (homology functor).

上同调序列 (cohomology sequences) 可对偶地定义.

参考文献

[1] Cartan, H. and Eilenberg, S., Homological algebra, Princeton Univ. Presss, 1956

В. И. Данилов 撰 孙以丰 译

同调论 [homology theory, гомологии теория], 拓扑空间的

代数拓扑学的一部分, 它体现了拓扑概念与代数概念之间的一种联系. 通过对每个空间对应以一序列群, 对空间之间的每一连续映射对应以它们相应的群之间的同态, 同调理论利用群以及群之间的同态来阐明空间与映射的性质. 这类性质包括, 例如, 各种维数之间的关系是以切除概念为基础来进行研究的, 这里不同于代数拓扑学的另一部分——同伦论, 同伦论里是用形变概念进行此种研究的. 同调论是 19 世纪末为 H. Poincaré 引进的 (见**多面体的同调** (homology of a polyhedron)), 但是, 同调论的公理化构造

(包括同调概念有效界限的确定，这在相当长一段时期是不清楚的)首先是 S. Eilenberg 与 N. Steenrod ([3]) 建立起来的 (见**代数拓扑学** (algebraic topology), **同调群** (homology group), **Steenrod-Eilenberg 公理** (Steenrod-Eilenberg axioms))

根据这种构作方式，一个同调论 (H, ∂) 包含三个函数 1) 拓扑空间对 (X, A), $A \subset X$ 的 r 维相对同调群 $H_r(X, A)$，它对于每个空间对 (X, A) 与每个整数 r 指定了一个交换群 $H_r(X, A)$, 2) 对于每个连续映射 $f\ (X, A) \to (Y, B)$ 与整数 r 指定了一个同态

$$H_r(f) = f_*\ \ H_r(X, A) \to H_r(Y, B),$$

称为 f 诱导的同态，3) 对于每个空间对 (X, A) 与整数 r 指定了一个边缘算子 ∂，为一同态 $\partial\ \ H_r(X, A) \to H_{r-1}(A)$ ($H_{r-1}(A)$ 是空间 A 的绝对同调群 (absolute homology group)，它是空间对 (A, ϕ) 对应的群). 这些函数需满足下列的公理

1 若 f 是恒等映射，则 f_* 是恒等同态

2 $(gf)_* = g_* f_*$

3 $\partial f_* = (f|_A)_* \partial$

4 正合公理 (exactness axiom) 若

$$i\ \ A \to X,\ j\ \ X \to (X, A)$$

为自然含入映射，则序列

$$\to H_r(A) \xrightarrow{i_*} H_r(X) \xrightarrow{j_*} H_r(X, A) \xrightarrow{\partial}$$
$$\xrightarrow{\partial} H_{r-1}(A) \to \quad ,$$

即所谓空间对 (X, A) 的同调序列 (homology sequence) 是正合的，即每个映入同态的象等于每个映出同态的核.

5 同伦公理 (homotopy axiom). 若映射

$$f, g\ \ (X, A) \to (Y, B)$$

同伦，则 $f_* = g_*$

6 切除公理 (excision axiom) 设 U 是空间 X 的开集，且 U 的闭包包含在子空间 A 的内部，则含入映射

$$e\ \ (X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$$

诱导的同态 e_* 为同构

7 维数公理 (dimension axiom) 若 X 为单独一个点构成的空间，则 $H_r(X) = 0$ 对所有 $r \neq 0$ 成立；

H_r 的定义域可以取空间对的任意范畴来代替所有空间对的**范畴** (category)，例如，所有紧致空间对的范畴，或所有多面体与它们的子多面体所构成的多面体对的范畴，等等. 但所取的范畴如若含有 (X, A)，则也必须含有空间对 (ϕ, ϕ), $(X, \phi) = X$, $(A, \phi) = A$, (A, A), (X, X)，柱形 $(X, A) \times I$，其中 $I = [0, 1]$，以及某单点空间 P_0、等等，还应包罗它们的一切可能的含入映射 这种范畴还必须包含所有在公理与定理中出现的空间对 另一方面，H_r 的取值范围也可能用其他的范畴代替交换群的范畴，例如，拓扑群，特别是紧致群及连续同态的范畴，或某个环上的模及线性同态的范畴.

公理 1 与 2 表明 H_r 为从某种空间对的范畴到群的范畴的协变函子. 公理 3 表明边缘算子 ∂ 是从函子 $H_r(X, —)$ 到函子 $H_{r-1}(—)$ 的自然变换 联系各个维数 r 的公理 4 有时为下列较弱的要求所代替：序列仅是偏正合的，即象包含在核内 (见**正合序列** (exact sequence))，偏正合同调论 (partially exact homology theory) 的一个重要的例子是 Alexandrov-Čech 同调论. 公理 5 可以写成等价的形式 若映射

$$f_0, f_1\ \ (X, A) \to (X, A) \times I$$

定义作 $f_0(x) = (x, 0)$, $f_1(x) = (x, 1)$，则 $f_{0*} = f_{1*}$ 要求在切除之下的不变性并且有多种不同陈述方式的公理 6，突出了同调论不同于同伦论的性质. 赋予维数 r 以几何意义的公理 7 在近代研究中常被略去. 这样就得到所谓广义同调论 (generalized homology theories)，一个重要的例子是**下配边** (bordism) 理论

对于一个同调论存在有与之对偶的上同调论 (cohomology theory) (见拓扑中的**对偶性** (duality)). 它是由相对 r 维上同调群 $H^r(X, A)$，诱导同态

$$H^r(f) = f^*\ \ H^r(Y, B) \to H^r(X, A)$$

以及上边缘算子

$$\delta \cdot H^r(A) \to H^{r+1}(X, A)$$

共同给出的. $H^r(X, A)$ 是从空间对的范畴到交换群的范畴的逆变函子 公理的陈述与同调的情形类似，只不过将同态的箭头逆转而已 例如，正合公理要求存在正合上同调序列 (cohomology sequence)

$$\to H^{r-1}(A) \xrightarrow{\delta} H^r(X, A) \xrightarrow{j^*} H^r(X) \xrightarrow{i^*}$$
$$\xrightarrow{i^*} H^r(A) \to \cdot$$

同样有广义上同调理论，其重要的例子有 ***K* 理论** (*K*-theory) 与**配边** (cobordism) 理论. 下列有关同调论的事实在上同调论里也有类似的结果.

一个同调论或上同调论的系数群 (coefficient group) 是分别指群 $H_0(P_0)$ 或 $H^0(P_0)$ 所谓约化群 (reduced groups) $\widetilde{H}_r(X, A)$ 常常为了方便而用来替代 $H_r(X, A)$ 约化零维同调群 $\widetilde{H}_0(X)$ 是映射 $l\ \ X \to P_0$ 所诱

导同态

$$l_{*}\quad H_0(X)\to H_0(P_0)$$

的核，而约化零维上同调群 $\widetilde{H}^0(X)$ 则是 $H^0(X)$ 关于象 $l^*(H^0(P_0))$ 的商群，其他维数的约化群则与未约化的一样 $\widetilde{H}_r(X)=H_r(X)$，$r\neq 0$ 但 $H_0(X)\sim\widetilde{H}_0(X)\oplus G$ 若 $A\neq\emptyset$，则 $\widetilde{H}_r(X, A)=H_r(X, A)$ 对一切 r 成立．将通常群换作约化群可将同调序列换成约化同调序列 (reduced homology sequence)

同调论的公理并不是互相独立的．例如，公理 1 是公理 2，3，4 的推论．这个公理系是相容的，可以从平凡理论 $H_r(X, A)=0$ 的例子看出，非平凡理论的例子包括 Александров-Čech 上同调论，**奇异同调** (singular homology)，等等．至于唯一性则有下面的结果．从一个同调论 $\{H, \partial\}$ 到另一个同调论 $\{H', \partial'\}$ 的同态 (homomorphism) 是指一系列同态

$$h(X, A; r)\quad H_r(X, A)\to H_r(X, A)$$

满足

$$H(f)\circ h(X, A, r)=h(Y, B, r)\circ H(f)$$

与

$$\partial'\circ h(X, A, r)=h(A; r-1)\circ\partial$$

若所有的 $h(X, A, r)$ 为同构，则同调论 $\{H, \partial\}$ 与同调论 $\{H', \partial'\}$ 称为同构的 (isomorphic) 在有限多面体上的同调论由它的系数群唯一确定 更精确地说，若 h_0 $G\to G'$ 是一个同态，其中 G 为 $\{H, \partial\}$ 的系数群，G' 为 $\{H', \partial'\}$ 的系数群，则对每个多面体对 (X, A) 存在唯一的同态

$$h(X, A, r)\quad H_r(X, A)\to H_r(X, A),$$

使得 $h(P_0, 0)=h_0$．若 h_0 为同构，则所有的 $h(X, A, r)$ 也是同构．由于可剖分空间对的负维数同调群为平凡，故对任何同调论 (H, ∂) 有 $H_r(X, A)=0$，当 $r<0$ 如果对同调论再附加适当条件，唯一性定理对更宽广一些的空间范畴仍能成立．

同调群是拓扑不变的，并且是同伦不变的：若 f 为同伦等价，则 f_* 为同构．若 X 为可缩空间——特别如胞腔，则 $H_r(X)=0$，$r\neq 0$，$H_0(X)\sim G$ 若 ι $A\subset X$ 为同伦等价，则 $H_r(X, A)=0$，且对任何 X 有 $H_r(X, X)=0$ 若 A 是 X 的收缩核，则 ι_* 为单同态，j_* 为满同态，算子 ∂ 为平凡，并且

$$H_r(X)\sim H_r(A)\oplus H_r(X, A).$$

若 X 可形变到 A 中，则 ι_* 为满同态，j_* 为平凡的，∂ 为单同态，并且

$$H_r(A)\sim H_r(X)\oplus H_{r+1}(X, A)$$

令 $S(X)$ 为 X 的**纬垂** (suspension)，则下列同构成立：

$$\widetilde{H}_r(X)\sim\widetilde{H}_{r+1}(S(X)),$$

由此可以计算球面 S^n 的同调群 $\widetilde{H}_r(S^n)=0$，当 $r\neq n$ 时，$\widetilde{H}_n(S^n)\sim G$，从而 $H_r(S^n)=0$，当 $n\neq r\neq 0$，$H_r(S^n)\sim G$，当 $n\neq r=0$ 或 $n=r\neq 0$ 时，$H_0(S^0)\sim G\oplus G$

在同调论中，三元组与三角组的同调序列担任重要角色．在空间的**三元组** (triple) (X, A, B) $(X\supset A\supset B)$ 的情形下，边缘算子 (boundary operator) $\partial'=k_*\partial$ 是定义作迭合同态 $\partial'=k_*\circ\partial$，这里 k' $A\to(A, B)$ 是含入映射 这样就得到三元组 (X, A, B) 的同调序列 (当 $B=\emptyset$ 时化为空间对 (X, A) 的同伦序列)

$$\to H_r(A, B)\xrightarrow{\iota_*}H_r(X, B)\xrightarrow{j_*}H_r(X, A)\xrightarrow{\partial'}$$
$$\xrightarrow{\partial'}H_{r-1}(A, B)\to\cdot,$$

这里 ι' $(A, B)\to(X, B)$，j' $(X, B)\to(X, A)$ 为含入映射．这个序列是正合的．若群 $H_r(X, A)$ 或 $H_r(X, B)$，或 $H_r(A, B)$ 对一切 r 分别为平凡的，则 ι_*，或 ∂'，或 j_* 分别为同构，反之亦然．若 X 为互不相交闭集 $X_i(i=1,\quad, n)$ 的并集，$A=A_1\cup\cup A_n$，其中 $A_i\subset X_i$，则 $H_r(X, A)$ 同构于各个 $H_r(X_i, A_i)$ $(i=1,\quad, n)$ 的直和．**三角组** (triad) (X, A, B) 是指一个空间 X 与它的子空间有序对 A, B 所谓正常三角组 (proper triads) 是指当含入映射

$$k\quad(A, A\cap B)\to(A\cup B, B),$$
$$l\quad(B, A\cap B)\to(A\cup B, A)$$

诱导同构，或有下列分解

$$H_r(A\cup B, A\cap B)\sim H_r(A, A\cap B)\oplus$$
$$\oplus H_r(B, A\cap B)$$

进而可定义边缘算子

$$\bar{\partial}\quad H_r(X, A\cup B)\to H_{r-1}(A, A\cap B)$$

为 $k_*^{-1}\circ m_*\circ\partial$，其中 m $A\cup B\subset(A\cup B, B)$ 为含入．这样就得到三角组的正合同调序列

$$\cdot\to H_r(A, A\cap B)\xrightarrow{p_*}H_r(X, B)\xrightarrow{q_*}H_r(X, A\cup B)\xrightarrow{\bar{\partial}}$$
$$\xrightarrow{\bar{\partial}}H_{r-1}(A, A\cap B)\to\quad,$$

其中 p $(A, A\cap B)\to(X, B)$，q $(X, B)\to(X, A\cup B)$ 为含入映射 (若 $B\subset A$，这个序列化为三元组 (X, A, B) 的同调序列)．

设 $X=A\cup B$，$A\cap B=C$，并设映射 h，h_1，h_2

$(X, C) \to (Y, D)$ 满足关系 $h_1|_A = h|_A$, $h_2|_B = h|_B$, $h_1(B) \subset D$, $h_2(A) \subset D$, 则下面的加法定理(addition theorems)成立

1 $h_* = h_{1*} + h_{2*}$.

2 若D为可缩并且若f, f_1, f_2 $X \to Y$分别由h, h_1与h_2定义，则对于约化群的诱导同态f_*, f_{1*}, f_{2*} $\widetilde{H}_r(X) \to \widetilde{H}_r(Y)$有等式$f_* = f_{1*} + f_{2*}$.

定义同态

$$s \quad H_r(C) \to H_r(A) \oplus H_r(B)$$

如$s(c) = (s_{1*}(c) - s_{2*}(c))$, $c \in H_r(C)$, 其中s_1 $C \to A$, s_2 $C \to B$为含入映射. 类似地定义

$$t \quad H_r(A) \oplus H_r(B) \to H_r(X)$$

如$t(a, b) = t_{1*}(a) + t_{2*}(b)$, $(a, b) \in H_r(A) \oplus H_r(B)$, 其中$t_1$ $A \to X$, t_2 $B \to X$为含入映射

最后，定义

$$\Delta \quad H_r(X) \to H_r(C)$$

如$\Delta = \partial u_*^{-1} v_*$, 其中

$$v \quad X \to (X, B), \; u \quad (A, C) \to (X, B)$$

为含入映射　于是对合适的三角组有所谓Mayer-Vietors序列(Mayer-Vietoris sequence)

$$\to H_r(C) \xrightarrow{s} H_r(A) \oplus H_r(B) \xrightarrow{t}$$
$$\xrightarrow{t} H_r(X) \xrightarrow{\Delta} H_{r-1}(C) \to \quad ,$$

它是正合序列，将空间A与B的同调群与它们的交集与并集的同调群联系起来　于是，若$C \neq \emptyset$，可以过渡到约化群，从而可推出

1 若$A \cap B$可缩，则

$$\widetilde{H}_r(A \cup B) \sim \widetilde{H}_r(A) \oplus \widetilde{H}_r(B),$$

2 若$A \cup B$可缩，则

$$\widetilde{H}_r(A \cap B) \sim \widetilde{H}_r(A) \oplus \widetilde{H}_r(B),$$

3. 若A与B都可缩，则Δ给出同构

$$\widetilde{H}_r(A \cup B) \sim \widetilde{H}_{r-1}(A \cap B)$$

利用这些结果可以算出几种空间的同调群　例如，若X为亏格n的可定向曲面，则当$r=0$，2时，$H_r(X)$同构于系数群G，而当$r=1$时，同构于$2n$个G的直和G^{2n}，其余情形均为0　若X为亏格n的不可定向闭曲面，则当$r=0$时$H_r(X)$同构于G，当$r=1$时同构于$G^{n-1} \oplus G_2$，其中G_2是商群$G/2G$, $2G = \{2g. \; g \in G\}$，当$r=2$时同构于G的子群$T_2(G) = \{g \quad g \in G, 2g = 0\}$，其余情形均为0　因此，同调论可以给出闭曲面的拓扑分类　对于n维实射影空间P^n，$H_r(P^n)$同构于G，若$r=0$或$r=n$为奇数，同构于G_2，若r为奇数并且$0 < r < n$，同构于$T_2(G)$，若r为偶数且$0 < r \leqslant n$，其余情形均为0　$2n$维的复射影空间CP^n的同调群$H_r(CP^n)$同构于G，若r为偶数且$0 \leqslant r \leqslant 2n$，其余情形均为0　**透镜空间**(lens space) $L_{p,q}$的同调群$H_r(L_{p,q})$当$r=0$, 3时同构于G，当$r=1$时同构于$G_p = G/pG$，这里$pG = \{pg \quad g \in G\}$；当$r=2$时同构于$T_p(G)$，这里$T_p(G) = \{g \in G \quad pg = 0\}$，其余的情形为0

在上述结果的众多应用之中，可以选出下面一些基本的定理　首先是维数不变性　不同维数的球面，以及Euclid空间，都是不能互相同胚的，事实上，若两个多面体同胚，则它们有相同的维数　不仅如此，若f $X \to Y$为某已给连续映射g $A \to Y$, $A \subset X$的扩张，则等式$f_* \iota_* = g_*$可以给出各种关于映射的可扩张性与可收缩性的判断准则　例如，$n > 1$时，球面S^{n-1}的具有非0映射度的自映射不能扩张到以S^{n-1}为边境的n维球体E^n上去，对于一切自然数n, S^{n-1}不是E^n的收缩核　这又转而导出Brouwer不动点定理(Brouwer fixed-point theorem)　任何连续映射$E^n \to E^n$有一个不动点　最后，还可证明S^n上存在单位切向量场，当且仅当n为奇数，而三角组的理论可以产生关于映射度的一些定理，特别，可以给出代数学基本定理的一个新证明

参考文献

[1] Александров, П С , Комбинаторная топология М-Л , 1947

[2] Lefschetz, S , Algebraic topology, Amer Math Soc , 1942

[3] Eilenberg, S and Steenrod, N E , Foundations of algebraic topology, Princeton Univ Press, 1952

[4] Spanier, E H , Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966

[5] Hu, S -T , Homology theory, Holden-Day, 1966

[6] Hu, S -T , Cohomology theory, Markham, Chicago, 1968

[7] Dold, A , Lectures on algebraic topology, Springer, 1980

Г С Чогошвили 撰

【补注】 环A上的一序列模K_n, $n \geqslant 0$，以及同态∂_n. $K_n \to K_{n-1}$使$\partial_n \partial_{n+1} = 0$对一切$n \geqslant 0$成立，则通常称它们构成一个链复形(chain complex). 因此，对于偏正合同调论(H_n, ∂_n)，空间对的同调序列不一定是一个长正合序列(long exact sequence)，而是一个链复形，或简作复形. 对偶地有上链复形(K^n, ∂^n $K^n \to K^{n+1}$). 许多同调论与上同调论是通过链与上链复形而构造出来的: 首先对于一个空间对(X, A)对应以链复形($C_n(X, A)$, ∂_n)，然后令$H_n(X, A) = \mathrm{Ker}(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$，同理可构作上同调.

参考文献

[A1] Switzer, R M , Algebraic topology —— homotopy and homology, Springer, 1975

[A2] Spanier, E H , Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966

[A3] Lefschetz, S , Topology, Chelsea, reprint, 1966

[A4] Maunder, C R F , Algebraic topology v Nostrand Reinhold, 1970

[A5] Vaisman, I, Cohomology and differential forms, M Dekker, 1973

孙以丰 译

具有紧支集的同调[homology with compact support, гомологии с компактными носителями]

一个满足下列紧支集公理(axiom of compact support)的偏正合同调论(见**同调论**(homology theory))对于任意空间对(X, A)的r维同调群$H_r(X, A)$的每个元素h必存在紧空间对$(X', A')\subset(X, A)$使得h包含于同态

$$\mu\ \ H_r(X', A')\to H_r(X, A)$$

的象，这个同态是由含入映射诱导的．若同调论H是正合的并具有紧支集，则下面的定理成立 若$h\in H_r(X', A')$包含在μ的核，则存在紧空间对(X'', A'')满足

$$(X', A')\subset(X'', A'')\subset(X, A),$$

而且h包含在同态

$$H_r(X', A')\to H_r(X'', A'')$$

的核 正合同调论具有紧支集，当且仅当对于任何空间对，群$H_r(X, A)$为正向极限$\lim_{\rightarrow}\{H_r(X', A')\}$，其中$(X', A')$取遍$(X, A)$中所有的紧子空间对．具有紧支集的正合同调论在任意(非紧致)多面体对的范畴上关于给定的系数群是唯一确定的，并且等价于奇异同调论．对于一个一般的同调论，除了有群$H_r(X, A)$，还可考虑群

$$H_r^c(X, A)=\underset{\rightarrow}{\lim}\{H_r(X', A')\},$$

这里(X', A')为(X, A)的子空间对．具有紧支集的奇异同调论是同构于$H_r^c(X, A)$的．在谱论中除了考虑Александров-Čech同调群$H_r(X, A)$与群$H_r^c(X, A)$之外还考虑作为自然同态

$$H_r^c(X, A)\to H_r(X, A)$$

之象的群．一如群$H_r^c(X, A)$，这个群满足紧支集的公理，但在谱论中，这个群称为具有紧支集的同调论．在谱论中，这三个群互不相同，其中每一个均为某一对偶定理的对象，既关于离散系数群也关于紧系数群(见拓扑中的**对偶性**(duality))

参考文献

[1] Steenrod, N E and Eilenberg, S , Foundations of algebraic topology, Princeton Univ Press, 1966

[2] Александров, П С , 《Матем сб 》, **21** (1947), 161 – 232

[3] Spanier, E H , Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966

Г С Чогошвили 撰 孙以丰 译

同态[homomorphism, гомоморфизм]

代数系统(algebraic system)的范畴中的一个态射 它是代数系统A的一个保持基本运算和基本关系的映射 更准确地说，设$\mathbf{A}=\langle A, \{o_i\ \ i\in I\}, \{r_j\ \ j\in J\}\rangle$是一个具有基本运算$o_i, i\in I$和基本关系$r_j, j\in J$的代数系统．由$\mathbf{A}$到与之同型的一个代数系统$\mathbf{A}'=\langle A', \{o_i'\ \ i\in I\}, \{r_j'\ \ j\in J\}\rangle$的一个同态是满足下列两个条件的一个映射$\varphi\ \ A\to A'$ 对A的任意元素$a_1, a_2,$ 以及任意$i\in I, j\in J$,

$$\varphi(o_i(a_1, \ \ , a_{n_i}))=o_i'(\varphi(a_1), \ \ , \varphi(a_{n_i})), \qquad (1)$$

$$(a_1, \cdot\cdot, a_{m_j})\in r_j\Rightarrow(\varphi(a_1), \ \ , \varphi(a_{m_j}))\in r_j'. \qquad (2)$$

例如，如果G是一个群，并且N是它的一个正规子群，对每一个元素$g\in G$，令陪集Ng与之对应，那么就得群G到商群G/N上的一个同态φ．

假定I的每一个元素i对应于一个n_i元函数符号F_i，J的每一个元素j对应于一个m_j元谓词符号P_j，并且假定在每一个与$\mathbf{A}$同型的代数系统$\mathbf{A}'$中，第i个基本运算o_i'作用于A'的元素$x_1, \cdot, x_{n_i}$上的结果记作$F_i(x_1, \ \ , x_{n_i})$，而且$(x_1, \ \ , x_{m_j})\in r_j'$表示$P_j(x_1, \ \ , x_{m_j})$，那么条件(1)，(2)可以简化为

$$\varphi(F_i(a_1, \cdot\ , a_{n_i}))=F_i(\varphi(a_1), \ \ , \varphi(a_{n_i})),$$

$$P_j(a_1, \ \ , a_{m_j})\Rightarrow P_j(\varphi(a_1), \ \cdot, \varphi(a_{m_j}))$$

称一个同态$\varphi\ \ \mathbf{A}\to\mathbf{A}'$是强的(strong)，如果对于$A'$的任意元素$a_1', \ \ , a_{m_j}'$和任意谓词符号$P_j(j\in J)$来说，只要$P_j(a_1', \ \ , a_{m_j}')$成立，就存在$A$的元素$a_1, \ \ , a_{m_j}$使得$a_1'=\varphi(a_1), \ \ , a_{m_j}'=\varphi(a_{m_j})$并且$P_j(a_1, \cdot\ , a_{m_j})$成立．

对于代数，同态与强同态概念是一致的．对于模型来说，有的同态不是强同态，并且存在不是同构的一一同态(见**同构**(isomorphism))．

如果φ是代数系统$\mathbf{A}$到代数系统$\mathbf{A}'$的一个同态，并且θ是φ的**核合同**(kernel congruence)，那么由公式$\psi(a/\theta)=\varphi(a)$定义的映射$\psi\ \ (A/\theta)\to A'$是商系统$\mathbf{A}/\theta$到$\mathbf{A}'$内的一个同态 再者，如果$\varphi$是一个强同态，那么$\psi$是一个同构，这是同态定理的最概括的表示形式

之一．

应该注意的是，“同态”一词有时用于非代数系统范畴中的态射（图，层，Lie群的同态）

参考文献

[1] Мальцев, А И, Алгебраические системы, М, 1970（英译本 Mal'tsev, A I, Algebraic systems, Springer, 1973）

[2] Chang, C C and Keisler, H J, Model theory, North-Holland, 1973

Д М Смирнов 撰

【补注】 例如，两个群之间的一个同态（见**群**(group)）$\varphi\ G \to H$ 是与基本的群论乘法运算，求逆和单位元可交换的一个映射

$$\varphi(g_1 g_2)=\varphi(g_1)\varphi(g_2),\quad \varphi(g^{-1})=(\varphi(g))^{-1},\quad \varphi(e_G)=e_H$$

在这种特殊情况下，由这些条件的第一个条件可以推出其他两个条件，然而通常不能用这个方法简化定义．

卢景波 译

同方差性 [homoscedasticity，гомоскедастичность]

由条件方差等于常数定义的，一随机变量对另一随机变量的相关性（在相反情形下的相关性称为异方差性(heteroscedastic)） 例如，遵从二维正态分布的两个随机变量就有这个性质

О В Сарманов 撰 陶 波 译 李国英 校

位似变换 [homothety；гомотетия]，亦称透视相似变换

Euclid空间关于一确定点 O 的一个变换，它把每个点 M 依照如下规则一一地对应于直线 OM 上的点 M'

$$OM' = kOM,$$

其中 k 是一不等于零的常数，称为位似比（homothety ratio） 点 O 称为位似变换中心（centre of the homothety）．如果 $k>0$，那么点 M 和 M' 在同一射线上，如果 $k<0$，那么点 M 和 M' 在中心的两边 点 O 对应于自身．位似变换是**相似变换**（similarity）的特例．两个图形称为位似的（homothetic）（相似的或处于相似位置的），如果每一个图形是由另一个图形关于某个中心的位似变换所得的点组成的

位似变换的一些最简单性质 具有 $k\neq1$ 的一个位似变换是Euclid空间到其自身的具有一个不动点的一一映射 如果 $k=1$，那么该位似变换是恒等变换 一个位似变换把一个通过其中心的直线（平面）映射到自身，把一个不通过其中心的直线（平面）映射到平行于它的一条直线（平面），在这个变换之下，两个直线（平面）之间的角度保持不变．在一位似变换之下，线段被映射成其长度为原来长度 $|k|$ 倍的平行线段，即一个位似变换就是Euclid空间在点 O 的一个收缩（扩张） 在一位似变换之下，一个球映射为另一个球，且前者的球心映射为后者的球心．

一个位似变换（在几何上）通常由位似变换中心和一对对应点或由两对对应点来指定．(非恒等的）位似变换是具有一个（且仅有一个）不动点的**仿射变换**(affine transformation)

在 n 维Euclid空间中，一个位似变换保持所有 k 维子空间的集合不变，$k<n$

在伪Euclid空间中，一个位似变换由类似的方式来定义．Riemann空间和伪Riemann空间中的一个位似变换，定义为把空间的度量变换为其自身（除了一个常数因子）的一个变换 位似变换的集合形成一个Lie变换群，并且一个Riemann空间的 r 维参数位似变换群包含 $r-1$ 维参数正规位移子群．

И П Егоров 撰

【补注】 位似变换也称为中心膨胀（central dilatation) 亦见**膨胀**（dilatation))

参考文献

[A1] Berger, M, Geometry, Springer, 1987（中译本 M 贝尔热，几何，科学出版社，1987－1991)

[A2] Coxeter, H S M, Introduction to geometry, Wiley, 1961

[A3] Artin, E, Geometric algebra, Interscience, 1957

杨 路、侯晓荣 译 张景中 校

同伦平凡映射 [homotopically-trivial mapping，гомотопно тривиальное отображение]

见**非本质映射**（inessential mapping）．

同伦 [homotopy，гомотопия]，两个连续映射 $f, g\ X \to Y$ 的

把一个映射形变为另一个映射这个直观概念的形式化．更确切地说，两个映射 f 和 g 称为同伦的（homotopic），记为 $f\sim g$，如果存在一族连续映射 $f_t\ X\to Y$，连续依赖于参数 $t\in[0,1]$，使得 $f_0=f, f_1=g$（这里选取区间 $[0,1]$ 只是为了技术上的方便，显然也可以选取实轴上的任何其他的区间）．这个映射族（称为联结 f 和 g 的同伦（homotopy））是所有连续映射 $X\to Y$ 所成空间 $F(X, Y)$ 中的一条道路，把点 f 和点 g 联结起来 因此，映射同伦是“由连续道路联结”这个一般概念对映射空间的特殊化，特别是，同伦关系是一个等价关系，其等价类（同伦类）就是 $F(X, Y)$ 的道路连通区．为了使上述概念得到精确的含义，必须说明“映射 f_t 连续依赖于 t”这个说法的意义．最自然的办法是在 $F(X, Y)$ 中引进一个拓扑结构（或者至少是伪拓扑结构，亦见**拓扑结构**（topological structure）（**拓扑**（topology）） 不过，传统上是另一种办法 如果函数 $f_t(x)$ 关于变元整体连续，即公

式 $F(x, t) = f_t(x)$ 定义的映射 F $X \times [0, 1] \to Y$ 连续（这个映射实际上往往称为联结 f 和 g 的同伦），那么，按照定义，就认为 f_t 连续依赖于 t

上面所说的同伦关系有时称为自由(free)同伦，以区别于“相对”同伦或“约束”同伦 后者的产生是由于考虑连续映射 $X \to Y$ 的一个固定的类 $\mathfrak{A}$，并且要求对任何 $t \in [0, 1]$ 有 $f_t \in \mathfrak{A}$ 例如，给了子空间 $A \subset X$ 就可以考虑 A 上的相对同伦，其特点是在 A 上对所有的 t 有 $f_t = f_0$ 这时就说映射 $f = f_0$ 关于 A 相对同伦于映射 $g = f_1$，记为 $f \sim g \operatorname{rel} A$

在 X 与 Y 中选取子空间 $A \subset X$ 和 $B \subset Y$，并且只考虑满足条件 $f(A) \subset B$ 的映射 f $X \to Y$，这时就得到另一种“相对”同伦．这样的映射称为把空间偶 (X, A) 映入空间偶 (Y, B) 的映射（记为 f $(X, A) \to (Y, B)$)，而相应的同伦（即是对所有的 t 满足 $f_t(A) \subset B$ 的同伦）则称为空间偶映射同伦（homotopies of pair mappings）除了空间偶外，也可以考虑三空间组 (X, A, B)（加条件 $B \subset A \subset X$ 或不加）、四空间组等等 例如，可以考虑关于第三个子空间的空间偶映射同伦， 等等 也可以考虑本质上不同类型的“相对”同伦

建立两个已知映射 f, g $X \to Y$ 的同伦关系（“相对”与否不论）等价于把 $X \times 0 \cup X \times 1$（就关于 A 的相对同伦而言， 则是把 $X \times 0 \cup A \times [0, 1] \cup X \times 1$）映入 Y 的一个连续映射扩充到 $X \times [0, 1]$ 上 在这种意义下， 同伦问题是扩充问题的特殊情形 可是， 就广泛的一类个别情形（即就所谓的**上纤维化**（cofibration））表示而言，把子空间 $A \subset X$ 上所给的一个连续映射 $A \to Y$ 扩充到 X 的可能性只依赖于该映射的同伦类 同伦问题与扩充问题之间的这一紧密联系正是这两个问题在所谓同伦论（homotopy theory）这个总题目下一起讨论的原因 见**同伦型**（homotopy type）

M M Постников 撰

【补注】“自由同伦”这一术语的用法在西方稍有不同：常用于带基点的空间(pointed space)，即二元组 $\langle X, x_0 \rangle$，其中 X 是一个空间，x_0 是 X 中的一点 于是，这里的“自由同伦”是任意映射之间的同伦，而通常的同伦则考虑映射 $f: \langle X, x_0 \rangle \to \langle Y, y_0 \rangle$，满足 $f(x_0) = y_0$，同伦中的映射也满足这个条件

参考文献

[A1] Whitehead, G W, Elements of homotopy theory, Springer, 1978

胡师度、白苏华 译

同伦群 [homotopy group, гомотопическая группа]

基本群（fundamental group）的一种推广，W Hurewicz（[1]）讨论连续映射的分类问题时提出．同伦群对任何 $n \geq 1$ 有定义 当 $n = 1$ 时即为基本群．同伦群的定义不是构造式的，以致于它们的计算就相当困难，直到 20 世纪 50 年代才发展了一些一般的方法．它们的重要性在于这样的事实，即同伦论中所有的问题或多或少地总可以化归某些同伦群的计算（见**同伦型**（homotopy type））

设

$$I^n = \{(t_1, \cdots, t_n) \quad 0 \leq t_1 \leq 1, \cdots, 0 \leq t_n \leq 1\}$$

是 n 维单位方体，设 I^{n-1} 为 I^n 的面 $t_n = 0$，设 J^{n-1} 为其余各面的并集 对于任何取定基点的空间对 (X, A, x_0)（见**带基点的对象**（pointed object）)，记号 $\pi_n(X, A, x_0)$（或简记 $\pi_n(X, A)$）表示所有的映射

$$u \quad (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$$

的同伦类所构成的带基点集合（见**同伦**（homotopy））这个集合的基点（零元素）就是将整个 I^n 映为 x_0 的常值映射所代表的同伦类．任何连续映射

$$f \quad (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$$

诱导了带基点集合之间的一个**态射**（morphism）

$$f_* \quad \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_n(Y, B, y_0)$$

对于任何 $n \geq 1$，集合 $\pi_n(X, A, x_0)$ 与态射 f_* 构成一个**函子**（functor）π_n 从带基点的空间对的**范畴**（category）到带基点的集合的范畴．这个函子是同伦不变的（homotopy invariant)，即若 f 与 g 同伦（作为带基点空间对的映射），则 $f_* = g_*$ 不仅如此，π_n 还是按下述意义正规化的（normalized)，即若 $X = A = x_0$，则 $\pi_n(X, A, x_0) = 0$

当 $n \geq 2$ 时，可以在集合 $\pi_n(X, A, x_0)$ 上引进一个加法运算，使它成为一个群（当 $n \geq 3$ 时甚至成为交换群）．定义是，若 $x = [u]$, $y = [v]$ 而 $x + y = [w]$，则 w 是映射

$$(I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$$

由下式给出

$$w(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} u(2t_1, t_2, \cdots, t_n), & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}, \\ v(2t_1 - 1, t_2, \cdots, t_n), & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} \tag{1}$$

所得的群 $\pi_n(X, A, x_0)$ 称为带基点空间对 (X, A, x_0) 的第 n 个同伦群（或 n 维同伦群），也说成是空间对 (X, A) 在 x_0 的同伦群或空间 X 关于子空间 A 在 x_0 的同伦群．映射 f_* 为这些群之间的同态．因此，当 $n \geq 2$ 时可假定函子 π_n 取值于群的范畴（若 $n > 2$ 则可取作交换群的范畴）

若 $A=x_0$，则群 $\pi_n(X, A, x_0)$ 记作 $\pi_n(X, x_0)$，或简记作 $\pi_n(X)$，称为带基点的空间（pointed space）(X, x_0) 的绝对同伦群（absolute homotopy group）（或空间 X 在 x_0 的绝对同伦群） 它的元素为映射 $(I^n, \dot{I}^n)\to(X, x_0)$ 的同伦类，其中 $\dot{I}^n=I^{n-1}\cup J^{n-1}$ 是立方体 I^n 的边界．对这样的映射，式(1)在 $n=1$ 的情形仍有意义，从而 $\pi_n(X, x_0)$ 为群．这个群与经典的基本群一致．$\pi_n(X, x_0)$ 中的群运算通常称为乘法（multiplication） 一般而言，这个群不是交换群，而群 $\pi_2(X, x_0)$ 为交换群．对于任何 $n\geqslant 1$，群 $\pi_n(X, x_0)$ 与相应的同态构成一个函子从带基点空间的范畴到群的范畴(若 $n>1$ 则是到交换群的范畴) 这个函子是嵌入函子 l $(X, x_0)\to(X, x_0, x_0)$ 与前述函子 π_n 的迭合，即 $\pi_n\circ l$

函子 $\pi_n\circ l$ 的定义范围扩大到 $n=0$ 的情形，这时 $\pi_0(X, x_0)$ 为 X 的道路连通分支（见**道路连通空间**（path-connected space））全体所构成的带基点集合，这个集合的零元素为含有 x_0 的连通分支 集合 $\pi_0(X, A, x_0)$ 当 $A\neq x_0$ 时没有定义．为了使陈述简便，集合 $\pi_0(X, x_0)$ 与 $\pi_1(X, A, x_0)$ 一般虽不是群也常常称作同伦群

对于每个元素 $x=[u]\in\pi_n(X, A, x_0)$，映射 $u|_{I^{n-1}}$ 代表一个映射 $(I^{n-1}, \dot{I}^{n-1})\to(A, x_0)$，从而定义了同伦群 $\pi_{n-1}(A, x_0)$ 的一个元素 这个元素只依赖于 x，记作 ∂x 这样得到映射 ∂ $\pi_n(X, A, x_0)\to\pi_{n-1}(X, x_0)$ 是带基点集合之间的态射（$n>1$ 时为群同态）称为边缘同态（boundary homomorphism）或边缘算子（boundary operator）．边缘同态与嵌入映射 ι $(A, x_0)\to(X, x_0)$，$\jmath$ $(X, x_0)\to(X, A, x_0)$ 所诱导的同态 ι_* 与 $\jmath_*$ 合起来可以写出一个由群与同态构成的，左方伸向无穷的序列．

$$\xrightarrow{\jmath_*}\pi_{n+1}(X, A, x_0)\xrightarrow{\partial}\pi_n(A, x_0)\xrightarrow{\iota_*}$$
$$\xrightarrow{\iota_*}\pi_n(X, x_0)\xrightarrow{\jmath_*}\pi_n(X, A, x_0)\xrightarrow{\partial}$$
$$\xrightarrow{\jmath_*}\pi_2(X, A, x_0)\xrightarrow{\partial}\pi_1(A, x_0)\xrightarrow{\iota_*}\pi_1(X, x_0)\xrightarrow{\jmath_*}$$
$$\xrightarrow{\jmath_*}\pi_1(X, A, x_0)\xrightarrow{\partial}\pi_0(A, x_0)\xrightarrow{\iota_*}\pi_0(X, x_0).$$

这是一个**正合序列**（exact sequence），称为空间对 (X, A, x_0) 的同伦正合序列，通常记作 $\pi(X, A, x_0)$ 若 $\pi_n(X, x)=0$ 对一切 $n\geqslant 0$，则同态 ∂ $\pi_n(X, A, x_0)\to\pi_{n-1}(A, x_0)$ 为同构（对所有的 n）

边缘同态 ∂ 是自然的，也就是说，它是从函子 π_n 到函子 $\pi_{n-1}\circ l$ 的态射(更确切地说是到函子 $\pi_{n-1}\circ l'$ 的态射，这里 l' $(X, A, x_0)\to(A, x_0, x_0)$) 这就可以定义 $\pi(X, A, x_0)$ 作为一个函子取值于由带基点集合所构成正合序列的范畴，这些带基点集合除开最后六个之外均为交换群，除开最后三个以外均为群．

设 p $E\to B$ 为任意一个在 Serre 意义下的**纤维化**（fibration），设 $A\subset B$，$E'=p^{-1}(A)$，$e_0\in E'$，并且 $b_0=p(e_0)$ 映射 p 诱导了带基点空间对的映射 p' $(E, E', e_0)\to(B, A, b_0)$ 对于一切 $n\geqslant 1$，诱导同态 p_* $\pi_n(E, E', e_0)\to\pi_n(B, A, b_0)$ 为同构．特别，对于 $A=b_0$ 的情形成立．这时，公式 $\tau=\partial\circ(p_*)^{-1}$ 一义地定义了一个同态 τ $\pi_n(B, b_0)\to\pi_{n-1}(F, e_0)$，这里 $F=p^{-1}(b_0)$ 为 p 在 b_0 上的纤维．这个同态称为同伦超渡（homotopy transgression） 它出现在正合序列

$$\to\pi_n(F, e_0)\xrightarrow{\iota_*}\pi_n(E, e_0)\xrightarrow{p_*}\pi_n(B, b_0)\xrightarrow{\tau}$$
$$\xrightarrow{\tau}\pi_{n-1}(F, e_0)\to$$

这个序列称为纤维化 p $E\to B$ 的同伦序列（homotopy sequence） 令每个纤维化对应于它的同伦序列就得到所有（带基点）纤维化的范畴上的一个函子

一个特殊情形是 p 为空间 X 的道路所构成的标准的 **Serre 纤维化**（Serre fibration），这时，对于任何 $n\geqslant 0$ 有同构 $\pi_n(\Omega X)\approx\pi_{n+1}(X)$，这里 ΩX 为 X 的**闭路空间**（loop space） 这个同构称为 Hurewicz 同构（Hurewicz isomorphism）

以上的性质事实上一义地确定了同伦群 $\pi_n(X, A, x_0)$，即可以作为描述这些群的公理（axioms） 设 π_1， ，π_n， 为任意一序列同伦不变的正规化函子，定义在带基点空间的范畴上，取值在带基点集合的范畴，并且满足下列的条件 对于任意在 Serre 意义下的纤维化 p $E\to B$，任意子集 $A\subset B$ 以及任意点 $e_0\in p^{-1}(A)$，诱导同态 $\pi_n(E, p^{-1}(A), e_0)\to\pi_n(B, A, p(e_0))$ 为同构

如果对任何 $n\geqslant 1$ 均定义了函子 π_n 到函子 $\pi_{n-1}\circ l'$(若 $n=1$，则到 $\pi_0(X, x_0)$) 的态射 ∂，使得只要 $\pi_n(X, x_0)=0$ 对所有 $n\geqslant 0$，则 ∂ 对于带基点空间对(X, A, x_0) 为同构，这时，上面说的序列称为一个同伦系统（homotopy system） 任何同伦系统必同构于上面所构造的同伦群所形成的同伦系统．不仅如此，若 $n\geqslant 3$，在带基点的集合 $\pi_n(X, A, x_0)$（以及 $\pi_2(X, x_0)$）上可唯一地引入群结构使得所有的态射 f_* 为同态（这个结构当然对应于由公式(1)所描述的结构） 另一方面，若 $A\neq x_0$，则集合 $\pi_2(X, A, x_0)$ 与 $\pi_1(X, x_0)$ 只具备逆运算 所有这些表明以上的性质一义地确定了同伦群(除开在非交换情形下乘法的次序)．

对于任何映射 u $(I^n, \dot{I}^n)\to(X, x_2)$ 以及联结两点 x_1 与 x_2 的道路 v $I\to X$，公式 $g_t(x)=v(1-t)$，$x\in\dot{I}^n$ 定义了 $u|_{\dot{I}^n}$ 的一个同伦 由同伦扩张定理（见**上纤维化**（cofibration）），这个同伦可以扩张为一个同伦 u_t $I^n\to X$，满足 $u_0=u$ 终结映射 u_1 将 $\dot{I}^n$ 映为 x_1，即代表一个映射 $(I^n, \dot{I}^n)\to(X, x_1)$ 相应的同

伦群中的元素只依赖于 u 的同伦类 $[u]\in\pi_n(X, x_2)$ 与 v 的同伦类 $\alpha=[v]$，用记号 $_\alpha x$ 来记它（若 $n=1$、则用记号 x^α） 族 $G_x=\pi_n(X, x)$ 从而定义了空间 X 上的一个局部族，即这个空间的基本广群．特别，对于任意一点 $x_0\in X$，$\pi_1(X, x_0)$ 作用于 $\pi_n(X, x_0)$ $n=1$ 时，这个作用就是内自同构 $x^\alpha=\alpha x\alpha^{-1}$，$n>1$ 时，这种作用使得群 $\pi_n(X, x_0)$ 成为 $\pi_1(X, x_0)$ 模 对于任何连续映射 f $(X, x_0)\to(Y, y_0)$，诱导同态 f_* $\pi_n(X, x_0)\to\pi_n(Y, y_0)$ 与基本群的作用相容（为模同态） $f_*(\alpha x)=f_*(\alpha)f_*(x)$

类似地，群 $G_x=\pi_n(X, A, x)$ $(x\in A)$ 构成子空间 A 上的一同伦群局部族 特别，群 $\pi_1(A, x_0)$ 作用于同伦群 $\pi_n(X, A, x_0)$，使得当 $n>2$ 时，群 $\pi_n(X, A, x_0)$ 为 $\pi_1(A, x_0)$ 模 群 $\pi_2(X, A, x_0)$ 构成一个所谓 $(\pi_1(A, x_0), \partial)$ **交叉模**（crossed modules），其中 ∂ $\pi_2(X, A, x_0)\to\pi_1(A, x_0)$ 为边缘同态．

群 $\pi_1(A, x_0)$ 不仅作用于群 $\pi_n(X, A, x_0)$，也作用于 $\pi_n(A, x_0)$，并且藉助于自然同态 $\pi_1(A, x_0)\to\pi_1(X, x_0)$，作用于 $\pi_n(X, x_0)$ 关于 $\pi_1(A, x_0)$ 的作用，正合序列 $\pi(X, A, x_0)$ 的所有同态均为与作用相容的同态，从而 $\pi_1(A, x_0)$ 可以看作作用于序列 $\pi(X, A, x_0)$ 的群．这也就是说，序列 $\pi(X, A, x)$ $(x\in A)$ 构成子空间 A 上的正合序列局部族．

若余集 $X\setminus A$ 可表示为 n 维开胞腔的无交并，则 $\pi_1(A, x_0)$ 模 $\pi_n(X, A, x_0)$ 为自由模（若 $n=2$，为自由交叉模），有一组自由生成元——一组基底，与 $X\setminus A$ 的开胞腔成一对一（但不必是自然的）对应（Whitehead 定理（Whitehead theorem））

映射 $(I^n, \dot{I}^n)\to(X, x_0)$ 一一对应于映射 $(S^n, s_0)\to(X, x_0)$，这里 S^n 为 n 维球面，s_0 是其上一点 因此，$\pi_n(X, x_0)$ 的元素可以看作映射 $(S^n, s_0)\to(X, x_0)$ 的同伦类．即使 $n=0$ 时这也成立．以上的等同与某个相对同胚 φ $(I^n, \dot{I}^n)\to(S^n, s_0)$ 的选取有关 通常是将 S^n 与同胚 φ 一次选定并固定下来．在 Hurewicz 原来的定义中（现在已不常用），S^n 并未固定，而 φ 只是同伦地决定．对 φ 的这样的给出，相当于给出 S^n 的一个定向．因此，按 Hurewicz 的处理，$\pi_n(X, x_0)$ 的元素是一个定向 n 维球面到 X 的保持基点的映射同伦类．不保持基点的映射 $S^n\to X$ 的同伦类集合一一对应于 $\pi_1(X, x_0)$ 作用于 $\pi_n(X, x_0)$ 的轨道所构成的集合（见**轨道**（orbit））．若 $\pi_1(X, x_0)=0$（或更一般些，若 $\pi_1(X, x_0)$ 在 $\pi_n(X, x_0)$ 上的作用为平凡），则 X 称为同伦 n 单式的（homotopically n-simple） 这时，$\pi_n(X, x_0)$ 与 x_0 的选择无关（从而使记号 $\pi_n(X)$ 完全合理） 这个群就自然地等同于集合 $[S^n, X]$，后者从而有了群结构 若一个空间对于所有的 n 为同伦 n 单式的，则称为 Abel 的（Abelian）

令 s_n 为球面 S^n 的一个定向类，令 $h([f])=f_*(s_n)$ $[f]\in\pi_n(X, x_0)$ 这样就定义了一个同态 h. $\pi_n(X, x_0)\to H_n(X)$，即所谓 Hurewicz 同态（Hurewicz homomorphism） 它的核包含所有形状如 $_\alpha x-x$ 的元素，$x\in\pi_n(X, x_0)$，$\alpha\in\pi_1(X, x_0)$（若 $n=1$，则为所有形状如 $x^\alpha x^{-1}=\alpha x\alpha^{-1}x^{-1}$ 的元素，即包含了 $\pi_1(X, x_0)$ 的换位子群 $[\pi_1, \pi_1]$） Poincaré 的一条经典定理断言 $n=1$ 时 h 的核等于换位子群 $[\pi_1, \pi_1]$，从而群 $H_1(X)$ 同构于基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 的交换化 作为 Poincaré 定理向 $n>1$ 情形的推广，Hurewicz 定理（Hurewicz theorem）断言，若当 $i<n$ 时，$\pi_i(X)=0$，则同态 h $\pi_n(X)\to H_n(X)$ 为同构（同态 h $\pi_{n+1}(X)\to H_{n+1}(X)$ 为满同态）

类似地，$\pi_n(X, A, x_0)$ 的元素可以看作（保持基点的）映射 $(E, S)\to(X, A)$ 的同伦类，这里 E 是一个（定向的）n 维球体，S 是 E 的边界．若空间对 (X, A) 为同伦 n 单式的（即 $\pi_1(A, x_0)$ 平凡地作用于 $\pi_n(X, A, x_0)$），则在定义中可以摒弃基点．公式

$$h([f])=f_*(e_n)$$

定义了 Hurewicz 同态

$$h.\ \pi_n(X, A, x_0)\to H_n(X, A),$$

其中 e_n 为空间对 (E, S) 的定向类，$[f]\in\pi_n(X, A, x_0)$ 若 $\pi_1(A, x_0)=0$ 并且当 $i<n$ 时 $\pi_n(X, A, x_0)=0$、这个同态为同构（对于相对群（relative group）的 Hurewicz 定理）

计算特定空间的同伦群已知有两种主要的方法．**夷灭空间**（killing space）法与同伦分解法（见**同伦型**（homotopy type），**Постников 系统**（Postnikov system）） 前一个方法是根据同构 $\pi_{n+1}(X)\approx H_{n+1}(X, n)$，这是从 Hurewicz 定理与夷灭空间 (X, n) 的定义导出的 这个同构将 $\pi_{n+1}(X)$ 的计算归结为计算同调群 $H_{n+1}(X, n)$ 的问题．空间 (X, n) 是 $(X, n-1)$ 上的纤维空间，以 $K(\pi_n(X), n-1)$ 为纤维，而空间 $K(\pi, n)$ 的同调群是知道的．因此，可以尝试用归纳手段求得夷灭空间的低维同调群．从底空间与纤维的同调来计算全空间同调的问题在一般情况下尚未完全解决（显然尚不存在一个普遍的令人满意的解答）．不过，从相应的 Serre 谱序列可以获得关于 (X, n) 空间同调群不少信息．在许多情形下，可以至少对某些 n 算出 $H_{n+1}(X, n)\approx\pi_{n+1}(X)$．基于 Serre 的交换群类理论及由此导出的 G_p 逼近使问题在技术性上得到实质性的简化．按这种理论，计算可完全对于上同调进行，并且仅对于系数群 $\mathbf{Z}/p$．这种技巧所依据的几何原理

首先为J F Adams 与D Sullivan 用拓扑空间在给定素数 p 的局部化的概念才清楚地加以阐明

第二个(也是归纳的)计算同伦群的方法是通过逐步构作空间 X 的同伦分解而进行的．假设这个分解的第 n 项为已知(例如，若 $X=S^n$，则 $X_n=K(\mathbf{Z}, n)$)下一项则是 X_n 上的一个纤维化以 $K(\pi_{n+1}, n+1)$ 为纤维，而且群 $H_{n+1}(X_{n+1})$ 必然同构于已知的群 $H_{n+1}(X)$ 这就(利用相应的谱序列)给出关于 $\pi_{n+1}(X)$ 的确定的信息，而且在许多情形下将它完全算出 例如，若 $X=S^n$，用这个方法对于 $k\leqslant 13$ 时可完全算出 $\pi_{n+k}(S^n)$ 这个方法的最新表述也是基于局部化的观念

同伦分解的方法曾扩张成为一种算法(见[4])，可以用于任何单连通有限CW复形，可以给出所有的同伦群 但是，实际用起来，这个算法过于复杂了

由于同伦论等价于单纯集合的同伦论，同伦群的定义可迁移到任何单纯集合上去 所得的“组合”定义(归功于D Kan)不难发展成为一种算法．不过这种算法实际用起来也是太复杂了．

从上述的任何一种方法不难推知，若单连通空间的同调群为有限生成的，则同伦群也是有限生成的．类似的结论对于非单连通空间(即同伦群作为 $\pi_1(X)$ 模是有限生成的)一般不真

设 S 为(约化)**纬垂**(suspension)函子，Ω 为环道函子．由于这两个函子是伴随的，对任何 X 恒同映射 $SX\to SX$ 确定了嵌入映射 $X\subset\Omega SX$ 由于 $\pi_n(\Omega SX)\approx\pi_{n+1}(SX)$，这个嵌入映射定义了一个同态

$$E\quad \pi_n(X)\to\pi_{n+1}(SX),$$

即所谓的纬垂同态(suspension homomorphism) 它实在就是按下述方式定义的同态 对于任何(带基点的)映射 $f\quad S^n\to X$ 对应以纬垂映射 $Sf\quad S^{n+1}\to SX$ 这个同态出现于一个正合序列中

$$\to\pi_n(X)\xrightarrow{E}\pi_{n+1}(SX)\xrightarrow{H}\pi_n(\Omega SX, X)\xrightarrow{\partial}$$

$$\xrightarrow{\iota}\pi_{n-1}(X)\to$$

这个序列称为空间 X 的纬垂序列(suspension sequence) 其中的同态 H 是经典的 **Hopf 不变量**(Hopf invariant)的一种推广．

若 X 为只有一个顶点的CW复形，空间 ΩSX 可替换以复形 X 的无穷约化积 X_σ．由此即推出若当 $i\leqslant m$ 时，$\pi_i(X)=0$，则 E 当 $n\leqslant 2m-1$ 时为同构，且当 $n=2m-1$ 时为满同态 这个定理通常称为Freudenthal 纬垂定理(suspension theorem)(H Freudenthal首先对于 $X=S^n$ 的情形发表了证明，然而这个定理更早些时候就为人所知)

Freudenthal 定理说明当 $k\leqslant 2n-1$ 时群 $\pi_{n+k}(S^n)$ 与 n 无关 它称为球面的第 k 个稳定同伦群(亦见**稳定同伦群**(stable homotopy group)) 类似的稳定现象出现于正交群的同伦群，**Thom 空间**(Thom space) MSO (n) 的同伦群以及许多其他情形 对这类现象作一般探讨的最方便途径是放在所谓(空间)谱理论(theory of spectra)中来进行．在这个理论中稳定同伦群就成为谱的同伦群．这种群的结构比起空间的同伦群来有实质性的简化，对它的研究(与计算)就是比较容易的事了 例如，计算这些群有一个特殊的工具 Adasms **谱序列**(spectral sequence)

同伦群曾经向各个方向推广 例如，有人尝试将球面换成另外的空间 这里可以举出环面同伦群，它是由将 **Whitehead** 积(Whitehead product)解释成换位元素而得到的 还证明过 映射 $X\to Y$ 同伦类全体可给以关于 Y 自然的群运算，当且仅当 X 为**上 H 空间**(co-H-space) 将 S^n 换成 **Moore 空间**(Moore space) $M(G, n)$ 即得到带系数的同伦群 这个带系数的同伦群定义并不太成功．一个更令人满意的定义(与Eckmann-Hilton 对偶原理相容)是将 Moore M 空间换成上 M 空间．但是这种群又不是对所有的 G 都有定义(例如对 G 为实数加法群的情形这种群就没有定义

在带基点空间对范畴以外其他范畴之上构作同伦群的问题也曾被仔细探讨过．首先应提到的是**三角组**(triads)同伦群(亦见[3])，它们对于研究同态 E 很有用．与探讨对偶性相关联，曾提出过非常一般的构作同伦群的方式 基于一种标准构造的概念(见[6])同伦群的构作被移植到任意范畴 在这里，前面提到过的单纯集合的同伦群起着重要作用．

参考文献

[1] Steenrod, N E, The topology of fibre bundles, Princeton Univ Press, 1951

[2] Болтянский, В Г, Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей, М, 1955

[3] Hu, S -T, Homotopy theory, Acad Press, 1959

[4] Brown, E H, Finite computability of Postnikov complexes *Ann of Math* (2), **65** (1957), 1 – 20

[5] Kan, D, A combinatorial definition of homotopy groups, *Ann of Math* (2), **67** (1958), 282 – 313

[6] Stallings, J, A finitely presented group whose 3-dimensional integral homology is not finitely generated, *Amer J Math*, **85** (1963), 541 – 543

[7A] Eckmann, B and Hilton, P, Groupes d'homotopie et dualité Groupes absolus, *C R Acad Sci*, **246** (1958), 2444-2447

[7B] Eckmann, B and Hilton, P, Groupes d'homotopie et dualité Suites exactes, *C R Acad Sci*, **246** (1958), 2555 – 2558

[7C] Eckmann, B and Hilton, P J, Groupes d'homo-

topie et dualité Coefficients, *C R Acad Sci*, **246** (1958), 2991 − 2993
[7D] Eckmann, B and Hilton, P J, Transgression homotopique et cohomologique, *C R Acad Sci*, **247** (1958), 620 − 623
[7E] Eckmann, B and Hilton, P J, Decomposition homologique d'une polyedre simplement connexe, *C R Acad Sci*, **248** (1959), 2054 − 2056
[8] Sullivan, D, Geometric topology, M I T, 1971

M M Постников 撰

【补注】 虽然 W Hurewicz([A1]) 第一个对高维同伦群作了详细讨论，但事实上早几年 E Čech([A2]) 就已经提出了定义. 基本群在高维同伦群的作用首先是 S Eilenberg ([A3]) 加以研究的 关于同伦群的一本很好的通用参考书是 [A4]

稳定同伦群构成一种广义同调理论，即满足 Eilenberg-Steenrod 公理中可能除了维数公理以外所有的公理. 这个理论实际上由球面谱 $(S^n)_n$ 给出，见**空间的谱** (spectrum of spaces) 相应的由这个谱给出的**广义上同调论** (generalized cohomology theories) 是一些上同伦群 (cohomotopy group)，详见比如 [A4] 与 [A11] 研究球面稳定同伦群的有力工具 (除了(经典的) Adams 谱序列) 包括 Adams-Новиков 谱序列 (Adams-Novikov spectral sequence)，所谓色谱谱序列 (chromatic spectral sequence) 以及复配边 (cobordism)，见 [A12]

参考文献

[A1A] Hurewicz, W, Beitrage zur Topologie der Deformationen Ⅰ − Ⅱ, *Proc Ned Akad Weten Ser A*, **38** (1935), 112 − 119, 521 − 528
[A1B] Hurewicz, W, Beitrage zur Topologie der Deformationen Ⅲ − Ⅳ, *Proc Ned Akad Weten Ser A*, **39** (1936), 117 − 126, 215 − 224
[A2] Čech, E, Hoherdimensionale Homotopiegruppen, in *Verh Intern Mathematikerkongress Zurich*, 1932, Orell Fussli, 1932, p 203
[A3] Eilenberg, S, On the relation between the fundamental group of a space and the higher homotopy groups, *Fund Math*, **32** (1939), 167 − 175
[A4] Whitehead, G W, Elements of homotopy theory, Springer, 1978
[A5] Gray, B, Homotopy theory, Acad Press, 1975
[A6] Hilton, P J, An introduction to homotopy theory, Cambridge Univ Press, 1953
[A7] Spanier, E H, Algebraic topology, McGraw-Hill, 1960
[A8] Sullivan, D, Genetics of homotopy theory and the Adams conjecture, *Ann of Math*, **100** (1974), 1 − 79
[A9] Quillen, D G, Homotopical algebra, Springer, 1967
[A10] Eckmann, B, Homotopie et dualité, in *Coll Topol Algébrique Louvain*, 1956, Masson, 1957, 41 − 53
[A11] Switzer, R M, Algebraic topology-homotopy and homology, Springer, 1975
[A12] Ravenel, D C, Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres, Acad Press, 1986

孙以丰 译

同伦型 [**homotopy type, гомотопический тип**]，亦称伦型

一类同伦等价的拓扑空间 两个映射 f $X \to Y$ 与 g $Y \to X$，如果满足 $f \circ g \sim 1_Y$ 与 $g \circ f \sim 1_X$，则称为互逆的同伦等价 (mutually-inverse homotopy equivalences) 如果仅仅第一个条件满足，则称 g 是一个同伦单态射 (homotopy monomorphism) 而 f 称为一个同伦满态射 (homotopy epimorphism) 一个映射为同伦等价 (homotopy equivalence)，当且仅当它既是同伦单态射又是同伦满态射 若存在同伦满态射 f $X \to Y$，则说 Y 支配 X 若存在同伦等价 f $X \to Y$，则称 X 与 Y 为同伦等价的 (homotopy equivalent)，或它们是具有相同的同伦型(或伦型)的空间.

伦型的问题就是去寻找使任意一对空间互相同伦等价的必要与充分条件 可以将这个问题方便地减弱一些. 映射 f $X \to Y$ 称为弱同伦等价 (weak homotopy equivalence) 假如它所诱导的各个维数的同伦群之间的同态均为同构 (见**同伦群** (homotopy group)) 相应地，两个空间 X 与 Y 称为弱同伦等价，假如存在一个弱同伦等价 $X \to Y$ 或一个弱同伦等价 $Y \to X$ 由于任何同伦等价为弱同伦等价，从而同伦等价的空间也是弱同伦等价的. 如果空间都是 CW 复形，则其逆亦真 (Whitehead 定理 (Whitehead theorem)，见 **CW 复形** (CW-complex)) 这个定理的依据是下列的事实 1) 映射 f $X \to Y$ 为同伦等价，当且仅当 X 是 f 的**映射柱** (mapping cylinder) M_f 的**形变收缩核** (deformation retract)，2) 一个映射 f $X \to Y$ 为弱同伦等价，当且仅当映射柱 M_f 的子空间 X 是同伦代表的 (见**代表子空间** (representative subspace) 以及 3) CW 复形的子复形为代表子空间，当且仅当该子复形为形变收缩核.

因此，在 CW 复形的范畴上，伦型的问题等价于弱伦型的问题. 另一方面，任何空间 X 弱同伦等价于它的奇异**单纯集** (simplicial set) $S(X)$ 的几何实现 由于这个缘故，不失去普遍性，弱同伦型的问题可以只对 CW 复形考虑

两个映射 $f, g \cdot X \to Y$ 称为 n 同伦的，假如对维数 $\leqslant n$ 的任何 CW 复形 K 以及任何映射 $\varphi . K \to X$，映射 $f \circ \varphi$ 同伦于 $g \circ \varphi$ 若 X 是 CW 复形，则此事成立，当且仅当 $f|_{X^n} \sim g|_{X^n}$ 关于关系 n 同伦为等价的空

间称为具有相同 n 伦型的空间．两个CW复形 K 与 L 称为具有相同 n 型的复形，记作 $K\sim{}_nL$，假如它们的 n 维骨架 K^n 与 L^n 具有相同的 $(n-1)$ 伦型．若 $K\sim{}_nL$，则对任何 $m\leqslant n$，$K\sim{}_mL$ 即使对于 $n=\infty$ 这也仍然成立，假如 ∞ 型理解为同伦型．换句话说，具有相同 n 型的概念是同伦不变的．n 型概念对于伦型问题的重要性在于 两个 n 维 CW 复形为同伦等价的，当且仅当它们有相同的 $(n+1)$ 型

设 X 为任意空间（为简单起见，设为道路连通的）. 单纯集 $S(X)$ 的单纯子集 $M(X)$ 称为极小的(minimal)假如它包含了所有映到一个固定的点 $x_0\in X$ 的奇异单形，并且对于任何一个所有各面均在 $M(X)$ 中的单形 $\sigma\in S(X)$ 存在 $M(X)$ 中同伦于 σ（相对于标准单形的边界）的唯一一个单形 极小子集存在，并且除开差一个同构，由 X 唯一确定 不仅如此，两个空间为弱同伦等价的，当且仅当它们的极小单纯集同构 于是，为了解决弱伦型的问题，所有剩下要作的事就是给出单纯集 $M(X)$ 一种满意的描述．

设 Δ_q 为 q 维**标准单形**（standard simplex），看作一个单纯剖分（关于它的标准三角剖分），令 $C^n(\Delta_q,\pi)$ 为它的关于交换群 π 的 n 维上链群（更精确地说，单纯集 $O(\Delta_q)$ 的正规化 n 维上链所构成的群，见**上链**（cochain）） 令 $E(\pi,n)$ 为单纯集，它的 q 维单形是 $C^n(\Delta_q,\pi)$ 中的上链，其面算子 ∂_i 与蜕化算子 s_i 为标准单纯映射 e_i $O(\Delta_{q-1})\to O(\Delta_q)$ 与 f_i $O(\Delta_{q+1})\to O(\Delta_q)$ 所诱导的上链变换（e_i 使第 i 个顶点"自由"，而 f_i 将第 i 个与第 $(i+1)$ 个顶点粘合）. 对应于上闭链的单形全体构成 $E(\pi,n)$ 的一个单纯子集 $K(\pi,n)$ 上边缘算子 δ $C^n(\Delta_q,\pi)\to C^{n+1}(\Delta_q,\pi)$ 定义了一个单纯映射 δ $E(\pi,n)\to K(\pi,n+1)$，它的核是 $K(\pi,n)$ 映射 δ 是一个（在 Kan 的意义下的）**纤维化**（fibration），纤维是 $K(\pi,n)$ 而且，单纯集 $K(\pi,n)$ 是单纯集范畴中的 $K(\pi,n)$ 型对象（关于在 Kan 意义之下的同伦群，见 **Eilenberg-MacLane 空间**（Eilenberg-MacLane space）），而单纯集 $E(\pi,n)$ 则同伦平凡（同伦等价于一个"点"）. 因此，纤维化 δ 是 $K(\pi,n+1)$ 型空间上道路 **Serre 纤维化**（Serre fibration）的单纯类似．

$n=1$ 时，$K(\pi,n)$ 对于任意（不一定交换）的群 π 均有意义 从而，所得到的单纯集 $K(\pi,1)$ 是群 π 的标准单纯**分解**（resolution）

设 π_1 为作用在加法群 π 的一个乘法算子群 设 N 为任意单纯集，a 为 N 的取值于 π_1 的上闭链 在 N 的以 π 为系数的上链群中，关于 a 而确定一个上边缘算子 δ_a 设 σ 为 N 的任意 q 维单形，并令 t_σ $O(\Delta_q)\to N$ 为 σ 的特征映射（见**单纯集**（simplicial set））这样就定义了 $O(\Delta_q)$ 的一个上闭链 $t_\sigma^*(a)$ 令关于这个上闭链而得到的上边缘算子记作 $\delta_{a\sigma}$ 设 k^{n+1} 为单纯集 N 上取值于 π 的任意一个关于 a 的 $(n+1)$ 维上闭链．若在单纯集 N 与 $E(\pi,n)$ 的直乘积中考虑那样一个子集 $P=P(N,k^{n+1})$，它是由满足 $t_\sigma^*(k^{n+1})=\delta_{a\sigma}u$ 的所有元素对 (σ,u) $(\sigma\in N,u\in E(\pi,n))$ 所组成的，则 P 为一单纯子集 公式 $p(\sigma,u)=\sigma$ 定义了一个满射 p $P\to N$，它（按 Kan 的定义）是一个纤维化．这个纤维化将记作 $p(N,k^{n+1})$ 若上闭链 a 为平凡，则这个纤维化等同于由上闭链 k^{n+1} 所给出单纯映射 $N\to K(\pi,n+1)$ 诱导出的纤维化 纤维化 p 在单纯集 N 的 n 维骨架 N^n 上有一个**截面**（section）$\sigma\to(\sigma,0)$，而 k^{n+1} 则是扩张这个截面到 N^{n+1} 上去的**阻碍**（obstruction） 将单形 σ 与 $(\sigma,0)$ 等同，则 $N^n\subset P^n$ 并且有 $N^{n-1}=P^{n-1}$

看下面的单纯集的纤维化序列

$$\to P_{n+1}\xrightarrow{p_n}P_n\to\quad\to P_2\xrightarrow{p_1}P_1\qquad(1)$$

开始项 P_1 是单纯集 $K(\pi_1,1)$，从乘法群 π_1 造出 按定义，P_1 的 1 维单形与 π_1 的元素一一对应．令每个 1 维单形取它在 π_1 中的对应元素得到 P_1 以 π_1 为系数的 1 维上闭链 a_1 归纳地在 P_n 中按 $a_n=p_{n-1}^*(a_{n-1})$ 而定义上闭链 a_n 序列（1）称为一个同伦预解系（homotopy resolvent）或 **Постников 系统**（Postnikov system）（原来命名为自然系统（natural system）），假如对任何 $n\geqslant1$ 单纯集 P_{n+1} 是形状如 $P(P_n,k_n^{n+2})$ 型的集合，其中 k_n^{n+2} 是 P_n 的一个 $(n+2)$ 维关于上闭链 a_n 的上闭链，其系数属于某个 π_1 群 π_{n+1}（纤维化 p_n 则是纤维化 $p(P_n,k_n^{n+2})$） 这样一个序列称为单纯集 M 的分解（resolution），假如对任何 $n\geqslant1$ 有单纯映射 q_n $M\to P_n$，限制在 M^n 上为同构，并且满足 $p_n\circ q_{n+1}=q_n$ 这个分解除开差一个同构而唯一地确定单纯集 M 另一方面这个分解本身又由群 $\pi_1,\pi_2,$ 与上闭链 $k_1^3,$ $,k_n^{n+2}$ 唯一确定 因此，由诸群 π_n 与诸上闭链 k_n^{n+2} 组成的对象 $\{\pi_n,k_n^{n+2}\}$ 也不妨称为一个分解（resolution）

并非所有的单纯集 M 都有分解．根据同伦分解理论中的一个基本定理，单纯集 M 有分解，当且仅当它同构于某拓扑空间的极小单纯集．这时，$\pi_n=\pi_n(X)$

极小集 $M=M(X)$ 的分解可以按下述的方式构作 设 σ 为 $M(X)$ 的任意 q 维单形 这个单形代表了一个映射 δ $\Delta_q\to X$，它将单形 Δ_q 的所有的顶点映到一点 x_0 因此，它在 Δ_q 的每个 1 维面上定义了 $\pi_1=\pi_1(X,x_0)$ 的一个元素 这样就在 Δ_q 上给出了一个取值于 π_1 的上闭链，即给出了 $p_1=K(\pi_1,1)$ 的一个 q 维单形，记作 $q_1(\sigma)$ 这样就得到一个（单纯）映射 q_1 $M\to P_1$ 这个映射限制在 M^1 上是同构，在 M^2 上是满态射．以后的步骤归

纳地进行．设单纯集 p_n 与单纯映射 q_n $M\to P_n$ 对于某个 $n\geqslant 1$ 已作出，并且它限制在 M^n 上为同构，在 M^{n+1} 上为满态射．映射 $q_n|_{M^{n+1}}$ 有一个右逆 q_n $P_n^{n+1}\to M^{n+1}$ 设 k_n^{n+2} 为将这个映射扩张到 M^{n+2} 的阻碍．阻碍 k_n^{n+2} 是 P_n 上关于 a_n 的一个 $(n+2)$ 维上闭链以群 $\pi_{n+1}=\pi_{n+1}(X)$ 为系数．对于 M 的任何 $(n+1)$ 维单形 τ，单形 $q_n' q_n(\tau)=\tau'$ 与 τ 相容，从而定义了差别元素 $d(\tau,\tau')\in\pi_{n+1}$（见**差异上链**（difference cochain)). 设 σ 为 M 的任意 q 维单形 在单形 Δ_q 的每个 $(n+1)$ 维面，它定义了一个 $(n+1)$ 维单形 τ 将 $d(\tau,\tau')$ 指定给这个面就在 Δ_q 上得到一个取系数于 π_{n+1} 的 $(n+1)$ 维上链，即得到单纯集 $E(\pi_{n+1}, n+1)$ 的某个 q 维单形 $r_n(\sigma)$ 元素对 $q_{n+1}(\sigma)=(q_n(\sigma), r_n(\sigma))$ 属于单纯集 $P_{n+1}=P(P_n, k_n^{n+2})$ 要完成归纳步骤还应注意所造出的映射 q_{n+1} $M\to P_{n+1}$ 在 M^{n+1} 上为同构，在 M^{n+2} 上为满态射

分解 $\{\pi_n, k_n^{n+2}\}$ 从单纯集 $M(X)$ 造出来并非唯一的：逆映射 q_n 在骨架上的选择有随意性．描述这种不唯一性的最简单办法就是考虑在(1)式意义之下的分解．事实上，两个这样的分解 $\{\overline{P}_n, \overline{p}_n\}$ 与 $\{P_n, p_n\}$ 是从同一个极小单纯集 $M(X)$ 得出的，当且仅当作为映射序列是同构的，即对任何 $n\geqslant 1$ 存在同构 θ_n $P_n\to \overline{P}_n$ 满足 $\theta_n\circ p_n=\overline{p}_n\circ\theta_{n+1}$ 为了要用分解 $\{\pi_n, k_n^{n+2}\}$ 与 $\{\overline{P}_n, \overline{k}_n^{n+2}\}$ 来描述这样的同构，应注意到存在一个同构 θ_1 $P_1\to\overline{P}_1$ 就等价于存在一个群同构 Θ_1 $\pi\to\overline{\pi}_1$ 这里 $\theta_1^*(\overline{a}_1)=\Theta_1(a_1)$ 更进一步，同构 θ_n $P_n\to\overline{P}_n$ 有后继同构 θ_{n+1} $P_{n+1}\to\overline{P}_{n+1}$，当且仅当存在 Θ_1 同构 Θ_{n+1} $\pi_{n+1}\to\overline{\pi}_{n+1}$（见**算子同态**（operator homomorphism））以及上链 $l^{n+1}\in C^{n+1}(P_n, \overline{\pi}_{n+1})$ 使得

$$\theta_n^*(\overline{k}_n^{n+2})-\Theta_{n+1}(k_n^{n+2})=\delta_{\theta_n^*(a_n)}l^{n+1}. \qquad (2)$$

这里同构 Θ_{n+1} 由下式定义

$$\Theta_{n+1}(\sigma, u)=(\sigma, u-t_\sigma^*(l^{n+1})) \qquad (2')$$

分解 $\{\pi_n, k_n^{n+2}\}$ 与 $\{\overline{\pi}_n, \overline{k}_n^{n+2}\}$ 来自同一个单纯集，当且仅当存在那样的同构 θ_n $\pi_n\to\overline{\pi}_n$，当 $n>1$ 时它是 θ_1 同构，使得对任何 $n\geqslant 1$ 关系 (2) 成立，其中 Θ_n 当 $n>1$ 时是后来由 (2′) 定义的同构，而当 $n=1$ 时为 θ_1 所诱导的同构．这时，称分解 $\{\pi_n, k_n^{n+2}\}$ 与 $\{\overline{\pi}_n, \overline{k}_n^{n+2}\}$ 是**同构的**（isomorphic） 单纯集 $M(X)$ 的分解称为空间 X 的**同伦分解**（homotopy resolution） 总之，两个空间为弱同伦等价的，当且仅当它们的同伦分解为同构的，特别，两个 CW 复形同伦等价，当且仅当它们的同伦分解同构．

若 (2) 仅对 $n<m$ 成立，则同构 θ_n 仅对 $n\leqslant m$ 存在 这时称两个分解是 m **同构的**（m-isomorphic）两个 CW 复形具有相同的 n 型，当且仅当它们的同伦分解是 $(n-1)$ 同构的．

以上对伦型问题（或 n 型问题）的解答使得人们可以证明一系列具有一般性的定理，实质性地澄清了这个课题的主要方面（但分解的具体计算仅对少数情形能进行）．由此推出，具有有限同调群的单连通空间，其同伦群可以有效地计算．类似的结论对于仅仅是具有有限生成同调群的空间也成立（[2]） 伦型完全由分解确定这一事实表明，同伦论中的任何问题可以化为关于相应空间的分解的某些论断．从而使得可以按上闭链 k_n^{n+2} 在解答中出现的个数来将问题分类．若涉及的空间是 $(n-1)$ 连通的，则它的分解实际上从 $P_n=K(\pi_n, n)$ 开始．若某个问题的解可以只用第一个非平凡同伦群 π_n 来陈述，这个问题就称为**零阶问题**（problem of order zero）（例如，Hopf-Whitney 关于 n 维多面体到 $(n-1)$ 连通空间连续映射的同伦分类问题）．如果用了群 π_n, π_{n+1} 以及上闭链 k_n^{n+2}，则问题称为**一阶问题**（problem of order one）（例如，$(n+1)$ 维多面体到 $(n-1)$ 连通空间的连续映射同伦分类问题） 类似地定义**二阶问题**（problem of order two），**三阶问题**（problem of order three），等等．零阶与一阶问题的有效解为已知 这与下列的事实有关，即对于任何 $(n-1)$ 连通空间，上闭链 k_n^{n+2} 的上同调类可以有效地算出，它具有形式 $Sq_\eta^2 l$，这里 l 是空间 $K(\pi_n, n)$ 的基本类，Sq_η^2 当 $n>2$ 时为 **Steenrod 运算**（Steenrod operation）（相应于自然**配对**（pairing）η $\pi_n\otimes\pi_n\to\pi_{n+1}$，当 $n=2$ 时则为一种变体，称为 **Понтрягин 平方**（Pontryagin square） 对于高阶问题，必须能够有效地算出随后的那些上闭链 $k_{n+1}^{n+3}, k_{n+2}^{n+4}$, 每个这种上闭链可从对基本类使用某些同阶次的**上同调运算**（cohomology operation）而得到．特别，这表明同伦论中任何问题的解可以用上同调运算来陈述．但是，由于高阶运算的极度复杂性，只有某些特殊的高阶问题，利用了特殊的考虑而得到解决．在稳定性的假设之下，取得了一些一般性的进展 在这个假设之下，Adams 谱序列的微分算子的足够远的计算等价于一些稳定的高阶运算的计算

同伦分解的理论可以重述为下列的"几何"形式．任意一序列在 Serre 意义下的纤维化

$$X_{n+1}\xrightarrow{p_n}X_n\to\quad\to X_2\xrightarrow{p_1}X_1, \qquad (3)$$

如果当 $m>n$ 时，每个空间 X_n 满足 $\pi_m(X_n)=0$，则称为一个**分解**（resolution） 这个序列称为空间 X 的**分解**（resolution），如果对每个 $n\geqslant 1$ 有映射 q_n $X\to X_n$，它在 n 维诱导了同伦群的同构，并且满足 $p_n\circ q_{n+1}=q_n$ 这种分解（除开差一个同构，见**序列范畴**（sequence category））由群 $\pi_n=\pi_n(X)$ 与纤维化 p_n 的示性类 k_n^{n+2}

唯一确定 对于任何道路连通空间 X(诸如"代数"分解(1)的几何实现)这种分解存在，并且除开差一个弱同伦等价唯一地确定该空间．纤维化 p_n $X_{n+1} \to X_n$ 的纤维是 $K(\pi_{n+1}, n+1)$ 型空间，并且若 X 为同伦 n 单式(见**同伦群**(homotopy group))，例如单连通，则这个纤维化可以由一个代表上同调类 k_n^{n+2} 的映射 $X_n \to K(\pi_{n+1}, n+2)$ 从空间 $K(\pi_{n+1}, n+2)$ 上的全体道路构成的 **Serre 纤维化**(Serre fibration)诱导出来(见 **Eilenberg-MacLane 空间**(Eilenberg-MacLane space)，**可表示函子**(representable functor))

若空间 X 为 $(n-1)$ 连通，则它的分解实际上始于 $X_n = K(\pi_n, n)$ 当 $n>1$ 时，除了"绝对"的分解(3)，还宜于考虑模一个素数 p 的分解，其定义与(3)的差别仅在于将同伦群换为它们的 p 分量．如果对 X 模任何素数的分解均已找到，则确定 X 的"绝对"分解就不困难了．因此，在计算分解的问题中(包括计算同伦群)，通常限制在计算"模"分解，这时，**谱序列**(spectral sequence)理论以及上同调运算等有力工具可以应用．对于某些空间，分解的计算已推进得相当远．

例如，对于球面 S^n(n 适当大使得稳定性条件得以满足)，其模 2 分解已算出相当多项．只需描述群 π_{n+2}(即群 $\pi_{n+r}(S^n)$ 的 2 分量)与上同调类 k_{n+r}^{n+r+2} 最初几个群 π_{n+r} 为

r	0	1	2	3	4	5	6	7
π_{n+r}	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_8$	0	0	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{16}$

类 k_n^{n+2} 具有形式 $Sq^2 l = H^{n+2}(\mathbf{Z}, n, \mathbf{Z}_2)$，其中 $l \in H^n(\mathbf{Z}, n, \mathbf{Z}_2)$ 为基本类 其次一个类 $k_{n+1}^{n+3} \in H^{n+3}(X_1, \mathbf{Z}_2)$ 在纤维化 p_n 的纤维 $K(\mathbf{Z}_2, n+1)$ 上截出类 $Sq^2 l_{n+1} \in H^{n+3}(\mathbf{Z}_2, n+1, \mathbf{Z}_2)$，而且它由这个性质唯一确定．类似地，类 $k_{n+2}^{n+4} \in H^{n+4}(X_2, \mathbf{Z}_2)$ 由这样的事实刻画，模 2 约化以后它变成类 $Sq^4 l \in H^{n+4}(X_2, \mathbf{Z}_2)$ 类 k_{n+3}^{n+5} 与 k_{n+4}^{n+6} 为 0，类 $k_{n+5}^{n+7} \in H^{n+7}(X_{n+5}, \mathbf{Z}_2)$ 唯一地被下列事实刻画，即它在纤维化 p_{n+2} 的纤维 $K(\mathbf{Z}_8, n+3)$ 上截出类 $Sq^4 l_{n+3} \in H^{n+7}(\mathbf{Z}_8, n+3, \mathbf{Z}_2)$ 最后，$k_{n+6}^{n+8} \in H^{n+8}(X_{n+6}, \mathbf{Z}_{16})$ 由下列事实刻画，即模 2 约化以后它变成类 $Sq^8 l \in H^{n+8}(X_{n+6}, \mathbf{Z}_2)$

参考文献

[1] Постников, М М, Исследования по гомотопической теории непрерывных отображений, ч 1 Алгебраическая теория систем ч 2 Натуральная система и гомотопический тип М, 1955

[2] Brown, E H, Finite computability of Postnikob complexes, *Ann of Math* (2), **65** (1957), 1 - 20

[3] Mosher, R E and Tangora, M C, Cohomology operations and their applications in homotopy theory, Harper & Row, 1968, Chapt 13

М М Постников 撰

【补注】 上面的条目集中阐述了有关同伦型的一个方面，即 Постников 塔(Postnikov towers)(或 Постников 分解(Postnikov decompositions))，给出了在 50 年代这方面取得进展的详情

按照[A4]，人们应该区分同伦论里的三个方向 纬垂理论，它将稳定现象与不稳定现象分开(见**纬垂**(suspension)，亦见**上同调运算**(cohomology operation)与**同伦群**(homotopy group))；具体的几何构造如 **Whitehead 积**(Whitehead product)以及夷灭同伦群(killing homotopy groups)法．将某个维数以上的同伦群全部夷灭就得到 Постников 塔 "对偶"的作法是每步将某一维数以下的同伦群全部夷灭．这样就得到 Whitehead 塔(Whitehead tower)

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \downarrow \\
K(\pi_n, n-1) & \to & X_n \\
 & & \downarrow \\
 & & X_{n-1} \\
 & & \downarrow \\
 & & \vdots \\
 & & \downarrow \\
K(\pi_1, O) & \to & X_1 \\
 & & \downarrow \\
 & & X
\end{array}
$$

其中 X_n 为 n 连通，即对所有的 $q \leqslant n$，$\pi_q(X_n) = 0$，纤维化 $X_n \to X_{n-1}$ 以 Eilenberg-MacLane 空间 $K(\pi_n, n-1)$ 为纤维(这里 $\pi_n = \pi_n(X)$)，并且当维数 $\geqslant n$ 时，X_n 与 X 的同伦群相同

与此相反，连通 CW 复形的 Постников 逼近(Postnikov approximation)(Постников 塔)是一序列纤维化

$$
\begin{array}{l}
Y_n \leftarrow K(\pi_n, n) \quad (X \xrightarrow{q_n} Y_n) \\
\downarrow p_{n-1} \\
\vdots \\
\downarrow p_2 \\
Y_2 \leftarrow K(\pi_2, 2) \quad (X \xrightarrow{q_2} Y_2) \\
\downarrow p_1 \\
X \xrightarrow{q_1} Y_1 = K(\pi_1, 1)
\end{array}
$$

其中 $Y_n \to Y_{n-1}$ 的纤维是 $K(\pi_n, n)$，$p_{n-1} \circ q_n = p_{n-1}$，并且 $X \to Y_r$ 诱导同伦群的同构，当维数 $\leqslant r-1$ 两个塔都可用来计算同伦群，见[A6]所举的一些例子．

与夷灭同伦群的想法密切相关的还有阻碍理论([A5])，亦见**阻碍**(obstruction)与 **Постников 系统**(Postnikov system)

除了上面指出的三个方向，现在还可添入**有理同伦型**（rational homotopy type）的理论，这是D Sullivan以"分片线性微分形式"为基础而发展起来的，见[A7]，[A8]，亦见[A6]

参考文献

[A1] Gray, B , Homotopy theory, Acad Press, 1975, 30, 157 − 167

[A2] Spanier, E H , Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966, 25, 437 − 444

[A3] Whitehead, G W , Elements of homotopy theory, Springer, 1978, 23, 415 − 455

[A4] Adams, J F , Algebraic topology a students guide, Cambridge Univ Press, 1972

[A5] Baues, H J , Obstruction theory, Springer, 1977

[A6] Bott, R and Tu, L W , Differential forms in algebraic topology, Springer, 1982

[A7] Griffiths, Ph A and Morgan, J W , Rational homotopy theory and differential forms, Birkhauser, 1981

[A8] Sullivan, D , Infinitesimal calculations in topology, *Publ Math IHES*, **47** (1977), 269 − 331

孙以丰 译

拓扑范畴的同伦型[**homotopy type of a topological category, гомотопический тип топ ологизированной категории**]

拓扑空间的一个投射系统，它与一个**拓扑化范畴**（topologized category）相关联，并可定义这个范畴的同伦群，取值在一个Abel群内的同调与上同调群等等

这里只考虑局部连通拓扑化范畴（locally connected topologized categories）(C, τ)，即，具有一个**Grothendieck拓扑**（Grothendieck topology）τ 的范畴 C，使其任何对象都能表示成不可分解的对象 X_i 的余积 $\bigcup_{i\in I} X_i$，这里 I 起着拓扑空间的连通分支集的作用．指标集 I 在一一映射的范围内是唯一决定的，表以 $\pi_0(X)$ 指定 $X \to \pi_0(X)$ 就定义了从 C 到集合的范畴的一个函子 在 (C, τ) 的拓扑中，对象 X 的一个任意的覆盖 $U \to X$ 定义 C 中的一个单纯对象 U，使

$$U_n = U_X \times \quad \times U_X (n \text{ 个因子}),$$

与单纯集 $\pi_0(U_*)$ 单纯集 $\pi_0(U_*)$ 的几何现实产生了拓扑空间 $|U| = |\pi_0(U_*)|$ 对于覆盖 U 的任何加细 $W \to X$（$W \to X$ 通过 $U \to X$ 来分解因式）存在唯一的（在同伦的范围内）连续映射 $|W| \to |U|$．于是，对象 X 就被映射到拓扑空间 $\{|U|\}_{U\in \mathrm{Cov}(X)}$ 的投射系统，这里 $\mathrm{Cov}(X)$ 是 X 的所有覆盖之族．

这个定义与Čech同调的定义是类似的，可是，已知，在一般情况，Čech上同调只对维数为0与1时给出"正确的"上同调 为此原因上面所描述的构造并不能认为是满意的 一种"超覆盖"的概念已被引进（[1]） 它推广了上面为着覆盖 $U \to X$ 所构造的单纯对象 U 一个超覆盖在有终对象 X 的拓扑范畴 (C, τ) 中仍是一个单纯对象 K，并满足下列的条件 $K_0 \to X$ 是 X 的一个覆盖，对任何 n，规范态射 $K_{n+1} \to (\mathrm{cosk}_n(K))_{n+1}$ 是一个覆盖，这里 cosk_n 是第 n 个上骨架的一个函子

对每一个超覆盖 K_* 指定拓扑空间 $|\pi_0(K_*)|$，这就引出由超覆盖所参数化的空间的一个投射系统．这也定义了有终对象 X 的拓扑化的范畴 (C, τ) 的同伦型（homotopy type）（更准确地，投射同伦型（pro-homotopy type）） 同伦，同调与上同调群都是由标准程序引进的

联系着一个概形的拓扑化范畴之同伦型使得决定一个概型的同伦型成为可能．最经常考虑到的情况是一个**概形**（scheme）X 上的**艾达尔拓扑**（étale topology）X_{et} 的情况．在此情况，X 的同伦型是单纯集合的范畴或有限CW复形的范畴中的一个投对象 可以在这样的对象上定义的同伦群 $\pi_i(X)$ 是投射有限群，称为概形 X 的第 i 个同伦群 X（[2]） 如果 X 是一个正规概形，那么 $\pi_1(X)$ 就与基本的Grothendieck群概形相重合（[3]） 点 $X = \mathrm{Spec}\, k$ 的同伦型重合于Eilenberg-MacLane空间 $K(G_i, 1)$ 的投射极限，这里的 k 是一个域，而 G_i 是 k 的一个有限Galois扩张 K_i 的Galois群 在复数域 C 上的代数簇的情况，有下列的比较定理（comparison theorem） 诸群 $\pi_i(X)$ 是与 X 相伴的复空间 X^{an} 之通常同伦群 $\pi_n(X^{an})$ 的投射有限完全化

参考文献

[1] Artin, M , The étale topology of schemes, in proc Internat Congress Mathematicians Moscow, 1966, Kraus, reprint, 1979, 44 − 56

[2] Theorie des toposes et cohomologie etale des schemas, in A Grothendieck, J L Verdier and E Artin (eds) Sem Geom Alg , Vol 1 − 3, Springer, 1972

[3] Artin, M and Mazur, R , Etale homotopy, Springer, 1969

[4] Sullivan, D , Geometric topology part I Localization, periodicity, and Galois symmetry, M I T , 1971

[5] Grothendieck, A (ed), Revetement étales et groupes fondamental, in SGA I, Lecture notes in math , Vol 224, Springer, 1971

В И Данилов, И В Долгачев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Sulivan, D , Genetics of homotopy theory and the Adams conjecture, *Ann of Math* , **100** (1974), 1−79

周伯埙 译

Hooke 定律 [Hooke law, Гука закон]

描述弹性体中在一定范围内应力和应变之间的关系的一个定律. 它说的是 物体的微小变形与作用在物体上的力成正比, 即应变张量 u_{ik} 是应力张量的线性函数

$$u_{ik}=\frac{1}{9k}\delta_{ik}\sigma_{ll}+\frac{1}{2\mu}\left[\sigma_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll}\right],$$

其中 δ 是 Kronecker 记号, K 是压缩模量, μ 是剪切模量 见**弹性的数学理论** (elasticity, mathematical theory of)

在最简单的形式下, 这个定律是由 R Hooke 在 1660 年根据实验建立的.

参考文献

[1] Ландау, Л Д, Лафшиц, Е М, Теория упругости, 3 изд, М, 1965, §4 (英译本 Landau, L D and Lifshitz, E M, Theory of elasticity, Pergamon, 1959)

А Б Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Sokolnikoff, V V, Mathematical theory of elasticity, McGraw-Hill, 1956 (译自俄文)

[A2] Timoshenko, S P and Goodier, J N, Theory of elasticity, McGraw-Hill, 1970

张鸿林 译

Hopf 代数 [Hopf algebra, Хопфа алгебра], 双代数 (bi-algebra), 超代数 (hyperalgebra)

在有恒等元的结合交换环 K 上的一个分次模 A, 同时装备了具有恒等元 (单位元) l $K\to A$ 的结合分次代数 μ $A\otimes A\to A$ 的结构及具有上恒等元 (上单位 (co-unit)) ε $A\to K$ 的结合分次**上代数** (co-algebra) δ $A\to A\otimes A$ 的结构, 并且满足下列条件

1) l 是分次上代数的同态,

2) ε 是分次代数的同态,

3) δ 是分次代数的同态.

条件 3) 等价于

3′) μ 是分次上代数的同态

有时舍弃上乘法是结合的要求, 这样的代数就称为拟 Hopf 代数 (quasi-Hopf algebras)

对于在 K 上的任意两个 Hopf 代数 A 和 B, 它们的张量积 $A\otimes B$ 有自然的 Hopf 代数的结构. 设 $A=\sum_{n\in Z}A_n$ 是 Hopf 代数, 其中所有的 A_n 是有限生成的射影 K 模, 则 $A^*=\sum_{n\in Z}A_n^*$ 是 Hopf 代数, 具有分次模同态 δ^* $A^*\otimes A^*\to A^*$, ε^* $K\to A^*$, μ^* $A^*\to A^*\otimes A^*$, l^* $A^*\to K$, 其中 A_n^* 是对偶于 A_n 的模, 称 A^* 对偶于 A Hopf 代数 A 的一个元素 x 称为本原的 (primitive), 如果有

$$\delta(x)=x\otimes 1+1\otimes x.$$

在运算

$$[x,y]=xy-(-1)^{pq}yx,\ x\in A_p,\ y\in A_q,$$

下, 本原元素形成了 A 中的分次子代数 P_A 如果 A 是连通的 (connected) (即对 $n<0$, $A_n=0$, $A_0=K$) 及 K 是特征为 0 的域, 则子空间 P_A 生成代数 A (关于乘法), 当且仅当上乘法是分次交换的 ([2])

例 1) 对任何分次 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ (即在自然 $\mathbf{Z}_2$ 分次下是 Lie **超代数** (superalgebra) 的分次代数), 如果令

$$\varepsilon(x)=0,\ \delta(x)=x\otimes 1+1\otimes x,\ x\in\mathfrak{g},$$

则万有包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 变成一个 Hopf 代数. 这里 $P_{U(\mathfrak{g})}=\mathfrak{g}$ 如果 K 是一个特征为 0 的域, 则任何一个由本原元素生成的连通 Hopf 代数 A 自然地同构于 $U(P_A)$ (见 [2])

2) 类似地在任何一个群 G 的群代数 $K[G]$ 中定义 Hopf 代数 (有平凡分次) 的结构

3) 仿射代数群 G 上的正则函数的代数变成 Hopf 代数 (有平凡分次的), 如果通过乘法 $G\times G\to G$ 和嵌入 $\{e\}\to G$ 定义了同态 δ 和 ε, 其中 e 是 G 的单位元 (见 [3])

4) 假设 G 是一个有乘法 m 和单位元 e 的道路连通 H **空间** (H-space), 又设 Δ $G\to G\times G$, l $\{e\}\to G$, p $G\to\{e\}$ 由公式 $\Delta(a)=(a,a)$, $l(e)=e$, $p(a)=e(a\in G)$ 所定义 如果所有上同调模 $H^n(G,K)$ 是射影的与有限生成的, 则用上同调导出的映射 $\mu=\Delta^*$, $l=p^*$, $\delta=m^*$, $\varepsilon=l^*$ 将 $H^*(G,K)$ 变成分次交换拟 Hopf 代数 如果乘法 m 是同伦结合的, 则 $H^*(G,K)$ 是 Hopf 代数, 且对偶于它的 Hopf 代数是用映射 m_*, l_*, Δ_*, p_* 装备的同调代数 $H_*(G,K)$ (Понтрягин 代数 (Pontryagin algebra)) 如果 K 是特征为 0 的域, 则 Понтрягин 代数由本原元素生成且同构于 $U(\pi(G,K))$, 其中 $\pi(G,K)=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i(G)\otimes K$ 被看作是在 Samelson 积下的分次 Lie 代数 (见 [2])

例 4) 中的代数 $H^*(G,K)$ 是 H Hopf 首先在 [1] 中考虑的, 他证明若 K 是一个特征为 0 的域和 $H^*(G,K)$ 是有限维的, 它就是一个有奇次的生成元的外代数 在特征为 p 的完全域 K 上, 具有条件 $\dim A_n<\infty$ ($n\in\mathbf{Z}$) 的任何一个连通分次交换的拟 Hopf 代数 A 的结构用下面的定理来描述 (见 [4]) 代数 A 分裂成具有单个生成元 x 和关系 $x^s=0$ 的代数的张量积, 其中, 如果 x 是偶次的, 则对 $p=2$, s 是 2 的幂次或 ∞, 对 $p\neq 2$, s 是 p 的幂次或 ∞ (对 $p=0$, 是 ∞), 如果 x 是奇次的, 则 $s=2$ 特别地, 对 $p=0$, A 是具有奇次的生成元的一个外

代数和一个具有偶次生成元的多项式代数的张量积．另一方面，域 K 上的每个连通 Hopf 代数 A 是外代数 $A=\wedge P_A$(见[2]),在其中，对任何奇次元素 x，$x^2=0$，而且，对所有奇次元素及所有偶次元素是可分解的．特别地，上述是 **R** 上的连通紧 Lie 群的上同调代数和 Понтрягин 代数

参考文献

[1] Hopf, H , Ueber die topologie der Gruppenmannigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen, *Ann of Math* (2), **42** (1941), 22 - 52

[2] Milnor, J W and Moore, J C On the structure of Hopf algebras, *Ann of Math* (2), **81** (1965), 2, 211 - 264

[3] Borel, A , Linaer algebraic groups, Benjamin, 1969

[4] Borel, A , Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, *Ann of Math* , **57** (1953), 115 - 207

[5] MacLane, S , Homology , Springer, 1963

A Л Онищик 撰

【补注】关于 Hopf 代数和双代数的术语还不是十分标准，然而，下面的名词（和记号）看起来能被广泛采用．

双代数是 K上的模 A，它是由模映射 m $A\otimes A\to A$，e $K\to A$，$\mu.A\to A\otimes A$，ε $A\to K$ 装备起来的，满足

i) (A, m, e)是有单位元的结合代数，

ii) (A, μ, ε) 是有上单位元的上结合的上代数，

iii) e 是上代数的同态，

iv) ε 是代数的同态，

v) m 是上代数的同态

这最后的条件等价于

v′) μ是代数的同态

不假设分次为定义的一部分．如果有一个分次的及在考虑中的每一个态射是分次的，则称为分次双代数 (graded bi-algebra)

设 $(A, m, e, \mu, \varepsilon)$ 是 K上的双代数．双代数的一个对映体 (antipode)是模同态 l $A\to A$ 使得

vi) $m\circ(l\otimes 1)\circ\mu=m\circ(1\otimes l)\circ\mu=e\circ\varepsilon$

具有对映体 l 的双代数称为 Hopf 代数 (Hopf algebra) 分次 Hopf 代数 (graded Hopf algebra)是有对映体 l 的分次双代数，l是分次模同态

给定了上代数 $(C, \mu_C, \varepsilon_C)$和代数$(A, m_A, e_A)$，模 $\mathrm{Mod}_K(C, A)$允许一个卷积(convolution product)，定义如下

$$f*g=m_A\circ(f\otimes g)\circ\mu_C$$

用了卷积的术语，条件 vi)可叙述为

vi′) $l*\mathrm{id}=\mathrm{id}*l=e\circ\varepsilon$，

其中 id $A\to A$ 是双代数 A 的恒等态射．

Hopf 代数的附加的例子如下．设 $F_1(X,Y)$，，$F_n(X, Y)\in K[[X_1, ,X_n, Y_1, \cdot, Y_n]]$ 是**形式群** (formal group) $A=K[[X_1,\cdot\cdot,X_n]]$ Y_j 与 $1\otimes X_j\in A\hat{\otimes}A$ 相一致，F_1， ，F_n 定义了一个（连续的）代数态射 $\mu:A\to A\hat{\otimes}A$ 将 A 变成一个双代数．存在一个对映体使 A 为 Hopf 代数．它称为形式群 F 的反变双代数 (contravariant bi-algebra)或反变 Hopf 代数 (contravariant Hopf algebra) 注意这里用了完全的张量积．

在量子群 (quantum groups)的名义下，Hopf 代数和有关的对象在物理中也变得重要了，特别在量子反散射法方面 ([A3], [A4])

参考文献

[A1] Abe, E , Hopf algebras, Cambridge Univ Press, 1977

[A2] Hazewinkel, M , Formal groups and applications, Acad Press, 1978

[A3] Drinfel'd, V G , Quantum groups, in Proc Internat Congress Mathematicians Berkeley, 1986, Amer Math Soc , 1987, 798 - 820

[A4] Faddeev, L D , Integrable models in (1+1)-dimensional quantum field theory (Les Houches, 1982), Elsevier, 1984

徐森林 译 薛春华 校

Hopf 纤维化 [Hopf fibration, Хопфа расслоение]

一个局部平凡的**纤维化** (fibration) f $S^{2n-1}\to S^n$，$n=2, 4, 8$ 这是局部平凡纤维化最早的例子之一，由 H Hopf 在[1] 中引进．这些映射诱导的同调与上同调同态为平凡的，但它们不同伦于零，这可从它们的 **Hopf 不变量** (Hopf invariant) 非 0 导出．给出这些映射需用所谓 Hopf 构造 (Hopf construction)．

设 $X*Y$ 为空间 X 与 Y 的**联结** (join)，其中可以引进自然坐标$\langle x, t, y\rangle$，$x\in X$，$t\in[0, 1]$，$y\in Y$ 例如 $X*S^0=SX$，即 X 的**纬垂** (suspension)．Hopf 构造 $\mathfrak{H}$ 对于每个映射 f $X\times Y\to Z$ 对应以映射 $\mathfrak{H}(f)\cdot X*Y\to SZ$ 由下式给出 $\mathfrak{H}(f)\langle x, t, y\rangle=\langle f(x, y), t\rangle$．

设映射 μ_n $S^{n-1}\times S^{n-1}\to S^{n-1}$ 对于 $n=2, 4, 8$ 由乘法定义．$n=2$ 时为复数乘法，$n=4$时为四元数乘法，$n=8$ 时为 Cayley 数乘法，则$S^{n-1}*S^{n-1}=S^{2n-1}$，Hopf 映射 (Hopf mapping) 定义作

$$\mathfrak{H}_n=\mathfrak{H}(\mu_n)\quad S^{2n-1}\to S^n.$$

Hopf 映射 $\mathfrak{H}_n$ $(n=2, 4, 8)$ 为局部平凡纤维化，以 S^{n-1} 为纤维．若 $f.$ $S^{n-1}\times S^{n-1}\to S^{n-1}$ 是具有双度数 (d_1, d_2) 的映射，则映射 $\mathfrak{H}(f)$ 的 Hopf 不变量为

$d_1 \cdot d_2$ 特别地，Hopf 纤维化的 Hopf 不变量为 1

有时，Hopf 纤维化定义作由公式 $(z_0, \quad , z_n) \to [z_0 \quad z_n]$ 给出的映射 f $S^{2n+1} \to \mathbf{C}P^n$ 这个映射是以 S^1 为纤维的局部平凡纤维化 当 $n=1$ 时即得经典的 Hopf 纤维化 f $S^3 \to S^2$

参考文献

[1] Hopf, H , Über die Abbildungen von Sphären niedriger Dimension, *Fund Math* , **25** (1935), 427 - 440

[2] Husemoller, D , Fibre bundles, McGraw-Hill 1966

A B Шокуров 撰 孙以丰 译

Hopf 群 [Hopf group ; Хопфова группа]

一个群，它不同构于它的任意一个真商群．这个名称是为了纪念 H Hopf 而给出的 他在 1932 年提出了这样一个问题 是否存在不具有这个性质的**有限生成群**(finitely-generated group)? 非 Hopf 群的例子是知道的 其中一个例子就是具有两个生成元和单独一个定义关系的群 (亦见**非 Hopf 群** (non-Hopf group))．每一个有限生成的**剩余有限群** (residually-finite group) 都是 Hopf 群

参考文献

[1] Magnus, W , Karrass, A and Solitar, D , Combinatorial group theory presentations of groups in terms of generators and relations, Wiley (Interscience) 1966

H H Вильямс 撰

【补注】 英文中 (non-) Hopf group 也称为 (non-) Hopfian group 郝钢新 译

Hopf 不变量 [Hopf invariant , Хопфа инвариант]

拓扑空间连续映射同伦类的一种不变量 首先由 H Hopf ([1], [2]) 对于球面映射 f $S^{2n-1} \to S^n$ 定义

设 f $S^{2n-1} \to S^n$ 为连续映射．必要时经过一个同伦，不妨假设这个映射是关于球面 S^n 与 S^{2n-1} 的适当三角剖分的单纯映射，则 Hopf 不变量是定义作两个在 S^{2n-1} 中不相交的 $(n-1)$ 维流形 $f^{-1}(a)$ 与 $f^{-1}(b)$ 的**环绕系数** (linking coefficient)，这里 a, b 是 S^n 中任意两个不同的点

映射 f $S^{2n-1} \to S^n$ 决定了一个元素 $[f] \in \pi_{2n-1}(S^n)$，元素 $[f]$ 在同态

$$\pi_{2n-1}(S^n) = \pi_{2n-2}(\Omega S^n) \xrightarrow{h} H_{2n-2}(\Omega S^n) = \mathbf{Z}$$

之下的象重合于 Hopf 不变量 $H(f)$ (这里 h 是 Hurewicz 同态) ([3])

现在设 f $S^{2n-1} \to S^n$ 为 C^2 类映射，设微分形式 $\Omega \in \Lambda^n S^n$ 为整系数上同调群 $H^n(S^n, \mathbf{Z})$ 的一个生成元．例如，可取 $\Omega = (dV)/(\text{vol } S^n)$，其中 dV 为 S^n 关于某个度量 (比如，将 S^n 嵌入于 $\mathbf{R}^{n+1}$ 所得到的度量) 的体积元，vol S^n 为球面 S^n 的体积 于是形式 $f^*(\Omega) \in \Lambda^n S^{2n-1}$ 为闭的，由于 $H^n(S^{2n-1}, \mathbf{Z})$ 为 0，故 $f^*(\Omega) = d\theta$，$\theta \in \Lambda^{n-1} S^{2n-1}$ 计算 Hopf 不变量的一个公式是 (见 [4])

$$H(f) = \int_{S^{n-1}} \theta \wedge d\theta$$

Hopf 不变量的定义可以推广 (见 [5]，[6]) 到映射 f $S^m \to S^n$，当 $m \leqslant 4n-4$ 时 这时有分解

$$\pi_m(S^n \vee S^n) = \\ = \pi_m(S^n) \oplus \pi_m(S^n) \oplus \pi_m(S^{2n-1}) \oplus \ker k_*, \quad (*)$$

其中

$$k_* \quad \pi_{m+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n) \to \pi_{m+1}(S^{2n})$$

为投影 k $(S^n \times S^n, S^n \vee S^n) \to (S^{2n}, \text{pt})$ 所诱导的同态．令 g $S^n \to S^n \vee S^n$ 为将球面 S^n 的赤道捏为一点的映射，则 Hopf 不变量定义作同态

$$H \quad \pi_m(S^n) \to \pi_m(S^{2n-1}),$$

它将 $[f] \in \pi_m(S^n)$ 映到元素 $[g \circ f] \in \pi_m(S^n \vee S^n)$ 在分解 $(*)$ 中的直和项 $\pi_m(S^{2n-1})$ 上的投影．由于 $\pi_{2n-1}(S^{2n-1}) = \mathbf{Z}$，当 $m = 2n-1$ 时便得到通常的 Hopf 不变量 **广义 Hopf 不变量** (generalized Hopf invariant) H^* 定义作下列同态的迭合

$$\pi_m(S^n) \xrightarrow{g_*} \pi_m(S^n \vee S^n) \xrightarrow{p} \\ \xrightarrow{p} \pi_{m+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n) \xrightarrow{k_*} \pi_{m+1}(S^{2n}),$$

其中 p 是群 $\pi_m(S^n \vee S^n)$ 到直和项 $\pi_{m+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$ 的投影，同态 g_* 与 k_* 则如上述 当 $m \leqslant 4n-4$ 时，Hopf-Whitehead **不变量** (Hopf-Whitehead invariant)) H 与 Hopf-Hilton **不变量** (Hopf-Hilton invariant) H^* 由关系 $H^*S \supset H$ 联系，其中 S $\pi_m(S^{2n-1}) \to \pi_{m+1}(S^{2n})$ 为**纬垂** (suspension) 同态 (见 [6])

令 C_f 为映射 f $S^{2n-1} \to S^n$ 的映射柱 (见**映射柱** (mapping cylinder))，则上同调代数 $H^*(C_f, S^{2n-1})$ 的一组齐次 $\mathbf{Z}$ 基为 $\{a, b\}$，$\dim a = n$，$\dim b = 2n$ 这时有关系 $a^2 = H(f)b$ (见 [7])．若 n 为奇数，则 $H(f) = 0$ (因为上同调乘法是斜交换的)．

利用**广义上同调论** (generalized cohomology theories) 可以推广 Hopf-Steenrod 不变量．设 k 为在 Dold (见 [9]) 意义之下的半正合同伦函子，定义在有限 CW 复形的范畴上并取值于某个 Abel 范畴 A，则复形映射 f $X \to Y$ 确定了一个元素 $f^* = d(f) \in \text{Hom}(k(Y), k(X))$，其中 Hom 为范畴 A 的态射集合，则 Hopf-Adams **不变量** (Hopf-Adams invariant)) $e(f)$ 当 $f^* = 0$,

$d(Sf)=0$ 时有定义，这里 Sf $SX \to SY$ 为 f 的纬垂．这时，上纤维序列

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} Y \cup_f CX \xrightarrow{j} SX \xrightarrow{-Sf} SY$$

对应了 A 中的正合序列

$$0 \leftarrow k(Y) \xleftarrow{i_*} k(Y \cup_f CX) \xleftarrow{j_*} k(SX) \leftarrow 0,$$

从而确定了 Hopf-Adams-Steenrod 不变量（Hopf-Adams-Steenrod invariant）$e(f) \in \mathrm{Ext}^1(k(Y), k(X))$．

取函子 $k=H^*(-, Z_2)$，即取值在 mod 2 **Steenrod 代数**（Steenrod algebra）上的模所构成的范畴时就得到映射 f $S^m \to S^n (m>n)$ 的 Hopf-Steenrod 不变量（Hopf-Steenrod invariant）$H_2(f) \in \mathbf{Z}_2$（见[7]） 上同调代数 $H^*(C_f, S^m; Z_2)$ 的一组 $\mathbf{Z}_2$ 基为 $\{a, b\}$，$\dim a = n$, $\dim b = m+1$，则

$$Sq^{m-n+1} a = H_2(f) b$$

模 p 的 Hopf 不变量（Hopf invariant）H_p（p 为素数）是定义为下面几个同态的迭合

$$\pi_{2pn}(S^{2n+1})_{(p)} \xrightarrow{\approx} \pi_{2pn-2}(\Omega^2 S^{2n+1})_{(p)} \to$$
$$\to \pi_{2pn-2}(\Omega^2 S^{2n+1}, S^{2n-1})_{(p)} \to$$
$$\to H_{2pn-2}(\Omega^2 S^{2n+1}, S^{2n-1})_{(p)} = \mathbf{Z}/p,$$

这里 $(X, Y)_{(p)}$ 为空间对 (X, Y) 的 p 局部化（见[10]） 令

$$S \quad \pi_{4n-1}(S^{2n}) \to \pi_{4n}(S^{2n+1})$$

为纬垂同态，则 $H_2(Sf)=H_2(f)$（见[10]） Hopf 不变量 $H(f)$ 也可以用 **Stiefel 数**（Stiefel number）来定义（见[11]） 设 M^{n-1} 为带标架闭流形且 $M^{n-1}=\partial V$，则法丛 v 的 Stifel-Whitney 数 $w_n(v)[V, M]$ 重合于一个映射 f $S^{n+r-1} \to S^r$ 的 Hopf 不变量 $H_2(f)$，这个 f 的同伦类正是 M^{n-1} 的带标架协边类所对应的球面映射同伦类

Adams-Новиков 谱序列可用来构造高阶 Hopf 不变量．即归纳地定义不变量 q_i $\ker q_{i-1} \to E_\infty^{i,*}$ 和 q_0 $\pi_*^S \to E_\infty^{0,*}$（见[12]）．从这个谱序列中微分的形状可知

$$\mathrm{Ext}_{AU}^{i,*}(\Omega_U, \Omega_U) \supset E_\infty^{i,*}, \ i=0, 1, 2, 3$$

（其中 Ω_U 为复协边环），因此，对于 $i=0, 1, 2, 3$，不变量 q_i 在 $\mathrm{Ext}_{AU}^{i,*}(\Omega_U, \Omega_U)$ 中，称为 Hopf-Новиков 不变量（Hopf-Novikov invariants） 当 $i=1$ 时，所得即 Adams 不变量

Hopf 不变量能够取的值并非任意．例如，任何映射 f $S^{4n+1} \to S^{2n+1}$ 的 Hopf 不变量必为 0 除开 $p=2$, $m=1, 2, 4$ 与 $p>2$, $m=1$, mod p Hopf 不变量 $H_{(p)}$ $\pi_{2mp}(S^{2m+1}) \to \mathbf{Z}_p$ 均为 0．另一方面，对于任何偶数 k，存在映射 f $S^{4n-1} \to S^{2n}$，其 Hopf 不变量等于 k（n 值任意） 当 $n=1, 2, 4$ 时存在等于 1 的映射 f $S^{4n-1} \to S^{2n}$

参考文献

[1] Hopf, H , Uber die Abbildungen der dreidimensionalen Sphare auf die Kugelflache, *Math Ann*, **104** (1931), 639 - 665

[2] Hopf, H , Uber die Abbildungen von Spharen niedriger Dimension, *Fund Math*, **25** (1935), 427 - 440

[3] Serre, J -P , Groupes d'homotopie et classes de groupes abeliens, *Ann of Math*, **58** (1953), 258 - 294

[4] Whitehead, J H C , An expression of the Hopf invariant as an integral, *Proc Nat Acad Sci USA*, **33** (1937), 117 - 123

[5] Whitehead, J H C , A generalization of the Hopf invariant, *Ann of Math* (2), **51** (1950), 192 - 237

[6] Hilton, P J , Suspension theorem and generalized Hopf invariant, *Proc London Math Soc* (3), **1** (1951), 3, 462 - 493

[7] Steenrod, N E , Cohomologies invariants of mappings, *Ann of Math* (2), **50** (1949), 954 - 988

[8] Adams, J F , On the groups $J(X)$, Ⅳ, *Topology*, **5** (1966), 21 - 71

[9] Dold, A , Halbexakte Homotopiefunktoren, Springer, 1966

[10] Husemoller, D , Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966

[11] Stong, R E , Notes on cobordism theory, Princeton Univ Press, 1968

[12] Новиков, С П ,《Изв АН СССР Сер матем》, **31** (1967), 4, 855 - 951

[13] Adams, J F , On the non-existence of elements of Hopf invariant one, *Ann of Math* (2), **72** (1960), 20 - 104

A B Шокуров 撰 孙以丰 译

Hopf-Rinow 定理 [**Hopf-Rinow theorem, Хопфа-Ринова теорема**]

如果 M 是具有距离函数 ρ 及 **Levi-Civita 联络**（Levi-Civita connection）的连通 Riemann 空间，则下列断言是等价的

1）M 是完全的，

2）对每一点 $p \in M$，**指数映射**（exponential mapping）$\exp_p$ 能在整个切空间 M_p 上定义，

3）每一个关于 ρ 为有界的闭集 $A \subset M$ 是紧的．

推论 任意两点 $p, q \in M$ 能用 M 中一条长度为 $\rho(p, q)$ 的测地线相连 这是由 H Hopf 和 W Rinow 建立的（[1]）

Hopf-Rinow 定理的一个推广（见[4]）是 如果 p 和 q 是 M 中的两点，则或者存在一条以最短方式连

接这两点的曲线，或者存在一条具有下述性质的从 p 出发的测地线 L 1) L 与 $0\leqslant t<1$ 同胚，2) 如果 L 上的一个点列在 L 上没有极限点，则它在 M 中也没有极限点，即 L 在 M 中为闭的，3) L 包含了在 L 上任何两点之间的最短连接线，4) 对每一点 $x\in L$，有 $\rho(p,x)+\rho(x,q)=\rho(p,q)$，5) L 的长度是有限的，且不超过 $\rho(p,q)$ 这里函数 $\rho(p,q)$ 不一定是对称的，且每点能以最短可能（不一定唯一）的方式与某个邻域 U_p 中的任何点相连．推论 如果 M 中没有有界的射线，则 M 中每一有界集是紧的

参考文献

[1] Hopf, H and Rinow, W, Ueber den Begriff der vollstandigen differentialgeometrischen Flachen, *Comm Math Helv*, **3** (1931), 209 – 225

[2] Rham G de, Sur la reducibilité d'un espace de Riemann, *Comm Math Helv*, **26** (1952), 328 – 344

[3] Gromoll, D, Klingenberg, W and Meyer, W, Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968

[4] Кон-Фоссен, С Э, Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М, 1959

М И Войцеховский 撰

【补注】 令 $p\in M$. 流形 M 称为在 p 处是测地完全的，如果 $\exp_p$ 被定义在整个 T_pM 上 如果这对所有 p 都成立，则流形 M 是测地完全的．Hopf-Rinow 定理亦包括了事实 测地完全性等价于在一点 $p\in M$ 处的测地完全性

连接 p, q 且具有最小长度的测地线称为最短测地线 (minimizing geodesic)

参考文献

[A1] Klingenberg, W, Riemannian geometry, de Gruyter, 1982 (译自德文)

沈纯理 译

水平分布 [horizontal distribution, горизонтальное распределение]

在具有 Lie 结构群 G 的光滑纤维丛 E 上的一个光滑分布（即 E 的切空间的一个光滑的线性子空间场），它定义了 E 上的一个**联络** (connection)，使得底流形中曲线的水平提升是该分布的积分曲线 水平分布 Δ 与纤维是横截的，即在任意点 $y\in E$ 处，直和分解

$$T_y(E)=\Delta_y\oplus T_y(F_y)$$

成立，这里 F_y 是含 y 的纤维 在一般情况下，为了使一个横截分布成为水平分布所必须附加的条件是十分复杂的．在 E 是主纤维丛的全空间 P 的特殊情况下，它们必须保证分布关于群 G 在 P 上的作用的不变性 在此情况下，这些条件能用联络形式来表述，即联络形式对水平分布的取值为零，这被表述为 Cartan-Laptev 定理．由相关的结构方程可得出 如果在 P 上的光滑向量场 X 和 Y，使得在任意 $y\in P$ 处有 X_y, $Y_y\in\Delta_y$，则 $[X,Y]_y$ 在 $T_y(E_y)$ 中具有分量 $\Omega_y(X,Y)$，这里 Ω 是**曲率形式** (curvature form) 于是，水平分布是对合的充要条件是在 P 上由此分布所定义的联络是平坦的

相伴于 P 的丛 E 上的水平分布总是 P 上某个水平分布 Δ 在由 P 出发构造 E 过程中所用的因子化的典范投影下的象．在一般情况下，E 是根据公式 $(y,f)\cdot g=(y\cdot g,g^{-1}\cdot f)$，从 $P\times F$ 关于 G 的作用的因子化中所得出的．设 π $P\times F\to E$ 是相应的典范投影．E 上每一水平分布得自象 $\pi^*\bar{\Delta}$，这里 $\bar{\Delta}$ 是 Δ 从 P 到 $P\times F$ 的自然提升．在更特殊的情况下，当 F 是齐性空间 G/H 时，空间 E 与 P/H 恒同，且 E 上每一水平分布均得自典范投影 π $P\to P/H$ 下的象 $\pi^*\Delta$

参考文献

[1] Nomizu, K, Lie groups and differential geometry, Math Soc Japan, 1956

[2] Bishop, R L and Crittenden, R J, Geometry of manifolds, Acad Press, 1964

[3] Lumiste, U, G, Connections in homogeneous bundles, *Transl1 Amer Math Soc* (2), **92** (1970), 231 – 274 (*Mat Sb*, **69** (**111**) (1966), 3, 434 – 469)

Ю Г Лумисте 撰 沈纯理 译

Horner 格式 [Horner scheme, Горнера схема]

求多项式

$$f(x)=a_nx^n+\quad+a_1x+a_0 \tag{1}$$

除以二项式 $x-a$ 所得之不完全商和剩余的一种方法，其中系数 a, a_0, , a_n 属于某一个域，例如属于复数域．任何多项式 $f(x)$ 都能唯一地表示为下列形式

$$f(x)=(x-a)g(x)+r,$$

其中 $g(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\quad+b_1x+b_0$ 是不完全商，而 r 是剩余，根据 **Bezout 定理** (Bezout theorem)，它等于 $f(a)$ $g(x)$ 的系数和 r 按下列递推公式来计算

$$\left.\begin{array}{c} b_{n-1}=a_n,\ b_{n-2}=a_{n-1}+ab_{n-1},\quad ,\ b_0=a_1+ab_1, \\ r=a_0+ab_0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

在计算中采用下列表格

	a_n	a_{n-1}		a_1	a_0
a	b_{n-1}	b_{n-2}		b_0	r

其中上一行是已知的，而下一行按公式 (2) 来填写 事实上，这种方法和中世纪中国采用的秦九韶法 (Ch in Chiu-Shao method) 是等同的，在 19 世纪初，被 W G Horner ([1]) 和 R Ruffini ([2]) 几乎同时重新发现．

参考文献

[1] Horner, W G, *Philos Transact Roy Soc London Ser A*, **1** (1819), 308 – 335

[2] Ruffini, P, *Mem Coronata Soc Ital Sci*, **9** (1802), 44 – 256

В Н Ремесленников 撰

【补注】 Horner 格式可以用来有效地计算多项式的值．对于给定的值 $x=a$，通过计算幂 a^2, a^3, 并构成相应于 (1) 的线性组合来直接计算 $f(x)$ 的值，要求进行 $2n-1$ 次乘法．但是，如果把 $f(x)$ 写成加括号表示的形式

$$f(x)=x(\cdot\ (x(xa_n+a_{n-1})+a_{n-2})\ \ )+a_0,$$

则只需(相继)进行 n 次乘法 不难验证，采用这种加括号表示法，需要完成的工作就是由(2) 给出的那些计算步骤．因为 $r=f(a)$，所以为计算 $f(a)$ 的值，只需要进行 n 次乘法，而不需要 $2n-1$ 次

参考文献

[A1] Hildebrand, F B, Introduction to numerical analysis, McGraw-Hill, 1974

[A2] Cajori, F, A history of mathematics, Chelsea, reprint, 1980

张鸿林 译

极限圆 [**horocycle**, oricycle, **орицикл**], 极限线 (limiting line)

Лобачевский 平面中某方向上平行线的正交轨线．极限圆可看成是中心在无穷远的圆周 由一个平行线束生成的极限圆都是合同的，同心的（即在该束的直线上切下合同的线段），非闭的，并且凹向束中直线平行的一侧．极限圆的曲率是常数．在 Poincaré 模型中，极限圆是内切于绝对形的圆周．

一直线与一极限圆或没有公共点，或相切，或以相同的角度交于两点，或以直角交于一点．

过 Лобачевский 平面上的两点，有两个且仅有两个极限圆通过．

参考文献

[1] Каган, В Ф, Основания геометрии, 1–2, М -Л, 1949–1956

[2] Норден, А П, Элементарное введение в геометрию Лобачевского, М, 1953

[3] Ефимов, Н В, Высшая геометрия, 6 изд, М, 1978

А Б Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Coxeter, H S M, Introduction to geometry, Wiley, 1961

姜国英 译

极限圈流 [**horocycle flow**, **орициклический поток**]

一个 n 维 Riemann 流形（通常是闭的）M^n 的双面体空间中的流，而在 M^n 上极限圈是有定义的；极限圈流描述双面体沿它们确定的极限圈的运动．

使极限圈概念有定义的几种基本情况有· Riemann 度量的曲率是负的，或者 $n=2$ 或者曲率为常数 一个双面体 (bihedron)，亦即一标准正交的 2 标架 (x, e_1, e_2) $(x\in M^n$, e_1, e_2 为点 x 处互相正交的单位切向量)，对应于过 x 依方向 e_2 的极限圈 $h(x, e_1, e_2)$ 它位于过 x 的极限球面 $H(x, e_1)$ 上，这里 $H(x, e_1)$ 是与测地线族正交、渐近（依正向）于过 x 在方向 e_1 上的测地线的 $n-1$ 维流形 由 e_2 定义的 h 上的方向取作正的（在 $n=2$ 情形下，这是 e_2 的唯一作用，H 与 h 可以自相交，由此引起的混下可用清述最简单的方法避免 不在 M^n 中而在其通用覆叠流形——当曲率为常数时，这就是平常 n 维 Лобачевский 空间——中实行类似的构造，并且把得到的极限圈投影到 M^n 上）．在极限圈流的作用下，双面体 (x, e_1, e_2) 在时间 t 移至 $(x(t), e_1(t), e_2(t))$，其中 $x(t)$ 当 t 增加时，依正向沿 $h(x, e_1, e_2)$ 移动一个单位速度，单位向量 $e_1(t)$ 在点 $x(t)$ 与 $H(x, e_1)$ 垂直 ($e_1(t)$ 的两个方向的选择由连续性决定)，且 $e_2(t)=dx(t)/dt$．

对极限圈流进行研究是由于它们在具负曲率流形上**测地流** (geodesic flow) 的理论中起重要的作用 ([1]) 现今此作用已被 Y 系统理论（见 **Y系统** (Y-system)) 中的一定的**叶状结构** (foliation) 所代替，因而极限圈成为独立的研究课题．极限圈流的性质已经研究得很充分（见[2]–[7], [11]）关于它的各种推广，见[8]–[10]

参考文献

[1] Hopf, E, Statistik des geodatischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer krummung, *Ber Verh Sachs Akad Wiss Leipzig*, **91** (1939), 261 – 304

[2] Парасюк, О С, 《Успехи матем наук》, **8** (1953), 3, 125 – 126

[3] Гуревич, Б М, 《Докл АН СССР》, **136** (1961), 4, 768 – 770

[4] Furstenberg, H, The unique ergodicity of the horocycle flow, in A Beck (ed) Recent advances in topological dynamics, Lecture notes in math, Vol, 318, Springer, 1973, 95 – 115

[5] Marcus, B, Unique ergodicity of the horocycle flow variable negative curvature case, *Israel J Math*, **21** (1975), 2 – 3, 133 – 144

[6] Marcus, B, Ergodic properties of horocycle flows for surfaces of negative curvature, *Ann of Math*, **105** (1977), 1, 81 – 105

[7] Marcus, B, The horocycle flow is mixing of all degrees, *Invent Math*, **46** (1978), 3, 201 – 209

[8A] Green, L W, The generalized geodesic flow, *Duke Math J*, **41** (1974), 1, 115 – 126

[8B] Green, L W, Correction on The generalized geodesic flow, *Duke Math J*, **42** (1975), 381
[9] Bowen, R, Weak mixing and unique ergodicity on homogeneous spaces, *Israel J Math*, **23** (1976), 3–4, 267–273
[10] Bowen, R and Marcus, B, Unique ergodicity for horocycle foliations, *Israel J Math*, **26** (1977), 1, 43–67
[11] Ratner, M, Rigidity of horocycle flows, *Ann of Math*, **115** (1982), 3, 597–614

Д В Аносов 撰 郑维行 译 沈永欢 校

极限球面 [horosphere, orisphere, орисфера]

在 Лобачевский 空间中正交于某方向上（双曲）平行直线的一曲面．极限球面可看成是中心在无穷远的球面 如果把**极限圆**（horocycle）取作直线，则 Euclid 几何学就可在极限球面上得到实现，点的次序由定义此极限圆的平行线束中直线的次序来确定，而运动则取 Лобачевский 空间中使此极限球面变到自身上的运动．

А Б Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Coxeter, H S M, Introduction to geometry, Wiley, 1961
[A2] Norden, A P, Elementare Einführung in die Lobatschewskische Geometrie, Deutsch Verlag Wissenschaft, 1958（译自俄文）

姜国英 译

Hotelling T^2 分布 [Hotelling T^2-distribution, Хотеллинга T^2-распределение]

正半轴 $(0,\infty)$ 上的连续概率分布，其密度为

$$p(x)=\frac{\Gamma((n+1)/2)x^{k/2-1}(1+x/n)^{-(n+1)/2}}{\Gamma((n-k+1)/2)\Gamma(k/2)n^{k/2}},$$

它依赖于两个整参数 n（自由度）和 k，$n\geqslant k\geqslant 1$ $k=1$ 时，Hotelling T^2 分布即是 **Student 分布**（Student distribution），$k>1$ 时，可将它看作 Student 分布在下述意义下的多维推广 如果 k 维随机向量 Y 遵从均值向量为零、协方差阵为 Σ 的正态分布，且

$$S=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i' Z_i,$$

此处诸随机向量 Z_i 相互独立，与 Y 同分布，且与 Y 独立，则随机变量 $T^2=Y'S^{-1}Y$ 遵从自由度为 n 的 Hotelling T^2 分布（Y 为列向量，“$'$”表示转置） 如果 $k=1$，则

$$T^2=\frac{Y^2}{\chi_n^2/n}=t_n^2,$$

其中随机变量 t_n 遵从自由度为 n 的 Student 分布．如果在随机变量 T^2 的定义中，Y 遵从参数为 (ν,Σ) 的正态分布，Z_i 遵从参数为 $(0,\Sigma)$ 的正态分布，则对应的分布称为自由度为 n、非中心参数为 ν 的非中心 Hotelling T^2 分布（non-central Hotelling T^2-distribution）．

在数理统计中，Hotelling T^2 分布与 Student t 分布有相同的作用，不同的是前者用于多元情形（见**多元统计分析**（multi-dimensional statistical analysis））．如果观测结果 $X_1, \ , X_n$ 是独立的正态随机向量，有均值向量 μ 和非退化协方差阵 Σ，则统计量

$$T^2=n(\overline{X}-\mu)'S^{-1}(\overline{X}-\mu)$$

遵从自由度为 $n-1$ 的 Hotelling T^2 分布，此处

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,$$

$$S=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(X_i-\overline{X})'$$

这一事实成为 **Hotelling 检验**（Hotelling test）的基础．它的数值计算可利用 **B 分布**（beta-distribution）表或 **Fisher F 分布**（Fisher F-distribution）表，因为随机变量 $((n-k+1)/nk)T^2$ 遵从自由度为 k 和 $n-k+1$ 的 F 分布．

Hotelling T^2 分布是 Hotelling（[1]）为检验两正态总体均值相等而提出的．

参考文献

[1] Hotelling, H, The generalization of Student's ratio, *Ann Math Stat*, **2** (1931), 360–378
[2] Anderson, T W, An introduction to multivariate statistical analysis, Wiley, 1984

А В Прохоров 撰 陶 波 译 李国英 校

Hotelling 检验 [Hotelling test, Хотеллинга критерий]

对假设 H_0 的一个检验，该假设是 p 维非退化正态律 $N(\mu,B)$ 的未知数学期望 $\mu=(\mu_1, \ ,\mu_p)$ 的真值是向量 $\mu_0=(\mu_{10}, \ ,\mu_{p0})$，其中协方差阵 B 也未知．Hotelling 检验基于下述结果．设 $X_1,\cdots,X_n$ 是遵从 p 维非退化正态律 $N(\mu,B)$ 的独立随机向量，$n-1\geqslant p$ 令

$$T^2=n(\overline{X}-\mu_0)^T S^{-1}(\overline{X}-\mu_0),$$

此处

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,$$

$$S=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(X_i-\overline{X})^T,$$

$\overline{X}$ 和 $\frac{n-1}{n}S$ 分别是未知参数 μ 和 B 的极大似然估计 则统计量

$$F=\frac{n-p}{p(n-1)}T^2$$

遵从自由度为 p 和 $n-p$，非中心参数为

$$n(\mu-\mu_0)^T B^{-1}(\mu-\mu_0)$$

的非中心 **Fisher F 分布**（Fisher F-distribution），统计量 T^2 遵从 **Hotelling T^2 分布**（Hotelling T^2-distribution）．因此，为检验假设 H_0 $\mu=\mu_0$，备择假设为 $H_1 \cdot \mu\neq\mu_0$，可用来自 p 维非退化正态律 $N(\mu, B)$ 的独立随机向量 $X_1, \cdot, X_n$ 计算统计量 F 的值 在假设 H_0 成立时，F 遵从自由度为 p 和 $n-p$ 的中心 F 分布 应用 Hotelling 的检验，当显著性水平为 α 时，若 $F\geqslant F_\alpha(p, n-p)$，则应拒绝 H_0，此处 $F_\alpha(p,n-p)$ 是 F 分布的上 α 分位数．这里应该指出 Hotelling 检验与广义似然比检验之间的关系．设

$$L(\mu, B)=L(X_1, \cdot, X_n, \mu, B)$$

$$=\frac{|B^{-1}|^{n/2}}{(2\pi)^{np/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^T B^{-1}(X_i-\mu)\right\}$$

是由样本 $X_1, \quad, X_n$ 计算的似然函数．为检验简单假设 $H_0 . \mu=\mu_0$，对复合被择假设 H_1 $\mu\neq\mu_0$，可用统计量

$$\lambda=\lambda(X_1, \quad, X_n)=\frac{\sup\limits_{B} L(\mu_0, B)}{\sup\limits_{\mu\ B} L(\mu, B)}$$

构造广义似然比检验 统计量 λ 与统计量 T^2 和 F 有如下关系．

$$\lambda^{2/n}=\frac{n-1}{T^2+n-1}=\frac{n-p}{pF+n-p}$$

就检验假设 H_0 $\mu=\mu_0$ 而言，在所有关于相似变换不变的检验中，Hotelling 检验具有一致最大功效（见**最大功效检验**（most-powerful test），**不变检验**（invariant test））

参考文献

[1] Anderson, T W An introduction to multivariate statistical analysis, Wiley, 1984

[2] Rao, C R, Linear statistical inference and its applications, Wiley, 1973

M C Никулин 撰 陶 波 译 李国英 校

Hunt-Stein 定理 [Hunt-Stein theorem, Ханта-Стейна теорема]

在统计假设检验问题中，给出极大极小不变检验存在性条件的一个定理．

设随机变量 X 取值于样本空间（$\mathfrak{X}, \mathscr{B}, \mathsf{P}_\theta$），$\theta\in\Theta$，且分布族 $\{\mathsf{P}_\theta\}$ 被某 σ 有限测度 μ 控制（见**控制**（domination））．现要根据 X 的实现值构造关于零假设 H_0 $\theta\in\Theta_0\subset\Theta$ 对备择假设 H_1 $\theta\in\Theta_1=\Theta\backslash\Theta_0$ 的检验．又设作用于（$\mathfrak{X}, \mathscr{B}$）上的变换群 $G=\{g\}$，使关于 H_0 对 H_1 的检验问题保持不变，$\mathscr{A}$ 是 G 的子集的 Borel σ 域．

Hunt-Stein 定理断言，如果下列条件成立

1) 映射 $(x,g)\rightarrow gx$ 是 $(\mathscr{B}\times\mathscr{A})$ 可测的，且对每一个集 $A\in\mathscr{A}$ 和任何元素 $g\in G$ 有 $Ag\in\mathscr{B}$，

2) 在 $\mathscr{A}$ 上存在渐近右不变测度序列 ν_n，即对任何 $g\in G$ 和 $A\in\mathscr{A}$，有

$$\lim_{n\to\infty}|\nu_n(Ag)-\nu_n(A)|=0$$

则对任何关于 H_0 对 H_1 且检验函数为 $\varphi(x)$ 的统计检验，存在一个（几乎）不变检验，其检验函数记为 $\psi(x)$，使对一切 $\theta\in\Theta$，

$$\inf_{\overline{G}}\mathsf{E}_{\bar{g}\theta}\varphi(X)\leqslant\mathsf{E}_\theta\psi(X)\leqslant\sup_{\overline{G}}\mathsf{E}_{\bar{g}\theta}\varphi(X),$$

此处 $\overline{G}=\{\bar{g}\}$ 是由 G 导出的群．

由 Hunt-Stein 定理可知，如果存在水平为 α，检验函数为 φ_0 的统计检验，使极大化 $\inf_{\theta\in\Theta_1}\mathsf{E}_\theta\varphi(X)$，则也存在一个（几乎）不变检验具有相同的性质．

如果 G 是局部紧的，且在其上有一右不变 Haar 测度，则条件 2) 必定成立 Hunt-Stein 定理表明，若 G 满足定理的条件，则对关于 G 不变的任何统计假设检验问题，只要存在一致最大功效检验，这个检验就一定是极大极小检验

反之 假设对于在群 G 下不变的某统计假设检验问题，一致最大功效检验不是极大极小检验．这意味着 Hunt-Stein 定理的条件不成立．这里产生一个问题．一个给定的检验能否在对同一个群 G 不变的另一个假设检验问题中成为极大极小检验呢？对这个问题的回答不仅依赖于群 G，而且也依赖于分布族 $\{\mathsf{P}_\theta\}$ 本身．

这个定理由 G. Hunt 和 C Stein 在 1946 年得到，见 [1]

参考文献

[1] Lehmann, E L, Testing statistical hypotheses, Wiley, 1986

[2] Zachs, S, The theory of statistical inferences, Wiley, 1971

M C Нихулин 撰 陶 波 译 李国英 校

Hurwitz 准则 [Hurwitz criterion, Гурвица критерий]

见 **Routh-Hurwitz 准则**（Routh-Hurwitz criterion）．

Hurwitz 公式 [Hurwitz formula, Гурвица формула]

见 **Riemann-Hurwitz 公式**（Riemann-Hurwitz formula）．

Hurwitz 定理 [Hurwitz theorem, Гурвица теорема]

设 $\{f_n(z)\}$ 是区域 $D\subset\mathbf{C}$ 中的全纯函数序列，在 D 内任一紧集上一致收敛于函数 $f(z)\neq 0$，则对于 D 内任何闭可求长 Jordan 曲线 Γ 连同由 Γ 围成的区域，若 Γ

不穿过 $f(z)$ 的零点，便可找到数 $N=N(\Gamma)$，使得当 $n>N$ 时每个函数 $f_n(z)$ 在 Γ 内部的零点数目相同，等于 $f(z)$ 在 Γ 内的零点个数 此定理由 A Hurwitz([1])得到 .

参考文献

[1A] Hurwitz, A , Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt, *Math Ann* , **46** (1895) , 273－284

[1B] Hurwitz, A , Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt, in Math Werke, Vol 2, Birkhauser, 1933, 533－545

[2] Маркушевич, А И , Теория аналитических функций, 2 изд , т 1, М , 1967 (中译本 А И 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957)

Е Д Соломенцев 撰

【补注】 对于用"近接函数"导出零点个数等式的另一定理见 **Rouché 定理** (Rouché theorem) .

杨维奇 译

Huygens 原理 [Huygens principle, Гюйгенса принцип]

一种论述，即在由**波动方程** (wave equation) 描述的奇数维空间中的振动传播时，在某局部变化明显的初始状态，将在以后时刻在另一点上作为一种现象以同样明显的界限再现 若空间变量的数是偶数，则 Huygens 原理不存在，在观察点接受到的某局部的初始扰动信号将被冲洗掉 此原理首先由 Ch Huygens 在 1678 年([1]) 提出，然后由 A Fresnel 于 1818 年在他关于绕射问题 (亦见**绕射数学理论** (diffraction, mathematical theory of)) 的研究中加以发展 .

Huygens 原理是由如下数学事实产生的，即波动方程在 t 时刻在三维空间 M 点的解是通过前一时刻在包围 M 的任意封闭曲面上的解及其导数的值表出的 . 特别是，波动方程的 **Cauchy 问题** (Cauchy problem) 在点 (M, t) 的解只决定于初始流形与 (M, t) 的特征锥的相交处的初始数据，而与特征锥 (亦见**特征曲面** (characteristic surface)) 内外的初始数据无关. Huygens 原理的一个严格数学提法首先由 H Helmholtz (1859) 和 G Kirchhoff (1882) 分别对定常和非定常情况给出 .

J Hadamard ([2]) 的结果是 Huygens 原理对二阶线性双曲方程

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} g^{ij}(x)u_{ij}+\sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_i+c(x)u=0 \qquad (*)$$

的推广 . 根据这一结果，当且仅当 (*) 的**基本解** (fundamental solution) 中不存在对数项时，方程 (*) 的 Cauchy 问题的解，对偶数 $n\geqslant 4$，才只依赖于初始流形与特征劈锥曲面交界上的初始数据 有关 Huygens 原理适用的 (*) 形式的一整类方程的描述见 [4]

参考文献

[1] Гюйгенс, Х , Трактат о свете, пер с франц , М - Л , 1935 (译自法文)

[2] Hadamard, J , Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, Dover, reprint, 1952

[3] Courant, R and Hilbert, D , Methods of mathematical physics Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (译自德文)

[4] Ибрагимов, Н Х , Принцип Гюйгенса, в кн Некоторые проблемы математики и механики, Л , 1970

А Г Свешников 撰

【补注】较弱的形式的 Huygens 原理涉及基本解奇点的传播 将基本解写成振荡积分 (或 **Fourier 积分算子** (Fourier integral operator))，就可用定常相原理来解释它，见 [A1], [A2] 和**定常相方法** (stationary phase, method of the).

中间的形式是将轮廓鲜明阵面定义为一**波前集** (wave front) 这样，在一边的基本解能光滑外延越过边界 对波动型算子，这只有当空间维数是奇数时才发生，见 [A3]

波阵面一边的基本解等于零的最局限的形式称为缺项原理 (lacunary principle) 具有常系数的算子已在 [A4] 中讨论过 .

参考文献

[A1] Hörmander, L , Fourier integral operators Ⅰ, *Acta Math* , **127** (1971), 79－183

[A2] Duistermaat, J J and Hörmander, L , Fourier integral operators Ⅱ, *Acta Math* , **128** (1972) 183－269

[A3A] Gårding, L , Sharp fronts of paired oscillatory integrals, *Publ R I M S* , **12 Suppl** (1967/77), 53－68

[A3B] Gårding, L , Sharp fronts of paired oscillatory integrals, *Publ R I M S* , **13** (1977/78), 821

[A4A] Atiyah, M F , Bott, R and Gårding, L , Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients Ⅰ, *Acta Math* , **124** (1970), 109－189

[A4B] Atiyah, M F , Bott, R and Gårding, L , Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients Ⅱ, *Acta Math* , **131** (1973), 145－206

唐福林 译

流体力学近似 [hydrodynamic approximation, гидродинамическое приближение]

在宏观流体力学方程的基础上描述系统的演变及其特征性质的方法 . 在流体力学近似下气体或液体类型的系统被视为连续介质，描述系统的流体力学方程中时间 t 的任何增量 (包括 dt) 总是比趋向局部平衡分布 (对经典系统即趋于局部 **Maxwell 分布** (Maxwell

distribution)) 的弛豫时间大，即总是比诸如密度，流体运动速度、温度等等这样一些局部流体力学特性的形成时间为大，而后者在坐标空间的变化是如此光滑，使得近似的体积增量 $d\mathbf{r}$ 不仅包含有足够大量的粒子，而且还形成准均匀统计系统．

从统计力学的观点看来，经典流体力学方程可以在时间和长度的分子尺度（平均自由程）上的缓慢而光滑过程的近似下从分子运动论方程得到．为此，利用分子运动论方程来构造当地密度方程（连续方程），流体力学速度方程（运动方程）和当地温度方程（能量守恒方程），然后把相应于对局部 Maxwell 分布的小的偏离情况的单粒子分布函数的解代入这些方程中去．在零阶近似下这给出理想流体，在一阶近似下得到 **Navier-Stokes 方程**（Navier-Stokes equations）这一过程构成 **Chapman-Enskog 法**（Chapman-Enskog method）的基础．

较一般的方法是基于时间相关函数的方程系列（见 **Боголюбов 方程系列**（Bogolyubov chain of equations)），及其通过按表征系统不均匀程度的参量展开而得到的解．对输运系数所得到的展开只在包括双体碰撞的那些部分是与 Chapman-Enskog 方法所得的结果等同（三体碰撞给出相同大小的贡献）

与获得流体力学方程类似的方法也可以应用于量子流体，这时出发点应是量子相关函数的 Боголюбов 方程系列，或量子 **Green 函数**（Green function）方程，或直接从 **Schrödinger 方程**（Schrödinger equation）出发．

参考文献

[1] Боголюбов, Н Н, Избр тр, т 2, Киев, 1970

[2] Uhlenbeck, G E, Ford, G V, Lectures in statistical mechanics, Amer Math Soc, 1963

И А Квасников 撰

【补注】Боголюбов方程系列在西方世界是以 BBGKY方程体系(BBGKY-hierarchy of equations)更为人所知

参考文献

[A1] Chapman, S, Cowling, T G, The mathematical theory of nonuniform gases, Cambridge Univ Press, 1952（中译本 S 查普曼, T G 考林，非均匀气体的数学理论，科学出版社，1985）

[A2] Cercignani, C, Mathematical methods in Kinetic theory, Plenum, 1969

[A3] Cercignani, C, The Boltzmann equation and its applications, Springer, 1988

【译注】 **Chapman-Enskog 方法**（Chapman-Enskog method）的二阶近似相应的连续介质方程是 Burnett方程．越来越多的证据表明 Burnett方程在更稀薄的条件下是比 Navier-Stokes 方程更准确的连续模型．参见[B1]，[B2]．

参考文献

[B1] Fisco, K A and Chapman, D R, Comparison of Burnett, Supper-Burnett and Monte Carlo solutions for hypersonic shock structure Prog in Astro and Aero, **118** (1989), 374 - 395

[B2] Zhong, X, MacCormack, R W, Chapman, D R, Stabilization of the Burnett equtions and application to high-altitude hypersonic flows, AIAA paper 91 - 0770 (1991)

沈 青 译

流体力学中的数学问题 [**hydrodynamics, mathmatical problems in, гидродинамики математические задачи**]

用以描述流体运动及其同界壁相互作用的力学模型的方程组问题．通常遇到的湍流是用具有部分特性的模型（在大多数情况下带有半经验性）进行理论描述的．这些模型只适用于范围比较狭窄的几种流动．在湍流可以忽略的流体流动理论研究中，广泛采用均匀不可压缩流体模型．这种模型是用以下 **Navier-Stokes 方程**（Navier-Stokes equations）描述的·

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{v}_k \mathbf{v}_{x_k} - \nu \Delta \mathbf{v} = -\operatorname{grad} p + \mathbf{f},$$
$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

式中 $\mathbf{v}$ 是速度向量，p 是压力，$\mathbf{f}$ 是作用在单位质量上的外力向量，ν 是流体的运动粘性系数，流体密度取为1 如果系数 ν 是温度的函数，则要对 Navier-Stokes 方程加上运动介质的**热传导方程**（thermal-conductance equation），此方程考虑了由于粘性引起的机械能损耗而生成的热，并且遵循能量守恒定律

不同的流体力学问题给出解 Navier-Stokes 方程所需的不同附加条件（初始条件、边界条件）．由于流体力学中的数学问题通常是复杂的，需要建立比较简化的力学模型 对于任何一种特殊问题，要力求找出决定流体运动的主要因素，并且在各方程和附加条件中仅保留考虑这些因素影响的项 在更加复杂的流动情况中，在流动区域的不同部分和不同时间区间内，主要决定性因素可能是不同的 于是，流体运动的整体描述变为局部问题求解的综合，而这些局部问题是用适当的局部算法求解的

理想流体模型，即忽略流体粘性效应的模型（$\nu = 0$），对于解决许多问题是非常有用的．

在存在有势外力 $\mathbf{f}$ 的情况下（例如只考虑重力），理想流体的有势流动由于其守恒性而具有特殊意义．对于此种流动，$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$，同时势函数 φ 满足 **Laplace 方程**（Laplace equetion）$\Delta\varphi = 0$．

采用这种近似方法，许多流体力学问题化为位势理论的经典问题．于是，物体在无穷远处静止的无界流体中运动的问题，可以化为求解外部 **Neumann 问题**（Neumann problem） 然而，这种解仅在很少的情况

下可以近似地描述真实流体的速度场和压力场 绕其自身的速度环量为常量的流线型剖面的平面运动是重要实例之一.

在粘性流体中，由于物体表面附近边界层中流体粘性的作用而产生旋涡，因而在物体后面产生剪切尾流（涡层）. 在流线型物体（例如以小攻角运动的，具有尖后缘的机翼）情况中，如果 **Reynolds 数**（Reynolds number）很大，这一尾流很薄 当采用理想流体模型时，可以用位势的不连续面（涡面）来代替此尾流. 于是，提出求机翼以外这样的速度势问题，从机翼后缘逸出一速度势不连续面，其位置预先并不知道，需要通过解此问题才能予以确定 仅仅当对平面形状简单（圆或椭圆）的薄翼采用线性近似时，才可以得到这个问题的解析解. 在作定常运动和不定常运动的其他形状机翼的线性近似中，广泛采用数值方法解此问题 对于具有非线性扰动的机翼绕流的数值计算方法正在研究中.

在部分由固壁，部分由自由面限定的区域中理想流体的位势运动，是流体力学中一类范围广泛的问题. 自由面的形状预先并不知道，必须根据自由面的附加条件，通过解此问题予以确定 如果可以忽略重力和表面张力的作用，由于自由面是流体与等压区域的接触面，根据定常运动情况下 Bernoulli 积分，沿自由面流体速度为常数. 具有这种条件的典型问题有 从容器出口流出的流体射流、流体射流的相互冲击、具有有限厚度的流体射流射到固体上、物体在流体表面上高速滑行. 属于这类问题的还有 在物体后面具有流动间断和形成常压滞止区或空腔的物体无界绕流. 在平面流动情况下所有这些问题可借助保角映射、变分法和积分方程方法求解. 解三维问题则困难得多，通常要采用数值方法.

在具有自由面的不定常流动情况中，若考虑重力和表面张力的作用，Cauchy-Lagrange 积分给出自由面上速度势的非线性条件. 求解以下问题的主要困难同此条件有关. 物体进入液体或从液体内出来、物体在重液体表面滑行、部分或全部浸没于重液体的物体的运动、重液体表面的波动等

用精确方法解这类问题，仅得到很少结果，而近似的渐近法则更加有效得多 采用的主要方法之一是小扰动线性理论及其为提高精度所作的改进. 为了达到这一目的所用的数学工具，几乎包括数学物理中的全部线性工具

“浅水”近似对于研究重液体表面波是很重要的 在这种近似中，假定水池中液体的深度同所考虑的波长相比是很小的 用这种近似可以建立有限振幅波的非线性理论. 此理论归结为类似于二维超声速气流理论中出现的一组双曲型偏微分方程组 应用特征线方法可以得到许多重要结果. 在准一维近似中，浅水理论构成处理下述问题的现代水力学各分支的基础 江河和长明渠中的波浪运动、洪水波浪和因堤坝破坏产生的波浪的传播、陡坡水渠中周期性驻波的产生等等.

在重液体表面波的精确非线性理论中，函数论和泛函分析方法可以解决许多波浪运动的存在性和唯一性问题 特别是，无限深或等有限深度的液体表面上平滑的二维周期性有限振幅行进波的存在性得到了证明

流动中有间断或在物体后面形成流体速度为零的滞止区的物体位势绕流图案，仅仅是许多可能发生的流动图案之一. 也存在着物体后面尾流中有充满旋转流体的区域的物体绕流图案. 为了研究这些流动图案和其他一些应用问题，提出势流区域和旋涡流区域的匹配问题，其中二者之间的界面形状事先并不知道. 对于旋涡流区域具有常涡量的平面对称流动问题，已经得到某些部分数值解

为了研究粘性起重要作用的流体运动，也建立了许多数学模型，即完整的 Navier-Stokes 方程的简化模型. 其中最重要而且应用最广泛的是 Stokes 缓慢流动理论及其改进、Prandtl 边界层理论及其改进、Boussinesq 热对流运动理论.

在许多有实际意义的流体运动情况中，作用在流体微团上的惯性力比压力或粘性力小（如果采用相似准则，这种情况对应于小 Reynolds 数），于是，在一次近似中可予以忽略（Stokes 理论）. 这样，问题归结为从以下线性方程组来确定充满流体的空间中的 $\mathbf{v}$ 和 p，

$$\nu \Delta \mathbf{v} = \operatorname{grad} p - \mathbf{f},$$
$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

这个方程组可用以解决许多粘性流体运动问题，例如刚性和可变形管道内粘性流体运动、固定表面和运动表面之间各种形状间隙中的粘性流体运动，以及粘性流体中固体和气泡的运动 这些问题形成流体动力润滑理论的基础，在化工、生物等其他方面也有重要应用.

在严格证明各种附加条件下的 Stokes 方程的可解性方面已取得进展 特别是，已经得到一组有限尺寸固体的无界绕流（其无穷远处速度给定）的解，并且此解的存在性和唯一性也得到了证明.

对于平面流动，Stokes 方程化为流函数的双调和方程. 给定构形绕流的边界条件是：构形上流函数本身及其法向导数是给定的 于是，在这种情况下物体绕流问题的求解变成数学物理中已经研究得很透彻的问题

与物体空间绕流不同，在平面流动情况中（例如圆柱体的横向绕流），无穷远处流速给定的问题无解．“Stokes 佯谬”和后来的“Whitehead 佯谬”(不可能用迭代法求出球形绕流问题的各次 Reynolds 数近似)，促使流体动力学中小 Reynolds 数渐近方法的发展和 Stokes 理论的改进．这些匹配渐近展开方法不仅应用于小 Reynolds 数下粘性流体绕物体的流动问题，而且应用于流体力学的其他许多问题．当此方法应用于物体绕流时，其原理叙述如下．Stokes 近似作为有绕流的物体附近小 Reynolds 数 Re 的渐近展开式的主项 在离物体较大距离 r(量级为 $1/\mathrm{Re}$)处，此展开式不适用．为此，在离物体某一距离处，引入约定径向坐标 $r\mathrm{Re}$，建立另一渐近展开式作为定常流动的扰动影响(Oseen 展开式)．这样建立的展开式的任意性，可以通过此式在一中间区域同另一为此目的特别建立的展开式相匹配来加以消除

用数值方法成功地求得小 Reynolds 数时物体绕流问题的解．球体绕流问题的渐近计算结果，在 Reynolds 数约 60(接近实验中观察到的稳态流极限) 以下同实验值满意地吻合

在许多流体通过多孔介质运动的情况中，惯性力比粘性力小．可以假定，通过曲面单元（包含足够数量孔隙的横截面）的流体速度同压力梯度成正比，而同粘性系数成反比．这种情况类似于流体通过由大量直径微小的管子组成的介质时发生的过程．如果介质结构统计上是各向同性的，那么可以得到

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu}\,\mathrm{grad}\,p$$

(Darcy 定律)．如果介质渗透系数 k 同坐标无关，且流体粘性系数 μ 是常数，那么流速是有势向量，速度势满足 Laplace 方程．于是，位势理论可以有效地解决各种实际问题，例如，坝下水的渗流、潮汐涨落引起的沿海地区地下水运动、原油向油井的渗流等．

无界的不可压缩理想流体绕物体的连续势流问题的解也满足完整的 Navier-Stokes 方程组，但不能满足物体表面流体的粘附条件 物体表面附近流体层的粘性效应是显著的，由于有了这一层物体表面的流体粘附条件得以满足．如果 Reynolds 数很大，此层的厚度很小 基于这一点，通过对 Navier-Stokes 方程各项作量级估计，可将此方程简化为比较简单的形式，即边界层理论方程（见 **Prandtl 方程**(Prandtl equation)）在 Prandtl 方程中在有绕流的物体表面法向的压力不变，而沿物体表面的压力变化由边界层外理想流体流动决定．在绕平面构形的二维定常流动这种最简单的情况中，Prandtl 方程的的形式为

$$v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = U\frac{\partial U}{\partial x_1} + \nu\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2},$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0.$$

式中 x_1, x_2 和 v_1, v_2 分别是边界层中沿物体表面和其法线方向的坐标与速度分量，而 U 是边界层外边界上的流速．

Prandtl 方程给出大 Reynolds 数下 Navier-Stokes 方程解的相应渐近展开式的主项．

边界层方程是抛物线型方程，其退化线为物体轮廓（此处 $v_1=0$） 为了积分边界层方程，以便得到边界层内各种具有重要实际意义的流动特性，研究出各种有效的近似方法，特别是积分关系式方法，后者是基于采用边界层垂直方向上的纵向速度 v_1 分布的各种近似式的．数值方法比较容易得到具有实际意义的结果．这类方法包括应用于三维流动的方法，其中三维流动是直接积分边界层方程而得到的．

对于边界层内物体表面每条法线上流体速度在外流速度方向上的投影不变号（即没有“回流”）的情况，已经建立一般理论（即存在性和唯一性理论）．

通过计算大 Reynolds 数渐近展开式的邻项可以改进边界层理论，其中包括“匹配”渐近展开方法．例如，由此算出的平板阻力系数的精确度量级可以达到 $\mathrm{Re}^{-3/2}\ln\mathrm{Re}$（主项的量级是 $\mathrm{Re}^{-1/2}$）

在热对流问题中，流体运动发生于有势的质量力场中．这种运动是由于流体各部分受热不均因而密度不同引起的 在 Boussinesq 近似方法中，采用常密度粘性流体模型来研究对流运动，但其运动方程考虑了由于温度不均引起的附加质量力．此方程的形式如下

$$\mathbf{v}_t + v_k\mathbf{v}_{x_k} - \nu\Delta\mathbf{v} = -\mathrm{grad}\,p - \alpha\Delta T\mathbf{f},$$

式中 p 是流体静压增量，ΔT 是与未扰动流体密度相应的温度值的增量，α 是流体受热时的相对体积膨胀系数 这个方程还需要补充以下两个方程 质量守恒方程和运动介质的热传导方程（在这两个方程中流体密度均取为常数，在热传导方程中通常忽略粘性耗散）．

对某些对流运动问题可借助完整的 Navier-Stokes 方程组进行研究，并且用数值方法求解．在电子计算机出现以前，流体力学问题是不可能用完整的 Navier-Stokes 方程求解的，除非由于流动的特殊条件这些方程的非线性项恒等于零 对于计算小 Reynolds 数流动，有许多解 Navier-Stokes 方程的数值计算方法 实现大 Reynolds 数下的数值计算则有困难．这反映出，在此种条件下 Navier-Stokes 方程的解有其自身的特性．例如，业已证明，如果通过充满流体的区域的每个孤立部分的流体总通量等于零，则在所有 Reynolds 数下都存在着稳态边值问题的解．如果此

区域扩展到无穷远，要附加一个条件 无穷远处 $\mathbf{v}\to\mathbf{v}_\infty$. 对于有界区域和小 Reynolds 数情况，此边值问题的解是唯一的和稳定的 当 Reynolds 数增大时，这个唯一的解不再是稳定的，一个新的稳定的稳态解将会出现．当 Reynolds 数增大时，这种流动变化可能出现好几次

已经证明，对于一般三维情况，初值问题和边值问题在平滑的初始数据邻域内是唯一可解的 但总体而言（即对于任意时间间隔和任意流动区域尺度），求这种问题唯一解的问题还没有解决（1977）．看来非定常问题的解在时间进程中变得越来越不规则，可能分岔并进入"湍流"状态．至于解究竟是沿着这个分支还是那个分支延续，靠 Navier-Stokes 模型本身是决定不了的．

参考文献

[1] Кочин, Н Е, Кибель, И А, Розе, Н В, Теоретическая гидромеханика, т 1-2, М -Л, 1963（英译本 Kochin, N E, Kibel, I A and Roze, N V, Theoretical hydrodynamics, Interscience, 1964）

[2] Седов, Л И, Плоские задачи гидродинамики и гэродинамики, 2 изд, М, 1966

[3] Stoker, J J, Water waves, Interscience, 1957

[4] Ладыженская, О А, Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2 изд, М, 1970

[5] Лаврентьев, М А, Шабат, Б В, Проблемы гидродинамики и их математические модели, М, 1973

【补注】 Г Г Черный 撰

参考文献

[A1] Landau, L D, Lifshitz, E M, Fluid mechanics, Addison Wesley（译自俄文，中译本 Л Д 朗道, E M 栗弗席茨，流体力学，高等教育出版社，1983）

[A2] Pai, S I, Viscous flow theory, 1-2, v Nostrand, 1956

[A3] Schlichting, H, Boundary layer theory, McGraw-Hill, 1955（中译本 H 史里希廷，边界层理论，科学出版社，1988）

[A4] Birkhoff, G, Hydrodynamics, Princeton Univ Press, 1960

[A5] Lamb, H, Hydrodynamics, Cambridge Univ Press, 1932

[A6] Milne-Thompson, L M, Theoretical hydrodynamics, Macmillan, 1957（中译本 L M 米尔恩-汤姆森，理论流体动力学，机械工业出版社，1984）

[A7] Prandtl, L, Tietjens, O G, Applied hydro-and aeromechanics, Dover, reprint, 1934

[A8] Prandtl, L, Tietjens, O G, Fundamentals of hydro-and aeromechanics, Dover, reprint, 1934

[A9] Goldstein, S (ed), Modern developments in fluid mechanics, 1-2, Dover, reprint, 1965

金丽珠 译 晏名文 校

类氢原子 [**hydrogen-like atom**, **водородоподобный атом**]

一个量子力学系统，由质量为 M 携带电荷 $+Ze$ 的一个核与质量为 m 具有电荷 $-e$ 的一个电子组成，它们按照 Coulomb 定律相互作用，即它们以反比于核和电子间距离的平方的力相互吸引 在 $Z=1$ 的特殊情况下，当核是一个质子时，类氢原子就是寻常氢原子．μ原子（核 Coulomb 场中一个 μ 子）和电子偶素（由一个电子与一个正电子组成的系统）也可被认为是类氢原子．类氢原子问题是经典力学中和量子力学中一般**二体问题**（two-body problem）的严格可解的特例，是万有引力作用下两个质量体运动的理论中经典 Kepler 问题的量子力学类似问题．在将质心运动分出后，量子力学类氢问题归结为非相对论近似下求解下列 **Schrodinger 方程**（Schrodinger equation），具有约化质量 $m_0=mM/(m+M)$在 Coulomb 势的有心力场中运动的一个粒子的 Schrodinger 方程

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta_r+V(r)-E\right\}\psi(\mathbf{r})=0,\ V(r)=-\frac{Ze^2}{r}\tag{*}$$

由于物理条件所强加的对波函数 $\psi(\mathbf{r})$ 的限制，方程（*）的解存在的情况是 1）对 $E_n=-Z^2e^4m/2\hbar^2n^2$ 和整数 $n\geqslant1$（能量 E 的离散谱），2）对任何 $E>0$（连续能谱） 属于离散谱的解对应于类氢原子中电子的束缚定态，并且是"偶然简并性的"，即，具有不同轨道角动量量子数 $l=0,\quad,n-1$ 的态具有相同能量 E_n，而不仅是它在某个轴上的投影 $m_l(-l\leqslant m_l\leqslant l$, m_l为整数）的态才具有相同能量（寻常简并性）．"偶然简并性"是下列事实的推论：在 Coulomb 势的特殊情况下，Schrodinger 方程（*）不仅对正交变换群 $O(3)$ 是不变式， 它对任何有心力势都是正确的，而且对较大的变换群 $O(4)$ 也是不变式．连续谱的解对应于类氢原子的电离态，即，电子的非束缚态，并且是无穷重简并性的，具有整数值 $l\geqslant0$ 和对一给定 l 的整数值 $m_l(-l\leqslant m_l\leqslant l)$ 的所有态都是可能的．

类氢原子中的相对论性效应包括质量对速度的依存关系以及电子和核的自旋性质，如果 Schrodinger 方程（*）用对核的 Coulomb 势场中电子的相对论性 **Dirac 方程**（Dirac equation）来代替，可以考虑到这些效应．

考虑到相对论性效应和电子自旋，产生对 E_n 的校正，它们依赖于电子的 l 和总角动量量子数 j，后者由电子的 l 和自旋定义，结果消除了类氢原子能级的偶然简并性并确定类氢原子能级离散谱的精细结构． 考虑到核自旋及与绕核旋转的电子的相互作用有关的磁矩，以及考虑到核的有限尺度和四极矩与其他更高阶

多极核磁矩，引进对 E_n 的附加校正，它们定义类氢原子能级的所谓超精细结构

参考文献

[1] Соколов, А А, Лоскутов, Ю М, Тернов, И М, Квантовая механика, 2 изд, М, 1965

В Д Кукин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Messiah, A, Quantum mechanics, 1, North-Holland, 1961

[A2] Flügge, S, Practical quantum mechanics, Springer, 1974

徐锡申 译

超椭圆曲线 [hyper-elliptic curve, гиперэллиптическая кривая]

仿射曲线 $y^2=f(x)$ 的非奇异射影模型，这里 $f(x)$ 是一个没有重根的次数为奇数 n 的多项式（偶次数 $2k$ 的情形可归结为奇次数 $2k-1$ 的情形） 超椭圆曲线的函数域（超椭圆函数域）是有理函数域的二次扩张，从这个意义上讲它是除了有理函数域之外的最简单的代数函数域 超椭圆曲线由二次除子的一维线性系 g_2^1 的存在性所判定，这样的线性系定义了一个该曲线到射影直线上的二次态射 上述超椭圆曲线的亏格为 $(n-1)/2$，因此对不同的奇数 n 这些超椭圆曲线不双有理等价．当 $n=1$ 时是射影直线，$n=3$ 时是椭圆曲线．按惯例亏格 0 和 1 的曲线不称为超椭圆曲线．在亏格 $g>1$ 的超椭圆曲线上正则微分形式之比生成一个亏格 0 的子域，这一性质完全刻画了超椭圆曲线

参考文献

[1] Chevalley, C, Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, Amer Math Soc, 1951

[2] Springer, G, Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1957

[3] Шафаревич, И Р, Основы алгебраической геометрии, М, 1972 (英译本 Shafarevich, I R, Basic algebraic geometry, Springer, 1977)

В Е Воскресенский 撰

【补注】 正文中给出的定义（第一句话）仅在特征不为 2 时成立 一般情形超椭圆曲线可定义为**有理曲线** (rational curve) 的一个二重覆叠（亦见**覆叠曲面** (covering surface)）

参考文献

[A1] Arbarello, E, Cornalba, M, Griffiths, P A and Harris, J, Geometry of algebraic curves, 1, Springer, 1985

刘先仿 译

超椭圆积分 [hyper-elliptic integral, гиперэллиптический интеграл]

一类特殊的 **Abel 积分** (Abelian integral)

$$\int R(z,w)\,dz, \tag{1}$$

其中 R 是 z,w 的**有理函数** (rational function)，变量 z, w 满足一个特殊类型的代数方程

$$w^2 = P(z), \tag{2}$$

这里 $P(z)$ 是一个次数 $m\geqslant5$ 的没有重根的多项式．当 P 的次数 $m=3,4$ 时，它是**椭圆积分** (elliptic integral)，而当 $m=5,6$ 时有时也称为超椭圆的 (ultra-elliptic)．

方程 (2) 对应于一个亏格为 g 的双叶紧 **Riemann 曲面** (Riemann surface) F，其中

$$g=\begin{cases}(m-2)/2, & \text{当 } m \text{ 为偶数时},\\ (m-1)/2, & \text{当 } m \text{ 为奇数时},\end{cases}$$

因此对超椭圆积分有 $g\geqslant2$ 函数 z,w，从而 $R(z,w)$ 都是 F 上的单值函数 而作为定积分的积分式 (1) 由 F 上的某个解析函数沿着一条可求长的路径 L 的**曲线积分** (curvilinear integral) 给出，一般地其积分值完全由 L 本身的起始点和终点所确定．

和 Abel 积分的一般情形一样，任何超椭圆积分均可表示成一些初等函数和具有特殊形式的第一、二、三类典范超椭圆积分的线性组合．因此第一类正规超椭圆积分 (normal hyper-elliptic integral of the first kind) 是第一类超椭圆积分

$$\int \frac{z^{\nu-1}}{w}\,dz, \quad \nu=1, \quad , g,$$

的线性结合，这里 $(z^{\nu-1}/w)dz\,(\nu=1,\cdot\ ,g)$ 对超椭圆曲面 F 的情况是第一类 **Abel 微分** (Abelian differential) 的最简单的基 第二、三类 Abel 微分及相应的超椭圆积分的显式表达式也可容易地算出 ([2])．大体上看，超椭圆积分理论与 Abel 积分的一般理论是一致的．

变量 z,w 的满足上述方程 (2) 的所有有理函数 $R(z,w)$ 形成一个亏格 g 的代数函数的超椭圆域 (hyper-elliptic field)．亏格 $g=1$ 或 2 的紧 Riemann 曲面分别有一个椭圆或超椭圆域 然而当亏格 $g=3$ 或更大时，存在结构复杂的紧 Riemann 曲面使得这一结论不再成立

参考文献

[1] Springer, G, Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1957, Chapt 10

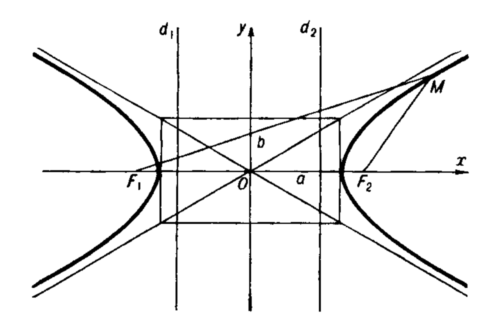
[2] Nevanlinna, R, Uniformisierung, Springer, 1953, Chapt 5

[3] Neumann, K, Vorlesungen uber Riemanns Theorie der Abelschen Integrale, Leipzig, 1884

Е Д Соломенцев 撰 刘先仿 译

双曲线 [hyperbola, гипербола]

当一个圆锥被不过其顶点且与其两叶相交的平面所截时作为截线而得到的平面曲线　双曲线是平面上满足下述条件的点 M 的集合（见图）　这些点与两个给定点 F_1 和 F_2（双曲线的焦点 (foci of a hyperbola)）的距离之差的绝对值为常数且等于 $2a < F_1F_2$　双曲



线两焦点之间的距离称为它的焦距 (focal distance)，记作 $2c$. 线段 F_1F_2 的中点称为双曲线的中心 (centre of a hyperbola)　过双曲线两焦点的直线称为双曲线的实轴 (real axis) 或焦轴 (focal axis)　通过双曲线的中心且垂直于实轴的直线称为双曲线的虚轴 (imaginary axis)　双曲线的实轴和虚轴是它的对称轴　数 $e = c/a < 1$ 称为双曲线的离心率 (eccentricity)　过双曲线中心的任何直线都是它的直径 (diameter)　双曲线平行弦的中点都处于它的一条直径上　双曲线的对应于给定焦点 F 的准线 (directrix) 是垂直于实轴的直线 d，它与中心的距离为 a/e 且与 F 处于中心的同一侧. 双曲线具有两条准线，并具有两条渐近线

$$y = \pm\frac{b}{a}x,$$

其中 $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

双曲线是**二次曲线** (second-order curve)　其典范方程具有下列形式

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

其中 a 和 $b=\sqrt{c^2 - a^2}$ 是双曲线的两个半轴，x 和 y 是流动坐标　双曲线在点 (x_0, y_0) 上的切线的方程是

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

双曲线的焦参数 (focal parameter)（过双曲线的焦点且垂直于焦轴的弦长之半）等于 b^2/a　双曲线的方程可以通过焦参数 p 写成

$$\rho = \frac{p}{1+e\cos\varphi},$$

其中 ρ, φ 是极坐标，$\pi - \varphi_0 < \varphi < \pi + \varphi_0$，这里 $2\varphi_0$ 是两条渐近线之间的夹角.

如果 $a = b$，则该双曲线称为等轴双曲线 (equilateral hyperbola)　等轴双曲线的两条渐近线是相互垂直的；如果把它们取作坐标轴，则等轴双曲线的方程是

$$y = \frac{k}{x},$$

即等轴双曲线是反比关系的图形　　А Б Иванов 撰

【补注】　仅涉及仿射概念的定义如下所述·　双曲线是具有两个实无穷远点的二次曲线 (conic)

参考文献

[A1] Berger, M , Geometry, Springer, 1987 (中译本　M 贝尔热，几何，科学出版社，1987 – 1991)

[A2] Coxeter, H　S　M , Introduction to geometry, Wiley, 1961

张鸿林 译

双曲柱面 [hyperbolic cylinder, гиперболический цилиндр]

一个直圆柱面（见**二次曲面** (surface of the second order)），其导线是**双曲线** (hyperbola)　双曲柱面的典范方程具有下列形式·

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

А Б Иванов 撰　张鸿林 译

双曲函数 [hyperbolic functions, гиперболические функции]

由下列公式定义的函数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad (1)$$

——双曲正弦 (hyperbolic sine)，和

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad (2)$$

——双曲余弦 (hyperbolic cosine)　有时也考虑双曲正切 (hyperbolic tangent)

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

也采用另一些表示法　sh x, Sh x, ch x, Ch x, tgh x, th x, Th x　这些函数的图形如图 1 所示

一些基本关系式是

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$
$$\sinh(x \pm y) = \sinh x\cosh y \pm \cosh x\sinh y,$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh x\cosh y \pm \sinh x\sinh y,$$
$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x\tanh y},$$
$$\sinh 2x = 2\sinh x\cosh x,$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

双曲函数的几何解释与**三角函数** (trigonometric

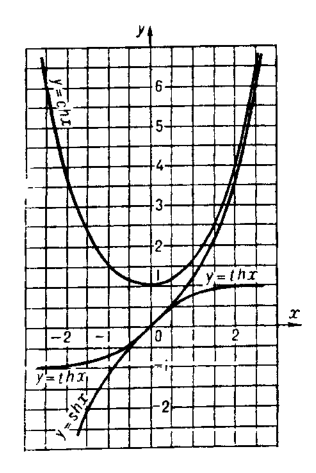


图 1

function)是类似的(图2). 利用双曲线的参数方程

$$x=\cosh t,\ y=\sinh t$$

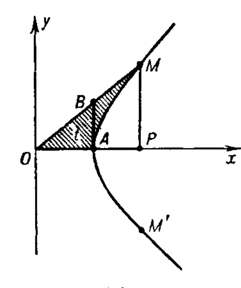


图 2

可以把等轴双曲线 $x^2-y^2=1$ 上的点 M 的横坐标 $x=OP$ 和纵坐标 $y=PM$ 解释为双曲正弦和双曲余弦，双曲正切是线段 AB 对应于点 M 的参数 t 等于扇形 OAM 的面积的二倍，其中 AM 是双曲线的弧长. 对应于点 $M'(y<0)$ 的参数 t 是负的

反双曲函数 (inverse hyperbolic functions) 由下列公式来定义·

$$\operatorname{Ar}\sinh x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$

$$\operatorname{Ar}\cosh x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),\ x\geqslant 1,$$

$$\operatorname{Ar}\tanh x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ |x|<1$$

双曲函数的导数和基本积分公式是

$$\frac{d}{dx}\sinh x=\cosh x,\ \frac{d}{dx}\cosh x=\sinh x,$$

$$\frac{d}{dx}\tanh x=\frac{1}{\cosh^2 x},$$

$$\int\sinh x\,dx=\cosh x+C,\ \int\cosh x\,dx=\sinh x+C,$$

$$\int\tanh x\,dx=\ln\cosh x+C,$$

$$\int\frac{dx}{\cosh^2 x}=\tanh x+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sinh^2 x}=\frac{-1}{\tanh x}+C$$

在整个复变量 z 的平面上，双曲函数 $\sinh z$ 和 $\cosh z$ 也可以由下列级数来定义

$$\sinh z=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdot\cdot,$$

$$\cosh x=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdot\cdot,$$

于是

$$\cosh z=\cos(iz),\ i\sinh z=\sin(iz) \qquad (3)$$

已有大量的双曲函数数值表. 也可由关于 e^x 和 e^{-x} 的数值表得到双曲函数的值

参考文献

[1] Jahnke, E, Emde, F and Losch, F, Tafeln hoheren Funktionen, Teubner, 1966

[2] Таблицы круговых и гиперболических синусов и косинусов в радианной мере угла, M, 1958

[3] Таблицы e^x и e^{-x}, M, 1955

В И Битюцков 撰

【补注】 可以把定义关系式(1),(2)的右端解析延拓到整个复平面 然后，由 **Euler 公式** (Euler formulas) 可知(3)成立，由此不难推出级数展开式.

参考文献

[A1] Segun, A and Abramowitz, M, Handbook of mathematical functions, Appl Math Ser, 55, Nat Bur Stand, 1970

[A2] Dwight, H B, Tables of integrals and other mathematical data, Macmillan, 1963

张鸿林 译

双曲几何学 [hyperbolic geometry, гиперболическая геометрия]

同 **Лобачевский 几何学** (Lobachevskii geometry)

双曲度量 [hyperbolic metric, гиперболическая метрика], 双曲测度 (hyperbolic measure)

复平面的具有至少三个边界点的区域中的一种度量，它在该区域的自同构下不变。

圆盘 $E=\{z\ |z|<1\}$ 的双曲度量由线素

$$d\sigma_z=\frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

定义，其中 $|dz|$ 是 Euclid 长度的线素. E 中双曲度量的引入导出 **Лобачевский 几何学** (Lobachevskii geometry) 的一个模型 在这个模型中，E 内与 $|z|=1$ 正交的 Euclid 圆周起着直线的作用，圆周 $|z|=1$ 起反常点的作用. E 到自身的分式线性变换视为 E 中的运动. 位于 E 内的曲线 L 的双曲长度 (hyperbolic length) 由公

式

$$\mu_E(L)=\int_L \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

定义．E内两点z_1和z_2之间的双曲距离（hyperbolic distance）为

$$r_E(z_1,z_2)=\frac{1}{2}\ln\frac{|1-z_1\bar{z}_2|+|z_1-z_2|}{|1-z_1\bar{z}_2|-|z_1-z_2|}$$

E中到$z_0(z_0\in E)$的双曲距离不超过给定数$R(R>0)$的点的集合，即E中具有双曲中心z_0和双曲半径R的双曲圆盘（hyperbolic disc），是一个Euclid圆盘，且当$z_0\neq 0$时，其中心不同于z_0．

E内区域B的双曲面积（hyperbolic area）由公式

$$\Delta_E(B)=\iint_B \frac{dx\,dy}{(1-|z|^2)^2}\ ,\ z=x+iy$$

定义．量$\mu_E(L)$，$r_E(z_1,z_2)$，和$\Delta_E(B)$关于E到自身的分式线性变换不变．

z平面的具有至少三个边界点的任一区域D中的双曲度量，定义为在D到E的**共形映射**（conformal mapping）$\zeta=\zeta(z)$下E中双曲度量的原象，其线素由公式

$$d\sigma_z=\frac{|\zeta'(z)||dz|}{1-|\zeta(z)|^2}$$

定义．至多有两个边界点的区域不再能共形映射为圆盘．量

$$\rho_D(z)=\frac{|\zeta'(z)|}{1-|\zeta(z)|^2}$$

称为D的双曲度量的密度（density）．区域D的双曲度量不依赖于映射函数或其分支的选取，而由D完全确定．位于D内的曲线L的双曲长度由公式

$$\mu_D(L)=\int_L \rho_D(z)\,|dz|$$

给出．区域D中两点z_1和z_2之间的双曲距离（hyperbolic distance）为

$$r_D(z_1,z_2)=\frac{1}{2}\ln\frac{|1-\zeta(z_1)\overline{\zeta(z_2)}|+|\zeta(z_1)-\zeta(z_2)|}{|1-\zeta(z_1)\overline{\zeta(z_2)}|-|\zeta(z_1)-\zeta(z_2)|}\ ,$$

其中$\zeta(z)$是把D共形映射为E的任一函数．D中的双曲圆盘（hyperbolic circle），如同圆盘E的情形，是D中到D的一个指定点（双曲中心）的双曲距离不超过一个给定的正数（双曲半径）的点的集合．若区域D是多连通的，D中的双曲圆盘通常是一个多连通域．位于D内的区域B的双曲面积（hyperbolic area），由公式

$$\Delta_D(B)=\iint_B \rho_D^2(z)\,dx\,dy$$

给出．量$\mu_D(L)$，$r_D(z_1,z_2)$和$\Delta_D(B)$在D的共形映射下不变（D中双曲度量的主要性质之一）．

参考文献

[1] Голузин, Г М, Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд, М, 1966（中译本 Г М 戈鲁辛，复变函数的几何理论，科学出版社，1956）

[2] Стоилов, С, Теория функций комплексного переменного, пер с рум, т 1－2, М, 1962

Г В Кузьмина 撰

【补注】推广到高维区域（主要指强伪凸区域）有例如Carathéodory度量（Carathéodory metric），小林度量（Kobayashi metric），以及Bergman度量（Bergman metric）（见**Bergman核函数**（Bergman kernel function））．

设$\Omega\subset\mathbf{C}^n$是区域，$z\in\Omega$，而$\xi\in\mathbf{C}^n$．以$B(\Omega)$表示全纯映射$f:\Omega\to B$的集合，$B$是$\mathbf{C}^n$中的单位球，则Carathéodory度量（的无穷小形式）为

$$F_C(z,\xi)=\sup_{\substack{f\in B(\Omega)\\ f(z)=0}}\left|\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}(z)\cdot\xi_j\right|.$$

小林度量（的无穷小形式）为

$$F_K(z,\xi)=\inf\{\alpha:\alpha>0\text{ 且存在全纯映射 } f:B\to\Omega \text{ 满足 } f(z)=0,\ (f'(0))(1,0,\cdots,0)=\xi/\alpha\}$$

有时取别的区域（如单位多圆柱）以代替B．（见[A2]，[A3]）

对于这些度量可相应定义距离和面积．

参考文献

[A1] Ahlfors, L V, Conformal invariants, topics in geometric function theory, McGraw-Hill, 1973

[A2] Lang, S, Introduction to complex hyperbolic spaces, Springer, 1987

[A3] Krantz, S G, Function theory of several complex variables, Wiley (Interscience), 1982

杨维奇 译

双曲度量原理［hyperbolic metric, principle of the, гиперболической метрики принцип］

假定区域D和G分别位于z平面和w平面内，并假定每个区域有至少三个边界点，设$w=f(z)$是D内全纯函数取G中的值，并设$d\sigma_z$和$d\sigma_w$分别是D和G在点z和$w=f(z)$处的双曲度量的线素，则下面的不等式成立．

$$d\sigma_w\leqslant d\sigma_z$$

在任一点$z_0\in D$等号成立，如果在D内$f(z)\equiv w[\zeta(z)]$，其中函数$\zeta=\zeta(z)$把D共形映射成圆盘$E=\{\zeta:|\zeta|<1\}$，函数$w=w(\zeta)$把E共形映射成G．双曲度量原理把**Schwarz引理**（Schwarz lemma）推广到可以定义双曲

度量的多连通域．

为了对双曲度量原理作系统的阐述，可以将函数 $f(z)$ 在 D 内的解析性假设代之以更一般的假设，即 $f(z)$ 是一个解析函数，在 D 内由它的任何一个元素确定，并且在 D 内可以沿任何路径进行解析开拓

同一原理也可以描述为关于曲线的双曲长度、双曲距离或双曲面积在给定的映射下的性态．事实上，若 L 是 D 内可求长曲线，则

$$\mu_G(f(L)) \leqslant \mu_D(L)$$

（记号的意义见**双曲度量**（hyperbolic metric））．若 z_1 和 z_2 是 D 中两点，则

$$r_G(f(z_1), f(z_2)) \leqslant r_D(z_1, z_2)$$

若 B 是 D 中一区域，则

$$\Delta_G(f(B)) \leqslant \Delta_D(B)$$

在这些不等式中等号只在上面提到的情况下成立．

上述用于双曲距离的结果表明，在映射 $w=f(z)$ 下，中心在点 $z_0 \in D$ 的双曲圆盘的象包含在中心在点 $w_0=f(z_0)$ 且具有同一双曲半径的双曲圆盘内．

这一结果是**共形映射**（conformal mapping）理论中的下述事实在多连通域情形的推广（Schwatz 引理的不变形式（invariant form）） 在由 E 中正则函数

$$w=f(z), \ |f(z)|<1$$

给出的 E 的映射下，E 的点 z_1 和 z_2 的象之间的双曲距离不超过 z_1 和 z_2 之间的双曲距离，且只对于 E 到自身的双线性变换才等于这一距离

双曲度量原理同如下的 **Lindelöf 原理**（Lindelöf principle）相联系．若区域 D 和 G 均有 Green 函数，并且是单连通的，则这两个原理相同．若 D 单连通而 G 多连通，则对于包含 D 中由不等式 $g_D(z, z_0)>\lambda$ 确定的双曲圆盘的象的区域，双曲度量原理给出它在映射 $w=f(z)$ 下的更精确的估计，其中 $g_D(z, z_0)$ 是在 $z_0 \in D$ 有对数极点的 D 的 Green 函数．双曲度量原理亦能应用于 Lindelöf 原理不适用的情形——例如，应用于至少有三个边界点但没有 Green 函数的区域．

Г В Кузьмина 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ahlfors, L V, Conformal invariants topics in geometric function theory, McGraw-Hill, 1973

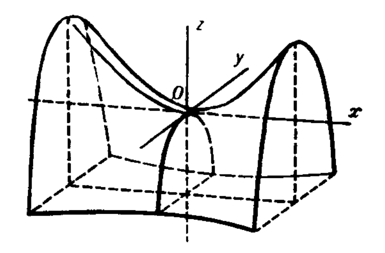
杨维奇 译

双曲抛物面［**hyperbolic paraboloid**，**гиперболический параболоид**］

一个非闭无心**二次曲面**（surface of the second order） 在适当的坐标系中（见图），双曲抛物面的方程是

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \text{ 其中 } p, q > 0$$

当双曲抛物面被平行于平面 xOz 和 yOz 的平面所截时，其截线是抛物线，当被平行于平面 xOy 的平面所截时，其截线是双曲线（当被平面 xOy 所截时，其截线是两条直线）．双曲抛物面的对称轴称为它的轴（axis），双曲抛物面与它的轴的交点称为它的顶点（apex） 如果 $p=q$，则双曲抛物面具有两个对称轴



双曲抛物面是**直纹曲面**（ruled surface），通过给定点 (x_0, y_0, z_0) 的直纹母线的方程具有下列形式．

$$\frac{x-x_0}{\sqrt{p}} = \frac{y-y_0}{\sqrt{q}} = \frac{z-z_0}{\dfrac{x_0}{\sqrt{p}} - \dfrac{y_0}{\sqrt{q}}},$$

$$\frac{x-x_0}{\sqrt{p}} = \frac{y-y_0}{-\sqrt{q}} = \frac{z-z_0}{\dfrac{x_0}{\sqrt{p}} - \dfrac{y_0}{\sqrt{q}}}$$

А Б Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M, Geometry, Springer, 1987（中译本 M 贝尔热，几何，科学出版社，1987－1991）

[A2] Hilbert, D and Cohn-Vossen, S, Geometry and the imagination, Chelsea, reprint, 1952（译自德文）．

张鸿林 译

双曲型偏微分方程［**hyperbolic partial differential equation**，**гиперболического типа уравнение**］，在一给定点 $M(x_1, \ldots, x_n)$ 处的

一个偏微分方程，对于它，在点 M 的一个邻域中任意非特征曲面（见**特征曲面**（characteristic surface））上给定初始数据的 **Cauchy 问题**（Cauchy problem）是唯一可解的．特别地，其法锥面无虚腔的偏微分方程是双曲型方程 令 $D_i = \partial/\partial x_i (i=1, \ldots, n)$，$H(D_1, \cdots, D_n)$ 是一个 m 次齐次多项式，多项式 F 的次数小于 m，那么微分方程

$$L(u)=H(D_1, \ldots, D_n)u + F(D_1, \cdots, D_n)u$$

$$+G(x)=0 \quad (*)$$

称为双曲型偏微分方程，如果当诸变量 $\xi_1, \quad , \xi_n$ 中的 $n-1$ 个固定时，它的特征方程

$$Q(\xi_1, \quad , \xi_n) = H(\xi_1, \quad , \xi_n) = 0$$

关于另一个变量有 m 个不同的实解．任一具有实系数的一阶（$m=1$）方程（*）是双曲型偏微分方程．二阶方程

$$L(u) = u_{tt} - \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} D_i D_j u + Fu + G = 0$$

是双曲型的，如果二次型

$$\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j$$

是正定的　　　　B Л Рождественский 撰

【补注】 在诸变量 $\xi_1, \quad , \xi_n$ 中，对于其中 $n-1$ 个变量的每组固定的值，使 $H(\xi_1, \quad , \xi_n)=0$ 有 m 个不同的实解的那个特殊的变量通常被取为 t（时间）．此时即论及关于 t 方向的（严格）双曲型方程（equation of (strictly) hyperbolic type） 更一般地还考虑关于一个向量 N 的双曲性（[A1]）

一个具有主部 P_m 的 m 次多项式 P 称为关于实向量 N 是双曲型的（hyperbolic），如果 $P_m(N) \neq 0$，并且存在一个实数 $\tau_0 > 0$，使得当 $\xi \in \mathbf{R}^n$，$\tau < \tau_0$ 时，

$$P(\xi + i\tau N) \neq 0$$

如果 $P_m(N) \neq 0$，并且对于每个实 $\xi \neq 0$，$P_m(\xi + \tau N) = 0$ 只有单实根，那么 P 称为严格双曲型的（strictly hyperbolic），或者是 Петровский 意义下的双曲型的．

数据给出在非特征平面上的常系数微分算子 P 的 Cauchy 问题对于任意的低阶项都是适定的，当且仅当 P 是严格双曲型的．关于变系数多项式 P 的类似事实的讨论，见［A2］

一个高阶线性偏微分方程组

$$\sum_{j=1}^{l} \sum_{|\alpha| \leq N_j} a_{\alpha}^{ij}(x) \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} u_j = 0, \; i = 1, \quad , l,$$

其中 $\alpha = (\alpha_0, \quad , \alpha_n)$，在 Петровский 意义下是双曲型偏微分方程组，如果在微分算子环中计算的行列式

$$\det\left(\sum_{|\alpha| \leq N_j} a_{\alpha}^{ij} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} \right)$$

在 Петровский 意义下（作为 $N = \sum N_j$ 次的一个多项式）是一个双曲型多项式． Петровский 意义下的双曲型组的 Cauchy 问题是适定的（[A3]，[A4]）

也用术语强双曲型的（strongly hyperbolic）来代替严格双曲型的，用弱双曲型的（weakly hyperbolic）来代替双曲型的（因而此情形中 P 的低阶项是起作用的）

参考文献

[A1] Hormander, L, The analysis of linear partial differential operators, II, Springer, 1983, Chapt XII

[A2] Hormander, L, The analysis of linear partial differential operators, III, Springer, 1985, Chapt XXIII

[A3] Petrovskiĭ, I G, Ueber das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen, *Mat Sb* (N S), **2**(**44**) (1937), 2, 815 - 870

[A4] Mizohata, S, The theory of partial differential equations, Cambridge Univ Press, 1973

[A5] Chaillou, J, Hyperbolic differential polynomials, Reidel, 1979

[A6] Chazarain, J, Operateurs hyperboliques à caractenstique de multiplicite constante, *Ann Inst Fourier* **24** (1974), 173 - 202

[A7] Gårding, L, Linear hyperbolic equations with constant coefficients, *Acta Math*, **85** (1951), 1 - 62

[A8] Oleinik, O A, On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, *Comm Pure Appl Math*, **23** (1970), 569 - 586

陆柱家 译

双曲型偏微分方程数值方法 [**hyperbolic partial differential equation, numerical methods**, **гиперболического типа уравнение, численные методы решения**]

用数值算法求解双曲型偏微分方程的一种方法．

各种数学模型经常归结为双曲型偏微分方程．仅有很少的这类方程可由解析方法精确地解出 最广泛采用的方法是数值方法．它们在求解连续介质力学各种问题中得到了广泛的应用，特别对于拟线性的气体动力学方程更是如此（见**气体动力学的数值方法**（gas dynamics, numerical methods of））

解双曲型偏微分方程的数值方法可以分成两组 1) 明显分离出解的奇异性的方法，2) 间接计算方法，其中奇异性不能直接分离出，但是可以在计算过程中做为解陡变的区域而得到．

第一组包括，例如，**特征线法**（method of characteristics），它仅适用于解双曲型偏微分方程，并已经在求解气体动力学的问题中得到广泛应用．

第二组中的方法产生非奇异**差分格式**（difference scheme）．例如，给定双曲型方程

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (1)$$

其中 A 是 $(m \times m)$ 矩阵，它具有 m 个相异的实特征值，而 $w = w(x, t)$ 是具有 m 个分量的向量函数．矩阵 A 既可以是 x, t 的函数（在这种情形下 (1) 是线性双曲型方程组），也可以依赖 $w = w(x, t)$（拟线性方程组）

在后一种情形中，设方程组 (1) 已改写成散度形式

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial x}+\psi,$$

其中 F 是 w, x, t 的向量函数，使得 $A=\frac{dF}{dw}$，而 ψ 是 w, x, t 的向量函数．在最重要的情形中，A, F 和 ψ 仅依赖于 w 对于 (1)，可以提出 **Cauchy 问题** (Cauchy problem)

$$w(x,0)=w_0(x),$$

并附加适当的边界条件

通常，构造有限差分格式的基础是在差分网格构成的周线上用某些求积公式逼近微分方程所对应的守恒律．如果解是光滑的，逼近积分守恒定律等价于直接逼近相应的微分方程 有限差分格式必须满足逼近和稳定性的要求．这些要求是彼此独立的 在某种意义上是彼此矛盾的 在微分方程组的散度形式中，有限差分格式的散度条件 (或守恒条件) 是基本的．此外，有限差分格式还需满足几个必要条件，比如耗散性、经济等 对于类型 (1) 的线性方程，两层显式有限差分格式具有如下形式

$$w_j^{n+1}=\Lambda w_j^n,$$

其中 Λ 为一有限算子，即它可以表示为

$$\Lambda=\sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} B_\alpha T_1^\alpha,$$

其中 B_α 是 $(m\times m)$ 矩阵，它的系数依赖于 τ, h, x, t; $t=n\tau$, $x=jh$, τ, h 分别为在 t 轴和 x 轴上有限差分格子的步长，数 q_1 和 q_2 都不依赖于 $\tau, h, \kappa=\tau/h$, T_1 是关于 x 的移位算子．

相容性条件给出如下关系式

$$\sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} B_\alpha=I,$$

$$\sum_{\alpha=-q_1}^{q_2}\alpha B_\alpha=\kappa A,$$

其中 I 是单位矩阵．

隐式有限差分格式可以写为

$$\Lambda_1 w_j^{n+1}=\Lambda_0 w_j^n,$$

其中 Λ_1 和 Λ_0 是有限算子，

$$\Lambda_k=\sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} B_\alpha^k T_1^\alpha,\quad k=0,\ 1,$$

其中 B_α^k 是 $(m\times m)$ 矩阵，它依赖于 τ, h, x, t，而且算子 Λ_1 至少包含两个非零矩阵 B_α^1．假定算子 Λ_1 是可逆的，但它的逆不一定是有限的．

根据差分格式的逼近性质，可以把它们划分成两类 条件逼近格式和绝对逼近格式．当 τ 和 h 之间以某种依赖关系 $\tau=\varphi(h)$ 趋向于零时，条件逼近有限差分格式逼近原微分方程 当 τ 和 h 按任意规律趋于零时，绝对逼近有限差分格式逼近原微分方程．

在条件逼近的情况下，随着极限过渡条件不同有限差分方程可以逼近不同的微分方程．例如，对于方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad a=\text{常数}>0, \tag{2}$$

例如，可以考虑两个有限差分格式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{u_j^{n+1}-\bar{u}_j^n}{\tau}+a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=0,\\&\bar{u}_j^n=\frac{1}{2}(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n),\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}=0. \tag{4}$$

如果极限过渡服从的规律是

$$\frac{\tau}{h}=\text{常数},$$

则有限差分格式 (3) 逼近方程 (2)，而当

$$\frac{\tau}{h^2}=\text{常数}$$

时，它逼近方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\quad \mu=\frac{h^2}{2\tau}$$

有限差分格式 (4) 绝对逼近方程 (2)．

同样，有限差分格式也可以分成条件稳定格式和绝对稳定格式 例如，如果条件 (Courant 条件 (Courant condition))

$$\frac{\tau a}{h}\leqslant 1$$

得到满足，那么有限差分格式 (4) 是稳定的．也就是说，它是条件稳定的 另一方面，隐式有限差分格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2h}=0$$

对 τ 和 h 之间的所有关系都是稳定的，也就是说，它是绝对稳定的

显式有限差分格式实现起来是简单的，但它不是条件稳定的就是条件逼近的 在绝对逼近的有限差分

格式的情形下，显式格式的稳定性条件一般有如下形式

$$\tau \leqslant 常数 \cdot h^{\beta} (\beta \geqslant 1),$$

它造成过小的步长 τ 以及计算中不适当的工作量．所有的绝对稳定绝对逼近的格式都属于隐式格式类

隐式有限差分格式在实现从一个时间层到另一个时间层的过渡上比较复杂，但步长大小 τ 通常可以取得任意大，并且可以仅由精确度的考虑来确定

关于逼近线性微分方程的有限差分格式的收敛性定理，使得把研究这种格式的收敛性问题转化为研究其稳定性问题成为可能．

在解是光滑的情况下，研究对应于双曲型方程的有限差分格式的逼近性问题相当简单，并有局部特点，其实就等于 Taylor 级数展开，如果解是间断的，这个问题变得比较困难，并要验证积分守恒定律．稳定性的研究要复杂得多

可用 **Fourier 法** (Fourier method) 研究逼近常系数双曲型方程的有限差分格式的稳定性——也就是估计有限差分格式的一步算子的 Fourier 变换的范数．因为一步算子的 Fourier 变换矩阵的谱半径不超过该矩阵的范数，稳定性的一个必要准则如下　一个有限差分格式是稳定的，其一步算子 Fourier 变换的谱半径必不超过 $1+O(\tau)$，其中 τ 是该格式沿时间 t 轴的步长．这也是变系数有限差分格式稳定的必要条件．如果再加上某些附加限制，则亦为充分条件．下述方法可用于研究变系数有限差分格式以及某些非线性方程　优势化或先验估计法及局部代数法．

先验估计法类似于关于微分方程的相应方法，但在有限差分的情形下，实现这种方法会遇到较大的困难，和微分方程理论中先验估计方法不同，由于有限差分分析的特点，很多关系式在这里都有很复杂的形式

最简单的优势估计是估计正系数有限差分格式

例如，考虑当 $a=a(x)$ 时方程 (2) 的下述有限差分格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a_j\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}=0,\quad a_j=a(jh). \tag{5}$$

这时，如果

$$0\leqslant 1-\kappa_j\leqslant 1,\quad \kappa_j=\frac{\tau a_j}{h},$$

则下列估计式成立

$$\|u^{n+1}\|\leqslant\|u^n\|,$$

其中

$$\|u^n\|=\max_j|u_j^n|$$

由此可知，格式 (5) 在空间 C 中是一致稳定的．这个估计同样适用于逼近不变形式下双曲型方程组的有限差分格式．

一类尽管有限制但非常重要的有限差分格式是具有正系数和矩阵的格式 (所谓强格式 (majorant schemes))　如果这种格式的系数是对称的、正的和关于 x 是 Lipschitz 连续的，那么它们在 L_2 空间中是稳定的．一般，存在一阶逼近的有限差分格式，其中的导数由单侧差分逼近．当取中心差分进行较高阶逼近时，不一定得到正系数　在这种情况下，采用在 W_2^p 空间中的更一般形式的先验估计．

例如，设 (1) 是声学格式，其中

$$w=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0&a\\1&0\end{pmatrix},$$

并设函数 $a(x,t)$, $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 是关于 x 以 2π 为周期的周期函数，对有限差分格式

$$\left.\begin{aligned}\frac{u^{n+1}(x)-u^n(x)}{\tau}&=a\,\frac{v^{n+1}(x+h)-v^{n+1}(x)}{h}\\ \frac{v^{n+1}(x)-v^n(x)}{\tau}&=\frac{u^{n+1}(x)-u^{n+1}(x-h)}{h}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

的先验估计具有形式

$$\|E^{n+1}\|^2\leqslant\frac{1+b_1\tau}{1+b_2\tau}\|E^n\|^2,$$

其中

$$\|E\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}(u^2+av^2)\,dx,$$

$$b_1=\sup_{x,n,\tau}\left|\frac{a^{n+1}(x)-a^n(x)}{\tau a^n(x)}\right|,$$

$$b_2=\sup_{x\ n\ h}\left[\frac{1}{\sqrt{a^{n+1}(x+h)}}\left|\frac{a^{n+1}(x+h)-a^{n+1}(x)}{h}\right|\right]$$

给出的估计证明了有限差分格式 (6) 的稳定性，它类似于声学方程组的能量不等式．

局部代数方法基于研究局部有限差分算子的性质，该算子是由相应的变系数有限差分算子通过“冻结”其系数而得到的　这样，便可用分析一族常系数有限差分算子的稳定性来代替分析变系数有限差分算子的稳定性．局部稳定性准则是微分方程理论中采用的“冻结”系数法的推广

局部稳定性准则和耗散稳定性准则密切相关．一个有限差分格式称为 v 阶耗散的，其中 v 为偶数，如果存在 $\delta>0$，使得

$$|\rho| \leqslant 1-\delta|\xi|^{\nu},$$
$$|\xi|=|kh| \leqslant \pi,$$

其中 ρ 是有限差分格式的过渡矩阵（一步算子的 Fourier 变换）的具有最大模的特征值，k 是对偶变量．如果格式的逼近阶数为 $2r+1\,(2r+2)$，$r=0, 1,$ ，并且它是耗散的，耗散阶数为 $2r+2\,(2r+4)$，那么对于具有 Hermite 矩阵的一阶双曲型微分方程组，该格式在空间 L_2 中是稳定的．

在研究关于非线性双曲型方程（特别关于气动力学方程）的有限差分格式的稳定性时使用微分逼近方法，其中用分析其微分逼近来代替分析有限差分格式．

例如，对于方程 (2) 的有限差分格式 (4) 的微分逼近构造如下．把 (4) 中的函数

$$u_j^{n+1}=u(jh, (n+1)\tau),$$
$$u_{j-1}^{n}=u\ ((j-1)h,\ n\tau)$$

在点 $x=jh$，$t=n\tau$ 展开成关于参数 τ 和 h 的 Taylor 级数，生成有限差分格式的 Γ 形微分表示式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{l=2}^{\infty}\frac{\tau^{l-1}}{l!}\frac{\partial^l u}{\partial t^l}+a\frac{\partial u}{\partial x}+a\sum_{l=2}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}h^l}{l!}\frac{\partial^l u}{\partial x^l}=0. \tag{7}$$

从 (7) 消去导数

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^3 u}{\partial t^3},$$

产生格式 (4) 的 Π 形微分表示式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{l=2}^{\infty}C_l\frac{\partial^l u}{\partial x^l}, \tag{8}$$

其中 C_l 是某些依赖于 τ, h, a 的系数，并有 $C_l=O(\tau^{l-1}, h^{l-1})$．从 (7) 和 (8) 消去阶为 $O(\tau^2, h^2)$ 的项，分别生成格式 (4) 的 Γ 形一阶微分逼近

$$\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{ah}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

和格式 (4) 的 Π 形一阶微分逼近

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=C_2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$C_2=\frac{ah}{2}\left[1-\frac{a\tau}{h}\right] \tag{9}$$

在线性情形下，对于几种有限差分格式已经证明：如果一阶微分逼近是正确的，那么相应的有限差分格式就是稳定的．因而，对于前面的格式 (4) 来说，(9) 式正确意味着 $C_2 \geqslant 0$，也就是 $a\tau/h \leqslant 1$ 成立是格式稳定性的必要充分条件　方程 (8) 中偶数阶导数项保证有限差分格式的耗散性质，而奇数阶导数项决定其色散性质．

有限差分格式 (4) 的耗散的大小为

$$d=1-|\rho|^2=1-\exp\left[\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{\tau}{h^{2l}}C_{2l}\xi^{2l}\right],$$

其中

$$\rho=1-\frac{a\tau}{h}(1-e^{i\xi})$$

是格式的放大因子，格式 (4) 的色散的大小为

$$\kappa=\kappa a\xi-\arg\rho=\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{\tau}{h^{2l+1}}C_{2l+1}\xi^{2l+1}.$$

(8) 中的耗散项决定了格式的近似粘性性质（即有限差分格式中的某种平滑机制）　耗散项的形式既由在初始微分方程中引入的人工项也由有限差分格式构造本身所决定　一阶微分逼近产生了近似粘性的主项　微分逼近方法广泛地用于研究非线性方程的差分格式，并可以解释在具体计算中可能遇到的各种有限差分格式的不稳定效应，而且 Fourier 方法不能局部上发现这种不稳定性．

在多维情况下，构造有限差分格式基于分裂法（弱逼近）和**分步法** (fractional steps, method of)，用这些方法可以把积分原来的多维方程化为积分结构比较简单的方程

用有限元法可以发展求解双曲型方程的方法，可以把有限元法看成在特殊不规则格子上的有限差分法．

参考文献

[1] Годунов, С К , Рябенький, В С , Разностные схемы, М , 1973

[2] Richtmyer, R D and Morton, K , Difference methods for initial-value problems, Wiley(Interscience), 1967

[3] Рождественский, Б Л , Яненко, Н Н , Системы квазилинейных уравнений , М , 1968(英译本 Rozhdestvenskiĭ, B L and Yanenko, N N , Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics, *Amer Math Soc* , 1983)

[4] Самарский, А А , Гулин, А В , Устойчивость разностных схем, М , 1973.

[5] Яненко, Н Н , Шокин, Ю И ,《Сиб матем ж 》, **10** (1969), 5, 1173 – 1187

[6] Сердюкова, С И ,《Докл АН СССР》, **208** (1973), 1, 52 – 55

Ю И Шокин, Н Н Яненко 撰

【补注】 分析差分格式稳定性的 Fourier 法通常称为**正规模式分析** (normal mode analysis)．与此有关的有用的参考文献是 [A8]

有一种迅速发展的理论，其目的在于寻找对于像

激波这样现象的物理上有意义的并可采用的逼近方法(见**激波的数学理论**(shock waves, mathematical theory of)).特别是,全变差下降格式(TVD 格式)(total-variation diminishing schemes)和通量有限格式(flux-limiter schemes)的引入已经产生一些有限差分方法,它们在空间和时间上都是二阶的,并且用到守恒律时具有 TVD 或者有限通量性质

参考文献

[A1] Forsythe, G E and Wasow, W R, Finite difference methods for partial differential equations, Wiley, 1960

[A2] Garabedian, P R, Partial differential equations, Wiley, 1964

[A3] Gladwell, I and Wait, R (eds), A survey of numerical methods for partial differential equations, Clarendon Press, 1979

[A4] Mitchell, A R and Griffiths, D F, The finite difference method in partial differential equations, Wiley, 1980

[A5] Samarskii, A A, Theorie der Differenzverfahren, Geest und portig, 1984(译自俄文)

[A6] Smith, G D, Numerical solution of partial differential equations, Oxford Univ Press, 1977

[A7] Yanenko, N N, The method of fractional steps, the solution of problems of mathematical physics in several variables, Springer, 1971(译自俄文).

[A8] Vichnevetsky, R and Bowles, J B, Fourier analysis of numerical approximations of hyperbolic equations, SIAM, 1982

[A9] Harten, A, On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes, *SIAM J Numer Anal*, **21**(1984), 1-23

蔡大用 译

双曲点[hyperbolic point, гиперболическая точка]

1) 曲面的双曲点(hyperbolic point of a surface)是一个点,在该点的**密切抛物面**(osculating paraboloid)是**双曲抛物面**(hyperbolic paraboloid).在双曲点上 **Dupin 标形**(Dupin indicatrix)由一对共轭双曲线给出

Е В Шикин 撰

【补注】 在双曲点上曲面有负 Gauss 曲率,反之,如果曲面在一个点上有负 Gauss 曲率,则这个点是双曲点.

参考文献

[A1] Blaschke, W and Leichtweiss, K, Elementare Differential-geometrie, Springer, 1973

2) 动力系统的双曲点(hyperbolic point of a dynamical system)是系统

$$\dot{x}=f(x), \quad x=(x_1, \quad , x_n) \qquad (*)$$

的定义域中使得 $f(x^*)=0$ 的一个点 $x=x^*$,此时与 $\partial f/\partial x$ 在 $x=x^*$ 的值相等的矩阵 A 有 k 个正实部的本征值及 $n-k$ $(0<k<n)$ 个负实部的本征值.在双曲点的邻域内存在一个由(*)的当 $t\to\infty$ 时渐近地趋向 $x=x^*$ 的解构成的 $(n-k)$ 维不变曲面 S_+,此外还有一个由(*)的当 $t\to-\infty$ 时渐近地趋向 $x=x^*$ 的解组成的 k 维不变曲面 S_- (*)的轨道在双曲点的一个充分小邻域内的特性可以借助下面的定理来描述([4]) 存在一个由双曲点的某个邻域到点 $u=0$, $u=(u_1, \quad ,u_n)$ 的某个邻域的同胚,它将(*)的轨道转换成线性系统 $\dot{u}=Au$ 的轨道.

对于具有不动点的微分同胚,双曲点是由在所考虑的不动点处微分同胚的线性部分中模 1 本征值的不存在来定义的.因此,系统(*)的双曲点仍然是沿系统(*)的轨道移动而产生的微分同胚的双曲点

参考文献

[1A] Poincare, H, Memoire sur les courbes definiés par une equation différentielle, *J de Math*, **7**(1881), 375-422

[1B] Poincare, H, Mémoire sur les courbes definiés par une équation différentielle, *J de Math*, **8**(1882), 251-296

[1C] Poincare, H, Memoiré sur les courbes definiés par une equation différentielle, *J de Math*, **1**(1885), 167-244

[1D] Poincare, H, Memoire sur les courbes definiés par une equation différentielle, *J de Math*, **2**(1886), 151-217.

[2] Ляпунов, А М, Общая задача об устойчивости движения, М-Л, 1950

[3] Coddington, E A and Levinson, N, Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955

[4] Hartman, P, Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982.

В К Мельников 撰

【补注】 经常,只要矩阵 A 没有实部为零的本征值(即以上情况中 $k=0$ 和 $k=n$ 也是允许的),此系统(*)中的不变点就称为双曲点.例如见[A1].

参考文献

[A1] Irwin, M C, Smooth dynamical systems, Acad Press, 1980

周芝英 译 叶彦谦 校

双曲集[hyperbolic set, гиперболическое множество],光滑动力系统 $\{S^t\}$ 的

相流形 M 中全由轨道组成的一个紧子集,每个轨道有下列性质 它有这样一个邻域,其中所有的轨道(包括不在 F 中的)(对于所给轨道而言)与**鞍形**(saddle)附近的轨道有着相似的性态 更准确地说,光滑动力系统 $\{S^t\}$ 中的双曲集是相流形 M 的一个紧不变子集 F,使对 M 的切空间 T_xM 中每个点 $x\in F$,存在子空间 E_x^s 与 E_x^u,满足下列两条件 1)映射 S^t $M\to M$ 在 x 的微分 $\widetilde{S}_x^t$ $T_xM\to T_{S^tx}M$,作用于向量 $\xi\in E_x^s$, $\eta\in E_x^u$

时满足不等式（见映射的微分法(differentiation of a mapping))

$$|\widetilde{S}_x^t\xi| \leqslant a|\xi|e^{-ct}, \text{ 当 } t \geqslant 0 \text{ 时},$$
$$|\widetilde{S}_x^t\xi| \geqslant b|\xi|e^{-ct}, \text{ 当 } t \leqslant 0 \text{ 时},$$
$$|\widetilde{S}_x^t\eta| \leqslant a|\eta|e^{ct}, \text{ 当 } t \leqslant 0 \text{ 时},$$
$$|\widetilde{S}_x^t\eta| \geqslant b|\eta|e^{ct}, \text{ 当 } t \geqslant 0 \text{ 时},$$

其中 $a, b, c>0$ 为某些常数且与 x 无关. 2) 若 $\{S^t\}$ 为**瀑布**(即假定时间 t 取整数值)，则

$$T_xM = E_x^s \oplus E_x^u,$$

若 $\{S^t\}$ 为流，则

$$T_xM = E_x^s \oplus E_x^u \oplus E_x^n,$$

其中 E_x^n 为由相速度向量张成的一维子空间(即假设相速度向量在 F 上处处不为零) 此外，在一些叙述中为了方便起见，也称流的平衡位置为双曲的，如果相应的线性化系统的矩阵的本征值全位于虚轴之外(见**双曲点**(hyperbolic point))

子空间 E_x^s 称为稳定的(stable)，E_x^u 称为不稳定的(unstable)，而 E_x^n 称为中性的(neutral) 所有使 S^ty 与 S^tx 当 $t\to\infty$ 时相互逼近的点 $y\in M$，构成在 x 与 E_x^s 相切的光滑流形 W_x^s，它称为点 x 的稳定流形(stable manifold of the point) W_x^s 关于同一轨道上一切 x 的并称为此轨道的稳定流形(stable manifold of the trajectory). 一点或一轨道的不稳定流形可类似地去定义.

流的双曲集的经典例子有· 仅含一个模 1 的 Floquet 乘子的一周期轨道. 在某些系统中，全相空间是双曲集(见 **Y 系统**(Y-system)) 双曲集的许多例子是在研究经典原始的动力系统例如天体力学中发现的([1]) 双曲集作为一个类由 S Smale([2]) 在 1965 年引进，此后在光滑动力系统理论中，不论是作为研究对象，还是作为许多例子([3]－[5]) 中的一部分，一直起着重要作用.

参考文献

[1] Kushnirenko, A G , Katok, A B and Alekseev, V M , Three papers on dynamical systems, *Trans Amer Math Soc* (2), **116** (1981), 1 － 169 (Nineth math summer school (1972), 50 － 341)

[2] Smale, S , Differentiable dynamical systems, *Bull Amer Math Soc* , **73** (1967), 747 － 817

[3] Nitecki, Z , Differentiable dynamics. An introduction to the orbit structure of diffeomorphisms, M I T , 1971

[4] Shub, M , Stabilité globale des systèmes dynamiques, *Astérisque*, **56** (1978). English abstract

[5] Newhouse, Sh E , Lectures on dynamical systems, in J Guckenheimer, J Moser and Sh E Newhouse (eds), Dynamical systems, Birkhauser, 1980, 1 － 114

Д В Аносов 撰 郑维行 译 沈永欢、陈一元 校

双曲螺线 [hyperbolic spiral, гиперболическая спираль]

平面超越曲线，在极坐标中它的方程是

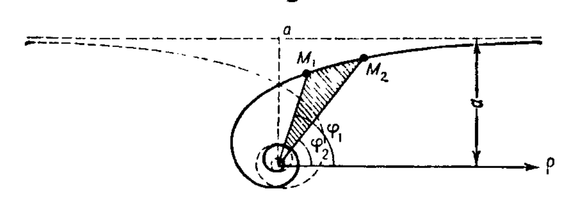
$$\rho = \frac{a}{\varphi}.$$

双曲螺线由两个分支组成，它们关于直线 d 是对称的(见图). 极点是渐近点. 渐近线是平行于极轴、与其距离为 a 的直线. 两点 $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ 和 $M_2(\rho_2, \varphi_2)$ 之间的弧长是

$$l = a\left[-\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi} + \ln(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2})\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

由双曲螺线的弧和对应于角 φ_1, φ_2 的径向量 ρ_1 和 ρ_2 所围成的扇形面积是

$$S = \frac{a^2(\rho_1-\rho_2)}{2}$$



双曲螺线和 **Archimedes 螺线**(Archimedean spiral)可以通过关于双曲螺线的极点 O 的反演由其中一个得到另一个. 双曲螺线是所谓代数**螺线**(spirals)的特殊情况.

参考文献

[1] Савелов, А А , Плоские кривые, М , 1960

Д Д. Соколов 撰 张鸿林 译

双曲三角学 [hyperbolic trigonometry, гиперболическая тригонометрия]

Лобачевский 平面上的三角学(见 **Лобачевский 几何学**(Lobachevskii geometry)). 设 $a_i(i=1,2,3)$ 是 Лобачевский 平面上一个三角形的三个边长，而 $\alpha_i(i=1,2,3)$ 是这个三角形的三个内角. 这时，联系 a_i 和 α_i 的下列关系式(余弦定理(cosine theorem))成立.

$$\cosh a_1 = \cosh a_2 \cosh a_2 - \sinh a_2 \sinh a_3 \cos\alpha_1$$

双曲三角学的其他关系式都可从这个关系式推出，例如所谓正弦定理(sine theorem)·

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sinh a_1} = \frac{\sin\alpha_2}{\sinh a_2} = \frac{\sin\alpha_3}{\sinh a_3}.$$

А В Иванов 撰

【补注】

参考文献

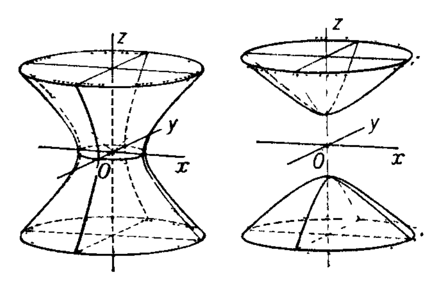
[A1] Coxeter, H S M, Non-Euclidean geometry, Univ Toronto Press, 1965, 224 – 240

[A2] Coxeter, H S M, Angles and arcs in the hyperbolic plane, *Math Chronicle* (*New Zealand*), **9** (1980), 17 – 33

张鸿林 译

双曲面 [hyperboloid, гиперболоид]

一个非闭有心**二次曲面**(surface of the second order) 双曲面有两种类型 **单叶双曲面**(one-sheet hyperboloid)和**双叶双曲面**(two-sheet hyperboloid).



在适当的坐标系中(见图),单叶双曲面的方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

双叶双曲面的方程是

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

数 a, b 和 c (以及长度为 a, b 和 c 的线段)称为双曲面的半轴(semi-axes) 当双曲面被通过 Oz 轴的平面所截时,其截线是双曲线,当被垂直于 Oz 轴的平面所截时,其截线是椭圆.单叶双曲面与平面 $z=0$ 的截线称为腰椭圆(gorge ellipse) 双曲面具有三个对称面.由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

定义的锥面称为渐近锥面(asymptotic cone) 如果 $a=b=c$,则双曲面称为正则的(regular) 具有两个相等半轴的双曲面称为旋轴双曲面(hyperboloid of revolution) 单叶双曲面是**直纹曲面**(ruled surface),通过给定点 (x_0, y_0, z_0) 的直纹母线的方程具有下列形式

$$\frac{x-x_0}{\frac{ay_0}{b}}=\frac{y-y_0}{\frac{-bx_0}{a}}=\frac{z-z_0}{c},$$

$$\frac{x-x_0}{\frac{-ay_0}{b}}=\frac{y-y_0}{\frac{bx_0}{a}}=\frac{z-z_0}{c}$$

А Б Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M, Geometry, Springer, 1987 (中译本 M 贝尔热,几何,科学出版社,1987 – 1991)

[A2] Hilbert, D and Cohn-Vossen, S, Geometry and the imagination, Chelsea, reprint, 1952 (译自德文).

张鸿林 译

超中心 [hypercentre, гиперцентр]

群 G 的上中心列的一个成员 Z_α 第一个超中心 Z_1 就是这个**群的中心**(centre of a group),如果一切 $Z_\beta(\beta<\alpha)$ 都已知道,那么当 α 是一个极限序数时,$Z_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}Z_\beta$,当 α 是一个非极限序数时,Z_α 就是商群 $G/Z_{\alpha-1}$ 的中心的完全原象 一个群的超中心是局部幂零的.

В М Копытов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Robinson D J S, Finiteness conditions and generalized soluble groups, 1-2, Springer, 1972

郝钢新 译

超复变函数 [hypercomplex functions, гиперкомплексного переменного функция]

实数域上超复变量 z (见**超复数**(hypercomplex number))的函数 $w(z)$,即一个有限维结合代数 $\mathfrak{A}$ 上的函数.狭义地说,超复变函数是一个具有值在同一代数 $\mathfrak{A}$ 中的函数 $w(z)$,即函数 $w(z)$ 可以表示为

$$w(z)=\sum_{k=0}^{n-1}e_k u_k,$$

其中 e_k 是 $\mathfrak{A}$ 的一个基,$k=0, \quad, n-1$,而 $u_k=u_k(x_0, \quad, x_{n-1})$,$k=0, \quad, n-1$,是含有 n 实变量的 n 个实函数系.超复变函数理论对于四元数代数 $\mathfrak{A}$ (见**四元数**(quaternion))已经有详尽的研究.

解析(正则)超复变函数(analytic (regular) hypercomplex functions)是单复变量解析函数在不同方向上的推广.由于解析性的定义在任意代数中不需要等价,所以就有不同的解析超复数的函数概念.

在现代研究中,最重要是使正则超复变函数在 Fueter 意义下是解析的,或者是 F 解析超复变函数([1]).一个超复变函数称为在 z_0 点是右正则的(right regular),如果微方分程(Fueter 条件(Fueter condition))

$$\sum_{k=0}^{n-1}w^{(k)}e_k=0$$

在点 z_0 满足,其中

$$w^{(k)}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial u_h}{\partial x_k}e_h$$

是函数 w 关于 x_k 的偏导数 所有导数都假设是连续的 如果

$$\sum_{k=0}^{n-1} e_k w^{(k)} = 0,$$

那么称函数 $w(z)$ 是左正则超复变函数(left regular hypercomplex function) 在非交换代数 $\mathfrak{A}$ 的情形，这些概念并不等价．右正则超复变函数的和与差是右正则的，但它们的乘积或商则不然 变量 z 的幂就不是右正则的．存在特殊构造的类似幂的 Taylor 及 Laurent 级数．Fueter 条件等价于超复变微分形式 $\omega = wdz$、$\delta\omega = 0$ 的微分为零(对于左正则超复变函数，其形式为 $\omega = dzw$)．因此就得到一个特殊的积分定理

在交换代数 $\mathfrak{A}$ 的情况下，一个超复变函数在点 z_0 上是 Scheffers 意义下解析的([2])是指此函数在此点上的微分可以表示为

$$dw = \varphi(z)dz,$$

其中导数 $\varphi(z) = dw/dz$ 不依赖于 dz 此条件对于交换代数 $\mathfrak{A}$ 等价于 $d\omega = 0$，并且积分 $\int wdz$ 与路径无关 Scheffers 意义下解析的超复变函数是 F 正则的，当且仅当

$$\sum_{k=0}^{n-1} e_k^2 = 0$$

一个超复变函数 $w(z)$ 称为在点 z_0 是 Hausdorff 意义下解析的([3])，如果它的微分 dw 是 dz 的一个线性函数，也就是如果

$$dw = \sum_{\iota} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{\iota k} e_\iota dz e_k,$$

其中 $\varphi_{\iota k}$ 是关于 $x_0, \quad, x_{n-1}$ 的实函数 对于这种情况，人们比较容易构造类似于幂级数的函数，但是它的积分值与路径有关．Hausdorff 定义与 Scheffer 的定义对交换代数 $\mathfrak{A}$ 是等价的

参考文献

[1] Fueter, R , Ueber die Funktionentheorie in einer hyperkomplexen Algebra, *Elemente der Math* , **3** (1948), 5, 89–94

[2] Scheffers, G , Verallgemeinerung der Grundlagen der gewohnlich complexen Funktionen, *Ber Verh Sachs Akad Wiss Leipzig Mat -Phys Kl* , **45** (1893), 828–848

[3] Hausdorff, F , Zur Theorie der Systeme complexer Zahlen, *Ber Verh Sachs Akad Wiss Leipzig Mat -Phys Kl* , **52** (1900), 43–61

[4] Кристалинский, Р Х, 《Уч зап Смоленского пед ин-та》, 1965, 14, 91–95

Е Д Соломенцев 撰 许永华、张印火 译 牛凤文 校

超复数[hypercomplex number, гиперкомплексное число]

实数域 **R** 上含有单位元的有限维代数(从前称为超复系(hypercomplex system))中的元素．历史上，超复数是作为复数的推广而提出的(见**复数**(complex number))．复数的运算对应于平面的几何变换(平移，旋转，放大，及其上述运算的合成)．人们试图在三维空间中构造出对应于复数在平面中所起的作用那样的数来，后来明白，完全类似是不可能的．这就促使超复数系的发展

秩 n 的超复系是通过在 n 维实空间 $\mathbf{R}^n$ 中引入满足域上代数公理的乘法得到的 令 1 是超复系 U 的单位元，$1, \iota_1, \quad, \iota_{n-1}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的某个基．U 的超复数

$$\bar{\alpha} = a_0 - a_1\iota_1 - \quad - a_n\iota_n$$

称为

$$\alpha = a_0 + a_1\iota_1 + \quad + a_n\iota_n$$

的共轭超复数(conjugate hypercomplex number) 设 $U^{(2)} = \{u_1 + u_2 e\}$，这里 $u_1, u_2 \in U$，e 为一新记号．集合 $U^{(2)}$ 通过定义加法

$$(u_1+u_2e)+(v_1+v_2e) = (u_1+v_1)+(u_2+v_2)e$$

和乘法

$$(u_1+u_2e)(v_1+v_2e) = (u_1v_1 - \bar{v}_2u_2) + (v_2u_1 + u_2\bar{v}_1)e$$

成为一个超复系 称超复系 $U^{(2)}$ 为 U 的加倍(doubling)

超复系的例子有 实数、复数、四元数、Cayley 数(以上每个均是其前面一个的加倍，见**四元数**(quaternion)，**Cayley 数**(Cayley numbers))．其他例子包括**二重数和对偶数**(double and dual numbers)，以及形如

$$A = a_0 1 + \sum_{\gamma=1}^{2^{n-1}} a_\gamma \iota_\gamma$$

的超复系，当 $n = 4$ 时就是 Clifford - Lipschitz 数(Clifford-Lipschitz numbers)(这些超复数是秩为 2^n 的 **Clifford 代数**(Clifford algebra)中的元素)．**R** 上完全矩阵代数是超复系统中一个重要例子．

超复数系统定义可以要求乘法结合律，亦有人把代数与超复系概念等同起来

参考文献

[1] Кантор, И Л , Солодовников, А С , Гиперкомплексные числа, М , 1973(英译本 Kantor, I L and Solodovnikov, A S , Hyperkomplexe Zahlen, Teubner, 1978

[2] Калужнин, Л А , Введение в общую алгебру, М , 1973

Н Н Вильямс 撰 许永华、朱胜林 译 牛凤文 校

超循环 [hypercycle. гигерцикл], Лобчевский 几何学中的

同等距离集 (equi-distant)

超函数 [hyperfunction, гиперфункция]

【补注】 超函数是一种广义函数 (generalized function), 超函数类被刻画为可局部化的广义函数的最大类. 按照三个通常构造广义函数的方法, 得到超函数如下 1) 作为全纯函数在实轴上的理想极限或边界值, 2) 作为实解析函数上的连续线性泛函的局部有限和, 或 3 作为连续函数在局部型无限阶微分算子作用下的形式导数. 超函数理论早期历史始于 G Kothe, A Grothendieck 等, 也见之于某些物理文献 但是局部化与多变数情况下的精确表述是由佐藤 幹夫给出的, 他应用了**上同调** (cohomology) 理论

在一个开集 $\Omega\subset\mathbf{R}$ 上的单变数的超函数 $f(x)$ 是形如 $F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$ 的一个形式表达式, 这里 $F_\pm(z)$ 分别是上下半邻域 $U_\pm=U\cap\{z\ \pm\operatorname{Im} z>0\}$ 上的全纯函数, 这里 U 是一个满足 $U\cap\mathbf{R}=\Omega$ 的邻域 $U\supset\Omega$ 表达式 $f(x)$ 恒等于零, 当且仅当 $F_\pm(z)$ 作为全纯函数在 Ω 上相等 (或等价地作为连续函数相等, 这是根据 **Painlevé 定理** (Painlevé theorem)) 如果在广义函数意义下极限存在, 这公式就给出了从广义函数空间到超函数空间中的一个自然嵌入. Ω 上的超函数空间 $\mathscr{B}(\Omega)$ 的精确定义是 $\mathscr{B}(\Omega)=\lim_{\to U\supset\Omega}\mathscr{O}(U\setminus\Omega)/\mathscr{O}(\Omega)$ (实际上这极限是多余的.) 对 $F(z)\in\mathscr{O}(U\setminus\Omega)$, 用 $[F]$ 表示由 F 定义的 Ω 上的超函数 f. 依此, F 称为 f 的一个定义函数 (defining function). 典型广义函数解释为超函数的例子是

$$\delta(x)=\left[-\frac{1}{2\pi i}\ \frac{1}{z}\right]=-\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{x+i0}-\frac{1}{x-i0}\right]$$

(Dirac δ 函数 (Dirac delta-function)),

$$Y(x)=\left[-\frac{1}{2\pi i}\log(-z)\right]$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}(\log(-x-i0)-\log(-x+i0))$$

(Heaviside 函数 (Heaviside function)),

$$\text{p v }\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+i0}+\frac{1}{x-i0}\right]$$

(Cauchy 主值 (Cauchy principal value)),

$$\text{p f }x^{-m}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x+i0)^m}+\frac{1}{(x-i0)^m}\right]$$

(Hadamard 有限部分 (Hadamard finite part)),

$$x_\pm^\lambda=\left[\frac{\mp(\mp z)^\lambda}{2i\sin\pi\lambda}\right]=\pm\frac{(\mp x-i0)^\lambda-(\mp x+i0)^\lambda}{2i\sin\pi\lambda}$$

对 $\lambda\notin\mathbf{Z}$,

$$x_\pm^m=\left[\mp\frac{1}{2\pi i}(\pm z)^m\ln(\mp z)\right]\quad 对\ \lambda=m\in\mathbf{Z}$$

多变量的超函数 (hyperfunction of several variables) 以后一个锥 (cone) $\Gamma\subset\mathbf{R}^n$ 是指一个以原点为顶点的开**凸锥** (convex cone) 对两个锥 Δ, Γ, 符号 $\Delta\subset\subset\Gamma$ 表示 $\Delta\cap S^{n-1}$ 是在 $\Gamma\cap S^{n-1}$ 内相对紧的. 一个楔 (wedge) 表示 $\mathbf{C}^n$ 中形为 $\Omega+i\Gamma$ 的开子集, 这里 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是一个实开子集且 $\Gamma\subset\mathbf{R}^n$ 是一个锥. Ω 称为楔的棱 (edge of the wedge) 而 Γ 称为楔的穴 (opening) 一个无穷小楔 (infinitesimal wedge), ((0 楔) (0-wedge)) 或一个穴为 Γ 和边为 Ω 的楔体 (tuboid) (或简单地为形式 $\Omega+i\Gamma$) 是一个复开集 U 使得 $U\subset\Omega+i\Gamma$ 和使得对于任一 $\Delta\subset\subset\Gamma$, 集合 U 包含 $\Omega+i\Delta$ 中包含在边 Ω 的某个复邻域的部分. 符号 $\Omega+i\Gamma 0$ 表示任一这样的开集, $\mathscr{O}(\Omega+i\Gamma 0)$ 表示在某个这样的开集上全纯的函数的全体 (即 $\mathscr{O}(\Omega+i\Gamma 0)=\lim_{\to U}\mathscr{O}(U)$, 极限是对形为 $\Omega+i\Gamma$ 的所有 0 楔 U 取的).

在一个开集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上的超函数 $f(x)$ 是形如

$$\sum_{j=1}^N F_j(x+i\Gamma_j 0)$$

的形式表达式的等价类 (在显然意义下的), 这里 $F_j(z)\in\mathscr{O}(\Omega+i\Gamma_j 0)$ $\{F_j(z)\}$ 称为 $f(x)$ 的一个定义函数集 (set of defining functions) Ω 上超函数的全体表示为 $\mathscr{B}(\Omega)$ 由定义函数的 $\mathbf{C}$ 线性结构, 它成为一个 $\mathbf{C}$ 线性空间. 具有实解析系数的线性微分算子的作用是通过作用在定义函数的同样办法来定义. 上面的边值表示 (boundary value representation) 当 $\Gamma_1=\mathbf{R}_+$, $\Gamma_2=\mathbf{R}_-$ 时对应于一个变数的情况

超函数是可局部化的, 即对应 $\Omega\mapsto\mathscr{B}(\Omega)$ 满足层 (sheaf) 的公理 这是一个松弛层 (flabby sheaf), 即任一截面都能扩充到整个空间. 超函数层 (sheaf of hyperfuctions) 是通过导出层 $\mathscr{B}=\mathscr{H}^n_{\mathbf{R}^n}(\mathscr{O})\otimes\omega$ 来定义的, 此处 ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的定向层. 实际上 $\mathscr{B}(\Omega)\cong H^n_\Omega(\mathbf{C}^n,\mathscr{O})$ 成立, 其他阶的上同调是平凡的. 通过选取一个 Stein 邻域 $U\supset\Omega$, 能通过覆盖来表示相对上同调 若 $U\cap\mathbf{R}^n=\Omega$, $U_j=\{z\in U\ \operatorname{Im} z_j\neq 0\}$, $j=1,\ ,n$, 则对 $\mathscr{U}=\{U,U_1,\ ,U_n\}$, $\mathscr{U}'=\{U_1,\ ,U_n\}$ 构成对 $(U,U\setminus\Omega)$ 的一个相对 Stein 覆盖, 因此由 Leray 定理,

$$H^n_\Omega(\mathbf{C}^n,\mathscr{O})=$$

$$=C^n(\mathscr{U}\bmod\mathscr{U}',\mathscr{O})/\delta C^{n-1}(\mathscr{U}\bmod\mathscr{U}',\mathscr{O})\simeq$$

$$\cong \mathcal{O}(U \# \Omega) / \sum_{j=1}^{n} \mathcal{O}(U \#_j, \Omega),$$

这里 $U \# \Omega = \{z \in U. \operatorname{Im} z_k \neq 0$ 对所有 $k\}$, $U \#_j \Omega = \{z \in U. \operatorname{Im} z_k \neq 0$ 对所有 $k \neq j\}$ 在 $n=1$ 时，它约化为 $H_\Omega^1(\mathbf{C}^n, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(U \backslash \Omega) / \mathcal{O}(U)$ 另一种表示是由选取一个向量集 $\eta^0, \eta^1, \quad, \eta^n \in \mathbf{R}^n$ 使得它们所定义的半空间 $E^{\eta^j} = \{y \in \mathbf{R}^n \ \langle y, \eta^j \rangle > 0\}$ 适合 $\bigcup_{j=0}^{n} E^{\eta^j} = \mathbf{R}^n \backslash \{0\}$，并置 $U_j = (\Omega + \imath E^{\eta^j}) \cap U$, $j=0, \cdot, n$, 给出的．n 上闭链形如

$$\sum_{j=0}^{n} F_j(z) U \wedge U_0 \wedge \quad \wedge \hat{U}_j \wedge \quad \wedge U_n,$$

这里 $F_j(z) \in \mathcal{O}(U_0 \cap \quad \cap \hat{U}_j \cap \quad \cap U_n)$，而 $H_\Omega^n(\mathbf{C}_j^n \mathcal{O})$ 是由其对 n 上边缘空间的商给出的 (符号 ^ 表示它下面的因子不出现．)

由扩充下面的对应集合 $\mathscr{B}(\Omega)$ 等同于上同调群 $H_\Omega^n(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$

$$\mathcal{O}(U \# \Omega) \ni F(z) \mapsto [F(z)] =$$
$$= \sum_\sigma (\operatorname{sgn} \sigma) F(x + \imath \Gamma_\sigma O) \in \mathscr{B}(\Omega),$$

这里 Γ_σ 表示第 σ 象限 $\{y \in \mathbf{R}^n \quad \sigma_j y_j > 0, j = 1, \quad, n\}$ 而 $\operatorname{sgn} \sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_n$，或由

$$\sum_{j=0}^{n} F_j(z) U \wedge U_0 \wedge \quad \wedge \hat{U}_j \wedge \quad U_n \mapsto$$
$$\mapsto \sum_{j=0}^{n} (-1)^j F_j(x + \imath \Gamma_j 0),$$

此处 $\Gamma_j = E^{\eta^0} \cap \cdots \cap \hat{E}^{\eta^j} \cap \cdots \cap E^{\eta^n}$

决定一个超函数何时为零的几个判别准则集中地称为**楔棱定理** (edge-of-the-wedge theorem)· 一个只有单项的超函数 $F(x + \imath \Gamma 0)$ 为零，当且仅当 $F(z)$ 本身是零 (边值运算的内射性) $F_1(x + \imath \Gamma_1 0) = F_2(x + \imath \Gamma_2 0)$，当且仅当它们黏合起来成为 $\mathcal{O}(\Omega + \imath(\Gamma_1 + \Gamma_2)0)$ 内的一个函数 (Epstein 型定理 (Epstein-type theorem)) 当 $\Gamma_2 = -\Gamma_1$ 时，结果变为实解析的 (Боголюбов 型定理 (Bogolyubov-type theorem)) $\sum_{j=1}^{N} F_j(x + \imath \Gamma_j 0) = 0$，当且仅当存在 $G_{jk}(z) \in \mathcal{O}(\Omega + \imath(\Gamma_j + \Gamma_k)0)$, $j, k = 1, \quad, N$，使得 $G_{jk}(z) = -G_{kj}(z)$ 且 $F_j(z) = \sum_{k=1}^{N} G_{jk}(z)$ 在 $\mathcal{O}(\Omega + \imath \Gamma_j 0)$ 内，$j = 1, \cdot, N$ (Martineau 型定理 (Martineau-type theorem)) 这些都是由覆盖表示上同调类消失的这个事实的表现．

Ω 上的任一实解析函数 $\varphi \in \mathscr{A}(\Omega)$ 对任一 Γ，将其等同于表达式 $\varphi(x + \imath \Gamma 0)$，自然地包含于 $\mathscr{B}(\Omega)$ 它们构成一个子层．因此在 Ω 上的一个超函数 f 的用 $\operatorname{sing\,supp} f$ 表示的 f 的奇异支集 (singular support) 的概念是完好定义的 它是 Ω 中使 $f(x)$ 成为实解析的最大开子集 $\Omega' \subset \Omega$ 的补集．若 $\operatorname{sing\,supp} f \subset K$, $K \subset \Omega$ 是 Ω 的闭子集，则能选取边值表示使每个 $F_j(z)$ 能解析延续到 $\Omega \backslash K$ 楔边定理也提供决定一个超函数在一个开 (子) 集 Ω 上是否实解析的判别准则．

一个 $f \in \mathscr{B}(\Omega \times T)$ 在有界域 D 上的定积分 $\int_D f(x, t) dx$ 是完好定义的，如果 $\operatorname{sing\,supp} f \cap \partial D \times T = \emptyset$ 实际上，设 $f(x, t) - \sum F_j((x, t) + \imath \Gamma_j 0)$ 是一个边值表示，使得每个 $F_j(z, \tau)$ 都可以扩充到 $\partial D \times T$ 的一个邻域，或更一般的，扩充到以 $\partial D \times T$ 为边和一个穴 (它在 x 空间上投影是整个空间) 的 0 楔，则

$$\int_D f(x, t) dx = \sum_j \left[\int_{D_j} F_j(z, \tau) dz \right]_{\tau \mapsto t + \imath \Delta_j 0},$$

此处 D_j 是固定 ∂D 的 D 的一个适当的形变而 Δ_j 是 Γ_j 在 t 平面上的投影．这个积分与关于另一变数 t 的微分或积分是交换的 关于进一步的运算见**微局部分析** (microlocal analysis)

支集在一个固定的紧集 K 上的超函数全体 $\mathscr{B}[K]$ 成为一个核型 **Fréchet 空间** (Fréchet space) (亦见**核型空间** (nuclear space))．它是定义在 K 上的所有实解析函数赋以 $\mathcal{O}(U)$, $U \supset K$ 的归纳极限拓扑所成的核型 (DF) 空间 $\mathscr{A}(K)$ 的强对偶．即是说，有紧支集的超函数是以实轴为承载的解析泛函．这个对偶是由定积分 $\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \varphi(x) dx$ 对 $f \in \mathscr{B}(K)$ 和 $\varphi \in \mathscr{A}(K)$ 给出．解析泛函可用来重新构造超函数空间或超函数层 a) $\mathscr{B}(\Omega)$ 是 "承载在 Ω 内的解析泛函的局部有限和的全体"，这里是由支集分解的重排作为等价关系 (Martineau 定义 (Martineau definition))，或 b) 对有界域 Ω，有 $\mathscr{B}(\Omega) = \mathscr{B}[\bar{\Omega}] / \mathscr{B}[\partial \Omega]$ (Schapira 定义 (Schapira definition))

Fourier 超函数 (Fourier hyperfunctions) 的层 $\mathscr{Q}$ 定义在 $\mathbf{R}^n$ 的方向紧化 $\mathbf{D}^n = \mathbf{R}^n \cup S_\infty^{n-1}$ 上，由应用内指数增长 (infraexponential growth) (即对所有 $\varepsilon > 0$ 以 $O(e^{\varepsilon |\operatorname{Re} z|})$ 增长) 的全纯函数的层 $\tilde{\mathcal{O}}$ 来代替 $\mathcal{O}$ 通过支集分解或到真凸锥内的增长阶，$\mathbf{D}^n$ 上的 Fourier 超函数允许有一个 Bochner-Carleman 型的 Fourier 变换．它们形成一个核型 Fréchet 空间，对偶于在实轴的带状邻域上全纯和指数增长的函数所成的核型 (DF) 空间 $\mathscr{P}$ 后者在经典的 **Fourier 变换** (Fourier transform) 下不变，且关于此对偶 **Parseval 等式** (Parseval equality) 成立．

超函数的实解析坐标变换是通过定义函数的变换自然地定义的．因此超函数能在实解析流形上定义．在一个流形上，Fourier 级数是超函数的典型例子．$\sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} a_\alpha e^{\imath \alpha \ x}$ 作为超函数收敛，当且仅当 $a_\alpha = O(e^{\varepsilon |\alpha|})$，对所有 $\varepsilon > 0$ 以超函数为系数的微分形式的分解提供了层 $\mathbf{C}$ 或 $\mathcal{O}$ 的一个具体的松弛分解，且用来计算相对上同调群．

参考文献

[A1] Sato, M, Theory of hyperfunctions, *Sûgaku*, **10** (1958) 1 - 27(日文)
[A2] Sato, M, Theory of hyperfunction Ⅰ, Ⅱ, *J Fac Sci Univ Tokyo Sect* 1, **8**(1959 - 1960), 139 - 193, 387 - 437
[A3] Martineau, A, Les hyperfonctions de M Sato, in Sem Bourbaki, 1960
[A4] Harvey, R, Hyperfunctions and linear partial differential equations, Stanford Univ, 1966, Thesis
[A5] Komatsu, H, Sato's hyperfunctions and linear partial differential equations with constant coefficients, *Seminar Notes Univ of Tokyo*, **22** (1970) (日文)
[A6] Schapira, P, Theorie des hyperfonctions, Lecture notes in Math, 126, Springer, 1970
[A7] Morimoto, M, Introduction to Sato hyperfunctions, Kyôritsu, 1976 (日文)
[A8] Kashiwara, M, Kawai, T and Kimura, T, Foundation of algebraic analysis, Prienceton Univ Press, 1986(译自日文)
[A9] Kaneko, A, Introduction to hyperfunctions, Kluwer, 1988(译自日文)
A Kaneko 撰 陈志华 译

超几何分布 [**hypergeometric distribution**, **гипергеометрическое распределение**]

用公式

$$p_m = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}, \quad m = 0, 1, \qquad (*)$$

确定的概率分布，其中 M, N, n 是非负整数且 $M \leqslant N$, $n \leqslant N$ (此处 $\binom{a}{b}$ 是二项系数，有时也用 C_a^b 表示). 超几何分布通常与无放回抽样相联系. 在包含 N 个元素的总体中有 M 个元素有"标记"，$N-M$ 个元素无"标记". 公式 (*) 给出了从这 N 个元素的总体中随机抽取 n 个元素，其中恰有 m 个元素有"标记"的概率 概率 (*) 只对

$$\max(0, M+n-N) \leqslant m \leqslant \min(n, M)$$

有定义. 然而，定义 (*) 可用于一切 $m \geqslant 0$ 因为可以假定 若 $b > a$，则 $\binom{a}{b} = 0$ 于是 $p_m = 0$ 可解释为不可能得到 m 个有标记的元素的样本 扩张到整个样本空间时，p_m 的和为 1. 若令 $M/N = p$，则 (*) 可以写为

$$p_m = \binom{n}{m} \frac{A_{Np}^m A_{Nq}^{n-m}}{A_N^n}$$

其中

$$A_a^b = \binom{a}{b} b! \quad 且 \ p+q=1$$

如果 p 是常数而 $N \to \infty$，那么有二项逼近

$$p_m \sim \binom{n}{m} p^m q^{n-m}$$

超几何分布的期望不依赖于 N 且和对应的**二项分布** (binomial distribution) 的期望 np 相同 超几何分布的方差

$$\sigma^2 = npq \frac{N-n}{N-1}$$

比二项分布的方差 $\sigma^2 = npq$ 小 如果 $N \to \infty$，超几何分布的任意阶矩收敛于对应的二项分布的矩. 超几何分布的生成函数为

$$p(x) = \frac{A_{N-M}^n}{A_N^n} \sum_{m=0}^{n} \frac{A_M^m A_n^m}{A_{N-M-n+m}^m} \frac{x^m}{m!}$$

表达式右边的级数表示**超几何函数** (hypergeometric function) $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$，此处 $\alpha = -n$, $\beta = -M$ 而 $\gamma = N-M-n+1$ (因而此分布命名为超几何分布). 对于范围广泛的值，概率 (*) 及其相应的分布函数已经制成了表.

参考文献

[1] Lieberman, G I and Owen, D B, Tables of the hypergeometric probability distribution, Stanford Univ Press, 1961
[2] Owen, D B, Handbook of statistical tables, Addison - Wesley, 1962
[3] Большев, Л Н, Смирнов, Н В, Таблицы математической статистики, М, 2 изд 1968
[4] Feller, W, An introduction to probability theory and its applications, 1, Wiley, 1970(中译本 W 费勒，概率论及其应用，离散空间，科学出版社，上册，1964，下册，1979)
A B Прохоров 撰 刘秀芳 译

超几何方程 [**hypergeometric equation**, **гипергеометрическое уравнение**], Gauss 方程 (Gauss equation)

二阶线性常微分方程

$$z(z-1)w'' + [(\alpha+\beta+1)z - \gamma]w' + \alpha\beta w = 0, \quad (1)$$

α, β, γ 为常数，

或者，其自伴形式

$$[z^\gamma (z-1)^{\alpha+\beta+1-\gamma} w]' + \alpha\beta z^{\gamma-1}(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma} w = 0$$

在一般情况下，变量 z, w 和参数 α, β, γ 取复数值. 经过代换

$$w = z^{-\gamma/2}(z-1)^{(\gamma-\alpha-\beta-1)/2} u$$

以后，得到方程(1)的简化形式

$$u'' + \left[\frac{1-\lambda^2}{4z^2} + \frac{1-\nu^2}{4(z-1)^2} - \right.$$

$$-\frac{1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2}{4z(z-1)}\Bigg]u=0, \qquad (2)$$

其中 $\lambda=1-\gamma$, $\mu=\alpha-\beta$, $\nu=\gamma-\alpha-\beta$

C F Gauss ([1]) 在发展其**超几何级数**(hypergeometric series)理论的同时，详细地研究了方程(1)，但是L Euler 甚至在更早的时候就已经考虑过这个方程(以及它的解).

方程(1)的解可以通过**超几何函数**(hypergeometric function) $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ 来表示 如果 γ 不是整数，则方程(1)的通解可以写成

$$w=C_1F(\alpha,\beta,\gamma,z)+$$

$$+C_2z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,z), \quad (3)$$

其中 C_1 和 C_2 是任意常数 在带有裂缝 $(-\infty,0)$ 和 $(1,\infty)$ 的复平面 z 上，表示式(3)成立. 特别是，在实数情况下，式(3)给出方程(1)在区间 $0<z<1$ 上的通解 对于整数值 γ，通解的形式比较复杂(可能存在一些含对数的项).

也可选取与(3)中表示的函数不同的函数作为方程(1)的**基本解组**(fundamental system of solutions) 例如，如果 $\alpha-\beta$ 不是整数，则

$$w=C_1(-z)^{-\alpha}F(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1;z^{-1})+$$

$$+C_2(-z)^{\beta}F(\beta-\gamma+1,\beta,\beta-\alpha+1,z^{-1})$$

是方程(1)在带有裂缝 $(0,\infty]$ 的复平面 z 上的通解([2],[3])

Gauss 方程包含一些在应用中经常遇到的微分方程作为其特殊情况，许多二阶线性常微分方程通过变换未知函数和自变量可以化为方程(1)([4]) 与方程(1)相近的**汇合型超几何方程**(confluent hypergeometric equation)具有特别重要的意义. 方程(2)的两个线性无关的解之比满足 **Schwarz 方程**(Schwarz equation)，这个方程同半平面到三个边缘弧围成的三角形的共形映射问题密切相关 反函数 $z(s)$ 的研究导致**自守函数**(automorphic function)概念([5])

存在一些高阶线性方程，它们的解的性质类似于超几何函数的性质· $(q+1)$ 阶方程

$$\left[z\frac{d}{dz}\prod_{j=1}^{q}\left(z\frac{d}{dz}+\gamma_j-1\right)-z\prod_{i=1}^{p}\left(z\frac{d}{dz}+\alpha_i\right)\right]w=0$$

的解是具有 $p+q$ 个参数的广义超几何函数 ${}_pF_q(\alpha_i,\gamma_j,z)$ 特别是，三阶广义超几何方程可以写成

$$z^2(1-z)w'''+[1+\gamma_1+\gamma_2-(3+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)z]zw''$$

$$+[\gamma_1\gamma_2-(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1)z]w'-$$

$$-\alpha_1\alpha_2\alpha_3w=0,$$

它的解是 ${}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma_1,\gamma_2,z)$.

参考文献

[1A] Gauss, C F, Disquisitiones generales circa seriem infinitam 1+ (αβ)/(1·γ)x+ , *Comm Soc Regia Sci Gottingen Rec*, **2**(1812)

[1B] Gauss, C F, Disquisitiones generales circa seriem infinitam 1+(αβ)/(1·γ)x+ , in Werke, Vol 3, K Gesellschaft Wissensch Gottingen, 1876

[2] Krazer, A and Franz, W, Transzendente Funktionen, Akademie-Verlag, 1960

[3] Bateman, H and Erdélyi, A, Higher transcendental functions, 1-3, McGraw-Hill, 1953-1955(中译本 A 爱尔台里，高级超越函数，上海科学技术出版社，1957-1958)

[4] Kamke, E, Differentialgleichungen Losungsmethoden und Losungen, 1, Chelsea, 重印, 1971(中译本 E 卡姆克，常微分方程手册，科学出版社，1980)

[5] Голубев, В В, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд, М-Л, 1950(中译本 В В 戈鲁别夫，微分方程的解析理论，高等教育出版社，1956)

Н Х Розов 撰

【补注】 超几何方程是在0,1和∞处具三个**正则奇点**(regular singular point)的微分方程，使得在0和1处的两个奇点其指数之一等于零 因此，它是 **Reimann 微分方程**(Reimann differential equation)的特殊情况. 超几何方程已推广具有正则奇点的偏微分方程组，使得多变量的 Appell 或 Lauricella 超几何函数是一个解，见[A1] 在[A2],[A3]中，研究了一个联系着根系的二阶偏微分方程，它推广了关于常超几何方程的根系 BC_1 的情况.

参考文献

[A1] Appell, P and Kampé de Feriet, M J, Fonctions hypergéométriques et hypersphériques Polynômes d'Hermit, Gauthier-Villars, 1926

[A2] Heckman, G J and Opdam, E M, Root systems and hypergeometric functions I, *Compositio Math*, **64**(1987), 329-352

[A3] Heckman, G J, Root systems and hypergeometric functions II, *Compositio Math*, **64**(1987), 353-373

张鸿林 译

超几何函数[**hypergeometric function; гипергеометрическая функция**]

超几何方程(hypergeometric equation)

$$z(1-z)w''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]w'-\alpha\beta w=0 \quad (1)$$

的解. 超几何函数可以借助于所谓 Gauss 级数(Gauss series)来定义

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)={}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,z)=F(\beta,\alpha,\gamma,z)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!}=$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)}\frac{z^n}{n!},\qquad(2)$$

其中参数 α, β, γ 可以取任何实数值或复数值，除 $\gamma=0, -1, -2,$ 以外，z 是复变量，$(x)_n\equiv x(x+1)(x+n-1)$. 函数 $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ 称为第一类超几何函数（hypergeometric function of the first kind） 方程(1)的另一个线性无关的解

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, z)=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(1-\gamma)}z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z)\qquad(3)$$

称为第二类超几何函数（hypergeometric function of the second kind）

如果 $|z|<1$, 则级数 (2) 绝对和一致收敛，如果 $\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma)<0$, 则这种收敛性还可延续到单位圆上，如果 $0\leqslant\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma)<1$, 则在除 $z=1$ 以外的单位圆的一切点上，级数 (2) 收敛 但是，存在超几何函数 (2) 到单位圆盘外部的带有裂缝 $(1, \infty)$ 的区域的解析延拓 ([1]). 函数 $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ 在带有裂缝 $(1, \infty)$ 的复平面上是单值解析的 如果 α 或 β 等于零或负整数，则级数 (2) 在有限项以后中断，这时超几何函数是 z 的多项式

当 $\gamma=-n(n=0, 1, 2, \quad)$ 时，超几何函数没有定义，但是

$$\lim_{\gamma\to-n}\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, z)}{F(\gamma)}=$$

$$=\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(n+1)!}z^{n+1}F(\alpha+n+1, \beta+n+1, n+2, z)$$

基本关系式. 六个函数

$$F(\alpha\pm1, \beta, \gamma, z),\ F(\alpha, \beta\pm1; \gamma, z)F(\alpha, \beta, \gamma\pm1, z)$$

称为超几何函数 $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ 的连接函数. 在函数 $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ 与其任何两个连接函数之间存在线性关系 例如

$$\gamma F(\alpha, \beta-1, \gamma, z)+(\alpha-\beta)zF(\alpha, \beta, \gamma+1; z)=$$

$$=\gamma F(\alpha-1, \beta, \gamma, z)$$

Gauss 首先找到 15 个这种类型的公式 ([2], [3]) 反复应用 Gauss 关系式可以得到连带超几何函数（associated hypergeometric function）$F(\alpha+m, \beta+n, \gamma+l, z)$, 其中 m, n, l 是整数. 下列微分公式成立

$$\frac{d^n}{dz^n}F(\alpha, \beta, \gamma, z)=\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\times$$

$$\times F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n, z).$$

方程 (1) 具有 24 个形如

$$z^{\rho}(1-z)^{\sigma}F(\alpha', \beta', \gamma', z')$$

的解，其中 ρ, σ, α', β' 和 γ' 是 α, β 和 γ 的线性函数， 而 z 和 z' 由一个双线性变换相联系． 任何三个解都是线性相关的 ([2]) 存在二次、三次和高次变换 ([2]－[5])

主积分表示（principal integral representation） 如果 $\mathrm{Re}\gamma>\mathrm{Re}\beta>0$, $|\arg(1-x)|<\pi$, 则 Euler 公式

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z)=$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}dt$$

成立. 把 $(1-tz)^{-\alpha}$ 展开为二项级数，并且应用 B 函数的围道积分，可以得到另一些积分表示 ([2]). 也可以采用积分 (3) 以及另一些在整个平面 z 上定义单值解析函数的类似公式，作为函数 $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ 到区域 $|\arg(-z)|<\pi$ 的解析延拓 还存在其他解析延拓 ([1], [2])

当 $|z|$ 取大值时超几何函数的渐近性状由在点 $z=\infty$ 的邻域内给出解析延拓的公式完全描述 ([1], [2], [3]). 如果 α, β 和 z 已经给定，$|\gamma|$ 充分大，$|\arg\gamma|<(\pi-\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, 这时，如果 $|z|<1$, 则有

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k}\frac{z^k}{k!}+$$

$$+O(|\gamma|^{-n+1})$$

对于 $|z|>1$, 可以得到类似的表达式.

对于固定的 α, γ 和 z, $\gamma\neq0, -1, -2, \quad, 0<|z|<1$, 且 $\beta\to\infty$, $-3\pi/2<\arg\beta z<\pi/2$, 有

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z)=F(\alpha, \beta; \gamma, \frac{\beta z}{\beta})=$$

$$=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta z)_n}{(\gamma)_n n!}\right][1+O(|\beta|^{-1})]$$

亦见 [2], [5], [6]

一些函数的超几何函数表示 初等函数·

$$(1+z)^n=F(-n, 1, 1; -z),$$

$$\ln\frac{1+z}{1-z}=2zF(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, z^2),$$

$$\ln(1+z)=zF(1, 1, 2, -z),$$

$$e^z=\lim_{b\to\infty}F(1, b; 1; \frac{z}{b}),$$

$$\arcsin z=zF(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, z^2),$$

$$\operatorname{arc\,tg} z = zF(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -z^2),$$

$$\sin nz = n\sin zF(\frac{1+n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \sin^2 z),$$

$$\cos nz = F(\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}, \sin^2 z)$$

第一类和第二类完全椭圆积分(见**椭圆积分**(elliptic integral)):

$$K(z) = \frac{\pi}{2}F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z^2),$$

$$E(z) = \frac{\pi}{2}F(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z^2),$$

伴随 **Legendre 函数**(Legendre functions)

$$P_n^m(z) = \frac{(z+1)^{m/2}}{(z-1)^{m/2}}\frac{1}{\Gamma(1-m)}F(-n, n+1; 1-m, \frac{1-z}{2}),$$

Чебышев 多项式(Chebyshev polynomials)

$$T_n(z) = F(-n, n, \frac{1}{2}, \frac{1-z}{2});$$

Legendre 多项式(Legendre polynomials)

$$P_n(z) = F(-n, n+1, 1, \frac{1-z}{2}),$$

超球多项式(ultraspherical polynomials)

$$\frac{n!}{(2a)_n}C_n^{(a)}(z) = F(-n, n+2a, a+\frac{1}{2}; \frac{1-z}{2});$$

Jacobi 多项式(Jacobi polynomials)

$$\frac{n!}{(a+1)_n}P_n^{(a,b)}(z) = F(-n, a+1+b+n; a+1, \frac{1-z}{2})$$

超几何函数的推广 $(q+1)$ 阶超几何方程的解

$$_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_q, z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n\cdots(\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n\cdots(\gamma_q)_n}z^n$$

称为广义超几何函数(generalized hypergeometric function). 还存在超几何函数的其他推广,包括到多变量情况的推广([2]).

参考文献

[1] Лебедев, Н. Н., Специальные функции и их приложения, 2 изд., М.-Л., 1963(英译本 Lebedev, N. N., Special functions and their applications, Prentice-Hall, 1965)

[2] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions. The Gamma function. The hypergeometric function. Legendre function, 1, McGraw-Hill, 1953(中译本 A. 爱尔台里,高级超越函数,上海科学技术出版社,1957－1958)

[3] Градштейн, И. С., Рыжик, И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 5 изд., М., 1971(英译本 Gradshtein, I. S. and Ryzhik, I. M., Table of integrals, series and products, Acad. Press, 1980)

[4] Kummer, E. E., Ueber die hypergeometrische Reihe $1+\alpha\beta/\gamma\cdot 1x+\cdots$, *J. Reine Angew. Math.*, **15**(1836), 39－83, 127－172

[5] Segun, A. and Abramowitz, M., Handbook of mathematical functions, Appl. Math. Ser., 55, Nat. Bur. Stand., 1970

[6] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952

[7] Лебедев, А. В., Федорова, Р. М., Справочник по математическим таблицам, М., 1956

[8] Бурунова, Н. М., Справочник по математическим таблицам, М., 1959, 附录 1

[9] Fletcher, A. A., Miller, J. C. P., Rosenhead, L. and Comrie, J., An index of mathematical tables, 1－2, Oxford Univ. Press, 1962

Э. А. Чистова 撰

【补注】 在能用超几何函数表示的函数中,应当包括 Jacobi 函数(Jacobi functions)

$$\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(z) = F\left[\frac{\alpha+\beta+1+i\lambda}{2}, \frac{\alpha+\beta+1-i\lambda}{2}, \alpha+1; -\sinh^2 z\right],$$

见[A2].

一个重要推广由基本超几何函数(basic hypergeometric functions)给出,见[A1].

参考文献

[A1] Gasper, G. and Rahman, M., Basic hypergeometric series, Cambrige Univ. Press, 1989

[A2] Koornwinder, T. H., Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups, in R. A. Askey, T. H. Koornwinder and W. Schempp (eds.), Special functions, Group theoretical aspects and applications, Reidel, 1984, pp. 1－85

张鸿林 译

超几何级数[**hypergeometric series, гипергеометрический ряд**], Gauss 级数(Gauss series)

形如

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}z^n \quad (*)$$

的级数. 当 γ 不等于零或负整数时,这样的级数是有意义的,当 $|z|<1$ 时,它是收敛的. 而且,如果 $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0$,则 $z=1$ 时它也是收敛的. 在这种

情况下，Gauss 公式（Gauss formula）

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

成立，其中 $\Gamma(z)$ 是 Γ 函数 借助于超几何级数定义的解析函数称为**超几何函数**（hypergeometric function）

广义超几何级数（generalized hypergeometric series）是形如

$$_pF_q(\alpha_1,\alpha_2,\ \ ,\alpha_p,\gamma_1,\gamma_2,\ \ ,\gamma_q;z)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n\ \ (\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n\ \ (\gamma_q)_n}z^n$$

的级数，其中 $(x)_n\equiv x(x-1)\ \ (x+n-1)$ 如果采用这种表示法，则级数（*）可以写成 $_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,z)$

Э А Чистова 撰

【补注】 超几何级数可以表示为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n$，使得 A_{n+1}/A_n 是 n 的有理函数．J Horn 对于含两个变量的级数给出了类似的表示法．这就产生了一类含两个变量的幂级数，其中包括各种 Appell 超几何级数（Appell hypergeometric series），见［A1］

基本超几何级数（basic hypergeometric series）可以表示为 $\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n$，使得 A_{n+1}/A_n 是 q^n 的有理函数，其中 q 是一个不等于 0 或 1 的固定复数．这种级数具有下列形式

$$_r\varphi_S(a_1,\ \ ,a_r,b_1,\ \ ,b_S,q,z)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(-1)^nq^{n(n-1)/2}]^{s-r+1}}{(q,q)_n}\frac{(a_1,q)_n\ \cdot(a_r,q)_n}{(b_1,q)_n\ \ (b_s,q)_n}z^n,$$

其中 $(x,q)_n\equiv(1-x)(1-qx)\ \ (1-q^{n-1}x)$ 见［A2］

矩阵变元的超几何函数（hypergeometric functions of matrix argument）也已被研究过，见［A3］．

参考文献

［A1］Appell，P and Kampé de Feriet，M J，Fonctions hypergéométriques et hypersphériques polynomes d Hermite，Gauthier-Villars，1926

［A2］Gasper，G and Rahman，M，Basic hypergeometric series，Cambrige Univ Press，1989

［A3］Gross，K and Richards，D，Special functions of matrix argument 1，*Trans Amer Math Soc*，**301**（1987），781 - 811

张鸿林 译

超图［hypergraph，гиперграф］

图的概念的一种推广．一个超图由一个集合 V，它的元素称为顶点，和 V 的子集族 $\mathscr{E}$ 定义，子集称为边（edge）或超边（hyperedge） 一个超图记为 $(V,\mathscr{E})$ 超图的概念是熟知的**复形**（complex）、**区组设计**（block design）与**网络**（network）等概念的变体

超图的两顶点称为相邻的（adjacent），如果有一条边包含这两顶点 超图的一顶点 v 与一边 E 称为关联的（incident），如果 $v\in E$ 具有 n 顶点和 m 边的超图 H 可以用一个关联矩阵（incidence matrix）定义，即 $n\times m$ 矩阵 $\|a_{ij}\|$，其中列对应于超图的边，而行对应于顶点，且

$$a_{ij}=\begin{cases}1,\ 若\ v_i\in E_j,\\0,\ 若\ v_i\notin E_j,\end{cases}\quad i=1,\ \cdot\ ,n,j=1,\ \ ,m.$$

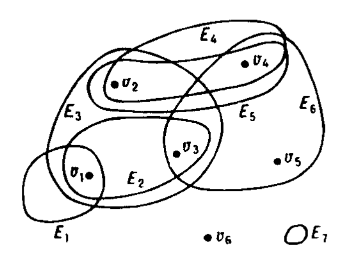
可以给每个（0，1）矩阵 M 指定一个超图，使 M 就是该超图的关联矩阵 超图 H^* 称为超图 H 的对偶（dual），如果 H^* 的关联矩阵是 H 的关联矩阵的转置．超图 H 的与一给定顶点关联的边的个数称为该顶点的度（degree of the vertex） 一条边的度（degree of an edge）是与该边关联的顶点个数 一个超图 $(V',\mathscr{E}')$ 称为超图 $(V,\mathscr{E})$ 的一个子超图（subhypergraph），如果 $V'\subseteq V$，$\mathscr{E}'\subseteq\mathscr{E}$，并且 V' 的一顶点 v 与 $\mathscr{E}'$ 的一边 E 在超图 $(V',\mathscr{E}')$ 中关联，当且仅当它们在超图 $(V,\mathscr{E})$ 中关联

一个超图可以在平面上表示，超图的顶点表为平面上的点，超图的边表为包含与该边关联的所有点的连通域．例如，顶点集是 $V=\{v_1,\ \cdot\cdot,v_6\}$，边族是

$$\mathscr{E}=\{E_1=\{v_1\},E_2=\{v_1,v_3\},E_3=\{v_1,v_2,v_3\},$$

$$E_4=E_5=\{v_2,v_4\},E_6=\{v_3,v_4,v_5),E_7=\phi\}$$

的超图可以在平面上表示如下图



超图 H 亦可以用一二部图（见**二部图**（graph，bipartite））$K(H)$ 表示，其中一部 U_1 的顶点表示超图的点，而另一部 U_2 的顶点表示 H 的边．这时 U_1 的顶点 u' 与 U_2 的顶点 u'' 连接成图 $K(H)$ 的一边，如果 H 中对应于 u' 的顶点与对应于 u'' 的边关联 一个超图是图，如果它的每条边的度都是 2．超图概念的一重要的特殊情形就是**拟阵**（matroid） 图论的许多概念，如连通度、可平面性、色数、和外与内稳定数，都可以转移到超图，图论的许多结论也可转移于超图．

参考文献

［1］Зыков，А А，《Успехи матем наук》，**29**（1974），6，89 - 154

［2］Berge，C，Graphs and hypergraphs，North-Holland，1973

А А Сапоженко 撰 鍾 集 译 李 乔 校

超同调函子 [hyperhomology functor，гипергомологий функтор]

在复形的范畴上与某个函子 F 相联系的函子系列 L_nF 事实上，设 F $A\to B$ 是一个从具有足够多投射对象的 Abel 范畴 A 到 Abel 范畴 B 的共变加性函子，并且，设 $K_\cdot$ 为一个取值于 A 内的链复形，又设 $L_{\cdot\cdot}$ 为 $K_\cdot$ 的一个由投射对象所组成的 Cartan-Eilenberg 分解，那么，双复形 $F(L_{\cdot\cdot})$ 就决定同调群 $H_n(F(L_{\cdot\cdot}))=L_nF(K_\cdot)$，以及两个收敛于它们的**谱序列** (spectral sequence)，其首项分别是

$$'E^2_{p\ q}=H_p(L_qF(K_\cdot))\text{ 与}''\ E^2_{p,q}=L_pF(H_q(K_\cdot)).$$

这些同调群与谱序列函子地倚赖于 $K_\cdot$，分别称为对 F 的超同调函子 (hyperhomology functors) 与对 F 的谱超同调函子 (spectral hyperhomology functors) 在下列的重要情况中，即当 F 可与归纳极限相交换，当范畴 A 中的对象有投射分解，其长 $\leqslant n$，或当只在具有正次数的复形范畴上考虑时，超同调函子 $L_\cdot F$ 是复形范畴上的同调函子．

超上同调函子 (hypercohomology functors) 的定义是对偶的．

参考文献

[1] Cartan，H and Eilenberg，S，Homological algebra，Princeton Univ Press，1956

[2] Grothendieck，A，Sur quelques points d algèbre homologique，*Tohoku Math J*，**9** (1957)，119 − 221

В И Данилов 撰 周伯埙 译

超平面 [hyperplane，гиперплоскость]，域 K 上的向量空间 X 中的

具有一维商空间 X/M 的一个向量子空间 M(在平移之下)的象，即形如 x_0+M 的集合，这里 $x_0\in X$ 是某一个向量．如果 $x_0=0$，有时就称这个超平面为齐次的 子集 $\pi\subset X$ 是一个超平面，当且仅当

$$\pi=\{x\ \ f(x)=\alpha\},\qquad(*)$$

$\alpha\in K$, $f\in X^*$ 是一个非零线性泛函 这里 f 和 α 除开一个共同的因子 $\beta\neq0$ 外，是由 M 确定的

在拓扑向量空间里，任意一个超平面或者是闭的，或者是到处稠密的，作为由公式 (*) 所定义的 π 是闭的充分必要条件为泛函 f 是连续的．

М И Войцеховский 撰 郝钠新 译

超松弛法 [hyperrelaxation method，сверхрелаксации метод]，逐次超松弛法 (successive overrelaxation method)

解代数方程组的一种方法 (见**松弛法** (relaxation method))

【补注】“超松弛法”一词很少使用． 张鸿林 译

超空间 [hyperspace，гиперпространство]，拓扑空间 X 上的

X 的某个子集族 $\mathfrak{M}$ 配备了某个拓扑后构成的空间．$\mathfrak{M}$ 通常是集环，但这并不事先假定．

例．$\mathscr{P}(X)$ 是空间 X 的所有子集构成的超空间，其拓扑基由形如 $\{M.\ F\subset M\subset G\}$ 的集合组成，其中 F 是 X 中的闭集，G 是 X 中的开集，而 $F\subset G$

最经常碰到的超空间是 2^X，由拓扑空间 X 的所有闭子集组成，2^X 上**指数拓扑** (exponential topology) 的子基由形如 $\{F\ \ F\subset G\}$ 及 $\{F.\ F\cap H\neq\phi\}$ 的集合组成，其中 G 和 H 是 X 中的开集，而 F 遍历 2^X 下列超空间上的拓扑同样定义 空间 X 的所有紧子集组成的集合 $\mathfrak{S}(X)$，空间 X 的所有有限子集组成的集合 $\mathrm{Exp}_\omega(X)$，连续统 X(连通紧统)的所有子连续统组成的空间 $K(X)$ 等等．这些空间可以视为配备指数拓扑的超空间 2^X 的子空间．若 X 是**一致空间** (uniform space)，则集合 2^X 有自然的一致结构，这样得到的一致空间记为 $H(X)$ 若 X 是紧空间，则 2^X, $\mathfrak{S}(X)$，以及 $H(X)$ 这些超空间全都同胚，并且是紧空间．若 X 是紧可度量化空间，则 2^X 亦然．若 X 是连续统，则 2^X 及 $K(X)$ 亦然．

参考文献

[1] Kuratowski，K，Topology，2，Acad Press，1968

[2] Michael，E，Topologies on spaces of subsets，*Trans Amer Math Soc*，**71** (1951)，152 − 182

[3] Пономарев，В И，《Матем сб》，**48 (90)** (1959)，2，191 − 212

Б А Ефимов 撰

【补注】 指数拓扑通称 Vietoris 拓扑 (Vietoris topology)，以纪念 L Vietoris 于 1922 年引进这一拓扑 ([A1]) 可是，这个拓扑在 O Frink ([A2]) 以及 E Michael ([2]) 重新发现之前的 20 年间对拓扑学没有什么影响．如果 X 是紧度量空间，则 2^X 上的 Vietoris 拓扑可以由 **Hausdorff 度量** (Hausdorff metric) 产生．超空间理论的一般讨论见 [A3] 和 [A4]

在 $\mathrm{Exp}_\omega(X)$ 上，经常考虑由族 $\{[F,\ O]\ \ F\in\mathrm{Exp}_\omega(X)$，$O$ 是开集$\}$生成的拓扑，其中，$[F,\ O]=\{G\ \ F\subseteq G\subseteq O\}$ 这样的拓扑空间 $\mathrm{Exp}_\omega(X)$ 称为 X 的 Pixley-Roy 超空间 (Pixley-Roy hyperspace)，经常用来构造反例，见 [A5]

参考文献

[A1] Vietoris，L，Bereiche zweiter Ordnung，*Monatsh Math Physik*，**32** (1922)，258 − 280

[A2] Frink，O，Topology in lattices，*Trans Amer Math Soc*，**51** (1942)，569 − 582

[A3] Nadler, S B, Hyperspaces of sets, M Dekker, 1978

[A4] McAllister, B L, Hyperspaces and multifunctions, the first half century, *Nieuw Arch Wisk* (3), **26** (1978), 309 - 329

[A5] Douwen, E K van, The Pixley-Roy topology on spaces of subsets, in G M Reed (ed) Set-Theoretic Topology, Acad Press, 1977, 111 - 134

胡师度、白苏华 译

超曲面 [hypersurface，гиперповерхность]

1)三维空间中通常曲面概念在 n 维空间情形的推广．超曲面的维数比其环绕空间的维数小 1

2)如果 f $M \to N$ 是两个微分流形 M, N 间的一个浸入，且 $\dim N - \dim M = 1$，则 $f(M)$ 是 N 中的超曲面 这里 f 是一个可微映射，它在任何点 $x \in M$ 处的微分是从 M 在 x 处的切空间 M_x 到 N 在 $f(x)$ 处的切空间 $N_{f(x)}$ 中的单射．

В Т Базылев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Spivak, M, Differential geometry, 1-5, Publish or Perish, 1975

3)代数超曲面 (algebraic hypersurface) 是局部地由一个方程所定义的代数簇的子簇．域 k 上仿射空间 A_k^n 内的代数超曲面由一个方程

$$f(x_1, \quad, x_n) = 0$$

所整体地定义 射影空间 P^n 中的代数超曲面 W 由一个关于 $n+1$ 变量的齐次型 F 给出的方程

$$F(x_0, \quad, x_n) = 0$$

所定义．型 F 的次数 m 称为这个超曲面的次数 (degree) 或阶 (order)．概形 V 的闭子概形 W 称为它的一个超曲面，如果其相应的理想层 $I_W \subset \mathcal{O}_V$ 是主理想层 对于连通非奇异代数簇，这一条件表示 W 在 V 中的余维数为 1 对 P_k^n 中任一 m 次非奇异代数超曲面 W(常记为 W_n^m)下列结论成立

a)典范类 K_W 等于 $(m-n-1)$ H_W，这里 H_W 是 W 的超平面截口类，

b)当 $i \neq 0$, $n-1$ 时，上同调群 $H^i(W, \mathcal{O}_W) = 0$; 而 $\dim_k H^{n-1}(W, \mathcal{O}_W) = (m-1) \quad (m-n)/n!$,

c)当 $n \geq 3$ 时，基本群 (代数的或拓扑的，当 $k=\mathbf{C}$ 时) $\pi_1(W) = 0$,

d)当 $n \geq 4$ 时，Picard 群 $\mathrm{Pic}(W) \simeq \mathbf{Z}$，且由超平面截口类生成．

И В Долгачев 撰

【补注】 光滑复射影超曲面的上同调环完全可由其环绕射影空间上的有理微分形式来表示 ([A1])．已经证明了在大多数情形下，这些超曲面的**周期映射** (period mapping) 的次数为 1 ([A2])

参考文献

[A1] Carlson, J, Griffiths, P, Infinitesimal variations of Hodge structure and the global Torelli problem, in A Beauville (ed) Algebraic Geometry, Angers 1979, Sijthoff & Noordhoff, 1980, 51-76

[A2] Donagi, R, Generic Torelli for projective hypersurfaces, *Compos Math*, **50** (1983), 325-353

[A3] Hartshorne, R, Algebraic geometry, Springer, 1977

4)复 Euclid 空间 $\mathbf{C}^n$ 中的集合 S 称为一个解析超曲面 (analytic hypersurface)，如果它在每一点 $\zeta \in S$ 的某个邻域中，由一个关于参数 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)(\varepsilon > 0)$ 为连续的函数 $f_\zeta(z,t)$ 的方程 $f_\zeta(z,t) = 0$ 所定义，这里对于每个取定的 t, f 在 ζ 的一个与 t 无关的邻域 U_ζ 中关于 z 全纯，且对于所有的 $(z,t) \in U_\zeta \times (-\varepsilon, \varepsilon)$，有 $\sum |\partial f / \partial z_j| \neq 0$，换言之，解析超曲面是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个集合，局部地看它是一个连续单参数复余维数 1 的复解析曲面簇的并集 例如 如果函数 f 在 $\mathbf{C}^n$ 中的区域 D 内全纯且 $\mathrm{grad} f \neq 0$，则 $|f| = 1$ 或 $\mathrm{Re} f = 0$ 等定义的集合都是解析超曲面

$\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{C}^n$ 中的一个二次可微超曲面 S 是一个解析超曲面，当且仅当它的 Levi 形式在 S 上恒为 0，或者当 S 是双边局部拟凸的

Е М Чирка 撰

【补注】 有时"解析超曲面"这词也用来表示与上述 3)类似的复余维数 1 的**解析集** (analytic set)，见 [A1] 4)中的解析超曲面也称为余维数 1 的解析簇的叶状结构 (foliation by analytic varieties)．上述与 $\mathbf{R}^{2n}$ 中二次可微超曲面 S 有关的结果可在 [A2] 中找到

参考文献

[A1] Grauert, H and Remmert, R, Theory of Stein spaces, Springer, 1977 (译自德文)

[A2] Vladimirov, V S, Methods of the theory of functions of several complex variables, M I T 1966 (译自俄文)

[A3] Kaup, L and Kaup, B, Holomorphic functions of several variables, de Gruyter, 1983 (译自德文)

刘先仿 译

内摆线 [hypocycloid，гипоциклоида]，亦称圆内旋轮线

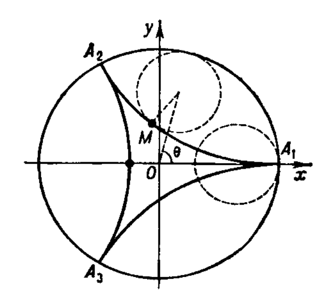
当一个圆沿另一个圆的内侧无滑动地滚转时动圆上的一点 M 所描绘的平面曲线．其参数方程是

$$x = (R-r)\cos\theta + r\cos\left[(R-r)\frac{\theta}{r}\right],$$

$$y = (R-r)\sin\theta - r\sin\left[(R-r)\frac{\theta}{r}\right],$$

其中 r 是动圆的半径，R 是定圆的半径，θ 是动圆中

心的径向量与 x 轴之间的夹角（假设内摆线通过点（0, R）） 根据模数（modulus）$m=R/r$ 的大小，得到不同形式的内摆线．如果 m 是整数，则内摆线由 m 个不相交的分支组成（图 a） 返回点 A_1, ·, A_m 具有坐



标 $\rho=R$, $\varphi=2k\pi/m$, $k=0, 1,\quad, m-1$ 如果 m 是无理数，则有无穷多个分支，点 M 不返回其初始位置，如果 m 是有理数，则内摆线是封闭代数曲线．由点 $\theta=0$ 算起的弧长是

$$l=\frac{8R(m-1)}{m^2}\sin^2\frac{\theta}{4}$$

曲率半径是

$$r_k=\frac{4R(m-1)}{m^2(m-2)}\sin\frac{\theta}{2}$$

如果点 M 不在动圆上，而在它的外部（或内部），则所得曲线称为长辐（短辐）内摆线（lengthened (shortened) hypocycloid），或长短辐内摆线（hypotrochoid）（见**次摆线**（trochoid）） 如果 $m=2$，则内摆线是一段直线，如果 $m=3$，则是一条**Steiner 曲线**（Steiner curve），如果 $m=4$，则是一条**星形线**（astroid） 内摆线属于所谓**旋轮类曲线**（cycloidal curve）．

参考文献

[1] Савелов, А А , Плоские кривые, М , 1960

Д Д Соколов 撰

【补注】 每一条由半径为 R 和 r 的圆生成的内摆线，也能由半径为 R 和 $R-r$ 的圆生成（[A2], [A3]） 内摆线，以及更一般地，次摆线，在平面动力学中起着重要作用．

参考文献

[A1] Berger, M , Geometry, 1, Springer, 1987（中译本 M 贝尔热，几何，第一卷，科学出版社，1987）

[A2] Fladt, K , Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven, Akad Verlagsgesellschaft, 1962

[A3] Muller, H R , Kinematik, de Gruyter, 1963

张鸿林 译

斜边 [hypotenuse , гипотенуза]

在直角三角形中直角所对的边

张鸿林 译

